

$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen.

Von

LUDWIG BIEBERBACH in Frankfurt am Main.

Die Arbeit, die ich hier der Öffentlichkeit übergebe, habe ich gegen Mitte des Jahres 1912 abgefaßt. Bis auf kleine stilistische Änderungen hat sie ihre damalige Gestalt behalten. Ich habe lange geschwankt, sie überhaupt der Öffentlichkeit zu übergeben. Denn wenn sie den Zweck hat, den Beweis der Uniformisierungstheoreme auf dem zuerst durch Schwarz in einer Göttinger Preisaufgabe*) bezeichneten Wege durch Integration der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ zu erbringen, so ist ihr Wert heutigen Tages zum mindesten fraglich. Seit den berühmten Arbeiten Koebes besitzt man für diese Sätze viel weitertragende Beweise, als sie auf diesem Wege erbracht werden können. Ganz abgesehen davon, daß der hier eingeschlagene Weg auf algebraische Riemannsche Flächen beschränkt bleibt, waren die Koebeschen Methoden bei noch viel allgemeineren Uniformisierungsproblemen zugkräftig als nur den hier behandelten. Trotzdem dürfte es auch heute noch ein etwas mehr als bloß historisches Interesse bieten, den Weg zu Ende zu gehen, den auf die oben erwähnte Anregung hin Picard**) und Poincaré***) nacheinander einschlugen. Denn einmal konnten diese Forscher nur in gewissen Fällen den verlangten Nachweis erbringen, nämlich in den Grenzkreisfällen, während der Hauptkreisfall beiden unangreifbar schien. Denn während es sich in den ersteren Fällen darum handelte, Lösungen der Differentialgleichung mit gegebenen punktwisen Unstetigkeiten zu finden, handelt es sich in dem zweiten noch unerledigten Falle darum, Lösungen zu finden, die längs ganzen Kurven in gegebener Weise unendlich werden. Aber auch dieser Fall läßt sich ebenso leicht wie die übrigen erledigen. Meine vorläufigen Angaben hierfür†) will ich jetzt

*) Gött. Nachr. 1889.

**) Journal de Liouville 1890, 1893, 1898. Crelles Journal 1905.

***) Journal de Liouville 1898.

†) Göttinger Nachr. 1912, S. 599.

ausführlicher darstellen. Da sich mir gleichzeitig eine Vereinfachung in den Fällen von Picard und Poincaré ergab, ziehe ich auch diese Fälle in meine Darstellung mit ein. Zunächst stelle ich die gesuchte Lösung dar als Summe zweier Funktionen, von denen die erste bekannt ist und die gegebenen Singularitäten besitzt, die zweite dagegen regulär ist und als Lösung einer Differentialgleichung gesucht ist: $\Delta u = \alpha e^u - \beta$, deren Koeffizienten an gegebenen Stellen in gegebener Weise unendlich werden, doch so, daß α, β positiv sind und daß der Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ zwischen zwei festen von Null und unendlich verschiedenen positiven Grenzen liegt, die von der betrachteten Stelle der Riemannschen Fläche unabhängig sind.*) Dieser Ansatz ist dem von Poincaré ähnlich, geht aber in sehr zugkräftiger Weise über denselben hinaus. Alsdann gebe ich eine Lösung der ersten Randwertaufgabe unserer Differentialgleichung für beliebige Bereiche, in welchen die Koeffizienten endlich sind, durch Verwendung einer Methode der sukzessiven Approximationen. Sie unterscheidet sich von der von Picard 1890 verwendeten dadurch, daß ihre Verwendung nicht durch die Kleinheit des Integrationsbereiches bedingt ist, sondern allgemein gilt, für beliebige Bereiche und beliebige Differentialgleichungen der folgenden Art:

$$\Delta u = F(u, x, y), \quad F(u, x, y) > 0, \quad F(u_1) > F(u_2), \quad \text{wenn } u_1 > u_2.$$

Alsdann gehe ich zu einem Bereiche über, der die gegebenen Singularitäten enthält, und zeige, daß es nur eine Lösung der Gleichung gibt, die in diesem Bereiche überall frei ist von Singularitäten. Es hängt dies alles eng mit einem analogen Ergebnis bei der linearen Differentialgleichung $\Delta u = pu$ zusammen; wenn hier der Integrationsbereich geschlossen ist, oder aber p an seinem Rande stark genug unendlich wird, dann ist $u = 0$ die einzige im Innern und am Rande endliche Lösung dieser Gleichung.

§ 1.

Aufstellung der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$.

Wir bezeichnen mit $z = x + iy$ die laufende Variable einer algebraischen Riemannschen Fläche $f(z, z') = 0$ und es sei $\zeta(z) = \xi + i\eta$ eine uniformisierende Variable der Fläche vom Grenzkreis- oder Hauptkreistypus. Es möge also die Funktion $\zeta(z)$ eine einunendlichdeutige konforme Abbildung der Riemannschen Fläche vermitteln, im Grenzkreisfalle auf das einfach bedeckte Innere des Einheitskreises, im Hauptkreisfalle auf die einfach bedeckte Vollebene mit Ausschluß unendlich vieler Punkte, die

*) Von diesem Ansatz macht neuerdings auch Herr Lichtenstein Gebrauch. C. R. 1913 (Dezember).

alle auf dem Einheitskreise liegen. Den übrigen Punkten des Einheitskreises entsprechen bei dieser Abbildung gewisse Linienstücke der Riemannschen Fläche, und es ist bekannt, daß dieselbe zu diesen symmetrisch ist. Wir nehmen die Fläche orthosymmetrisch an, d. h. sie möge durch diese Symmetrielinien in zwei symmetrische Hälften zerlegt werden, so daß es sich also im Hauptkreisfalle um die konforme Abbildung eines berandeten Flächenstückes — der einen Flächenhälfte — auf das Innere des Einheitskreises handelt.

Die Abbildungsfunktion muß nicht notwendig die schlichte Umgebung eines Flächenpunktes auf die schlichte Umgebung eines entsprechenden Punktes im Einheitskreis abbilden. Man kann vielmehr bekanntlich noch an beliebig vielen Punkten der Abbildungsfunktion vorschreiben, daß sie daselbst eine Verzweigung einer gegebenen endlichen oder unendlichen Ordnung hat. Bei Verzweigung endlicher (m^{ter}) Ordnung wird dann eine m -blättrige Umgebung des betreffenden Punktes der Riemannschen Fläche auf die schlichte Umgebung eines Punktes im Innern des Einheitskreises abgebildet, bei Verzweigungen unendlicher Ordnung dagegen entsprechen dem Verzweigungspunkte Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises.

Um nun auf $\Delta u = e^u$ zu kommen, denken wir uns im Einheitskreis eine hyperbolische Maßbestimmung eingeführt, d. h. wir nennen Linienelement $d\sigma$ den Differentialausdruck: $\frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{1 - \xi^2 - \eta^2}$; unter der Länge einer Kurve verstehen wir somit den Wert des Integrales $\int d\sigma = \int \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{(1 - \xi^2 - \eta^2)}$ erstreckt längs dieser Kurve. Jede Kurve also, die von einem inneren Punkte des Einheitskreises bis zu einem Punkte seiner Peripherie verläuft, hat eine unendliche Länge. Auf der Riemannschen Fläche dagegen betrachten wir das gewöhnliche Linienelement $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Alsdann richten wir unser Augenmerk auf den hyperbolischen *Abbildungsmodul*

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2 + dy^2} \cdot \frac{1}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2}.$$

Dies ist also weiter nichts als der gewöhnliche Abbildungsmodul noch multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2}$, der vorhin schon einmal auftrat. Wir setzen nun $e^u = \frac{d\sigma^2}{ds^2}$. Wenn ξ als Funktion von z bekannt ist, ist dies also eine bekannte reelle positive Funktion von x, y . Wir finden

$$u = \log \left(\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2 + dy^2} \right) - 2 \log (1 - \xi^2 - \eta^2).$$

Nun bilden wir Δu . Das geht am bequemsten, wenn wir neben ξ noch

die konjugiert imaginäre Größe $\bar{\xi}$, neben z noch \bar{z} betrachten, und beachten, daß

$$\frac{ds^2}{ds^2} = \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \cdot \frac{1}{(1 - \xi\bar{\xi})^2}.$$

Und für $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ kann man schreiben $4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$. Da nun aber ξ nur von z und $\bar{\xi}$ nur von \bar{z} abhängt, so wird für

$$u = \log \left(\frac{d\xi}{dz} \right) + \log \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \right) - 2 \log (1 - \xi\bar{\xi});$$

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 8 \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \cdot \frac{1}{(1 - \xi\bar{\xi})^2} \quad \text{oder} \quad \Delta u = 8e^u,$$

d. h. der Logarithmus des achtfachen hyperbolischen Abbildungsmoduls genügt der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$.

Unsere weitere Aufgabe wird es nun sein, dies u und damit den hyperbolischen Abbildungsmodul durch Integration dieser Differentialgleichung zu finden. Dazu werden wir uns zunächst nach Eigenschaften dieser Funktion u umsehen müssen, durch die wir sie als Integral der Differentialgleichung festlegen können. Weiter müssen wir uns fragen, ob wir aus diesem u dann $\xi(z)$ gewinnen können, und ob dieses dann auch die gewünschten Abbildungseigenschaften hat.

Wenn wir diese beiden letzten Punkte in befriedigender Weise erledigen können, so ist dann also das Problem der Uniformisierung zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz eines Integrales der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ mit bestimmten, gleich näher zu bezeichnenden Eigenschaften.

Nun müssen wir noch ein Wort darüber sagen, warum wir das Problem gerade in dieser Form formuliert haben, warum wir gerade auf die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ gekommen sind. Wenn wir schon einmal mit Abbildungsmoduln operieren wollten, so hätte es doch viel näher gelegen, den gewöhnlichen zu verwenden, wozu erst den hyperbolischen einführen? Dann hätte sein Logarithmus der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt und wir hätten mit Leichtigkeit von da zur Abbildungsfunktion gelangen können. Aber da kommt nun die Schwierigkeit. Wie hätten wir dieses u als Integral von $\Delta u = 0$ festlegen wollen? Es wäre doch jetzt $u = \log \left| \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \right|$; bei geschlossenen Wegen auf der Riemannschen Fläche erfährt $\xi(z)$ gewisse lineare Substitutionen, die den Einheitskreis festlassen: $\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$. So erfährt also u den Zuwachs: $\log \frac{1}{(\gamma\xi + \delta)^2} + \log \frac{1}{(\gamma\bar{\xi} + \bar{\delta})^2}$; u ist also ebensowenig wie ξ eine eindeutige Funktion; es erfährt Zuwächse, die — und damit wird der Ansatz aussichtslos — wir ihrem

Wert nach gar nicht kennen. Denn die linearen Substitutionen, von denen die Rede war, kennen wir eben — im allgemeinen — erst, wenn wir ξ bereits bestimmt haben. Darum kam Schwarz auf die Idee, den hyperbolischen Abbildungsmodul zu verwenden. Denn der ist eine eindeutige Funktion auf der Fläche. Nun ist ja $e^u = \frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \cdot \frac{1}{(1-\xi\bar{\xi})^2}$ und wenn ξ die Substitutionen $\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$ erfährt, dann erhält $\frac{d\xi}{dz}$ den Faktor $\frac{1}{(\gamma\xi + \delta)^2}$, $\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}}$ den Faktor $\frac{1}{(\bar{\gamma}\bar{\xi} + \bar{\delta})^2}$, endlich $(1-\xi\bar{\xi})^2$ den Faktor $\frac{1}{(\gamma\xi + \delta)^2(\bar{\gamma}\bar{\xi} + \bar{\delta})^2}$ und e^u bleibt somit ungeändert. Wir haben also ein *eindeutiges* Integral unserer Differentialgleichung zu suchen, und wollen nun zunächst die charakteristischen Eigenschaften angeben, durch die es als solches bestimmt ist.

§ 2.

Die charakteristischen Eigenschaften der Funktion u .

Wie bei $\Delta u = 0$ und nach dem ganzen Charakter unseres Problems als Abbildungsaufgabe werden wir erwarten dürfen, daß unser u durch seine Grenz- und Unstetigkeitseigenschaften festgelegt sein wird. Bereichsgrenzen treten überhaupt nur beim Hauptkreisproblem auf. Überall da, wo bei der Abbildung die schlichte endliche Umgebung eines Punktes der Riemannschen Fläche in die schlichte Umgebung eines Punktes im Innern des Einheitskreises übergeht, ist $\xi(z)$ samt seinen Ableitungen eine regulär analytische Funktion von einem absoluten Betrag kleiner als 1 und einer nicht verschwindenden Ableitung. Man übersieht sofort, daß an allen diesen Stellen $u = \log \frac{d\xi}{dz} + \log \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} - 2 \log(1-\xi\bar{\xi})$ eine samt seinen sämtlichen Ableitungen stetige Funktion ist. Solcher Art sind aber alle Stellen der Riemannschen Fläche mit Ausnahme der folgenden vier Sorten: 1. Verzweigungspunkte der Fläche und Verzweigungspunkte von ξ relativ zur Fläche von endlicher Ordnung, 2. Verzweigungspunkte von ξ relativ zur Fläche von unendlicher Ordnung, 3. die unendlich fernen Punkte der Fläche, 4. die Symmetrielinien, die in die Peripherie des Einheitskreises übergehen.

Wir müssen nun zunächst das Verhalten von u an diesen Stellen untersuchen. Um uns dabei keine unnötigen Erschwerungen aufzuerlegen, wollen wir ein paar vereinfachende Annahmen einführen, die aber, wie man gleich sehen wird, keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten. Wir können sie alle dahin zusammenfassen, daß kein Punkt der Riemannschen Fläche unter zwei der vier Nummern zugleich fallen soll. Das be-

deutet also insbesondere, daß kein Verzweigungspunkt von ξ mit einem Verzweigungspunkt der Fläche zusammenfallen soll, daß kein solcher Verzweigungspunkt ins Unendliche fallen soll und daß unsere Symmetrielinien ganz im Endlichen verlaufen und durch keinen Verzweigungspunkt hindurchgehen. Durch birationale Transformationen der Riemannschen Fläche kann man es immer so einrichten, daß alle diese Bedingungen erfüllt sind. (Verzweigungspunkte von ξ relativ zur Fläche können überhaupt nicht auf den Symmetrielinien liegen, da bei der Abbildung durch ξ die Symmetrielinien in die Peripherie des Einheitskreises übergehen, die Abbildung also längs den Symmetrielinien eigentlich konform ist.)

Nach diesen Bemerkungen gehen wir dazu über, die Eigenschaften von u an den aufgezählten vier Punktarten der Riemannschen Fläche festzustellen.*)

1. *Verzweigungspunkte m^{ter} Ordnung von ξ oder der Fläche.* Wenn einer solchen (im Endlichen gelegenen) Stelle ein $z = a$ entspricht, so läßt sich ξ daselbst in eine nach ganzen positiven Potenzen von $\sqrt[m]{z-a}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Es ist also

$$\xi = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[m]{z-a} + \alpha_2 (\sqrt[m]{z-a})^2 + \dots,$$

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{m} \alpha_0 (z-a)^{\frac{1}{m}-1} + \frac{\alpha_2}{m} (z-a)^{\frac{2}{m}-1} + \dots,$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} = \frac{\bar{\alpha}_0}{m} (\bar{z}-\bar{a})^{\frac{1}{m}-1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{m} (\bar{z}-\bar{a})^{\frac{2}{m}-1} + \dots,$$

$$\log \frac{d\xi}{dz} = \left(\frac{1}{m} - 1\right) \log(z-a) + \text{endliche Funktion},$$

$$\log \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} = \left(\frac{1}{m} - 1\right) \log(\bar{z}-\bar{a}) + \text{endliche Funktion}.$$

Dabei bedeutet der Zusatz + endliche Funktion eine an der Stelle $z = a$ endliche Funktion (deren Ableitungen aber daselbst sehr wohl selbst noch unendlich werden können), $1 - \xi \bar{\xi}$ bleibt endlich, da solche Verzweigungsstellen endlicher Ordnung auf Punkte im Innern des Einheitskreises abgebildet werden. Wir finden daher

$$u = 2 \frac{1-m}{m} \log |z-a| + \text{endliche Funktion}.$$

2. *Verzweigungspunkte der Funktion $\xi(z)$ von unendlicher Ordnung.* Wir bezeichnen mit $\alpha(\alpha\bar{\alpha} = 1)$ einen Bildpunkt dieser Verzweigungsstelle $z = a$ und mit $\mathfrak{B}(z-a)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$

*) Zu den drei ersten vgl. Poincaré, Journal de Liouville 1898.

fortschreitende Reihe. Dann gilt für $\xi(z)$ eine Entwicklung der folgenden Gestalt:

$$\frac{1}{\xi - \alpha} = b \log(z - a) + \mathfrak{P}(z - a).$$

Also wird:

$$\frac{d\xi}{dz} = -(\xi - \alpha)^2 \left\{ \frac{b}{z - a} + \mathfrak{P}'(z - a) \right\},$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} = -(\bar{\xi} - \bar{\alpha})^2 \left\{ \frac{\bar{b}}{\bar{z} - \bar{a}} + \bar{\mathfrak{P}}'(\bar{z} - \bar{a}) \right\},$$

$$\log \left(\frac{d\xi}{dz} \right) = -\log(z - a) + 2 \log(\xi - \alpha) + \text{endliche Funktion},$$

$$\log \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \right) = -\log(\bar{z} - \bar{a}) + 2 \log(\bar{\xi} - \bar{\alpha}) + \text{endliche Funktion},$$

$$u = -2 \log|z - a| + 2 \log \frac{(\xi - \alpha)(\bar{\xi} - \bar{\alpha})}{1 - \xi \bar{\xi}} + \text{endliche Funktion}.$$

Für $1 - \xi \bar{\xi}$ können wir schreiben (cf. Poincaré a. a. O. S. 146) $\alpha \bar{\alpha} - \xi \bar{\xi}$. Dann wird

$$\frac{\alpha \bar{\alpha} - \xi \bar{\xi}}{(\xi - \alpha)(\bar{\xi} - \bar{\alpha})} = \frac{\alpha}{\xi - \alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\xi} - \bar{\alpha}} + 1.$$

Und hierfür finden wir wegen der obigen Entwicklung für $\frac{1}{\xi - \alpha}$:

$$\alpha b \log(z - a) + \bar{\alpha} \bar{b} \log(\bar{z} - \bar{a}) + \text{endliche Funktion}.$$

Nun ist aber das Produkt αb reell. Denn wenn z einen Umlauf um a macht, erfährt ξ die Substitution $\frac{1}{\xi - \alpha} = 2b\pi i + \frac{1}{\xi - \alpha}$ und diese muß den Einheitskreis festlassen. Führt man $\frac{1}{\xi - \alpha} = \vartheta$ als neue Variable ein, so wird aus dem Einheitskreis eine Gerade, die den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\log \alpha}{i}$ mit der reellen Achse bildet und diese muß die Substitution $\vartheta' = 2b\pi i + \vartheta$ in sich überführen. Also muß das Argument der komplexen Zahl $b i$ gleich diesem Winkel sein. Also ist das Argument von $\alpha b i$ gerade $\frac{\pi}{2}$ und also αb reell. Deshalb finden wir:

$$u = -2 \log|z - a| - 2 \log \log|z - a| + \text{endliche Funktion}.$$

3. Die unendlich fernen Punkte der Fläche. Dasselbst gilt für $\xi(z)$ eine Entwicklung der folgenden Gestalt:

$$\xi(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots$$

Also wird:

$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{\alpha_1}{z^2} - \frac{2\alpha_2}{z^3} - \dots,$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{z}^2} - \frac{2\bar{\alpha}_2}{\bar{z}^3} - \dots,$$

$$\log \frac{d\xi}{dz} = -2 \log z + \text{endliche Funktion,}$$

$$\log \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} = -2 \log \bar{z} + \text{endliche Funktion}$$

und wir finden:

$$u = -4 \log |z| + \text{endliche Funktion.}$$

4. Wir haben endlich das Verhalten von u bei *Annäherung an* einen unserer *Linienzüge* zu betrachten, die in die Peripherie des Einheitskreises übergehen sollen, bei Abbildung durch ξ . Dieselben bestehen aus einer oder mehreren geschlossenen analytischen singularitätenfreien Kurven. Wir greifen eine dieser geschlossenen Kurven heraus und führen eine Kurvenschar $r = \text{const.}$ ein. Hierbei soll $r = 1$ die herausgegriffene Symmetrielinie sein; die übrigen Kurven der Schar sollen auch singularitätenfreie Kurven sein, die sich *glatt nebeneinander lagern*. Wir ziehen außerdem die zu dieser orthogonale Kurvenschar heran: $\varphi = \text{const.}$ Diese Parameter sollen so gewählt sein, daß die Zuordnung zwischen Kurven und Parameter eine umkehrbar eindeutige ist, und daß r längs einer Kurve $\varphi = \text{const.}$ und φ längs einer Kurve $r = \text{const.}$ eine stetige Funktion der Bogenlänge mit nichtverschwindender endlicher stetiger Ableitung ist, und daß die Funktionaldeterminante $\frac{d(r, \varphi)}{d(x, y)}$ endlich und von Null verschieden ist. Die ersten Ableitungen von r und φ nach x und y sollen endlich sein und $r \leq 1$. Wir erhalten so ein sich an unsere Symmetrielinie anschließendes Flächenband auf unserer Riemannschen Fläche. Jedem seiner Punkte gehört genau ein Wertepaar (r, φ) an. Diese Ortsfunktionen r, φ auf der Riemannschen Fläche mögen eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung des Flächenstückes auf einen an den Einheitskreis mit den Polarkoordinaten r, φ nach seinem Inneren zu sich anschließenden konzentrischen Kreisring vermitteln derart, daß unserer herausgegriffenen Symmetrielinie die Peripherie des Einheitskreises entspricht. Nun benutzen wir diese Konstruktion, die uns später bei der Integration unserer Differentialgleichung wieder begegnen wird, um das Verhalten von u bei Annäherung an die Symmetrielinie festzustellen. Die Abbildungsfunktion $\xi(z)$ verhält sich in den Punkten der Symmetrielinie durchaus regulär und besitzt dort eine nichtverschwindende endliche Ableitung. Daher kann das Unendlichwerden von u nur von dem Bestandteil $-2 \log(1 - \xi\bar{\xi})$ herrühren. Um sein Verhalten festzustellen, betrachten wir den Ausdruck $\log\left(\frac{1 - \xi\bar{\xi}}{1 - r^2}\right)$. Wir können dafür schreiben

$$\log\left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - r^2}\right) = \log\left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - r^2}\right) + \text{endliche Funktion.}$$

Wir beschränken uns weiter auf eine hinreichend kleine Umgebung des

herausgegriffenen Bogens unserer Symmetrielinie, so daß dort $\frac{\partial|\xi|}{\partial r}$ und $\frac{\partial|\xi|}{\partial \varphi}$ dem Betrage nach unterhalb einer festen endlichen Grenze liegen und stetig sind. Mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Regularität der Abbildung ist dies immer erreichbar. Nun nehmen wir eine unserer Kurven $\varphi = \text{const.}$ und führen ihre Bogenlänge n (Nullpunkt auf der Symmetrielinie) als Parameter ein. Dann liefert uns der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\frac{1 - |\xi|}{1 - r} = \frac{\frac{\partial|\xi|}{\partial n}(n^*)}{\frac{dr}{dn}(n^*)}.$$

Dabei bedeutet n^* einen passenden Wert zwischen Null und n . Nach unseren Festsetzungen ist $\frac{\partial|\xi|}{\partial n}(n^*)$ endlich und von Null verschieden, ebenso auch $\frac{dr}{dn}(n^*)$.

Denn einmal sollte ja r eine stetige Funktion von n sein längs $\varphi = \text{const.}$ und dort eine endliche nichtverschwindende stetige Ableitung haben. Ferner aber haben wir längs $\varphi = \text{const.}$:

$$\frac{\partial|\xi|}{\partial n} = \frac{\partial|\xi|}{\partial r} \frac{dr}{dn}.$$

Hier ist aber $\frac{dr}{dn}$ endlich und von Null verschieden, wie wir eben schon sahen und es ist $\frac{\partial|\xi|}{\partial r}$ jedenfalls endlich, wie oben schon erwähnt, aber auch von Null verschieden. Denn es ist längs der Symmetrielinie $\frac{\partial|\xi|}{\partial \varphi} = 0$ und daher

$$\frac{\partial|\xi|}{\partial z} = \frac{\partial|\xi|}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Wegen $|\xi|^2 = \xi \bar{\xi}$ aber haben wir weiter

$$\frac{\partial|\xi|}{\partial z} = \frac{1}{2} \bar{\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi \bar{\xi}}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

und dies ist nach unseren Annahmen über $\xi(z)$ endlich und von Null verschieden. Ferner ist

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{1}{2i} \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

von Null verschieden und endlich, weil $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ endlich sind und nicht beide verschwinden können, wegen $\frac{d(x, y)}{d(x, y)} \neq 0$. Daher folgt aus

$$\frac{\partial|\xi|}{\partial z} = \frac{\partial|\xi|}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z},$$

daß auf der Symmetrielinie auch $\frac{\partial|\xi|}{\partial r}$ und daher auch $\frac{\partial|\xi|}{\partial n}$ endlich und von Null verschieden ist. Also wird $\log\left(\frac{1-|\xi|}{1-r}\right)$ = endliche Funktion und daraus finden wir

$$u = -2 \log(1-r^2) + \text{endliche Funktion}$$

oder

$$u = -2 \log n + \text{endliche Funktion.}$$

Wir wollen diesen Sachverhalt kurz so aussprechen: *Bei Annäherung an eine Symmetrielinie wird u wie der negative doppelte Logarithmus der Normalen unendlich.*

Aufgabe dieser Arbeit ist es nun ein Integral der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ zu finden, das an den angegebenen Stellen das eben dargelegte Verhalten zeigt und das an allen übrigen Stellen nebst seinen sämtlichen Ableitungen endlich und stetig ist. Bevor wir dazu übergehen, wollen wir erst noch zeigen, wie man aus dem so zu findenden u eine Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ mit allen gewünschten Eigenschaften gewinnen kann. Wir knüpfen dazu an einen Gedanken von Poincaré an.

§ 3.

Gewinnung von $\zeta(z)$ aus u .

Da $\zeta(z)$ bei Umläufen von z auf der Riemannschen Fläche lineare Substitutionen erleidet, so erfahren bei diesen Umläufen bekanntlich die

Ausdrücke $y_1 = \sqrt{\frac{1}{\frac{d\xi}{dz}}}$, $y_2 = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{d\xi}{dz}}}$ lineare homogene Substitutionen der

Determinante 1. Sie genügen einer linearen Differentialgleichung der

Gestalt $\frac{d^2 y}{dz^2} = y \cdot \varphi(z)$, wobei $\varphi(z)$ eine rationale Funktion der Fläche be-

deutet. Für den hyperbolischen Abbildungsmodul findet man sofort den

Ausdruck $e^{-\frac{u}{2}} = y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2$. Hiernach finden wir durch Differenzieren:

$$\frac{\partial^2 \left(e^{-\frac{u}{2}} \right)}{\partial z^2} = \frac{d^2 y_1}{dz^2} \bar{y}_1 - \frac{d^2 y_2}{dz^2} \bar{y}_2 = \varphi e^{-\frac{u}{2}}.$$

Hieraus können wir für $\varphi(z)$ die Darstellung

$$\varphi(z) = e^{\frac{u}{2}} \frac{\partial^2 \left(e^{-\frac{u}{2}} \right)}{\partial z^2}$$

entnehmen.

Kann man diesen Weg nun rückwärts gehen? d. h. es ist ein Integral von $\Delta u = 8e^u$ gegeben; wir bilden $e^{\frac{u}{2}} \frac{\partial^2 \left(e^{-\frac{u}{2}} \right)}{\partial z^2} = \varphi$ und setzen die Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dz^2} = y \cdot \varphi$ an. Ist darin nun der Koeffizient φ eine analytische Funktion von z und gibt es zwei partikuläre Integrale y_1 und y_2 dieser Differentialgleichung, so daß sich u als hyperbolischer Abbildungsmodul des Quotienten $\zeta = \frac{y_2}{y_1}$ darstellen läßt? Man überzeugt sich zunächst, daß $\varphi(z)$ eine analytische Funktion ist. Es wird nämlich*)

$$\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}}$$

und wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 8e^u$ ist $\frac{\partial^3 u}{\partial \bar{z} \partial z^2} = 8e^u \frac{\partial u}{\partial z}$ und daher ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$. Wenn nun ferner y_1 und y_2 irgend zwei unabhängige Integrale dieser Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dz^2} = y \varphi$ sind und $\zeta = \frac{y_2}{y_1}$ ihr Quotient, so sind, wie man leicht bestätigt, y_1 und y_2 notwendig von der Form

$$y_1 = \alpha \sqrt{\frac{1}{d\xi}}, \quad y_2 = \alpha \zeta \sqrt{\frac{1}{d\xi}}.$$

Dabei ist α von z unabhängig, wie man sofort einsieht, wenn man mit diesen Ansätzen in die Differentialgleichung hineingeht. Hieraus ergibt sich folgendes: Um unser erstrebtes Resultat zu erhalten, haben wir nur zu zeigen, daß es zwei unabhängige Integrale y_1 und y_2 unserer linearen Differentialgleichung gibt derart, daß sich $e^{-\frac{u}{2}}$ in die Form

$$e^{-\frac{u}{2}} = y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2$$

setzen läßt. Bezeichnen wir nämlich dann den Quotienten $\frac{y_2}{y_1}$ mit ζ , so haben wir

$$e^u = \alpha \bar{\alpha} \frac{\frac{d\xi}{dz} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}}{(1 - \zeta \bar{\zeta})^2},$$

und soll der Logarithmus hiervon der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ genügen, so findet man sofort $\alpha \bar{\alpha} = 1$.

*) Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß immer die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial z}$ nur als Abkürzung für $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$ zu betrachten ist.

Zur Bestimmung eines derartigen Fundamentalsystems führt uns die Bemerkung, daß nach der Definition von $\varphi = e^{\frac{u}{2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(e^{-\frac{u}{2}} \right)$, das $e^{-\frac{u}{2}}$ selbst als Funktion der einen Variablen z der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dz^2} = y\varphi$ genügt.

Nun seien y_1 und y_2 irgend zwei unabhängige analytische, d. h. nur von z , nicht von \bar{z} abhängige Integrale der linearen Differentialgleichung. Dann läßt sich $e^{-\frac{u}{2}} = Ay_1 + By_2$ setzen, wobei nun A und B zwei Funktionen von \bar{z} allein sind, die als solche der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{d\bar{z}^2} = \bar{\varphi} \cdot y$ genügen. Sie lassen sich daher mit konstanten (von z und \bar{z} unabhängigen) Koeffizienten in der Form $A = a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2$ und $B = c\bar{y}_1 + d\bar{y}_2$ darstellen. Somit gewinnen wir für $e^{-\frac{u}{2}}$ die Darstellung:

$$e^{-\frac{u}{2}} = y_1(a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2) + y_2(c\bar{y}_1 + d\bar{y}_2).$$

Da nun aber $e^{-\frac{u}{2}}$ reell, also symmetrisch in z und \bar{z} ist, so ergibt sich, daß hier a und d reell, b und c konjugiert imaginär sind. Man schließt nämlich zunächst aus dem analytischen Charakter dieses Ausdruckes, daß diese Symmetrie für beliebige Werte von y_1 und y_2 stattfindet, nicht etwa nur für die, die beide als Funktionen von z auf der Riemannschen Fläche anzunehmen fähig sind. Und daraus folgt nach einer hinlänglich bekannten Schlußweise die Richtigkeit unserer Behauptung.

Nun müssen wir zeigen, daß wir bei passend gewähltem Fundamentalsystem y_1^* und y_2^* :

$$e^{-\frac{u}{2}} = y_1^* \bar{y}_1^* - y_2^* \bar{y}_2^*$$

schreiben können. Dazu führt uns die Bemerkung, daß wir nach dem eben festgestellten in

$$e^{-\frac{u}{2}} = ay_1 \bar{y}_1 + by_1 \bar{y}_2 + \bar{b}y_2 \bar{y}_1 + d\bar{y}_2 \bar{y}_2$$

(a, d reell) das vor uns haben, was man in der Algebra eine Hermitesche Form nennt. Dann lassen sich aber bekanntlich durch eine lineare Substitution nicht verschwindender Determinante zwei neue Variablen

$$y_1^* = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad y_2^* = \gamma y_1 + \delta y_2$$

einführen, so daß die Hermitesche Form eine der drei Gestalten

$e^{-\frac{u}{2}} = y_1^* \bar{y}_1^* - y_2^* \bar{y}_2^*$ oder $= y_1^* \bar{y}_1^* + y_2^* \bar{y}_2^*$ oder $= \pm y_1^* \bar{y}_1^*$ annimmt. Wenn aber überdies u der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ ge-

nügen soll, so findet man sofort, daß die *erste* der drei Gestalten stattfinden muß, und damit haben wir zwei unabhängige Integrale gefunden, mit deren Hilfe sich $e^{-\frac{u}{2}}$ in der gewünschten Form darstellen läßt. e^u ist also der hyperbolische Abbildungsmodul des Quotienten $\xi = \frac{y_2^*}{y_1^*}$.

Nun müssen wir uns noch überzeugen, daß diese Funktion ξ in der gewünschten Weise unsere Riemannsche Fläche auf das Innere des Einheitskreises abbildet. Jedenfalls ist ξ seinem absoluten Betrage nach niemals größer als 1. Denn wegen $e^{-\frac{u}{2}} = y_1^* \bar{y}_1^* (1 - \xi \bar{\xi})$ würde dies dem Charakter von u als reeller Funktion (also $e^{-\frac{u}{2}}$ positiv) widersprechen. Betrachten wir nun einen Punkt, an welchem u mit seinen sämtlichen Ableitungen endlich und stetig ist, der also nicht zu unseren vier Sorten von Ausnahmepunkten gehört, so folgt sofort, daß φ und also auch ξ eine reguläre analytische Funktion von z ist, die die schlichte Umgebung des Flächenpunktes auf die schlichte Umgebung eines Punktes im Inneren des Einheitskreises abbildet. (Wäre nämlich die Abbildung nicht schlicht, so müßte an der betreffenden Stelle $\frac{d\xi}{dz} = 0$ und also u unendlich sein.)

Betrachten wir weiter einen Punkt der ersten oder dritten Ausnahmekategorie also einen Verzweigungspunkt der Fläche oder der Funktion $\xi(z)$ oder einen unendlichfernen Punkt der Fläche. Diesen Fall können wir sofort auf den eben erledigten zurückführen. Wir machen nämlich zunächst eine Hilfsabbildung der Umgebung des betreffenden Punktes auf einen schlichten endlichen Bereich und führen die Variable dieses Bereiches als neue unabhängige in die Differentialgleichung ein. Dann subtrahieren wir von u den Logarithmus des eben benutzten Abbildungsmoduls. Diese Differenz (Logarithmus des hyperbolischen Abbildungsmoduls der Funktion, die den Hilfsbereich auf einen Bereich im Inneren des Einheitskreises abbildet — bei Nacheinanderausführung zweier Abbildungen multiplizieren sich die Abbildungsmoduln —) genügt dann wieder der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ und ist nun an der Stelle, um die es sich handelt, jedenfalls endlich und stetig und in der Umgebung samt ihren Ableitungen endlich und stetig. Eine solche Funktion ist aber, wie sich später ergeben wird (siehe S. 207), auch an der kritischen Stelle noch beliebig oft stetig differenzierbar. Dann bildet aber die zugehörige Abbildungsfunktion die schlichte Umgebung des betreffenden Punktes im Hilfsbereich wieder auf einen schlichten Bereich im Einheitskreis ab; also entspricht unserer Funktion u ein ξ , das auch an den Ausnahmestellen der ersten Art das gewünschte Verhalten zeigt, und zwar entsprechen diesen Stellen nach dem eben auseinandergesetzten natürlich auch Stellen im Inneren

des Einheitskreises. Nun machen wir zunächst folgende Bemerkung: Wenn wir von irgend einem der bis jetzt betrachteten Punkte (der Einfachheit halber nehmen wir einen gewöhnlichen Punkt der Fläche also keinen der ersten oder dritten Kategorie) nach irgend einem Punkte der zweiten oder vierten Kategorie eine rektifizierbare Kurve ziehen, so entspricht derselben im Einheitskreis eine Kurve mit einer unendlichen hyperbolischen Länge.

Für diese Länge findet man nämlich das Integral $L = \int e^{\frac{u}{2}} ds$, erstreckt über die Kurve auf der Riemannschen Fläche vom gewöhnlichen Anfangspunkt bis zum kritischen Endpunkt. Wenn dieser aber ein Verzweigungspunkt der Funktion $\xi(z)$ von unendlicher Ordnung ist oder auf einer Symmetrielinie liegt, die in ein Stück des Einheitskreises übergehen soll, so erhält dies Integral einen unendlichen Wert, wie man sofort aus dem Seite 182 und Seite 179 angegebenen Verhalten von u an solchen Stellen entnimmt oder präziser ausgedrückt: Zu jeder beliebig gegebenen Zahl l gehört ein ε , so daß die hyperbolische Länge $L > l$ wird, sowie die Kurve nur auf weniger als ε an einen der erwähnten Punkte herankommt. Nach dieser Vorbemerkung steuern wir unserm Ziel zu. Wir greifen unter den dreifach unendlich vielen möglichen Abbildungsfunktionen, die zum selben u gehören, eine bestimmte heraus und nehmen auf der Fläche einen gewöhnlichen Punkt. Dem entsprechen unendlich viele Punkte im Einheitskreis, die durch die Substitutionen der Gruppe von ξ auseinander hervorgehen. Wir greifen einen bestimmten heraus und schlagen um ihn eine im Sinn der hyperbolischen Maßbestimmung konzentrische Schar von Kreisen. Wenn nun die Abbildung, die $\xi(z)$ von der Riemannschen Fläche macht und die in der Umgebung des herausgegriffenen Punktes schlicht ist, nicht den ganzen Einheitskreis ausfüllte oder irgendwo einen Windungspunkt aufwiese, so müßte es in unserer Kreisschar einen mit einem möglichst kleinen Radius geben, auf dessen Peripherie ein solcher Punkt liegt. Wir ziehen vom Mittelpunkt nach ihm hin eine Kurve von endlicher hyperbolischer Länge. Der entspricht auf der Riemannschen Fläche eine Kurve, die sich immer in gewisser endlicher Entfernung von den Ausnahmepunkten der dritten und vierten Kategorie halten muß, weil sonst nach dem vorhin festgestellten ihre Länge nicht unter einer endlichen Grenze liegen könnte. Die Kurve muß aber nicht notwendig bei einem bestimmten Punkte der Fläche endigen. Wir können aber jedenfalls im Einheitskreis eine Folge von Punkten auf ihr markieren, die gegen den fraglichen Punkt konvergieren und welchen auch auf der Fläche eine Punktmenge entspricht, die gegen einen bestimmten Punkt der Fläche konvergiert, der nun weder der zweiten noch vierten Kategorie angehört. Greifen wir einen dem Häufungspunkt genügend benachbarten Punkt

heraus, so können wir um ihn eine den Häufungspunkt enthaltende Umgebung abgrenzen, die bei der Abbildung in einen schlichten Bereich im Innern des Einheitskreises überginge*), der nun gleichfalls das dortige Kurvenende *ganz im Innern* enthielte. Also wäre entgegen der Annahme auch an diesem Punkte die Abbildung schlicht und regulär. Daraus folgt, daß der Bildbereich nirgends im Innern des Einheitskreises einen Windungspunkt oder einen Grenzpunkt haben kann. Also bedeckt der Bildbereich das ganze Innere des Einheitskreises genau einmal.

Durch die Betrachtungen dieses Paragraphen ist also das Problem der Uniformisierung vollständig auf die Bestimmung eines Integrales der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ mit den in § 2 zusammengestellten Eigenschaften zurückgeführt. Wir gehen also jetzt an dieses Integrationsproblem heran.

§ 4.

Einige Hilfsbemerkungen über $\Delta u = 0$.

Der Vollständigkeit halber wollen wir in diesem Paragraphen einiges über $\Delta u = 0$ — meistens ohne Beweis — zusammenstellen, wovon wir im nächsten werden Gebrauch machen müssen. Es sei ein ein- oder mehrfach zusammenhängender, ein- oder mehrblättriger (aber jedenfalls endlich vielblättriger), endlicher oder unendlicher Bereich gegeben. Wir nehmen ihn zunächst *berandet* an. Unter der lokalen uniformisierenden Variablen t einer Stelle $z = a$ dieses Bereiches, verstehe ich entweder die Funktion $t = z - a$, wenn es eine gewöhnliche Stelle des Bereiches ist, oder die Funktion $t = \sqrt[m]{z - a}$, wenn es eine m -blättrige Windungsstelle des Bereiches ist, oder endlich die Funktion $t = \frac{1}{z}$, wenn es die unendlich ferne schlichte Stelle des Bereiches ist (sie sei der Einfachheit halber immer schlicht angenommen). Dann ist bekanntlich eine an einer Stelle reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ der reelle Teil einer analytischen Funktion, die sich an dieser Stelle wie eine ganze rationale Funktion der betreffenden lokalen uniformisierenden Variablen verhält. Unter der Greenschen Funktion $G(z, Z)$ des Bereiches (hinsichtlich des Differentialausdruckes Δu) versteht man dann eine Lösung der Differentialgleichung

*) Man erkennt nämlich sofort, daß es, sowie man auf der Fläche einen Bereich hat, der an Punkte der zweiten oder vierten Kategorie nicht heranreicht, eine Zahl ϱ gibt, so daß das Innere eines um einen beliebigen Punkt dieses Bereiches mit dem Radius ϱ geschlagenen Kreises (oder bei den unendlich fernen Punkten, das Äußere eines um Null mit dem Radius $\frac{1}{\varrho}$ gelegten Kreises) sich auf ein schlichtes Bereichstück des Einheitskreises abbildet.

$\Delta u = 0$, die überall regulär und eindeutig ist, außer an einer Stelle Z , wo sie sich verhält wie der reelle Teil von $\log t$, und die am Rande des Bereiches verschwindet. Sie ist im ganzen Innern des Bereiches positiv, besitzt an keiner Stetigkeitsstelle ein Maximum oder Minimum. Sie ist symmetrisch $G(z, Z) = G(Z, z)$. Bezeichnet man die nach innen gerichtete Normale eines Stückes der Begrenzung mit n : so ist hiernach $\frac{\partial G}{\partial n}$ positiv. Wir bezeichnen weiter mit s die in positiver Richtung gezählte Bogenlänge des Bereichrandes, also so daß der Bereich zur linken bleibt. Sind dann u und v zwei im Bereich eindeutige reguläre Potentialfunktionen, so findet man bekanntlich durch partielle Integration die Greensche Formel

$$\iint (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds;$$

dabei ist das Doppelintegral über den ganzen Bereich, das Linienintegral in positivem Sinn über seinen Rand zu erstrecken. Setzt man darin $v = G$, so findet man

$$u = \frac{1}{2\pi} \int u \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

(Differentiation und Integration beziehen sich auf den Parameter Z). Es ist also damit die im Bereiche reguläre Potentialfunktion u durch ihre Randwerte dargestellt (erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$). Setzen wir wieder $v = G$ und verstehen unter u eine reguläre Lösung von $\Delta u = \varphi$, so finden wir

$$u = \frac{1}{2\pi} \int u \frac{\partial G}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint G \cdot \varphi dZ d\bar{Z}.$$

Der erste Bestandteil ist also die Potentialfunktion gleicher Randwerte.

Gehen wir zu einem *unberandeten* Bereich über, also zu einer *geschlossenen* algebraischen Riemannschen Fläche. Fragen wir nach einer Greenschen Funktion dieses Bereiches, so müßte das eine auf der geschlossenen Fläche reguläre und eindeutige Potentialfunktion sein, die nur an einer Stelle logarithmisches Verhalten zeigt. Eine solche Funktion existiert aber nicht. Das hängt, wie die Integralgleichungstheorie zeigt, damit zusammen, daß es Lösungen von $\Delta u = 0$ gibt, die ohne zu verschwinden über die ganze Fläche hin regulär und eindeutig sind, nämlich die Konstanten (Eigenfunktionen der Differentialgleichung). Dann zeigt die Integralgleichungstheorie weiter, daß die Differentialgleichung $\Delta u = \varphi$ jedenfalls nur dann eine auf der ganzen Fläche endliche und stetige Lösung haben kann, wenn φ zu diesen Eigenfunktionen orthogonal ist, d. h. hier, wenn das über die ganze Fläche hin erstreckte Integral

$$\iint \varphi dz d\bar{z} = 0$$

ist.

Man kann die eben angegebenen Behauptungen auch beweisen ohne sich auf die allgemeinen Theorien zu beziehen. Wir führen das nicht näher aus, sondern verweisen deswegen auf Poincaré, Seite 166ff., wo man alles mit wünschenswerter Ausführlichkeit auseinandergesetzt findet.

§ 5.

Umformung der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ in $\Delta u = \alpha e^u - \beta$.

Das Integral u der Differentialgleichung, das wir aufsuchen müssen, sollte die im § 2 näher bezeichneten Singularitäten aufweisen. Wir wollen in diesem Paragraphen die Aufgabe so umformen, daß es sich darum handelt ein reguläres Integral einer anderen Differentialgleichung ($\Delta u = \alpha e^u - \beta$) zu bestimmen, deren Koeffizienten aber nun singularär sind. Damit verfolgen wir zugleich noch einen anderen Zweck, den wir aber erst am Schluß dieses Paragraphen näher bezeichnen wollen und von dem auch in der Einleitung schon einmal die Rede war: *Trennung der Grenzkreis- von den Grenzpunktfällen.*

Um zu dem eben genannten Ziele zu gelangen, subtrahieren wir von u eine passende Funktion h , so daß die Differenz $U = u - h$ durchweg endlich und stetig wird auf der ganzen Riemannschen Fläche (im unendlichen stetig als Funktion der dortigen lokalen uniformisierenden Variablen). Für $U = u - h$ ergibt sich dann eine Differentialgleichung von der folgenden Gestalt $\Delta U = 8e^h e^U - \Delta h$. Wir wollen überdies noch zeigen, daß wir über h so verfügen können, daß nicht nur U endlich und stetig wird, sondern daß auch neben e^h das Δh durchweg positiv wird, so daß ferner der Quotient $\frac{\Delta h}{8e^h} = \frac{\beta}{\alpha}$ auf der ganzen Fläche zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen positiven Schranken m und M liegt:

$$m \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq M.$$

Zu dem Zwecke notieren wir uns noch einmal das in § 2 festgestellte Verhalten der Funktion u an den vier Sorten von Ausnahmestellen.

1. Verzweigungsstellen m^{ter} Ordnung der Fläche oder der Funktion ξ :

$$u = 2 \frac{1-m}{m} \log |z-a| + E.$$

2. Verzweigungsstellen von $\xi(z)$ von unendlicher Ordnung:

$$u = -2 \log |z-a| - 2 \log \log |z-a| + E.$$

3. Unendlich ferne Punkte der Fläche:

$$u = -4 \log |z| + E.$$

4. Symmetrielinien, die in die Peripherie des Einheitskreises übergahen:

$$u = -2 \log (1-r) + E \quad \text{oder} \quad v = -2 \log (n) + E.$$

Dabei ist E ein Symbol für eine an der betreffenden Stelle endliche und stetige Funktion (deren Ableitungen aber daselbst nicht notwendig endlich zu sein brauchen).

Um nun zu dem gewünschten Ziele zu gelangen, legen wir um jeden der kritischen Punkte der drei ersten Kategorien als Mittelpunkt einen Kreis, der beliebig gewählt sein kann, doch so, daß er außer seinem Mittelpunkt in seinem Inneren oder auf seiner Begrenzung keinen weiteren kritischen Punkt enthält. Haben wir es mit einem Hauptkreisproblem zu tun, so ziehen wir außerdem auf der Fläche in der Nachbarschaft einer jeden Symmetrielinie, die in die Peripherie des Einheitskreises übergehen soll, eine weitere geschlossene Kurve, die mit der betreffenden Symmetrielinie zusammen auf der Riemannschen Fläche ein zweifach zusammenhängendes von inneren Rückkehrschnitten freies Flächenband abgrenzt, das im Inneren oder auf seiner Begrenzung keine weiteren kritischen Punkte mehr enthalten soll. Wir können dazu etwa eine der oben (§ 2) benutzten Kurven $r = \text{const.}$ verwenden. Dann zerlegen wir die Funktion h , die wir von u abziehen wollten, in drei Teile: $h = h_1 + h_2 + h_3$. Dabei ist h_3 eine über die ganze Fläche hin endliche Funktion, über die wir zuletzt passend verfügen. In den eben definierten Flächenstücken, die die Singularitäten von u enthalten, setzen wir immer h_1 diesen singulären Bestandteilen gleich und zwar soll also sein:

1. $h_1 = 2 \frac{1-m}{m} \log |z-a|,$
2. $h_1 = -2 \log |z-a| - 2 \log |\log |z-a||,$
3. $h_1 = -4 \log |z|,$
4. $h_1 = -2 \log (1-r).$

Diese in den genannten Bereichen hiernach definierte Funktion h_1 werden wir nachher über die ganze Riemannsche Fläche fortsetzen, so daß eine Funktion h_1 entsteht, die überall, außer an den kritischen Stellen, samt ihren sämtlichen Ableitungen der drei ersten Ordnungen endlich und stetig ist. Vorab aber wollen wir weiter noch über h_2 in den Bereichen um die singulären Punkte so zu verfügen suchen, daß die Koeffizienten $\alpha = 8e^h$ und $\beta = \Delta h$ zunächst in diesen den weiteren oben geforderten Bedingungen genügen: Um zu sehen wie wir da h_2 bestimmen müssen, notieren wir uns das Verhalten von $e^H = e^{h_1} e^{h_2}$ und $\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2$ in den Bereichen, die wir um die singulären Punkte von u abgegrenzt haben, soweit es aus der jetzt getroffenen Festsetzung von h_1 folgt:

1. $\alpha = 8e^H = 8|z-a|^{\frac{2(1-m)}{m}} \cdot e^{h_2}; \quad \beta = \Delta H = \Delta h_2,$
2. $\alpha = 8e^H = 8|z-a|^{-2} \{ \log |z-a| \}^{-2} e^{h_2}; \quad \beta = \Delta H = |z-a|^{-2} \{ \log |z-a| \}^{-2} + \Delta h_2,$

$$3. \alpha = 8e^H = 8|z|^{-4} e^{h_2}; \quad \beta = \Delta H = \Delta h_2,$$

$$4. \alpha = 8e^H = 8(1-r)^{-2} e^{h_2}; \quad \beta = \Delta H = \frac{2}{(1-r)^2} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{2}{1-r} \Delta r + \Delta h_2.$$

Wir suchen nun über h_2 also so zu verfügen, daß diese Ausdrücke α, β in unseren kleinen Bereichen positiv sind und daß der Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ zwischen zwei festen endlichen Grenzen m und M bleibt. Bei den Punkten 2. und 4. ist dies ohne weiteres der Fall, wenn wir da einfach $h_2 = 0$ setzen. Dann ist bei 2. sowohl α wie β positiv und der Quotient $\frac{\alpha}{\beta} = 8$ und bei 4. können wir schreiben

$$\beta = \frac{2}{(1-r)^2} [r_x^2 + r_y^2 + (1-r) \Delta r].$$

Dabei ist der erste Faktor gewiß positiv und der Klammerausdruck jedenfalls auf der Symmetrielinie $r = 1$, weil wir ruhig annehmen dürfen, daß daselbst r zweimal stetig differentierbar ist und nicht beide ersten Ableitungen von r (s. oben S. 181) zugleich verschwinden können. Der Faktor wird also, wenn wir unser Flächenband klein genug gewählt haben, in demselben zwischen zwei festen positiven Schranken μ und M liegen. So bekommen wir in dem Bande $\frac{8}{M} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{8}{\mu}$. Es bleiben also noch die Punkte der ersten und dritten Kategorie zu erledigen. Jedenfalls muß daselbst h_2 endlich sein, weil sich ja u von h_1 nur um eine beschränkte Funktion unterscheidet. Wir wollen versuchen um 1. oder 3. ein endliches h_2 so zu bestimmen, daß

$$\text{bei 1. } \Delta h_2 = |z - a|^2 \left(\frac{1-m}{m} \right),$$

$$\text{bei 3. } \Delta h_2 = |z|^{-4}$$

wird. Wir schreiben statt $|z - a|$ bzw. $|z|$ einfach ϱ und führen um den betreffenden Punkt Polarkoordinaten ϱ, ϑ ein. Es liegt nahe nach einem h_2 zu fragen, das nur von ϱ abhängt. Dies muß dann den Differentialgleichungen genügen:

$$\text{bei 1. } \frac{d^2 h_2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d h_2}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho^2 - \frac{2}{m}},$$

$$\text{bei 3. } \frac{d^2 h_2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d h_2}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho^4}.$$

Wir finden bei 1. in $h_2 = \frac{m^2}{4} \varrho^{\frac{2}{m}}$, bei 3. in $h_2 = \frac{1}{4} \varrho^{-2}$ ein bei $\varrho = 0$ bzw. bei $\varrho = \infty$ endliches Integral. Es wird daselbst beidemale Null. Für den Quotienten finden wir dann, daß er zwischen dem Maximum und Mini-

mum von $8e^{\lambda}$ in den betreffenden Bereichen liegt. Das sind aber alles endliche positive Größen und α und β sind ersichtlich auch selbst durchweg positiv in den Bereichen. Damit haben wir nun also zunächst in der Umgebung der singulären Punkte $h_1 + h_2$ definiert. Dies vervollständigen wir nun irgendwie über die Fläche hin zu einer überall außer an den kritischen Punkten stetigen und dreimal stetig differentierbaren Funktion.

Ich betrachte nun zunächst den *Hauptkreisfall* weiter, weil er der einfachere ist. Wir hatten $h = h_1 + h_2 + h_3$ angesetzt. Wollten wir hier nun einfach $h_3 = 0$ nehmen, so wäre zwar $e^{h_1} e^{h_2}$ positiv, es bliebe auch der Quotient $\frac{e^{h_1} e^{h_2}}{\Delta(h_1 + h_2)}$ an den singulären Stellen endlich, aber er kann sehr wohl anderswo unendlich werden, da $\Delta(h_1 + h_2)$ sehr wohl Null werden kann. Wir können nun aber sicherlich zunächst über $\Delta h_3 = \varphi$ so verfügen, daß Δh überall positiv wird. Da unsere Fläche berandet ist, so hat es keine Schwierigkeit $\Delta h_3 = \varphi$ alsdann aufzulösen und ein unseren Bedingungen genügendes überall endliches h_3 zu finden. Bilden wir mit dem so gewählten h_3 unser $h = h_1 + h_2 + h_3$, so genügt dies jetzt allen unseren Bedingungen. Sowohl $\alpha = 8e^{\lambda}$ als $\beta = \Delta h$ sind durchweg positiv und von Null verschieden, und ihr Quotient liegt auf der ganzen Fläche zwischen zwei endlichen positiven Schranken.

Gehen wir nun zum *Grenzkreisfall* über. Da liegt die Sache nicht ganz so einfach. Die Greensche Funktion, mit der wir hier operierten, existiert da ja gar nicht, wie wir im vorigen Paragraphen sahen. Um jetzt eine Differentialgleichung der Gestalt $\Delta v = \varphi$ durch eine über die ganze Fläche hin endliche und stetige Funktion v integrieren zu können, mußte das über die ganze Fläche hinerstreckte Doppelintegral der Funktion φ verschwinden. Um also hier weiter zu kommen, müssen wir den Sachverhalt etwas näher prüfen. Wir werden finden, daß noch eine gewisse Bedingung erfüllt sein muß, wenn wir zum Ziel kommen wollen. Wir wollen zunächst eine Feststellung machen, von der auch bereits Poincaré Gebrauch gemacht hat. Wir wollen unter h_3 zunächst irgend eine über die ganze Fläche stetige und zweimal stetig differentierbare Funktion verstehen, doch so, daß das über die ganze Fläche erstreckte $\iint \Delta h_3 dx dy$ konvergiert. Dann wollen wir den Wert des über die ganze Fläche erstreckten Doppelintegrales $\iint \Delta h dx dy$ berechnen.

Zu dem Zwecke ziehen wir um die kritischen Punkte Kreise mit einem Radius ϱ , den wir nach Null oder nach unendlich nachher wachsen lassen, je nachdem es sich um einen kritischen Punkt im Endlichen oder Unendlichen handelt. Wir berechnen zunächst das Integral über einen solchen endlichen Bereich und gehen dann auf die eben erwähnte Weise

zum Integral über die ganze Fläche über. Setzen wir in der Greenschen Formel

$$\iint (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds$$

des vorigen Paragraphen, $u = 1$ und $v = h$ oder wenden wir auf $\iint \Delta h dx dy$ selbst partielle Integration an, so finden wir

$$\iint \Delta h dx dy = \sum - \int \frac{\partial h}{\partial n} ds,$$

wobei sich die Linienintegrale auf die einzelnen Randkurven beziehen und über alle zu summieren ist. Betrachten wir sie einzeln. Zuerst die *Verzweigungspunkte von $\zeta(z)$* . Sie sind im endlichen gelegene gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche. Es wird

$$\int \frac{\partial h}{\partial n} ds = \int \frac{\partial h_1}{\partial n} ds + \int \frac{\partial h_2}{\partial n} ds + \int \frac{\partial h_3}{\partial n} ds.$$

Beim Grenzübergang geht das letzte der drei Integrale in Null über, da $\iint \Delta h_3 dx dy$ konvergiert. Wir dürfen annehmen, daß unser Kreis vom Radius ρ ganz in der bei der Definition von h_1 und h_2 vorhin benutzten Kreisfläche enthalten ist. Dann bekommen wir, wenn wir zugleich noch Polarkoordinaten ϱ, ϑ einführen

$$\lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h}{\partial n} ds = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{2(1-m)}{m} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\varphi + \lim_{\rho=0} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \frac{m}{2} \rho^{\frac{2}{m}-1} \cdot \rho d\varphi.$$

Also wird

$$\lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h}{\partial n} ds = \frac{4\pi(1-m)}{m}.$$

Nehmen wir einen m -blättrigen Verzweigungspunkt der Fläche: Wir finden ebenso

$$\begin{aligned} \lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h}{\partial n} ds &= \lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h_1}{\partial n} ds + \lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h_2}{\partial n} ds \\ &= \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{2(1-m)}{m} \frac{1}{\rho} \rho d\varphi + \lim_{\rho=0} \int_0^{\frac{\sin \pi}{2}} \frac{m}{2} \rho^{\frac{2}{m}-1} d\varphi = 4\pi(1-m). \end{aligned}$$

Bei einem Verzweigungspunkt unendlicher Ordnung von $\zeta(z)$ findet sich:

$$\lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h}{\partial n} ds = \lim_{\rho=0} - \int_0^{2\pi} \frac{2}{\rho} \rho d\varphi - \lim_{\rho=0} 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\log \rho}} \frac{1}{\log \rho} \cdot \frac{1}{\rho} \rho d\varphi = -2\pi.$$

Betrachten wir endlich einen unendlich fernen Punkt. Das Integral $\int \frac{\partial h_3}{\partial n} ds$ wird Null, weil wir angenommen haben, daß das Doppelintegral von Δh_3 konvergiert. Führen wir statt z in jenem Kreis um den unendlich fernen Punkt durch die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ die neue Variable z' ein, so wird aus dem Doppelintegral von Δh_3 über jenen Kreis folgendes:

$$\iint \frac{\partial^2 h_3}{\partial z \partial \bar{z}} dz d\bar{z} = \iint \frac{\partial^2 h_3}{\partial z' \partial \bar{z}'} \frac{\partial z'}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \cdot dz' d\bar{z}' = \iint \frac{\partial^2 h_3}{\partial z' \partial \bar{z}'} dz' d\bar{z}'.$$

Und dies letztere Integral wird

$$= \int \frac{\partial h_3}{\partial n'} ds' = - \int \frac{\partial h_3}{\partial n} ds,$$

wobei die letztere Umformung aus der Konformität der Abbildung durch $z' = \frac{1}{z}$ folgt. Lassen wir nun oben ρ nach ∞ streben, so wird der Bildbereich der z' Ebene sich auf Null zusammenziehen. Daher wird unser Linienintegral über h_3 in der Grenze zu Null.

Also wird wieder

$$\lim_{\rho=0} \int \frac{\partial h}{\partial n} ds = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{4}{\rho} \rho d\varphi + \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^3} \rho d\varphi = 8\pi.$$

So erhalten wir im ganzen:

$$\iint \Delta h dx dy = \sum_i 4\pi(m_i - 1) + \sum_i 4\pi \frac{n_i - 1}{n_i} + 4\lambda\pi - 8\pi\nu.$$

Dabei bezieht sich m_i auf die Verzweigungspunkte der Fläche; n_i auf die von $\xi(z)$, λ ist die Zahl der Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung von $\xi(z)$, ν die Zahl der unendlich fernen Punkte, oder was dasselbe ist, die Blätterzahl der Riemannschen Fälle. Wir wollen uns nun überzeugen, daß in allen den Fällen, in welchen eine Grenzkreisuniformisierung möglich sein kann, die oben angeschriebene Summe positiv ist, sie hängt ersichtlich nur von der Riemannschen Fläche und von $\xi(z)$ ab, gar nicht von der großen Willkür, die noch in h steckt. Zwischen m_i , ν und Geschlecht p besteht nun bekanntlich die folgende Relation:

$$-2 + 2p = \sum (m_i - 1) - 2\nu.$$

Also wird die obige Summe:

$$8(p-1)\pi + 4\lambda\pi + \sum_i 4\pi \frac{n_i - 1}{n_i}.$$

Für $p > 1$ sind alle Glieder dieses Ausdruckes positiv. Bei $p = 1$ wird alles positiv, es sei denn $\lambda = 0$ und alle $n_i = 1$.

Dann wird aber die Uniformisierung durch ein elliptisches Integral erster Gattung geleistet. Es gibt keine Grenzkreisuniformisierung. Im Falle $p=0$ endlich, kann der Ausdruck nur dann negativ oder Null werden, wenn zugleich noch $\lambda = 0$ oder 1 ist. Dann bekommen wir für die n_i entweder die Bedingung $\sum \frac{n_i-1}{n_i} = +2$ oder $\sum \frac{n_i-1}{n_i} < 2$. Der zweite dieser beiden Fälle führt auf diejenigen Uniformisierungsprobleme, welchen endliche Gruppen zugehören — Bewegungsgruppen der elliptischen Ebene. Der erste Fall führt auf die Bewegungsgruppen der funktionentheoretischen Ebene. In allen diesen Fällen ist also eine Grenzkreisuniformisierung nicht möglich.

Wir haben damit erkannt, daß immer dann, wenn es überhaupt eine Funktion u geben kann, die $\Delta u = 8e^u$ genügt und die angegebenen Singularitäten aufweist, notwendig das

$$\iint \Delta h \, dx \, dy > 0$$

ist.

Wir benutzen dies jetzt um über h_3 endgültig zu verfügen. Wie wir auch h_3 wählen, immer hat $\iint \Delta h \, dx \, dy$ den vorhin berechneten Wert. Wir wollen h_3 so wählen, daß Δh immer positiv ist. Wir wählen dazu zunächst eine auf der ganzen Fläche stetige und stetig differentierbare Funktion φ so daß $\Delta(h_1 + h_2) + \varphi$ immer positiv (nirgends Null) ist. Zu dem Zwecke nehmen wir φ in den Kreisen um die singulären Punkte gleich Null und außerhalb irgendwie diesen Bedingungen entsprechend. Außerdem sei es noch so angenommen, daß

$$\iint (\Delta(h_1 + h_2) + \varphi) \, dx \, dy = \iint \Delta h \, dx \, dy,$$

also den oben berechneten Wert hat. Ich behaupte nun, daß es immer eine in der ganzen Fläche endliche und stetige Funktion h_3 gibt, für die $\Delta h_3 = \varphi$ ist. Damit es eine solche Funktion h_3 gibt, ist es erforderlich und hinreichend, daß $\iint \varphi \, dx \, dy$, erstreckt über die ganze Fläche, verschwindet. Das ist aber in der Tat der Fall. Denn da $\iint \Delta h \, dx \, dy$ von h ganz unabhängig ist, so ist

$$\iint \Delta(h_1 + h_2) \, dx \, dy = \iint \Delta h \, dx \, dy.$$

Also

$$\iint \varphi \, dx \, dy = 0.$$

Dies so bestimmte h_3 verwenden wir jetzt zur endgültigen Festlegung von $h = h_1 + h_2 + h_3$. Und nun genügen die Koeffizienten $\alpha = 8e^h$ und

$\beta = \Delta h$ tatsächlich allen unseren Bedingungen. Sie sind durchweg oberhalb einer festen positiven Schranke gelegen und ihr Verhältnis

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{e^{h_1} e^{h_2} \cdot e^{h_3}}{\Delta(h_1 + h_2) + \Delta h_3}$$

liegt zwischen zwei festen positiven Schranken. Denn dies ist sicherlich der Fall in dem ganzen Bereich, der außerhalb der Kreise liegt, die wir um die singulären Punkte gezogen haben. In deren Inneren aber ist einmal h_3 endlich, $\Delta h_3 = 0$ und es bleibt der Quotient

$$\frac{e^{h_1} e^{h_2}}{\Delta h_1 + \Delta h_2}$$

nach der Art wie wir h_1 und h_2 gewählt haben zwischen zwei festen positiven Schranken.

Damit haben wir erkannt, daß wir in allen Fällen in welchen eine Grenzkreisuniformisierung überhaupt möglich ist, nur noch ein überall endliches Integral der Differentialgleichung

$$\Delta u = \alpha e^u - \beta$$

zu bestimmen haben, wobei ihre Koeffizienten den oben erwähnten Bedingungen genügen. Wir haben damit die Ungleichungsbedingung, die notwendig bei allen Uniformisierungsmethoden vorkommen muß, da sie die Grenzkreisfälle von den Grenzpunktfällen trennt, vollständig ausgenutzt, so daß wir fortan gar keinen expliziten Gebrauch mehr von ihr zu machen haben, sondern sie nur noch in jener Form der Differentialgleichung zu benutzen haben. Die Vorteile, die diese Form der Differentialgleichung für das Integrationsproblem bietet, werden bald einleuchten.

§ 6.

Eine Eigenschaft der Greenschen Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta u = pu \quad (p(x; y) > 0).$$

Unsere ganze Integrationsmethode wird von einer jetzt darzulegenden Eigenschaft der Greenschen Funktion dieser Differentialgleichung beherrscht. Sie ergibt sich sehr einfach aus der Greenschen Formel. Wir beweisen sie hier nur in dem Umfang, in dem wir sie in dieser Arbeit brauchen. Es sei ein endlicher berandeter ein- oder mehrblättriger Bereich B gegeben. Unter der Greenschen Funktion der Differentialgleichung $\Delta u = pu$ für diesen Bereich verstehen wir wie üblich diejenige Lösung dieser Differentialgleichung, die an einer Stelle Z wie $\log |z - Z|$ unendlich wird, die sonst samt ihren Ableitungen der ersten beiden Ordnungen endlich und stetig ist, und die am Rande des Bereiches B verschwindet.

Die Funktion $p(x, y)$ sei ebenfalls im Bereich stetig und stetig differenzierbar und überdies positiv, d. h. sie soll nirgends verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen kann die Existenz dieser Greenschen Funktion ganz wie in der Potentialtheorie nach der Schwarzschen Methode des alternierenden Verfahrens bewiesen werden (siehe z. B. Picard, Acta mathematica XII) oder sie kann auch mit Hilfe des lösenden Kernes der linearen Integralgleichung

$$u = -\frac{1}{8\pi} \iint G(z, Z) p u dZ d\bar{Z} + f$$

gewonnen werden, in der G die Greensche Funktion von $\Delta u = 0$ für denselben Bereich bedeutet. Wir halten uns nicht dabei auf. Wir ziehen nun um den singulären Punkt der Greenschen Funktion einen kleinen Kreis K , den wir sich hernach auf diesen Punkt zusammenziehen lassen und setzen nun für diesen von den seitherigen Randkurven und dem kleinen Kreis begrenzten Bereich B_K die Greensche Formel an:

$$\iint_{B_K} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Hier setzen wir nun: $u = 1$, $v = \Gamma(z, Z)$. (Wir bezeichnen von jetzt an immer mit Γ die Greensche Funktion einer Differentialgleichung $\Delta u = pu$, mit G diejenige von $\Delta u = 0$). Dadurch erhalten wir:

$$\iint_{B_K} p \Gamma(z, Z) dX dY = - \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds - \sum \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds.$$

(Die Integrationen beziehen sich auf $Z = X + iY$).

Dabei bezieht sich die Summe auf die außer K vorhandenen Randkurven. Wir wollen das Integral $\int_K \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$ ausrechnen und gleich zur Grenze eines verschwindenden Kreises K übergehen. Da wir dabei von dem regulären Teile von Γ absehen können, so finden wir bei Einführung von Polarkoordinaten ϱ , ϑ nur den Mittelpunkt des Kreises K :

$$- \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho} \varrho d\vartheta = -2\pi.$$

So bekommen wir:

$$1 - \frac{1}{2\pi} \iint_B p \cdot \Gamma(z, Z) dX dY = \frac{1}{2\pi} \sum \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds.$$

Nun ist aber die Summe auf der rechten Seite sicher positiv. Es ist nämlich Γ am Rande Null. Wenn wir also noch zeigen können, daß Γ im ganzen inneren positiv ist, so muß es eben vom Rande aus nach innen wachsen und daher muß die Ableitung $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ jedenfalls Null oder positiv sein. Dies ist aber so einzusehen. Am Unstetigkeitspunkte ist nämlich Γ sicher positiv unendlich. Es könnte also nur dann im inneren negativ sein, wenn es irgend einen Bereich gäbe, an dessen Rand Γ verschwindet und in dessen Inneren es dauernd negativ und stetig ist. Ein solches Integral von $\Delta u = pu$ gibt es aber nicht. Verschwindet nämlich ein reguläres Integral u dieser Differentialgleichung am Rande eines Bereiches, so ist es im ganzen Bereich Null. Ganz wie in der Potentialtheorie ergibt sich nämlich für ein Integral von $\Delta u = pu$ mit den Randwerten \bar{u} die Darstellung

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \bar{u} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds.$$

Ist also $\bar{u} = 0$, so ist u überall Null. Hieraus folgt also nun wie bereits bemerkt, daß $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ positiv oder Null ist. Wir wollen uns noch überzeugen, daß jedenfalls das Integral von $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$, erstreckt über den ganzen Bereichrand, nicht Null sein kann. Es stellt nämlich

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$$

diejenige im Bereiche reguläre Lösung von $\Delta u = pu$ dar, die am Rande 1 ist. Die Lösung ist ersichtlich nirgends negativ im ganzen Bereich. Sie ist im ganzen Bereich kleiner als eins, nämlich kleiner als die Potentialfunktion der gleichen positiven Randwerte. Bezeichnen wir allgemein mit $\bar{u} > 0$ die Potentialfunktion mit den gleichen Randwerten wie u , so ist also u von der Form $u = \bar{u} + v$. Und es ist

$$\Delta v = pu.$$

Also

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint pu G(z, Z) dX dY.$$

Da aber sowohl p , wie u wie G positiv sind, so ist v negativ, also $u < \bar{u}$. Es kann aber auch $u = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$ nirgends im Bereich verschwinden. Um das einzusehen will ich ganz allgemein beweisen, daß eine am Rande eines Bereiches wesentlich positive Lösung von $\Delta u = pu$ im Inneren nirgends Null werden kann. Wenn p eine Konstante etwa A^2 wäre, so wäre jedenfalls $\beta e^{A(x+v)}$ für beliebigen Wert der positiven Konstanten β eine

Lösung der Differentialgleichung, die nirgends verschwindet. Durch Wahl von β können wir erreichen, daß die Werte am Bereichrand so klein sind wie wir sie wollen. Da aber mit abnehmenden Randwerten \bar{u} ein Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int \bar{u} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$$

an jedem Innenpunkte abnimmt, so brauchen wir nur β so klein zu nehmen, daß die Randwerte von $\beta e^{A(x+y)}$ kleiner sind als \bar{u} , um zu erkennen, daß dies Integral mit den Randwerten \bar{u} durchweg größer ist als $\beta e^{A(x+y)}$. Es kann also ebensowenig wie dieses im Bereiche verschwinden. Dieser Gedanke erlaubt uns aber sofort auch für eine beliebige Gleichung $\Delta u = pu$ das gleiche Resultat zu gewinnen. Wenn wir nämlich zwei Differentialgleichungen $\Delta u_1 = p_1 u_1$ und $\Delta u_2 = p_2 u_2$ haben und wenn $p_1 \leq p_2$ ist, so seien u_1, u_2 zwei Lösungen gleicher positiver Randwerte. Dann ist im ganzen Bereich $u_1 \geq u_2$. Mit abnehmendem p nehmen also die Lösungen der Differentialgleichung zu. Dies ist folgendermaßen zu erkennen. Es ist:

$$\Delta u_1 = p_1 u_1,$$

$$\Delta u_2 = p_2 (u_1 + u_2 - u_1)$$

also für

$$v = u_2 - u_1,$$

$$\Delta v = p_2 v + (p_2 - p_1) u_1,$$

also

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma_2 (p_2 - p_1) u_1 dx dy$$

da aber

$$\Gamma_2 \geq 0, \quad p_2 - p_1 \geq 0, \quad u_1 \geq 0,$$

so ist diese Differenz sicher nie positiv, also ist

$$u_1 \geq u_2.$$

Um nun zu beweisen daß eine Lösung wesentlich positiver Randwerte einer Differentialgleichung $\Delta u = pu$ nirgends im Inneren verschwinden kann, bezeichnen wir mit A^2 eine Konstante, die durchweg größer ist als p .

Wir nehmen diejenige Lösung der Differentialgleichung $\Delta v = A^2 v$, die die gleichen Randwerte besitzt wie die zur Untersuchung stehende Lösung von $\Delta u = pu$ ($A^2 > p$). Nach unseren Feststellungen ist die Lösung v von $\Delta v = A^2 v$ kleiner als die Lösung u von $\Delta u = pu$. Da aber keine von beiden negativ werden kann, so müßte also das kleinere v an derselben Stelle verschwinden wie u .

Da aber v überhaupt nicht verschwinden kann, so kann auch u nirgends im Bereich verschwinden.

Aus dieser etwas langatmigen Erörterung, die wir deshalb so ausführlich gestalteten, weil wir von den einzelnen Punkten, die wir dabei

erörterten, noch mehrfach Gebrauch zu machen haben, entnehmen wir, daß die Integralsumme $\frac{1}{2\pi} \sum \int \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds$ auf Seite 197, zu der wir damit zurückkehren, nirgends im Bereich verschwinden kann, denn sie stellt dasjenige Integral von $\Delta u = pu$ dar, das die Randwerte 1 besitzt. Es ist also durchweg größer als Null und daraus folgt nun für unsere Greensche Funktion der wichtige Satz:

$$\iint p \Gamma dx dy < 2\pi.$$

Dabei steht also immer kleiner, nie gleich, wenigstens nicht für endliche p . Im Falle, daß p nicht durchweg endlich bleibt, kann sehr wohl gleich herauskommen. Dies wird gerade später für uns von Wichtigkeit werden, denn darin gipfelt unsere Integrationstheorie von $\Delta u = \alpha e^u - \beta$.

Von dem in diesem Paragraphen für beschränkte p gewonnenen Resultate wollen wir nun gleich Gebrauch machen zur Lösung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = \alpha e^u - \beta$.

§ 7.

Zurückführung der ersten Randwertaufgabe bei den Differentialgleichungen $\Delta u = e^u$ und $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ auf nicht lineare Integralgleichungen und Auflösung derselben.

Als Vorbereitung auf unsere eigentliche Aufgabe, ein auf der ganzen Riemannschen Fläche endliches Integral unserer Differentialgleichung $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ aufzufinden, wollen wir in diesem Paragraphen für einen auf der Riemannschen Fläche ganz im endlichen gelegenen Bereich, der nirgends an die singulären Punkte von α und β heranreicht, die erste Randwertaufgabe für die in der Überschrift genannten Differentialgleichungen lösen, d. h. wir fragen nach einem in diesem ganzen Bereich stetigen und zweimal stetig differentierbaren Integral dieser Differentialgleichungen; da die zweite aus der ersten durch Subtraktion einer Funktion hervorgeht, die im ganzen Bereich, in dem wir jetzt die Differentialgleichung integrieren wollen, stetig und zweimal stetig differentierbar ist, genügt es offenbar, zu beweisen, daß, wie auch immer die Randwerte endlich und stetig vorgegeben sein mögen, es immer ein und nur ein zweimal stetig differentierbares Integral der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ gibt, das diese Randwerte besitzt. (Wenn u der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ genügt, so ist $u - \log 8$ ein Integral von $\Delta u = 8e^u$.) Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit \tilde{u} diejenige im Bereiche reguläre Potentialfunktion, die am Rande die gegebenen Randwerte besitzt. Wir setzen $u = \tilde{u} + v$. Dann genügt v der folgenden Differentialgleichung $\Delta v = e^{\tilde{u}} e^v$.

Wir schreiben sie in der folgenden Form:

$$\Delta v - e^{\bar{u}} v = e^{\bar{u}} (e^v - v).$$

Wenn wir wieder wie im vorigen Paragraphen mit $\Gamma(z, Z)$ die Greensche Funktion von $\Delta v = e^{\bar{u}} v$ bezeichnen, so genügt v der folgenden nichtlinearen Integralgleichung

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma(z, Z) e^{\bar{u}} (e^v - v) dX dY.$$

Zu ihrer Auflösung bedienen wir uns der Methode der sukzessiven Approximationen. Wir setzen

$$v_0 = 0, \quad v_1 = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} dX dY, \quad v_2 = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} (e^{v_1} - v_1) dX dY$$

und allgemein

$$v_n = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} (e^{v_{n-1}} - v_{n-1}) dX dY.$$

Wir werden nun zeigen, daß die so bestimmten Funktionen v_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion v konvergieren, diese genügt dann jedenfalls der Integralgleichung

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} (e^v - v) dX dY$$

und daraus folgt in bekannter Weise, daß sie die gesuchte Lösung unserer Differentialgleichung ist.

Wir zeigen zuerst, daß die v_n mit wachsendem Index n abnehmen. Man erkennt sofort, daß $v_1 < v_0 = 0$, da Γ und $e^{\bar{u}}$ positiv sind. Ebenso sieht man sofort daß $v_2 < v_1$. Es ist nämlich

$$v_2 - v_1 = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} (e^{v_1} - v_1 - 1) dX dY.$$

Für negative v_1 ist aber hier der Integrand positiv. Um nun den Beweis $v_n < v_{n-1}$ allgemein zu erbringen, konstatieren wir zunächst eine Tatsache, von der wir oben schon im speziellen Fall Gebrauch gemacht haben, nämlich daß die Funktion $e^v - v$ mit abnehmendem negativem v ständig zunimmt, insbesondere also auch für $v \leq 0$ ständig positiv ist. Ihre Ableitung $e^v - 1$ ist ja für negative v ständig negativ. Nehmen wir also an, wir hätten bis v_{n-1} hin bereits die ständige Abnahme unserer Funktion bewiesen, so sind also v_{n-1} und v_{n-2} negativ und ist $v_{n-1} < v_{n-2}$. Nun ist aber

$$v_n - v_{n-1} = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\bar{u}} \{e^{v_{n-1}} - v_{n-1} - (e^{v_{n-2}} - v_{n-2})\} dX dY,$$

und hier ist nach unseren eben gemachten Feststellungen der Integrand positiv und also $v_n - v_{n-1} < 0$ oder $v_n < v_{n-1}$. Unsere Funktionen v_n nehmen also fortwährend ab.

Es ist also $v_0 = 0$, $v_1 < 0$. Sei nun $|v_1| \leq S$ und also auch

$$|v_1| = \frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\tilde{u}} dx dy \leq S < 1 \quad (\text{wegen § 6 Ende}).$$

Dann ist auch $0 < v_0 - v_1 \leq S$, und also $e^{v_1} - v_1 - (e^{v_0} - v_0) > 0$; andererseits aber ist dieser Ausdruck $= e^{v_1} - e^{v_0} + v_0 - v_1$ und da $e^{v_1} - e^{v_0} < 0$, so ist der ganze Ausdruck kleiner als $v_0 - v_1 \leq S$. Daraus schließt man

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\tilde{u}} \{e^{v_1} - v_1 - (e^{v_0} - v_0)\} dx dy < S^2$$

und ganz analog findet man allgemein:

$$v_{n-1} - v_n < S(v_{n-2} - v_{n-1}) < S^n.$$

Daher findet man, daß die Reihe

$$v = v_0 + (v_1 - v_0) + \dots + (v_n - v_{n-1}) \dots$$

konvergiert, denn es ist

$$\begin{aligned} |v| &< |v_0| + |v_1 - v_0| + \dots \\ &< 0 + S + S^2 + \dots \\ &< S \frac{1}{1-S}. \end{aligned}$$

Daher existiert

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Wegen

$$v_n = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\tilde{u}} (e^{v_{n-1}} - v_{n-1}) dx dy$$

gilt für v :

$$v = -\frac{1}{2\pi} \iint \Gamma e^{\tilde{u}} (e^v - v) dx dy.$$

Daher ist v eine Lösung unserer Randwertaufgabe.

Wir zeigen nun weiter, daß die Randwertaufgabe nur auf eine Weise lösbar ist und bedienen uns dazu eines Gedankens von Picard*), von dem wir auch im nächsten Paragraphen noch einmal werden Gebrauch machen müssen. Wenn u_1 und u_2 gleiche Randwerte haben und beide der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ genügen, so gilt für die Differenz $u_1 - u_2 = 0$ mit den Randwerten Null die Beziehung

$$\Delta v = e^{u_1} - e^{u_2}$$

oder nach dem Mittelwertsatz

$$\Delta v = v e^{u_1 + \theta(x, y)}$$

oder

$$\Delta v = v \cdot p(x, y),$$

wo p eine gewisse positive Funktion ist. Dann muß aber nach den

*) Picard: Journal de Liouville 1890, S. 174 f.

Erwägungen des vorigen Paragraphen die am Rande verschwindende Lösung im Inneren des Bereiches durchweg verschwinden. Also fallen beide Lösungen u_1 und u_2 zusammen. Unsere Randwertaufgabe besitzt nur eine Lösung.

Bemerkung. Wir bemerken noch, daß unsere Methode fast ohne weiteres Anwendung findet auf alle von Picard in der gerade vorhin erwähnten Arbeit behandelten Differentialgleichungen. Während aber seine Methode zunächst nur für kleine Bereiche durchgreift und der Ergänzung durch ein alternierendes Verfahren bedarf, kommen wir mit der unseren überall sofort zum Ziele. (Siehe auch die Einleitung.)

§ 8.

Konstruktion der Uniformisierungsfunktion u im Grenzkreisfalle.

Das Problem der Uniformisierung hatten wir auf den Nachweis zurückgeführt, daß es eine und nur eine auf der ganzen Riemannschen Fläche bzw. im ganzen Integrationsbereich endliche und stetige Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ gibt. Dabei waren α, β positive stetige und stetig differentierbare Funktionen, die aber an einzelnen Punkten und am Rande des Integrationsbereichs in gewisser angegebener Weise unendlich wurden. Doch lag der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ überall zwischen zwei positiven endlichen und von Null verschiedenen Schranken m und M . Um eine solche Funktion u zu gewinnen, denken wir uns den Integrationsbereich dargestellt als Limes einer Folge von Näherungsbereichen B_i , derart daß jeder folgende alle vorhergehenden ganz im Inneren enthält und daß keiner einen der singulären Punkte im Inneren oder auf dem Rande hat. Für jeden solchen Bereich ist durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen die erste Randwertaufgabe in vollem Umfange gelöst. Wir wollen nun über diese Randwerte passend verfügen, und so für jeden Näherungsbereich eine Näherungsfunktion u_i gewinnen, die dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren, welche dann die Lösung unseres Problems sein wird. Die Randwerte \bar{u}_i von u_i am Rande von B_i sollen einzig und allein der Bedingung genügen, daß sie zwischen $\log m$ und $\log M$ — zwei endlichen Zahlen — liegen. Dann behaupte ich, bleibt u_i überall im Bereiche B_i zwischen diesen selben Grenzen. Anderenfalls nämlich würde u_i ein Maximum größer als $\log m$ oder ein Minimum kleiner als $\log M$ besitzen müssen. An einer Stelle des Maximums müßte aber $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \leq 0$ und $\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \leq 0$ sein, also auch $\Delta u_i \leq 0$. An einer Stelle des Minimums aber $\Delta u_i \geq 0$.

Wenn aber $u_i > \log M$ ist, d. h. also u_i größer als das Maximum von $\log \frac{\beta}{\alpha}$, so wäre also $\alpha e^{u_i} - \beta > 0$ und damit auch $\Delta u_i > 0$, während es kleiner oder gleich Null sein soll, und wäre andererseits $u_i < \log m$ an irgend einer Stelle, so wäre es also kleiner als das Minimum von $\log \frac{\beta}{\alpha}$ also $\alpha e^{u_i} - \beta < 0$ und damit $\Delta u_i < 0$, während es größer oder gleich Null sein soll.

Wenn wir also dem u_i solche Randwerte vorschreiben, so liegen alle unsere Näherungsfunktionen zwischen festen Schranken m und M .

[Bemerkung. Es ist weiterhin nicht wichtig für uns, daß unsere Näherungsfunktionen gerade zwischen den angegebenen Schranken liegen. Wir müssen nur wissen, daß überhaupt solche festen Schranken da sind, zwischen welchen alle unsere Näherungsfunktionen liegen. Dies könnte auch auf andere Weise erreicht werden; z. B. werden wir es an einer späteren Stelle (Seite 212) beim Beweis der Unität unserer Lösung in anderer Weise erreichen.]

Es ist nun unsere weitere Aufgabe, zu beweisen, daß unsere Funktionen u_i in jedem Bereiche B , der keinen singulären Punkt im Inneren oder auf dem Rande besitzt, gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Dieser Bereich B wird von einem gewissen Index an dem Inneren aller unserer Bereiche B_i angehören, und von da an sind alle u_i in seinem Inneren definiert. Wir haben zu zeigen, daß für hinreichend großes n und beliebiges m in ganz B durchweg $|u_{n+m} - u_n| < \varepsilon$, wo mit ε eine beliebige vorgegebene positive Größe bezeichnet ist. Wenn wir diesen Nachweis erbracht haben, dann genügt die Grenzfunktion wieder der Differentialgleichung über die ganze Fläche hin und liegt durchweg zwischen unseren beiden festen endlichen Grenzen. Bezeichnen wir nämlich mit \bar{u}_i diejenige Potentialfunktion, die am Rande von B die gleichen Randwerte besitzt wie u_i , so konvergieren die \bar{u}_i gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, da dies für u_i und damit für die Randwerte von \bar{u}_i der Fall ist. Wenn wir mit $G(z, Z)$ die Greensche Funktion von $\Delta u = 0$ für B bezeichnen, so finden wir für u_i die Darstellung

$$u_i = \bar{u}_i - \frac{1}{2\pi} \iint G(z, Z) (\alpha e^{u_i} - \beta) dX dY.$$

Daraus folgt dann wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$u = \bar{u} - \frac{1}{2\pi} \iint G(z, Z) (\alpha e^u - \beta) dX dY$$

und daraus in bekannter Weise, daß u wie alle u_i der Differentialgleichung $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ genügt. Hiernach kommt also alles darauf an, den in Aussicht genommenen Konvergenzbeweis durchzuführen.

Unter Verwendung eines schon oben herangezogenen Gedankens von Picard führen wir diesen Konvergenzbeweis auf eine Aussage über eine Differentialgleichung von der Form $\Delta u = pu$ zurück. Für die Differenz $u_{n+m} - u_n$ finden wir nämlich in B :

$$\begin{aligned}\Delta(u_{n+m} - u_n) &= \alpha e^{u_{n+m}} - \alpha e^{u_n} \\ &= \alpha e^{u_n}(e^{u_{n+m}-u_n} - 1) \\ &= \alpha(u_{n+m} - u_n) e^{u_n + \theta(x,y)(u_{n+m}-u_n)} \\ &= \alpha \cdot \gamma_n(u_{n+m} - u_n).\end{aligned}$$

Dabei ist nun γ_n eine Funktion, die in ganz B_n positiv bleibt und unter einer festen vom Index unabhängigen Schranke bleibt, und ebenso oberhalb einer positiven Schranke. Also $\mu < \gamma_n < M$. Die Randwerte von $u_{n+m} - u_n$ am Rande von B_n liegen unterhalb einer festen von n und m unabhängigen positiven Schranke S und oberhalb einer Schranke $-S$. Dann liegt im ganzen Bereiche B_n unsere Differenz zwischen den Lösungen v_1 und v_2 von $\Delta v = \alpha \gamma_n v$, deren erste die Randwerte S , deren zweite die Randwerte $-S$ besitzt. Da nun aber eben gefunden wurde $\alpha \gamma_n > \alpha \mu$, so ist nach einem Ergebnisse von § 6 (Seite 199) v_1 immer kleiner als die Lösung gleicher Randwerte von $\Delta v = \alpha \mu v$ und ebenso wegen $\alpha \gamma_n > \alpha \mu$, v_2 immer größer als die Lösung gleicher negativer Randwerte von $\Delta v = \alpha \mu v$. Unser ganzer Konvergenzbeweis wird mithin auf den folgenden Nachweis hinauslaufen.

Sei Σ eine beliebige aber fest gegebene positive Zahl, B unser obiger fester Bereich, v irgend eine Lösung von $\Delta v = \alpha \mu v$, die in B_n endlich, stetig und stetig differentierbar ist, und deren Randwerte an B_n dem Betrage nach S nicht übertreffen, dann kann man immer eine Zahl N bestimmen, so, daß für alle $n > N$ in ganz B die Relation $|v| < \varepsilon$ gilt.

Wir können diese Behauptung auch so aussprechen: Die einzige über den ganzen Integrationsbereich hin endliche und stetige und außer an den Unstetigkeitspunkten von α stetig differentierbare Lösung von $\Delta v = \alpha \mu v$ ist die Null.

Das wird gleich noch deutlicher werden. Bezeichnen wir mit Γ_i die Greensche Funktion von $\Delta v = \alpha \mu v$ für B_i , mit \bar{v}_i die Randwerte von v_i , so ist also

$$v_i = \frac{1}{2\pi} \int \bar{v}_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} ds,$$

wobei die Integration über alle Randkurven von B_i zu erstrecken ist. Ist M_1 das Maximum und μ_1 das Minimum von \bar{v}_i , so ist

$$\mu_1 \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} ds < v < M_1 \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} ds.$$

Hier ist aber $\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n} ds = \omega_i$, diejenige Lösung der Differentialgleichung $\Delta \omega = \alpha \mu \omega$, die am Rande von B_i den Wert Eins hat, und die daher nach § 6 im ganzen Bereiche B_i zwischen den Grenzen Null und Eins liegt. Außerdem bilden die ω_i eine ständig abnehmende Funktionenfolge, denn die Randwerte von ω_{i+1} am Rande von B_i sind kleiner als Eins also kleiner als die Randwerte von ω_i daselbst. Daher konvergieren die ω_i gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion ω . Bezeichnen wir nämlich mit $\Gamma_k(x, y, XY)$ die Greensche Funktion von $\Delta v = \alpha \mu v$ für B_0 , mit $\bar{\omega}_i$ die Randwerte von ω_i am Rande von B_k , mit $\bar{\omega}$ die von ω , so haben wir

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\omega}_i \frac{\partial \Gamma_k}{\partial n}(x, y, XY) ds$$

für jedes x, y von B . Nach einem bekannten Satz der Integralrechnung wird daraus in der Grenze:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\omega} \frac{\partial \Gamma_k}{\partial n}(x, y, XY) d\bar{s}$$

und die Konvergenz ist ersichtlich in ganz B — B irgend ein Teilbereich von B_k — eine gleichmäßige. Die Grenzfunktion ist daher wieder eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta v = \alpha \mu v$, die überall zwischen Null und Eins liegt. Wir wollen zeigen, daß sie Null sein muß. Wir führen diesen Nachweis zunächst in dem Falle, wo unser Bereich keine Randkurven aufweist, behandeln also den Grenzkreisfall. $\alpha \mu$ ist also überall endlich und stetig und stetig differentierbar, außer an gewissen isolierten Punkten der Fläche. Wie sich $\alpha \mu$ da im einzelnen verhält, kann uns gleichgültig sein. Das spielt für unseren Nachweis keine Rolle. Hier ist nun unsere Behauptung im wesentlichen eine Aussage über hebbare Unstetigkeiten. Wenn nämlich die positive Funktion ω nicht über die ganze Fläche hin verschwindet, so muß sie irgendwo ein positives Maximum aufweisen. An solchen Stellen der Fläche aber, wo $\alpha \mu$ regulär und positiv ist, wo also u zweimal stetig differentierbar ist, kann dies jedenfalls nicht eintreten, denn dort müßte $\Delta u \leq 0$, während es nach unserer Differentialgleichung wesentlich positiv ist. Bleiben also nur die Stellen, wo $\alpha \mu$ singulär ist, oder wo es verschwindet. Legen wir nun um ein irgend einen solchen Punkt als Zentrum einen konzentrischen Kreisring mit den Kreisen K_1 und K_2 als Rand; K_1 wollen wir festhalten, während sich K_2 allmählich auf den Mittelpunkt zusammenziehen soll. Für jeden dieser Kreisringe betrachten wir diejenige Potentialfunktion $\bar{\omega}$, die an seinem Rande die gleichen Randwerte besitzt, wie ω . Dann bekommen wir für ω die Darstellung

$$\omega = \bar{\omega} - \frac{1}{2\pi} \iint G \alpha \mu \omega dX dY$$

wo G , die Greensche Funktion von $\Delta u = 0$ für den Kreisring bedeutet. Also ist jedenfalls überall $\omega < \bar{\omega}$. Da aber im Zentrum des Kreises ω ein Maximum haben soll, so werden, von einem gewissen Kreisring an, die Randwerte von ω längs des inneren Kreisringes nicht mehr abnehmen, während sie längs K_1 fest bleiben. Daraus folgt aber, daß die Potentialfunktionen $\bar{\omega}$ jedenfalls nie zunehmen und kleiner als Eins und größer als Null bleiben wird. Sie konvergieren daher gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion, die auch im Mittelpunkte des Kreises K_1 wie in allen seinen anderen Punkten regulär ist, und daher in seinem Mittelpunkte dem arithmetischen Mittel ihrer Randwerte gleich ist. Unser ω ist aber dort sicher in keinem seiner Grenzwerte größer als diese Potentialfunktion, und kann daher dort kein Maximum besitzen. ω besitzt also nirgends ein positives Maximum und muß daher auf der ganzen Fläche verschwinden. Damit haben wir für den Fall einer geschlossenen Riemannschen Fläche alles bewiesen.

Bevor wir nun zum Falle einer berandeten Fläche übergehen, mag hier noch eine Tatsache bewiesen werden, von der wir oben (Seite 185) schon einmal Gebrauch machten: nämlich daß eine Lösung von $\Delta u = e^u$, die überall endlich und stetig differentierbar ist, außer an einem einzigen Punkte, in dessen Umgebung sie jedoch beschränkt bleiben soll, daß eine solche Lösung auch in diesem einen Punkte noch differentierbar ist. Sei nämlich a dieser Punkt und k ein genügend kleiner um denselben abgegrenzter Kreis, so bezeichnen wir die zu untersuchende Lösung mit u und die stetig differentierbare Lösung gleicher Randwerte mit \bar{u} . Dann genügt die Differenz $u - \bar{u} = v$ einer Differentialgleichung der Gestalt $\Delta v = pv$, wo p eine positive Funktion ist, die überall, außer an jenem Punkte, stetig differentierbar ist. v besitzt die Randwerte Null und ist in unserem Kreise beschränkt. Ganz durch die eben vorhin benutzte Schlußweise erkennen wir, daß die Differenz $u - \bar{u}$ überall verschwinden muß.

§ 9.

Der Hauptkreisfall.

Wir gehen nun zum Falle des berandeten Integrationsbereiches über. Nach den Darlegungen in § 8 kommt auch hier alles darauf an, zu zeigen, daß

$$1 - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \alpha u \, dX \, dY = 0.$$

Die Funktion

$$u_i = 1 - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_i} \alpha u \, dX \, dY$$

ist nämlich diejenige Lösung von $\Delta u = \alpha \mu u$, die am Rande B_i den Wert Eins besitzt. Daher gilt für sie auch die folgende Relation

$$u_i = 1 - \frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY.$$

Hier haben wir mit G_i die Greensche Funktion von $\Delta u = 0$ für den Bereich B_i bezeichnet. Aus dieser Integralgleichung ergibt sich nun auch, daß für alle i :

$$\frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY \leq 1$$

bleibt. Denn die u_i bilden ja eine ständig abnehmende Folge positiver Funktionen. Es wird nun darauf ankommen aus dieser Eigenschaft der u_i auf ihre Kleinheit bei genügend hohem Index i zu schließen. Da wir u_i im Bereiche B abschätzen wollen, der im Inneren aller Näherungsbereiche liegt, so bleibt der Parameter x, y der Greenschen Funktion $G(x, y, X, Y)$ auf diesen Bereich beschränkt. Es genügt nun für unsere Zwecke zunächst, statt des

$$\iint G_i \alpha \mu u_i dX dY,$$

erstreckt über ganz B_i , dies Doppelintegral zu betrachten, nur erstreckt über den Teil von B_i , der zwischen \mathcal{S}_0 und \mathcal{S}_i liegt. Dabei bezeichne ich mit \mathcal{S}_0 diejenige Randkurve von B_0 , mit \mathcal{S}_i diejenige Randkurve von B_i , die zur Approximation ein und derselben Symmetrielinie \mathcal{S} der Fläche dienen. Auch dies Doppelintegral muß dann für alle i positiv und kleiner als Eins sein. Die Kurven $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_i$ sollen wie die Symmetrielinien selbst analytische geschlossene singularitätenfreie Kurven sein. Wir ziehen \mathcal{S}_0 benachbart im Inneren von B_0 eine weitere solche Kurve Σ , die zusammen mit der Symmetrielinie \mathcal{S} ebenso wie mit $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_i$ zweifach zusammenhängende Flächenbänder begrenzen, die keine nichtzerstückenden inneren Rückkehrschnitte zulassen. Betrachten wir nun $G_0(x, y, X, Y)$; x, y bedeutet irgend einen Punkt in B . X, Y die Integrationsvariable, also irgend einen Punkt in B_0 . Wenn wir nun X, Y auf Σ , x, y in B beliebig variieren lassen, so besitzt $G_0(x, y, X, Y)$ für diese Werte seiner Variablen ein positives von Null verschiedenes Minimum und ein positives endliches Maximum. Denn wäre z. B. das jedenfalls vorhandene Minimum Null, und würde es etwa für x_0, y_0, X_0, Y_0 angenommen, so wäre $G_0(x, y, X_0, Y_0)$ eine Potentialfunktion von x, y , die in dem Bereiche B_0 überall positiv oder Null wäre, auf dem Rande verschwände, bei X_0, Y_0 positiv unendlich würde und in einem inneren Punkte x_0, y_0 dieses Bereiches verschwände. Das geht aber nicht an. Ganz ähnlich erkennt man unsere Aussage über das Maximum. Also bleibt $G_0(x, y, X, Y)$ längs Σ wie auch x, y in B

gewählt sein mag, oberhalb einer festen Grenze A . Dann bleiben die Greenschen Funktionen G_i aller anderen Bereiche B_i aber längs Σ oberhalb dieser selben Grenze A , da sie als Greensche Funktionen der Bereiche B_i , die alle B_0 enthalten, größer sind als die Greensche Funktion von B_0 . Wie also nun auch x, y in B gewählt sein mag, immer bleibt in dem Gürtel zwischen \mathfrak{S}_i und Σ die Funktion G_i größer als die Potentialfunktion $\pi_i A$, die längs \mathfrak{S}_i verschwindet und längs Σ den Wert A besitzt. Denn die Randwerte dieser sind ja kleiner als die von G_i . Mit π_i ist also diejenige Potentialfunktion bezeichnet, die auf \mathfrak{S}_i verschwindet, und auf Σ den Wert Eins besitzt. Somit finden wir jetzt für unser Doppelintegral über den Gürtel zwischen \mathfrak{S}_i und \mathfrak{S}_0 :

$$\frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY > \frac{A}{2\pi} \iint \pi_i \alpha \mu u_i dX dY.$$

Wir wollen nun zunächst für eine spezielle Wahl unserer Näherungskurven \mathfrak{S}_i den Beweis zu Ende führen und uns erst hernach von dieser speziellen Wahl befreien. Wir betrachten diejenige Potentialfunktion v , die längs \mathfrak{S} verschwindet und längs Σ den Wert Eins besitzt. Die Niveaulinien dieser Funktion, also die Kurven $v = \text{const.}$, wollen wir als Kurven \mathfrak{S}_i wählen. Ist φ die konjugierte Potentialfunktion, so schneiden die Kurven $\varphi = \text{const.}$ die Kurven $v = \text{const.}$ durchweg senkrecht, und wir haben in dem von $v = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ gebildeten Kurvennetz eines vor uns, wie wir es ähnlich in § 2 benutzten, um das Verhalten der Koeffizienten unserer Differentialgleichung $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ bei Annäherung an die Symmetrielinie \mathfrak{S} feststellen zu können. Nach den damals gewonnenen Ergebnissen können wir in dem ganzen Gürtel von \mathfrak{S} bis Σ setzen $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{v^2}$. Hier ist $\bar{\alpha}$ eine Funktion die durchweg oberhalb einer festen positiven Schranke $\bar{\alpha}$ bleibt. Also haben wir $\alpha > \frac{\bar{\alpha}}{v^2}$. (Siehe auch Seite 191.)

Aus dieser Potentialfunktion v , die wir eben einführt, können wir nun auch mit Leichtigkeit π_i gewinnen. Bezeichnen wir nämlich mit v_i den Wert von v längs \mathfrak{S}_i , so ist $\pi_i = \frac{v - v_i}{1 - v_i}$. Also ist $\pi_i > v - v_i$. In unserem zuletzt aufgeschriebenen Doppelintegral kommt endlich noch μ vor. Das ist eine feste Zahl. Wenn wir das nun alles benutzen, können wir die oben gewonnene Abschätzung zu Ende führen. Wir finden:

$$\frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY > \frac{\bar{\alpha} \mu A}{2\pi} \iint \frac{v - v_i}{v^2} u_i dX dY.$$

Nun wollen wir weiter in diesem Integral statt der Integrationsvariablen X, Y die Variablen v, φ einführen. Die dabei zu verwendende Funktional-

determinante bleibt ersichtlich im ganzen Gürtel oberhalb einer positiven Schranke $\delta > 0$. So bekommen wir die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY > \frac{\delta \bar{\alpha} \mu \Lambda}{2\pi} \iint \frac{v - v_i}{v^2} u_i d\nu d\varphi.$$

Nun können wir schreiben

$$\iint \frac{v - v_i}{v^2} u_i d\nu d\varphi = \int_{v_i}^{v_0} \frac{v - v_i}{v^2} \left[\int u_i d\varphi \right] d\nu.$$

Bezeichnen wir mit M_i das Minimum des Integrales $\int u_i d\varphi$ erstreckt über irgend eine Kurve $v = \text{const.}$, so finden wir, daß unser noch abzuschätzendes zweifaches Integral größer ist als

$$M_i \int_{v_i}^{v_0} \frac{v - v_i}{v^2} d\nu = M_i \left[\log \left(\frac{v_0}{v_i} \right) + v_i \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_i} \right) \right].$$

Da nun aber für wachsenden Index i sich v_i der Null nähert, so wächst der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck über alle Grenzen. Es würde also auch das M_i -fache und damit das ganze Integral

$$\frac{1}{2\pi} \iint G_i \alpha \mu u_i dX dY,$$

das doch kleiner als Eins bleiben soll, über alle Grenzen wachsen, wenn nicht M_i mit wachsendem i sich der Null beliebig näherte. M_i war aber das Minimum von $\int u_i d\varphi$ erstreckt über irgend eine Kurve $v = \text{const.}$ Hieraus folgt also, daß wir immer im Bereiche B_i bei hinreichend großem Index i eine Kurve $v = \text{const.}$ ausfindig machen können, längs der integriert $\int u_i d\varphi$ kleiner ausfällt als eine vorgegebene Zahl ε . Das gleiche gilt dann auch von dem Integral $\int u_i d\sigma$, wenn wir mit σ die Bogenlänge einer Kurve $v = \text{const.}$ bezeichnen, da sich beide Integrale ersichtlich nur um einen Faktor unterscheiden, der ein für allemal, d. h. für alle Kurven $v = \text{const.}$ zugleich, zwischen festen endlichen von Null verschiedenen Grenzen liegt. Die Kurve, längs der also nun $\int u_i d\sigma < \varepsilon$, möge \mathcal{S}_i sein. Dann besitzt also u_i längs \mathcal{S}_i diese positiven Randwerte, deren Integral $\int u_i d\sigma < \varepsilon$, und längs denjenigen Randkurven, die B_i gegen die isolierten kritischen Punkte hin abgrenzen, gewisse Werte kleiner als Eins. Es genügt der Differentialgleichung $\Delta u_i = \alpha \mu u_i$. Daher ist u_i jedenfalls kleiner als eine Potentialfunktion \tilde{u}_i , die längs \mathcal{S}_i die Werte u_i besitzt, deren Integral $\int u_i d\sigma < \varepsilon$ ist, und die an den übrigen Randkurven von B_i den Wert Eins hat. Wir zerlegen diese Potentialfunktion in zwei Teile $u_i = v_i + \omega_i$. Da

soll nun ω_i längs \mathfrak{S}_i verschwinden, und an den anderen Randkurven, die sich mit wachsendem Index auf Punkte zusammenziehen, den Wert Eins haben, v_i dagegen längs \mathfrak{S}_i jene Werte u_i haben, und längs den übrigen Randkurven von B_i verschwinden. Bezeichnen wir dann mit G_i die Greensche Funktion von $\Delta u = 0$ für B_i , so gilt die Darstellung

$$v_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{S}_i} \frac{\partial G_i}{\partial n} u_i d\sigma.$$

Das Linienintegral ist nur über die den einzelnen Symmetrielinien entsprechenden Kurven \mathfrak{S}_i zu erstrecken. Wenn wir nun noch zeigen können, daß $\frac{\partial G_i}{\partial n}$, wenn der Parameter x, y auf B beschränkt bleibt, unterhalb einer für alle i gleichen festen Grenze g bleibt, so ist dann in ganz B $v_i < \frac{g}{2\pi} M_i$. Also konvergiert dann v_i , mit wachsendem i , gleichmäßig gegen Null. Ebenso konvergiert aber ω_i gegen Null. Denn das sind ständig abnehmende ständig positive Potentialfunktionen, die durchweg kleiner als Eins sind und längs \mathfrak{S}_i verschwinden. Nach dem Satze über hebbare Unstetigkeiten konvergieren sie also gleichmäßig gegen Null in B , weil Null die einzige im berandeten Bereiche endliche an seinem Rande verschwindende Potentialfunktion ist. Wir müssen also nun nur noch zeigen, daß $\frac{\partial G_i}{\partial n}$ für alle i kleiner als g ist.

Wir hatten oben einmal gezeigt, daß G_i für alle i längs Σ oberhalb einer festen Schranke bleibt, wie auch x, y in B gewählt sein mag. Ebenso können wir auch zeigen, daß alle G_i unter den gleichen Bedingungen unterhalb einer festen Schranke S bleiben, nämlich unter dem Maximum S der Greenschen Funktion der ganzen berandeten Riemannschen Fläche, die ja alle unsere Näherungsbereiche umfaßt. Wie also auch x, y in B liegen mag, immer ist in dem ganzen Gürtel von \mathfrak{S}_i bis Σ , G_i kleiner als die Potentialfunktion φ_i , die längs \mathfrak{S}_i verschwindet, und längs Σ den Wert S hat. Also ist auch die Ableitung von G_i nach der Normalen längs \mathfrak{S}_i kleiner als die analoge Ableitung dieser Potentialfunktion φ_i . Unter Benutzung der oben eingeführten Potentialfunktion v , die an \mathfrak{S} verschwindet, und an Σ den Wert Eins hat, können wir schreiben:

$$\varphi_i = S \cdot \frac{v - v_i}{1 - v_i}.$$

Für diese Funktion ist aber ersichtlich unsere Behauptung richtig, da $\frac{\partial v}{\partial n}$ zwischen festen endlichen Grenzen liegt. Also bleibt auch das kleinere $\frac{\partial G_i}{\partial n}$ unter einer festen Grenze, die von i unabhängig ist, und damit ist unser Beweis zu Ende.

Wenn wir wollen, können wir uns nun auch noch von der oben getroffenen speziellen Wahl der Näherungskurven \mathfrak{S}_i frei machen. Haben wir nämlich irgend welche anderen Näherungskurven \mathfrak{S}'_i , so liegt jede derselben zwischen zwei Kurven \mathfrak{S}_λ und $\mathfrak{S}_{\lambda'}$. Es gibt mit anderen Worten einen Näherungsbereich B_λ der in B'_i enthalten ist, und einen $B_{\lambda'}$, der umgekehrt B'_i im Inneren enthält. Dann gilt aber auch die Ungleichung

$$u_\lambda < u_i < u_{\lambda'}.$$

Wenn dann aber die u_λ gegen Null konvergieren, so ist natürlich mit u_i das gleiche der Fall.

§ 10.

Unitätsbeweis.

Es bleibt endlich noch der Nachweis zu erbringen, daß die so gefundene überall endliche Lösung von $\Delta u = \alpha e^u - \beta$ die einzige ist. Der Beweis dafür liegt aber schon in unseren seitherigen Betrachtungen. Denn wenn u_1 und u_2 zwei solche Lösungen sind, so braucht man sie nur abwechselnd*) als Lösungen der Randwertaufgaben für die Näherungsbereiche zu nehmen. Dann beweist unsere Betrachtung ihre Übereinstimmung, da ja ganz willkürlich war, was für Lösungen der Randwertaufgabe wir benutzten, wenn nur alle diese Lösungen zwischen zwei festen endlichen vom Index unabhängigen Grenzen lagen.

*) Vgl. auch meine Besprechung von Fricke-Klein: Automorphe Funktionen Bd. 2, Lief. 3, Archiv f. Math. (3) 21, S. 160.