3.
Beweis einiger geometrischen Sätze.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

1. Es seien die Coordinaten dreier Puncte M_0, M_1, M_2, in einer Ebene x, y; x', y'; x'', y''; bestimmt man nun 6 andere Puncte A_0, A_1, A_2 und J_0, J_1, J_2, deren Coordinaten resp. ξ_0, ξ_1, ξ_2, ${}_0\xi$, ${}_1\xi$, ${}_2\xi$, und v_0, v_1, v_2, ${}_0v$, ${}_1v$, ${}_2v$, sind, wo

$$\xi_0 = \frac{\alpha' x' - \alpha'' x''}{\alpha' - \alpha''}; \qquad v_0 = \frac{\alpha' y' - \alpha'' y''}{\alpha' - \alpha''};$$
$$\xi_1 = \frac{\alpha'' x'' - \alpha x}{\alpha'' - \alpha}; \qquad v_1 = \frac{\alpha'' y'' - \alpha y}{\alpha'' - \alpha};$$
$$\xi_2 = \frac{\alpha x - \alpha' x'}{\alpha - \alpha'}; \qquad v_2 = \frac{\alpha y - \alpha' y'}{\alpha - \alpha'};$$
$${}_0\xi = \frac{\alpha' x' + \alpha'' x''}{\alpha' + \alpha''}; \qquad {}_0v = \frac{\alpha' y' + \alpha'' y''}{\alpha' + \alpha''};$$
$${}_1\xi = \frac{\alpha'' x'' + \alpha x}{\alpha'' + \alpha}; \qquad {}_1v = \frac{\alpha'' y'' + \alpha y}{\alpha'' + \alpha};$$
$${}_2\xi = \frac{\alpha x + \alpha' x'}{\alpha + \alpha'}; \qquad {}_2v = \frac{\alpha y + \alpha' y'}{\alpha + \alpha'};$$

so finden zwischen diesen 9 Puncten folgende Relationen Statt.

2. Je drei derselben liegen folgendermaſsen in einer Geraden:

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2;$$
$$A_0,\quad J_1,\quad J_2;$$
$$J_0,\quad A_1,\quad J_2;$$
$$J_0,\quad J_1,\quad A_2;$$

denn es seien die Coordinaten dreier in einer Geraden liegenden Puncte ξ, ξ', ξ'' und v, v', v'', und die allgemeine Gleichung für dieselbe

$$ax + by + c = 0;$$

so hat man:

$$a\xi + bv + c = 0,$$
$$a\xi' + bv' + c = 0,$$
$$a\xi'' + bv'' + c = 0.$$

Eliminirt man hieraus die die Lage der Linie bestimmenden Constanten, indem man sie resp. mit den Factoren m, m', m'' multiplicirt und die Producte addirt, so findet man folgende Bedingungen für die Coordinaten dreier in einer Geraden liegenden Puncte:

$$m\xi + m'\xi' + m''\xi'' = 0,$$
$$mv + m'v' + m''v'' = 0,$$
$$m + m' + m'' = 0,$$

Diese Bedingungen sind offenbar hinsichtlich der drei Puncte A_0, A_1, A_2 erfüllt, wenn man m, m', m'' resp. $\alpha'-\alpha''$, $\alpha''-\alpha$, $\alpha-\alpha''$ setzt; und eben so für die drei übrigen mal drei Puncte, indem blos $-\alpha$ statt $+\alpha$ für die ersten drei folgenden, denn $-\alpha'$ statt $+\alpha'$, und $-\alpha''$ statt $+\alpha''$ für die letzten gesetzt wird.

3. Nachstehende zu drei und drei nebeneinanderstehende Linien schneiden sich in einem Puncte:

$$M_0 J_0, \quad M_1 J_1, \quad M_2 J_2;$$
$$M_0 J_0, \quad M_1 A_1, \quad M_2 A_2;$$
$$M_0 A_0, \quad M_1 J_1, \quad M_2 A_2;$$
$$M_0 A_0, \quad M_1 A_1, \quad M_2 J_2;$$

denn es seien von irgend einer Linie zwei Puncte gegeben, deren Coordinaten resp. ξ, ξ' und v, v' sind, so kann man die Coordinaten jedes Punctes derselben durch

$$p\xi + (1-p)\xi'; \quad pv + (1-p)v'$$

darstellen, wo p veränderlich ist. Die Coordinaten der Linien $M_0 J_0$, $M_1 J_1$, $M_2 J_2$ können also so dargestellt werden:

$$p_0 x + (1-p_0)\,{}_0\xi; \quad p_0 y + (1-p_0)\,{}_0v;$$
$$p_1 x' + (1-p_1)\,{}_1\xi; \quad p_1 y' + (1-p_1)\,{}_1v;$$
$$p_2 x'' + (1-p_2)\,{}_2\xi; \quad p_2 y'' + (1-p_2)\,{}_2v;$$

giebt es nun für p_0, p_1, p_2 solche Werthe, dafs die resp. Coordinaten für alle drei Puncte gleich sind, so schneiden sie sich offenbar in diesem Puncte. Setzt man aber:

$$p_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha'+\alpha''}; \quad p_1 = \frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'+\alpha''}; \quad p_2 = \frac{\alpha''}{\alpha+\alpha'+\alpha''};$$

und substituirt in obige Coordinaten statt ${}_0\xi$, ${}_1\xi$, ${}_2\xi$ ihre Werthe, so folgen für alle drei Puncte die gleichen Coordinaten:

$$\frac{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}{\alpha+\alpha'+\alpha''} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha y + \alpha' y' + \alpha'' y''}{\alpha+\alpha'+\alpha''},$$

was zu beweisen war. Setzt man nun statt α, $-\alpha$, so ergiebt sich der Beweis, dafs die Linien $M_0 J_0$, $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ sich ebenfalls in einem Puncte schneiden, und durch Verwechselung von $+\alpha'$ und $-\alpha'$, und $+\alpha''$ und $-\alpha''$ für die zwei übrigen mal drei Linien.

4. Nimmt man an, dafs auf die drei Puncte der wagerechten Ebene M_0, M_1, M_2 die resp. Kräfte $+\alpha$ und $-\alpha$; $+\alpha'$ und $-\alpha'$; $+\alpha''$ und $-\alpha''$ senkrecht wirken, so ist die Ebene offenbar im Gleichgewicht. Sieht man nun jede verlängerte Seite des Dreiecks M_0, M_1, M_2 als einen Hebel an, auf den in jedem der zwei sie bestimmenden Puncte eine der in denselben angebrachten Kräfte wirkt, dann sind die 6 oben bestimmten Puncte offenbar alle Stützpuncte dieser verschiedenen Hebel. Diese Betrachtung giebt ein Mittel die obigen Sätze aus den Grundsätzen der Statik abzuleiten.

Verbindet man nemlich $+\alpha'$ und $-\alpha''$; $+\alpha''$ und $-\alpha$; $+\alpha$ und $-\alpha'$, so sind die drei Stützpuncte auf die man die resp. Summen der Kräfte als wirkend ansehen kann A_0, A_1, A_2. Da aber die Ebene durch diese 6 Kräfte im Gleichgewicht ist, so mufs jede dieser drei Puncte zu den zwei übrigen der Stützpunct sein, und also mit ihnen in gerader Linie liegen. Man sieht leicht, wie man die Kräfte vertheilen mufs, um den Beweis für die drei übrigen mal drei Puncte zu führen.

5. Es wirken auf die drei Puncte die resp. Kräfte $+\alpha$, $+\alpha'$, $+\alpha''$. Man kann nun die beiden Kräfte α' und α'' als in ihrem Stützpuncte J_0 angebracht ansehen. Der Stützpunct für alle drei Kräfte liegt also in der Linie $M_0 J_0$. Eben so findet man, dafs er in den Linien $M_1 J_1$ und $M_2 J_2$ liege. Diese drei Linien müssen sich also in einem Puncte schneiden. Ist in dem Punct M_0 statt $+\alpha$ die Kraft $-\alpha$ angebracht, so findet man, dafs der Stützpunct der drei Kräfte auf den Linien $M_0 J_0$, $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ liege, die sich also auch in einem Puncte schneiden. Eben so ergiebt sich der Beweis für die beiden übrigen mal drei Linien.

6. Beschreibt man aus den Puncten M_0, M_1, M_2 mit den resp. Halbmessern $\frac{k}{\alpha}$, $\frac{k}{\alpha'}$, $\frac{k}{\alpha''}$ drei Kreise, wo k eine willkürliche Gröfse bedeutet, so sind die benannten 6 Puncte die Durchschnitte der durch die Endpuncte paralleler Radien je zweier dieser Kreise gezogenen Geraden; oder nach Hrn. Steiner's Benennung (Gegenw. Journal Bd. I. p. 172.) die Ähnlichkeitspuncte derselben. Diese haben also die in 2. und 3. bewiesenen Relationen, von denen Hr. Steiner jene aus seinen sinnreichen geometrischen Betrachtungen abgeleitet hat.

7. Setzt man $\alpha = \alpha' = \alpha''$, so sind die Puncte J_0, J_1, J_2 die Mitten der Seiten des Dreiecks. Zieht man also von diesen Puncten aus

nach den gegenüberstehenden Spitzen Geraden, so schneiden sich diese nach 3 in einem Puncte.

8. Sind die Winkel des Dreiecks $M_0M_1M_2$, φ, φ', φ'' und setzt man:

$$\alpha = \sin\varphi, \quad \alpha' = \sin\varphi', \quad \alpha'' = \sin\varphi'',$$

so sind die 6 Puncte, wie leicht zu sehen ist, die Durchschnitte der die innern und äufsern Winkel des Dreiecks halbirenden Geraden mit den gegenüberstehenden Seiten. Für diese gelten also auch die in 2. und 3. bewiesenen Relationen. (S. Gegenw. Journal Bd. II. p. 191. Lehrsatz 33. No. 2.)

9. Setzt man:

$$\alpha = \operatorname{tang}\varphi, \quad \alpha' = \operatorname{tang}\varphi', \quad \alpha'' = \operatorname{tang}\varphi'',$$

dann sind J_0, J_1, J_2 die Fufspuncte der auf die Seiten des Dreiecks aus den gegenüberstehenden Spitzen gefällten Perpendikel. Diese schneiden sich also nach 3. in einem Puncte.

10. Es ist:

$$\begin{aligned} \alpha\, M_0 J_2 &= \alpha' M_1 J_2; \\ \alpha' M_1 J_0 &= \alpha'' M_2 J_0; \\ \alpha'' M_2 J_1 &= \alpha\, M_0 J_1; \end{aligned}$$

folglich:

$$M_0 J_2 \,.\, M_1 J_0 \,.\, M_2 J_1 = M_1 J_2 \,.\, M_2 J_0 \,.\, M_0 J_1,$$

welchen Satz ich irgendwo gesehen zu haben mich erinnere.

11. Der Inhalt der Dreiecke $J_0 M_1 J_2$, $J_1 M_2 J_0$, $J_2 M_0 J_1$, $J_0 J_1 J_2$ sei resp. i_1, i_2, i_0, g und das Dreieck $M_0 M_1 M_2 = \triangle$, so ist, wie leicht zu übersehen,

$$i_1 = \frac{\alpha''\alpha}{(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')}.\triangle; \quad i_2 = \frac{\alpha\alpha'}{(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)}.\triangle; \quad i = \frac{\alpha'\alpha''}{(\alpha''+\alpha)(\alpha+\alpha')}.\triangle;$$

$$i_0 + i_1 + i_2 + g = \triangle.$$

Es wird demnach:

$$(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)(i_0+i_1+i_2) = (\alpha\alpha'^2+\alpha'\alpha''^2+\alpha''\alpha^2+\alpha^2\alpha'+\alpha'^2\alpha''+\alpha''^2\alpha')\triangle,$$

$$(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)\sqrt{\left(\frac{i_0\, i_1\, i_2}{\triangle}\right)} = \alpha\alpha'\alpha''\triangle.$$

Daraus ergiebt sich:

$$i_0 + i_1 + i_2 + 2\sqrt{\left(\frac{i_0\, i_1\, i_2}{\triangle}\right)} = \triangle,$$

oder

$$4\, i_0\, i_1\, i_2 = g g \triangle,$$

oder endlich:

$$g^2 + (i_0 + i_1 + i_2)\, g g - 4\, i_0\, i_1\, i_2 = 0.$$

Man kann also aus dem Inhalte der drei kleinen Dreiecke den Inhalt des grofsen finden.

12. Halbirt man die Linien $A_0 J_0$, $A_1 J_1$, $A_2 J_2$ in den Puncten B_0, B_1, B_2, so sind die Coordinaten dieser Puncte:

$$(B_0)\quad \xi^{(0)} = \frac{\alpha'\alpha'x' - \alpha''\alpha''x''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''}, \quad v^{(0)} = \frac{\alpha'\alpha'y' - \alpha''\alpha''y''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''},$$

$$(B_1)\quad \xi^{(1)} = \frac{\alpha''\alpha''x'' - \alpha\alpha x}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha}, \quad v^{(1)} = \frac{\alpha''\alpha''y'' - \alpha\alpha y}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha},$$

$$(B_2)\quad \xi^{(2)} = \frac{\alpha\alpha x - \alpha'\alpha'x'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'}, \quad v^{(2)} = \frac{\alpha\alpha x - \alpha'\alpha'y'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'},$$

diese drei Puncte liegen demnach auch in einer Geraden.

13. Die halben Entfernungen zwischen den Puncten $A_0 J_0$, $A_1 J_1$, $A_2 J_2$ seien R_0, R_1, R_2, so hat man für rechtwinklige Coordinaten

$$R_0 R_0 = \left(\frac{\alpha'\alpha''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''}\right)^2 \{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2\};$$

$$R_1 R_1 = \left(\frac{\alpha''\alpha}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha}\right)^2 \{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2\};$$

$$R_2 R_2 = \left(\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'}\right)^2 \{(x - x')^2 + (y - y')^2\}.$$

14. Beschreibt man nun aus dem Puncte B_0 mit dem Halbmesser R_0 einen Kreis, und sind die Coordinaten irgend eines Puncts Q desselben X, Y, so ist:

$$(\xi^{(0)} - X)^2 + (v^{(0)} - Y)^2 = R_0 R_0,$$

oder:

$$\{\alpha'\alpha'(x' - X) - \alpha''\alpha''(x'' - X)\}^2 + \{\alpha'\alpha'(y' - Y) - \alpha''\alpha''(y'' - Y)\}^2$$
$$= \{\alpha'\alpha''(x' - X) - \alpha'\alpha''(x'' - X)\}^2 + \{\alpha'\alpha''(y' - Y) - \alpha'\alpha''(y'' - Y)\}^2,$$

oder, nach einer kurzen Reduction und Division mit $\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''$:

$$\alpha'\alpha'\{(x' - X)^2 + (y - Y)^2\} = \alpha''\alpha''\{(x'' - X)^2 + (y - Y)^2\},$$

oder endlich:

$$\alpha' M_1 Q = \alpha'' M_2 Q.$$

Die Entfernungen eines beliebigen Punctes dieses Kreises von den zwei Spitzen M_0 und M_1 des Dreiecks stehen also in einem beständigen Verhältnifs. Beschreibt man nun eben so aus den Puncten B_1 und B_2 mit den Radien R_1 und R_2 zwei andere Kreise, so schneiden die beiden ersten sich in einem Puncte Q', so dafs

$$\alpha' M_1 Q' = \alpha'' M_2 Q' = \alpha M_0 Q';$$

eben so die zwei letzten, dafs sie sich also alle drei in einem Puncte schneiden.

15. Für den Fall, dafs $\alpha = \alpha' = \alpha''$, liegen die Puncte J_0, J_1, J_2 auf der Mitte der Seiten, die Puncte A_0, A_1, A_2 aber in unendlicher Entfernung. Die drei Kreise verwandeln sich also in diesem Falle in drei auf den Seiten aus den Puncten J_0, J_1, J_2 errichtete Perpendikel, welche sich demnach in einem Puncte schneiden.

München, den 12. Mai 1830.