

## Eine Bemerkung über relativistische Röntgendoublets und Linienschärfe.

Von A. Sommerfeld und W. Heisenberg in München.

(Eingegangen am 3. August 1922.)

In den neueren Überlegungen Bohrs spielt der Strahlungswiderstand eine prinzipielle Rolle. Da die Ergebnisse der klassischen Theorie durch das Korrespondenzprinzip für die Quantentheorie nutzbar gemacht werden und da der Strahlungswiderstand ein notwendiges Glied der klassischen Theorie bildet, so sollte er auch für die quantentheoretische Behandlung von Bedeutung sein, obwohl er dort vernachlässigt werden muß: er bestimmt nach Bohr die Unschärfe, die den quantentheoretischen Methoden notwendig anhaftet. Eine Quantenrechnung, welche Glieder berücksichtigt, die kleiner sind als der vernachlässigte Energieverlust durch klassische Ausstrahlung, ist nach Bohr prinzipiell unzulässig. Zu solchen Gliedern zählt man, wie es scheint, die höheren Relativitätskorrekturen, die in der Theorie der Röntgendoublets bei den schweren Atomen auftreten. Es soll demgegenüber gezeigt werden, daß die Berücksichtigung dieser Korrekturen mit dem Bohrschen Gesichtspunkte von der Rolle des Strahlungswiderstandes vollkommen verträglich ist. Ferner soll besprochen werden, was sich aus dem gleichen Gesichtspunkte für die Abklingungsversuche von W. Wien<sup>1)</sup> beim Leuchten der Kanalstrahlen schließen läßt.

§ 1. Die Größenordnung der verschiedenen Relativitätskorrekturen im Vergleich mit dem Strahlungswiderstande. Vom empirischen Standpunkte aus kann kein Zweifel sein über die Notwendigkeit der höheren Relativitätskorrekturen bei den *L*-Doublets der schweren Elemente. (Bei den *M*- und *N*-Doublets sowie bei den leichteren Elementen sind diese Korrekturen ohnehin so klein, daß sie numerisch belanglos werden.) Man vgl. z. B. Tab. 51 in dem Buche<sup>2)</sup> „Atombau und Spektrallinien“. Hier ergibt sich der in der ganzen Reihe der Elemente konstante Wert 3,5 der Abschirmungszahl nur dann, wenn man z. B. bei Uran außer dem Hauptgliede mit  $\alpha^2$  ( $\alpha = \text{Konstante der Feinstruktur} = \frac{2\pi e^2}{c\hbar} = 7,29 \cdot 10^{-3}$ ) noch die Glieder mit  $\alpha^4$  und  $\alpha^6$  berücksichtigt. Wollte man bei dem

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys., Mitteilung I, 60, 597, 1919 u. Mitteilung II, 66, 229, 1921.

<sup>2)</sup> 3. Aufl., Braunschweig 1922, S. 611.

Hauptglieder stehen bleiben, so ergäbe sich für Uran statt  $s = +3,5$  der unsinnige Wert  $s = -3,7$ .

Überschlagen wir nun theoretisch die sukzessiven Relativitätskorrekturen im Verhältnis zum Strahlungswiderstande. Jene entstehen aus dem Trägheitsgliede, das wir für transversale Beschleunigung — wir denken etwa an eine Kreisbahn — anschreiben:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \ddot{v} = m_0 \dot{v} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right), \quad (1)$$

dieser ist für eine Kreisbahn von der Periode  $\frac{2\pi}{\omega}$  umgerechnet:

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{v} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} i \omega \dot{v}. \quad (2)$$

Jedem Gliede  $\beta^{2s}$  von (1) entspricht in der schließlichen relativistischen Dublettformel je das Glied mit  $\alpha^{2s}$ . Um zu sehen, welche Glieder in (1) größer sind als (2), wie viele Glieder der Entwicklung in (1) also im Sinne Bohrs beizubehalten sind, bilden wir das Verhältnis von (2) gegen das Glied mit  $\beta^{2s}$  von (1), unter Weglassung unwesentlicher Zahlenfaktoren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^2 \omega}{m_0 c^3 \beta^{2s}} &= \frac{e^2 \omega^3}{\omega^2 m_0 c^3 \beta^{2s}} = \frac{e^2 v^3}{a^3 \omega^2 c^3 m_0 \beta^{2s}} = \frac{e^2 \beta^{3-2s}}{a^3 \omega^2 m_0} = \frac{\beta^{3-2s}}{Z} \\ &= \frac{\alpha}{n} \left( \frac{\alpha Z}{n} \right)^{2-2s}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hier entsteht die zweite Form aus der ersten durch Erweiterung von Zähler und Nenner mit  $\omega^2$ , die dritte durch die Substitution  $\omega = \frac{v}{a}$ , wo  $a$  den Bahnradius bedeutet; die vierte berücksichtigt  $\frac{v}{c} = \beta$ ; die fünfte benutzt die Gleichung der Zentrifugalkraft:

$$m a^3 \omega^2 = e^2 Z, \quad (4)$$

wo  $Z$  die effektive Kernladungszahl für den als wasserstoff- und kreisähnlich berechneten Bahntypus bedeutet; schließlich folgt die letzte Form, wenn man berücksichtigt:

$$\beta = \frac{\alpha Z}{n}, \quad (5)$$

welche Beziehung in bekannter Weise aus (4) und der Gleichung des Impulsmomentes

$$m a^2 \omega = \frac{n \hbar}{2 \pi} \quad (6)$$

durch Division beider hervorgeht.

Das in (3) berechnete Verhältnis muß nun  $\leq 1$  sein, wenn das Glied  $\alpha^{2s}$  noch beizubehalten ist, d. h. es muß sein:

$$\left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^{2s-2} \geq \frac{\alpha}{n}. \quad (7)$$

Die folgende Tabelle gibt die linke Seite von (7) für  $n = 2$  (*L*-Doublett) und für verschiedene Werte von  $s$  und  $Z$  an. Wir haben diejenige Zahl in jeder Reihe eingeklammert, welche bereits kleiner als  $\frac{\alpha}{2} = 3,6 \cdot 10^{-3}$  ist; das zugehörige  $s$  gibt diejenige Relativitätskorrektur  $\alpha^{2s}$  an, welche dementsprechend wegen des Strahlungswiderstandes bereits als nichtssagend fortzulassen ist. Man sieht: Bei Wasserstoff und den leichtesten Elementen hat man nur das erste Relativitätsglied  $\frac{R\alpha^2 Z^4}{2^4}$  zu berücksichtigen. Oberhalb Ca tritt das zweite Glied hinzu. Bei Uran,  $Z = 92 - 3,5$ , ist es berechtigt, auch das dritte Glied mitzurechnen. Die hierdurch bestimmten Grenzen decken sich vollständig mit den Genauigkeitsgrenzen, in denen die seitherige Berechnung des *L*-Doublets ausgeführt wurde.

$s =$	1	2	3	4
$Z = 10$	1	(1,3 · 10 <sup>-3</sup> )	—	—
20	1	5,3 · 10 <sup>-3</sup>	(2,8 · 10 <sup>-5</sup> )	—
50	1	3,3 · 10 <sup>-2</sup>	(1,1 · 10 <sup>-3</sup> )	—
90	1	1,1 · 10 <sup>-1</sup>	1,2 · 10 <sup>-2</sup>	(1,3 · 10 <sup>-3</sup> )

Wir ziehen daraus den Schluß:

Der von Bohr ins Auge gefaßten korrespondenzmäßigen Verwertung des Strahlungswiderstandes steht von seiten der Relativitätskorrekturen der Röntgendoublets nichts im Wege.

§ 2. Abklingungsdauer und Linienbreite als Folge des Strahlungswiderstandes. Das in (3) berechnete Verhältnis gibt für  $s = 0$  den Strahlungswiderstand geteilt durch das erste Trägheitsglied, welches hinreichend genau den gesamten Trägheitswiderstand darstellt. Indem wir das Verhältnis der Widerstände gleich dem der entsprechenden Energiebeträge setzen<sup>1)</sup>, schreiben wir (3):

$$\frac{U}{W} = \frac{\alpha^3 Z^2}{n^3}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Hierin liegt eine gewisse Willkür. Wenn wir die Energie  $U$  direkt berechnen, z. B. als die während eines Umlaufes ausgestrahlte Energie, so tritt in (8) rechter Hand der Faktor  $8\pi/3$  hinzu. Durch unsere korrespondenzmäßige Normierung in Gleichung (13) würde dieser Faktor nachträglich wieder fortgeschafft werden. Statt  $4/15$  würde es dann in (13) heißen  $1/10\pi$ .

Hier bedeutet  $U$  die Unschärfe, die durch den vernachlässigten Strahlungswiderstand in die Energiebestimmung hineinkommt,  $W$  ist die quantenmäßig bestimmte Energie der Bahn, also für ein wasserstoffähnliches Atom:

$$W = \frac{h R Z^2}{n^2} \quad (9)$$

( $R = \text{Rydbergkonstante}$ ). Aus (8) und (9) folgt:

$$\frac{U}{h} = \frac{\alpha^3 R Z^4}{n^5}. \quad (10)$$

Es kommt jetzt darauf an, aus dem Korrespondenzprinzip auf den Zusammenhang zu schließen zwischen den Unschärfen  $U_1, U_2$  der beiden Termenergien und der Breite  $\Delta\nu$  der Linie, die sich aus den beiden Termen zusammensetzt. Es zeigt sich, daß  $h\Delta\nu$  proportional gesetzt werden muß mit  $U_1 - U_2$  (nicht etwa, wie man vom Begriff der Energieschwankung ausgehend lieber annehmen würde, proportional mit  $\sqrt{U_1^2 + U_2^2}$ ), und daß der Proportionalitätsfaktor von der Größenordnung 1 wird.

Um das Korrespondenzprinzip mit Sicherheit anwenden zu können, gehen wir in den Quantenzahlen ( $n_2, n_1$ ) von Anfangs- und Endterm zur Grenze  $n_2 = n_1 + 1 = n = \infty$  über und erhalten aus (10):

$$\frac{1}{h} (U_1 - U_2) = \alpha^3 R Z^4 \left( \frac{1}{n_1^5} - \frac{1}{n_2^5} \right) = \alpha^3 R Z^4 \frac{5}{n^6}. \quad (11)$$

Andererseits ist die klassisch gerechnete Linienbreite, soweit sie lediglich vom Strahlungswiderstande herrührt:

$$\Delta\nu_{kl} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^3 m} \nu^2;$$

für wasserstoffähnliche Atome ergibt sie bei entsprechendem Grenzübergang:

$$\Delta\nu_{kl} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^3 m} R^2 Z^4 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^3 m} R^2 Z^4 \left( \frac{2}{n^2} \right)^2. \quad (12)$$

Die Abhängigkeit von  $n, Z$  und den Elektronenkonstanten ist, wie man nach der Bedeutung von  $\alpha$  und  $R$  leicht bestätigt, in (11) und (12) die gleiche. Um den Zahlenfaktor zu vergleichen, bilden wir den Quotienten von (12) und (11):

$$\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^3 m} \frac{4R}{5\alpha^3} = \frac{4}{15}. \quad (13)$$

Mit diesem Faktor haben wir (11) zu multiplizieren, um  $\frac{1}{h} (U_1 - U_2)$  zu normieren, d. h. an den klassisch berechneten Wert von  $\Delta v_{kl}$  anzupassen. Den so normierten Betrag nennen wir die quantentheoretische Unschärfe:

$$\Delta v_{qu} = \frac{4}{15} \alpha^3 R Z^4 \left( \frac{1}{n_1^5} - \frac{1}{n_2^5} \right) = \frac{16 \pi e^2}{15 c^3 m} R^2 Z^4 \left( \frac{1}{n_1^5} - \frac{1}{n_2^5} \right). \quad (14)$$

Wir wollen nun angeben, wie sich diese Formeln ändern, wenn wir von Kreis- zu Ellipsenbahnen übergehen. Indem wir mit Bohr  $n$  für die Hauptquantenzahl (Summe von azimuthaler und radialer Quantenzahl) beibehalten, bezeichnen wir die azimuthale Quantenzahl mit  $k$ . Wir berechnen  $U$  für eine Ellipsenbahn als die während eines Umlaufes ausgestrahlte Energie, wobei wir uns vorbehalten, den dabei auftretenden Zahlenfaktor (vgl. die Anmerkung zu S. 395) korrespondenzmäßig zu normieren. Wir erhalten dann statt Gleichung (10):

$$\frac{U}{h} = \frac{\alpha^3 R Z^4}{k^5} f, \quad f = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ 3 - \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right]. \quad (10a)$$

$k^5$  tritt also jetzt an die Stelle von  $n^5$ ; der Faktor  $f$ , der für Kreisbahnen ( $k = n$ ) gleich 1 wird, trägt der Exzentrizität  $\varepsilon$  der Ellipsenbahn Rechnung. Dementsprechend ergibt sich statt Gleichung (14):

$$\Delta v_{qu} = \frac{16 \pi e^2}{15 c^3 m} R^2 Z^4 \left( \frac{f_1}{k_1^5} - \frac{f_2}{k_2^5} \right). \quad (14a)$$

$f_2$  und  $f_1$  sind die Werte von  $f$  in der Anfangs- und Endbahn.

Wir gehen jetzt auf die Linien der Balmerserie ( $Z = 1$ ) und die Wienschen Kanalstrahlungsmessungen ihrer Abklingung ein. Indem wir jedesmal an die stärkste Linie der Feinstruktur denken, setzen wir  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $f_1 = 1$  und bzw. für  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$

$$f_2 = 1 \text{ bzw. } = \frac{1}{2} \left[ 3 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right] = 1,22 \text{ bzw. } = \frac{1}{2} \left[ 3 - \left( \frac{3}{5} \right)^2 \right] = 1,32,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{k_1^5} - \frac{f_2}{k_2^5} &= \frac{1}{2^5} (1 - 0,13) \text{ für } H_\alpha, \\ &= \frac{1}{2^5} (1 - 0,16) \quad \text{„} \quad H_\beta, \\ &= \frac{1}{2^5} (1 - 0,17) \quad \text{„} \quad H_\gamma. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (14a) folgt daraufhin, daß unser  $\Delta v_{qu}$  merklich konstant, d. h. für alle Balmerlinien dasselbe wird. Gerade dies hat Wien beobachtet.

Wien vergleicht seinen Beobachtungswert mit dem klassisch gerechneten Werte von  $H_{\alpha}$ . Wir bilden deshalb aus (14a) und (12) für  $k_1 = n_1 = 2$ ,  $k_2 = n_2 = 3$ ,  $f_1 = f_2 = 1$ :

$$\frac{\Delta v_{qu}}{\Delta v_{kl}} = \frac{4}{5} \frac{\frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5}}{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^2} = 1,125.$$

Ganz ähnlich findet Wien als Verhältnis der beobachteten zur klassisch berechneten Abklingungszeit in Mitteilung I: 1,25, in Mitteilung II: 0,81.

Wien hat auch Beobachtungen an O-Linien mitgeteilt, zum Teil Bogen-, zum Teil Funkenlinien. Da indessen (außer bei  $\lambda = 395\mu\mu$ ) ihre Seriendarstellung unbekannt ist, so lassen sich einstweilen von hieraus keine theoretischen Schlüsse ziehen. Auch über die Abklingungszeit von Bandenlinien können wir nichts aussagen. Sehr interessant wird es sein, unsere Gleichung (14a) an Messungen serien-theoretisch wohl definierter Spektrallinien von verschiedener azimuthaler Quantenzahl zu prüfen; die hierzu erforderliche Erweiterung der Gleichung (14a) auf wasserstoffunähnliche Atome soll mitgeteilt werden, wenn solche Messungen verfügbar sein werden.

Im Anschluß an die Überlegungen bei der Balmerreihe wird man schon jetzt sagen können, daß innerhalb einer Serie die Abklingungsdauer für alle Linien als gleich zu erwarten ist, da sie wesentlich nur von der Quantenzahl  $k$ , nicht von  $n$  abhängt.

Wir wollen nicht behaupten, daß unsere recht formale Betrachtung der physikalischen Bedeutung der Wienschen Abklingungsversuche gerecht wird oder daß sie uns über den Dämpfungsprozeß aufklärt. In der Tat liegt das nicht in der Absicht des Korrespondenzprinzipes, welches ja auf jedes modellmäßige Verständnis verzichtet. Man kann es auch für unbefriedigend ansehen, daß in unserer Betrachtung an Stelle der kausal bestimmten Abklingung das viel unbestimmtere Merkmal der Linienverbreiterung gesetzt wird, das nur als Folgeerscheinung mit jenem Prozeß verknüpft ist, und zwar nur durch die klassische Theorie. Immerhin scheint unsere Betrachtung nützliche Schlüsse auf den Abklingungsprozeß zu gestatten. Durch ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung bestätigt sie umgekehrt die Grundlage unserer Überlegungen, nämlich die von Bohr ins Auge gefaßte korrespondenzmäßige Verwertung des Strahlungswiderstandes.