

**4. Anwendung der Vektorrechnung
auf die geometrische Optik in bewegten Körpern;
von Philipp Frank.**

Vor einigen Jahren haben A. Sommerfeld und I. Runge¹⁾ eine Methode angegeben, durch die sich die Sätze der geometrischen Optik in sehr übersichtlicher und durchsichtiger Weise darstellen lassen. Ihre Methode beruht darauf, den Strahlengang durch ein Vektorfeld darzustellen. Sie ordnen nämlich jedem Punkte des durchstrahlten Raumes einen Einheitsvektor in der Richtung des Lichtstrahles zu. In der vorliegenden Mitteilung soll nun gezeigt werden, daß diese Methode auch auf den Strahlengang in *bewegten* Körpern ausgedehnt werden kann, ein Gebiet, das häufig in nicht sehr durchsichtiger Weise dargestellt wird. Wenn man aber das genannte Vektorfeld zugrunde legt, kann man den Einfluß der Bewegung der durchstrahlten Körper auf dieses Feld durch eine sehr einfache Vektorformel darstellen, die es z. B. ermöglicht, die Aussagen der Theorien von Fresnel und Stokes über die Optik bewegter Medien unmittelbar zu vergleichen. Wir beschränken uns dabei überall, wie es in der geometrischen Optik üblich ist, auf die Glieder erster Ordnung in dem Verhältnis der Körpergeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit.

§ 1. Über ein Maß für die Abweichung einer Kurve von der Bahn des Lichtes in ruhenden inhomogenen Körpern.

Ehe wir daran gehen, den Einfluß der Bewegung auf den bekannten Strahlengang in ruhenden Körpern zu untersuchen, wollen wir eine Größe einführen²⁾, die als Maß dafür dient,

1) A. Sommerfeld u. I. Runge, Ann. d. Phys. **35**, p. 277. 1911.

2) Diese Größe habe ich schon in meiner Arbeit „Zur Differentialgeometrie der Brachistochronen“ (Sitzungsber. d. Wiener Akad. Math.-nat. Kl. Abt. IIa. 1914) angewendet.

wie stark eine Kurve von der Bahn des Lichtstrahles im ruhenden Körper abweicht, so wie die gewöhnliche Krümmung einer Raumkurve die Abweichung von der geraden Linie, also der Bahn des Lichtes im homogenen ruhenden Körper, mißt. Wir gehen auch genau so wie bei der Einführung der gewöhnlichen Krümmung vor.

Wir bezeichnen mit v die Lichtgeschwindigkeit in irgendeinem Punkte des inhomogenen Körpers, mit c die im leeren Raume, dann ist der absolute Brechungsquotient n

$$(1) \quad n = \frac{c}{v}$$

eine gegebene Funktion des Ortes. Die Lichtstrahlen im ruhenden Körper sind ja bekanntlich die ∞^2 Extremalen des Integrals

$$(2) \quad \int \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int n ds,$$

wo ds das Bogenelement bedeutet. Wir denken uns eine beliebige Kurve C gegeben; der tangential gerichtete Einheitsvektor der Kurve sei \mathfrak{S} . Wenn die Kurve ein Lichtstrahl in dem angenommenen inhomogenen Körper wäre, müßte ihr tangentialer Einheitsvektor, den wir in diesem Falle \mathfrak{S}^* nennen wollen, der Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathfrak{S}^*}{v} \right) = \text{grad } \frac{1}{v}$$

genügen. Durch Gleichung (3) sind die drei Lagrangeschen Gleichungen, die zu (2) gehören, in eine Vektorgleichung zusammengefaßt. Dabei bedeutet die Differentiation nach s hier wie im folgenden eine Differentiation in der Richtung von \mathfrak{S}^* bzw. \mathfrak{S} .

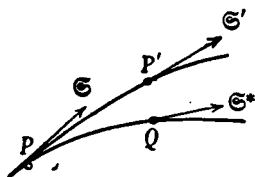


Fig. 1.

Wenn nun C eine beliebige Kurve ist, können wir ihre Abweichung von der Bahn des Lichtstrahles durch einen erweiterten Krümmungsbegriff darstellen, der analog dem der geodätischen Krümmung einer Kurve auf einer krummen Fläche gebildet ist.

Wir nehmen auf der Kurve C (Fig. 1) zwei Punkte, P und P' , an; den tangentialen Einheitsvektor in diesen Punkten nennen wir \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{S}' . Wir legen ferner durch P den Lichtstrahl, der dort die Kurve C berührt; auf

ihm sei ein Punkt Q aufgetragen, so daß die Bogenstücke PP' und PQ gleich lang sind, etwa

$$\widehat{PP'} = \widehat{PQ} = \Delta s,$$

ferner zeichnen wir uns in Q den tangentialen Einheitsvektor \mathfrak{E}^* des Lichtstrahles. Dann wollen wir unter der „relativen“¹⁾ Krümmung der Kurve C im Punkte P den folgenden Vektor \mathfrak{K} verstehen:

$$(4) \quad \mathfrak{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}^*}{\Delta s}.$$

Anstatt dessen kann man offenbar auch schreiben:

$$\mathfrak{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}) - (\mathfrak{E}^* - \mathfrak{E})}{\Delta s}.$$

Das ist offenbar in der Symbolik der Differentialrechnung

$$(5) \quad \mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{E}}{ds} - \frac{d\mathfrak{E}^*}{ds}.$$

Die beiden Ausdrücke rechts bedeuten bekanntlich die gewöhnlichen Krümmungen der Kurve C und des im Punkte P berührenden Lichtstrahles. Die relative Krümmung der Kurve C in einem Punkte ist also nichts anderes als ihre gewöhnliche Krümmung, vermindert um die des dort berührenden Lichtstrahles.

Nach Gl. (3) ist nun

$$\frac{d\mathfrak{E}^*}{ds} = v \operatorname{grad} \frac{1}{v} - v \left(\mathfrak{E}^* \operatorname{grad} \frac{1}{v} \right).$$

Wenn wir berücksichtigen, daß im Punkte P selbst $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}$ ist, erhalten wir

$$(6) \quad \mathfrak{K} = v \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathfrak{E}}{v} \right) - \operatorname{grad} \frac{1}{v} \right\}.$$

Es ist klar, daß, wenn \mathfrak{E} einen Lichtstrahl darstellt, $\mathfrak{K} = 0$ folgt, was mit Gl. (3) übereinstimmt. Man kann die Formel (6) auch in eine ganz ähnliche Form bringen, wie Sommerfeld und Runge sie für die gewöhnliche Krümmung angegeben

1) „Relativ“ bedeutet hier eine Beziehung auf eine vorgegebene Inhomogenität des Körpers, also eine bestimmte Bahn des Lichtes.

haben. Wir gehen dabei von der für zwei beliebige Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} geltenden Identität¹⁾ aus:

$$(7) \quad \text{grad}(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A} \nabla) \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{A} + [\mathfrak{A} \text{ rot } \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{A}].$$

Wir setzen darin

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{S}}{v}.$$

Dann wird daraus

$$(\mathfrak{S} \triangle) \frac{\mathfrak{S}}{v} + \left[\mathfrak{S} \text{ rot } \frac{\mathfrak{S}}{v} \right] = \frac{v}{2} \text{grad} \frac{1}{v^2}.$$

Da nun offenbar

$$(\mathfrak{S} \nabla) \frac{\mathfrak{S}}{v} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathfrak{S}}{v} \right)$$

folgt

$$(8) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathfrak{S}}{v} \right) - \text{grad} \frac{1}{v} = \left[\text{rot} \frac{\mathfrak{S}}{v}, \mathfrak{S} \right]$$

und

$$(9) \quad \mathfrak{K} = v \left[\text{rot} \frac{\mathfrak{S}}{v}, \mathfrak{S} \right].$$

Für konstantes v , also einen homogenen Körper, folgt die von Sommerfeld und Runge angegebene Formel für die gewöhnliche Krümmung

$$\mathfrak{K} = [\text{rot } \mathfrak{S}, \mathfrak{S}].$$

§ 2. Die durch den „Ätherwind“ hervorgerufene relative Krümmung der Lichtstrahlen.

Wir denken uns jetzt, daß der betrachtete inhomogene Körper sich geradlinig gleichförmig bewegt. Wir rechnen immer in einem Koordinatensystem, das mit dem Körper fest verbunden ist, so daß v bzw. n immer dieselbe Funktion der Koordinaten x, y, z bleibt. Dann entsteht relativ zum Körper ein Ätherwind, dessen Geschwindigkeit, die wir a

1) Vgl. z. B. Ignatowsky, Vektoranalysis, Gl. (68). R. Rothe, Jahresber. d. Deutschen Mathem. Ver. 1912, hat die Identität (7) schon zur Aufstellung der Sommerfeldschen Formel für die gewöhnliche Krümmung herangezogen.

nennen wollen, sich einfach zur Lichtgeschwindigkeit, wie sie im ruhenden Körper herrschen würde, vektoriell addiert. Über die Art, wie die Geschwindigkeit des Ätherwindes mit der Geschwindigkeit des Körpers zusammenhängt, wollen wir zunächst gar keine Voraussetzung machen, sondern nur ganz allgemein annehmen, daß α eine bekannte Funktion der Koordinaten x, y, z ist. Wir stellen dann die Frage: Welche relative Krümmung erzeugt ein vorgegebener Ätherwind an den Lichtstrahlen?

Der absolute Betrag der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Körper an einem Punkte x, y, z war v , der tangentielle Einheitsvektor \mathfrak{S}^* ; diese Größen mögen durch die Wirkung des Ätherwindes in w bzw. \mathfrak{S} übergehen; dann ist

$$(10) \quad w \mathfrak{S} = v \mathfrak{S}^* + \alpha.$$

Die Lichtstrahlen sind jetzt nicht mehr die Extremalen des Integrals (2), sondern die von

$$(11) \quad J = \int \frac{ds}{w}.$$

Durch Quadrieren von (10) erhalten wir:

$$w^2 = v^2 + 2v(\alpha \mathfrak{S}^*) + (\alpha \alpha).$$

Daraus folgt, wenn wir nur die ersten Potenzen von α/v bzw. α/w beibehalten:

$$(12) \quad w = v + (\alpha \mathfrak{S}^*)$$

und mit derselben Genauigkeit

$$(13) \quad J = \frac{ds}{v} \left(1 - \frac{1}{v} (\alpha \mathfrak{S}^*) \right).$$

Wenn wir J in der Parameterform haben

$$J = \int F(x, y, z, x', y', z') d\tau,$$

wo

$$(14) \quad ds = d\tau \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

so ist

$$(15) \quad F = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{v} - \frac{x' \alpha_x + y' \alpha_y + z' \alpha_z}{v^2},$$

wo v und a_x, a_y, a_z gegebene Funktionen der Koordinaten sind. Bilden wir dann die erste Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x},$$

so lautet sie hier:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x'}{v \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \frac{a_x}{v^2} \right) &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{v} \\ &\quad - x' \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_x}{v^2} - y' \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_y}{v^2} - z' \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_z}{v^2}. \end{aligned}$$

Bilden wir die entsprechenden Gleichungen für die y - und z -Richtung und benutzen wir Gl. (14), so können wir die Lagrangeschen Gleichungen wieder in eine Vektorgleichung zur Bestimmung von \mathfrak{S} zusammenfassen:

$$(16) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathfrak{S}}{v} - \frac{\mathfrak{a}}{v^2} \right) = \text{grad} \frac{1}{v} - \text{grad} \frac{(\mathfrak{a} \mathfrak{S})}{v^2}.$$

Dabei ist für die Bildung des letzten Gliedes rechts zu beachten, daß \mathfrak{S} gegenüber der Operation gerade eine Konstante ist. Aus Gl. (16) folgt wegen Gl. (6) für die gesuchte relative Krümmung:

$$(17) \quad \mathfrak{K} = v \left(\frac{d}{ds} \frac{\mathfrak{a}}{v^2} - \text{grad} \frac{(\mathfrak{a} \mathfrak{S})}{v^2} \right).$$

Dabei kann rechts anstatt \mathfrak{S} mit der beabsichtigten Genauigkeit auch der Einheitsvektor des Strahles im ruhenden Körper \mathfrak{S}^* gesetzt werden. Setzen wir in Gl. (7)

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{a}}{v^2}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{S}$$

und bedenken, daß \mathfrak{S} nicht Funktion der Koordinaten ist, so erhalten wir

$$(18) \quad \text{grad} \frac{(\mathfrak{a} \mathfrak{S})}{v^2} = \frac{d}{ds} \frac{\mathfrak{a}}{v^2} + \left[\mathfrak{S} \text{rot} \frac{\mathfrak{a}}{v^2} \right].$$

Dann wird aus Gl. (17)

$$(19) \quad \mathfrak{K} = v \left[\text{rot} \frac{\mathfrak{a}}{v^2}, \mathfrak{S}^* \right].$$

Das ist die Endformel, die es gestattet, an jeder Stelle des Raumes aus dem Strahle im ruhenden Körper \mathfrak{S}^* und dem Ätherwind \mathfrak{a} die relative Krümmung zu berechnen, die durch

diesen Ätherwind erzeugt wird. Wenn wir Gl. (1) anwenden, wird daraus

$$(20) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{n^2 c} [\text{rot } n^2 \mathfrak{a}, \mathfrak{S}^*].$$

Im leeren Raume ($n = 1$) geht die Formel in

$$(21) \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{c} [\text{rot } \mathfrak{a}, \mathfrak{S}^*]$$

über¹⁾, wo \mathfrak{K} natürlich die gewöhnliche Krümmung bedeutet.

§ 3. Der Einfluß der Erdbewegung auf den Strahlengang.

Wir nehmen nun an, unser System, das sich geradlinig gleichförmig bewegt, sei die Erde in ihrer Bewegung durch den Weltenraum. Die Geschwindigkeit sei g . Jede Theorie, die von den optischen Erscheinungen auf der bewegten Erde Rechenschaft geben will, muß, wenn sie auf der üblichen Wellentheorie des Lichtes fußt, von Gl. (20) ausgehen. Die verschiedenen Theorien unterscheiden sich nur dadurch, daß sie den Zusammenhang zwischen der Erdgeschwindigkeit g und der Geschwindigkeit des Ätherwindes \mathfrak{a} in verschiedener Weise annehmen. Jedenfalls wird in sehr großer Entfernung von der Erde (etwa in der Gegend der Fixsterne) kein Einfluß der Erdbewegung auf den Äther mehr vorhanden sein, also

$$(22) \quad \mathfrak{a} = -g$$

zu setzen sein. Jede Theorie muß von den folgenden zwei Erfahrungstatsachen über den Strahlengang auf der bewegten Erde Rechenschaft geben:

- I. der Aberration des Fixsternlichtes;
- II. der Unabhängigkeit aller Versuche über Reflexion und Brechung von dem Winkel, den die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes mit der Richtung der Erdbewegung einschließt.

Die Tatsache (I) erfordert, daß im leeren Raum zwischen Fixstern und Erde die Lichtstrahlen durch die Erdbewegung keine Krümmung erleiden, also die relative Krümmung verschwindet. Die Tatsache (II) erfordert, daß in der Nähe der Erdoberfläche in jedem, auch inhomogenen, Medium durch

1) Die Formel (21) findet sich schon bei H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik, Bd. I, p. 401.

die Erdbewegung keine relative Krümmung erzeugt wird. Die beiden klassischen Theorien über den Strahlengang in bewegten Körpern geben nun von diesen beiden Tatsachen in ganz verschiedener Weise Rechenschaft.

Fresnel erklärt die Aberration in der denkbar einfachsten Weise, indem er annimmt, daß Gl. (22) überall im leeren Raume ($n = 1$) gilt, woraus wegen der Konstanz von g natürlich aus Gl. (21) sich $\mathfrak{K} = 0$ ergibt. Um das Verschwinden der relativen Krümmung auch in beliebigen inhomogenen Medien (also Tatsache II) zu erklären, muß er die Annahme machen, daß der Ätherwind von Brechungsquotienten abhängt, und zwar ergibt sich offenbar aus der Voraussetzung

$$(23) \quad \alpha = -\frac{1}{n^2} g$$

in Gl. (20) eingesetzt das Verschwinden von \mathfrak{K} .

Stokes erklärt umgekehrt die Tatsache II in der denkbar einfachsten Weise, indem er in unmittelbarer Umgebung der Erdoberfläche

$$\alpha = 0$$

setzt. Da aber aus Stetigkeitsgründen im Weltenraume nicht überall $\alpha = -g$ sein kann, muß der Ätherwind stetig von Null bis zu diesem Werte ansteigen, wodurch sich aber dann keine Krümmung ergibt (vgl. Gl. [21]), wenn überall im leeren Raume

$$\text{rot } \alpha = 0$$

ist; und diese Annahme macht Stokes tatsächlich über den Ätherwind, der durch die Erdbewegung erzeugt wird. Es ist wohl überflüssig, zu bemerken, daß diese Annahme heute wohl nur noch historisches Interesse besitzt; es kam mir nur darauf an, zu zeigen, wie an der Hand der Formel (20) sich die verschiedenen Theorien in übersichtlicher Weise darstellen lassen.

Wien, 5. April 1917.

(Eingegangen 14. April 1917.)
