Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.

(*Di* Corrado Segre, *a Torino.*)

La *geometria sopra una varietà algebrica,* semplicemente infinita (curva), doppiamente infinita (superficie), ecc., cioè quella che studia le proprietà invariabili per trasformazioni birazionali della varietà (v. § 3), conduce naturalmente (§ 4) a considerare su questa delle *serie lineari* (di gruppi di punti, di curve, ecc.). Una tal serie è definita sulla varietà da un'equazione che contenga linearmente uno o più parametri. In altri termini se la serie è ∞^1 ogni suo elemento si compone di tutti quei punti della varietà nei quali una determinata *funzione razionale* delle coordinate prende uno stesso valore. Geometricamente si rappresenta con vantaggio una serie lineare ricorrendo ad una particolare varietà su cui essa vien segata dagl'iperpiani del suo spazio: ad es. una serie lineare di gruppi di punti sull'ente algebrico semplicemente infinito mediante una curva, una serie lineare di curve (di dimensione > 1) di un dato piano o di una superficie qualunque mediante una superficie, ecc.

La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ed in particolare lo studio delle funzioni razionali dell'ente ossia delle serie lineari di suoi gruppi di punti, fondata dal Riemann (*), si è poi svolta secondo vari indirizzi: quello funzionale che deriva appunto da quel sommo matematico; quello algebrico-geometrico che è dovuto principalmente all importante lavoro dei sig.[i] Brill e Noether (**); quello algebrico-aritmetico seguito dal Kronecker (***) da un

(*) *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal für Math., tom. 54, 1857).

(**) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Mathematische Annalen, tom. 7, 1873). Qui è fondamento il considerare la *curva piana* come imagine dell'ente algebrico, come pure l'applicazione di un teorema del sig. Noether relativo alle condizioni perchè una curva si possa rappresentare con $A\varphi + B\psi$, ove φ e ψ son curve date.

(***) Specialmente nelle sue lezioni. V. la Nota: *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln* (Journal für Math., tom. 91, 1881).

lato e dai sig.[i] DEDEKIND e WEBER (*) da un altro. — Ora, nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria BRILL-NOETHER, mi accorsi come ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del NOETHER fondamentale per quella Memoria. Così dalla considerazione di due curve in corrispondenza univoca (imagini di due serie lineari di uno stesso ente algebrico) e della rigata delle congiungenti i loro punti omologhi, giungevo a qualche caso particolare del *Restsatz* di BRILL e NOETHER, vale a dire dei teoremi sulle serie complete, residue, ecc. (§ 14) (**). E poi da una formola fondamentale relativa ad una varietà algebrica composta di ∞^1 spazi e ad una curva segnata su essa (§ 13) (***) ottenevo qualche proposizione che si collega al teorema RIEMANN-ROCH (§ 19), come il teorema di CLIFFORD, ecc. (****). Poco dopo il mio amico sig. CASTELNUOVO, entrando più di proposito nell'argomento, esponeva in modo assai più completo e sistematico una trattazione geometrica delle serie lineari sopra una curva algebrica (*****).

Nella Memoria attuale io espongo appunto il metodo geometrico che si è formato mediante questi lavori, quale è stato poi elaborato per un corso di lezioni di geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito svolto nel-

---

(*) *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* (Journal für Math., tom. 92, 1882).

(**) V. le *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 21, 1886), ad es. i n.[i] 3, 8; le *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (1.° Partie, Math. Ann., tom. 30, 1887; 2.° Partie, Math. Ann., tom. 34, 1889), ad es. i n.[i] 6 e seg. della 1.ª Parte.

(***) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, luglio e ottobre 1887).

(****) *Sulle curve normali di genere p dei vari spazi* (Rendic. del R. Istit. Lombardo, aprile 1888).

(*****) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 24, 1889). V. anche il lavoro, di poco anteriore, *Geometria sulle curve ellittiche* (ibid., 1888).

l'anno 1890-91 (*). In questo metodo non occorrono considerazioni funzionali, nè sviluppi algebrici: unico modo con cui compare l'algebricità degli enti è col principio di corrispondenza per le forme semplici razionali. L'esposizione verrà fatta principalmente con la mira di divulgare certe considerazioni geometriche che, se anche non sono più nuove, pure non sono abbastanza diffuse; sebbene in questi ultimi tempi, specialmente per opera del sig. Castelnuovo e di qualche altro giovane valoroso, abbiano dato alla scienza risultati essenzialmente nuovi ed importanti. Tali considerazioni e mezzi di ricerca possono ancora rendere grandi servigi, e non solo per la geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ma anche per la geometria sopra una superficie, ecc. È in vista di ciò che nel 1.° dei tre capitoli in cui questo lavoro si può dividere si dànno le generalità spettanti alla geometria su una varietà di qualunque dimensione, anzi che limitarsi a quelle relative agli enti semplicemente infiniti (**). Nel 2.° Cap. si espongono varie proprietà e formole relative a

---

(*) In quelle lezioni, a lato del metodo geometrico qui esposto, furono pure svolti il metodo Riemanniano e quello di Brill e Noether. L'argomento in fatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri. Ma il metodo geometrico sul quale mi permetto di richiamare l'attenzione è appunto quello meno conosciuto finora. Quanto agli altri, oltre che nei lavori originali, qualcuno fu nuovamente esposto assai recentemente nel 1.° vol. (1890) delle *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* del Klein (e Fricke), non che nelle Lezioni litografate dello stesso Klein (1892) sulle Riemann'*sche Flächen*; e nel 2.° vol. (1893) del *Traité d'Analyse* del sig. Picard. In particolare il metodo algebrico-geometrico fondato da Brill e Noether viene ora di nuovo svolto con opportuni ampliamenti e modificazioni dal chiar. prof. Bertini (i cui amichevoli eccitamenti hanno pure influito nel risolvermi all'attuale publicazione), in una Memoria che uscirà in questi *Annali* insieme con questa mia. Grazie a tale combinazione, da noi espressamente desiderata, ed accolta gentilmente dal chiar. Direttore degli *Annali*, i lettori di questi potranno vedere in pari tempo un argomento trattato con due metodi ben diversi. Ma affinchè ciascuno dei due scritti si possa studiare indipendentemente dall'altro, non abbiam creduto di dover rimandare dall'uno all'altro per quelle cose — poche del resto — che occorrevano ad entrambi: ognuno di noi ha esposto per proprio conto ciò che gli poteva servire.

(**) Ond'è che il lettore il quale avesse urgenza di veder trattati in particolare gli enti ∞^1 potrebbe sorvolare su quel 1.° Cap.: nel quale poi vi sono talune cose forse troppo note, ma che conveniva presentare riunite con altre meno conosciute. — Valgano alcune di queste ultime (specialmente il § 1) a richiamar l'attenzione di qualche geometra questi enti: anche qui alcune cose, come il § 11 sui punti multipli di una serie lineare ed il § 12 sul principio di corrispondenza Cayley-Brill, pur riguardando questioni di lor natura importantissime, non sarebbero necessarie pel seguito. Nel 3.° Cap. si ricorre anzitutto (§ 15) alle curve aggiunte di una curva piana per la costruzione effettiva delle diverse serie lineari sull'ente algebrico ∞^1 di genere p e per ottenere il noto limite minimo $n-p$ della dimensione di una serie lineare completa d'ordine n. In base poi a due proposizioni fondamentali (§§ 13 e 14) del 2.° Cap. si possono ottenere tutte le principali proprietà delle serie lineari (v. specialmente i §§ 17 e 19).

L'indice seguente servirà a dar subito un'idea più precisa dell'ordinamento del lavoro.

Torino, autunno 1893.

INDICE.

CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

CAPITOLO III.

---

su certi lavori aritmetico-algebrici, sulla teoria generale dell'eliminazione, ecc. del Kronecker e della sua scuola; i quali lavori mi pajono d'importanza capitale per fondare solidamente l'edifizio geometrico (degli enti algebrici).

CAPITOLO I.

§ 1. Le varietà algebriche.

1. Per ben definire il nostro argomento occorre stabilire: 1.° quali sono gli enti di cui ci occuperemo; 2.° quali sono le trasformazioni di essi che fissiamo come *fondamentali;* cosicchè le proprietà degli enti stessi che intenderemo studiare siano quelle che non mutano per tali trasformazioni (*).

2. Gli *elementi* delle varietà che considereremo saranno rappresentabili mediante *gruppi di numeri* (numeri complessi), e potranno ricevere, oltre all'interpretazione puramente *analitica* (aritmetica) che così se ne ha, infinite forme d'interpretazioni *geometriche,* se quei gruppi di numeri si assumono come *coordinate* (**) di enti geometrici, punti, rette,..., curve, superficie, ecc. Noi prescindiamo in generale da ogni scelta speciale d'interpretazione. Solo, per comodità, adotteremo il linguaggio geometrico degl'iperspazi; sicchè ad esempio in luogo di *elemento* diremo *punto,* ecc. Ma così facendo non intendiamo escludere l'interpretazione puramente analitica della parola « *punto* »; e pur accogliendo d'altra parte tutte le possibili interpretazioni geometriche, ci asteniamo dal far dipendere l'essenza delle nostre ricerche dai postulati della geometria.

3. Per *varietà algebriche* si potrebbe pensar di definire quelle composte di tutti i punti le cui coordinate sono date *funzioni algebriche* di uno o più parametri variabili indipendenti. Ma questa definizione non sarebbe abbastanza generale, cioè non darebbe tutte le varietà che si soglion chiamare algebriche; ed inoltre non sarebbe invariantiva per trasformazione di coordinate (***). Si dovrebbe modificarla aggiungendo che i valori da assumersi per quelle fun-

(*) Cfr. il Programma del sig. F. Klein: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872; ristampato nei Mathem. Annalen, tom. 43); o la traduzione italiana del sig. Fano nel tom. 17, ser. 2.ª (1890) degli Annali di Matematica.

(**) Alle volte considereremo anche coordinate *omogenee:* ciò si capirà sempre dal discorso.

(***) Si pensi ad esempio ad una curva sghemba dello spazio ordinario. Se essa fosse definita dal dare per le coordinate dei suoi punti tre funzioni algebriche, non tutte razionali, di un parametro, vi sarebbe almeno un punto fondamentale dal quale la curva sarebbe projettata *più volte;* cioè la curva ammetterebbe almeno un *cono di corde* (o trisecanti, ecc.).

zioni algebriche in corrispondenza ad ogni gruppo di valori di parametri siano legati da una o più equazioni algebriche date.

Il modo più generale di definire le varietà algebriche (*) consiste invece nel considerar come tale *l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfanno ad un numero qualunque di date equazioni algebriche, nelle quali possono anche comparire razionalmente dei parametri indeterminati* (**).

Rientrano evidentemente in questa definizione generale, oltre a quella accennata da prima, le due seguenti definizioni particolari. 1.° Come *intersezione* di varietà rappresentate ognuna da un'equazione algebrica fra le sole coordinate; vale a dire, se è S_d (di dimensione d) lo spazio che si considera, di varietà algebriche M_{d-1} di dimensione $d-1$. 2.° Come luogo dei punti le cui coordinate sono date funzioni razionali di un certo numero di parametri legati fra loro da un'equazione algebrica.

4. Data una varietà algebrica definita nel modo più generale suddetto, essa può comporsi di *parti* aventi diverse dimensioni (***). Con opportune trasformazioni appartenenti alla teoria generale dell'eliminazione si riesce (****) a rappresentare staccatamente quelle parti (*****). Si dimostra allora (******) che una tal parte, cioè una varietà algebrica di dimensione determinata, quando questa sia $= d-1$, cioè inferiore di un'unità a quella dello spazio ambiente, si può rappresentare con un'equazione unica fra le coordinate; ed in gene-

(*) Suggeritomi dallo studio del *Festschrift* del Kronecker: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Journal für Math., tom. 92, pag. 1-122, 1881). V. anche Molk: *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination* (Acta Mathematica, tom. 6, pag. 1-165, 1885).

(**) Questa definizione ha evidentemente carattere invariantivo per trasformazione di coordinate. — Inoltre da essa segue che *projettando* una varietà algebrica da un punto (ad es. un punto fondamentale) si ha ancora una varietà algebrica (rappresentata dalle stesse equazioni, nelle quali però una coordinata — quella corrispondente al detto punto fondamentale — non si consideri più come *coordinata*, ma come *parametro*). — E segue pure che l'*intersezione* di due o più varietà algebriche è (se esiste) una varietà algebrica.

(***) Non occorre avvertire che il concetto di *dimensione* a cui noi alludiamo è quello che derivò dalle ricerche di G. Cantor; che si basa non solo sul numero dei parametri che determinano gli elementi, ma anche sulla *continuità* della corrispondenza fra questi e quelli.

(****) V. Kronecker, loc. cit., pag. 28; e Molk, pag. 447.

(*****) Nel seguito una varietà (sottint. *algebrica*) di dimensione determinata k s'indicherà brevemente con M_k. Così M_0 potrà indicare un gruppo (di un numero finito) di punti.

(******) Cfr. Kronecker, pag. 30; Molk, pag. 163.

rale quando la dimensione ha un valore qualsiasi si può rappresentare come l'intersezione *completa* di $d+1$ varietà M_{d-1} rappresentate da singole equazioni (*). — Così pure, sempre con procedimenti algebrici della stessa natura, si dimostra che una M_k algebrica si può rappresentare, *e ciò ha la massima importanza per noi,* come la trasformata *birazionalmente* (cfr. il § 2) di una M_k di S_{k+1} (la 2.ª delle definizioni particolari con cui finiva il num. prec.) (**). Ciò si può effettuare geometricamente, per esempio, con una projezione della M_k da un S_{d-k-2} (fondamentale) su un S_{k+1} (lo spazio fondamentale opposto), sicchè i punti $(x_1\ x_2 \ldots\ x_d)$ della M_k vengono ad esser legati da equazioni della forma

$$f(x_1 \ldots\ x_{k+1}) = 0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+2} = \psi_{k+2}(x_1 \ldots\ x_{k+1}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_d \quad = \psi_d(x_1 \ldots\ x_{k+1}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

(*) Si può ad esempio rappresentare una curva dello spazio ordinario come l'intersezione completa di 4 suoi coni projettanti. Ed in generale *una M_k di S_d con $k < d-1$ è l'intersezione completa di $d+1$ coni M_{d-1} che la projettino da spazi S_{d-k-2}, purchè questi siano presi in posizione conveniente (generale).* In fatti suppongasi che già si abbiano i di siffatti coni projettanti, i quali si taglino, oltre che nella data M_k, in una o più varietà irriduttibili M_{d-i}: come già si ha subito per $i=1$. Un nuovo cono projettante la M_k avrà comuni coi precedenti, oltre la M_k, delle M_{d-i-1}, *a meno che* contenga una di quelle M_{d-i}. Perciò sarebbe necessario che un punto A fissato ad arbitrio su questa (fuori della M_k) stesse in uno spazio S_{d-k-1} generatore del cono; sicchè l'*asse* S_{d-k-2} del cono conterrebbe allora un punto della retta che congiunge il punto A a quel punto della M_k che è projettato dal detto spazio generatore; ossia l'asse S_{d-k-2} incontrerebbe il cono M_{k+1} che da A projetta la M_k: il che si può evitare. Procedendo in questo modo si finirà dunque per avere $d+1$ coni che all'infuori della M_k non avranno altri punti comuni.

È facile vedere che *meno* di $d+1$ varietà M_{d-1} non basterebbero in generale per determinare, come loro intersezione *completa*, una M_k. Veggasi ad es. per le curve sghembe dello spazio ordinario Vahlen: *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven* (Journal für Math., tom. 108, 1891). —

Dal teorema del Kronecker sopra riferito si può trarre che il numero dei punti d'incontro di una M_k (algebrica) di S_d con un S_{d-k} non muta (in generale, cioè finchè rimane finito) al mutare di questo spazio. Ciò si può anche stabilire per induzione completa osservando che è vero per una M_k di S_{k+1} (come mostra l'equazione); e che la proposizione stessa vale per la M_k di S_d e precisamente pei suoi incontri con due S_{d-k} aventi un punto comune, se ha luogo per la M_k projezione di quella su un S_{d-1} dal detto punto. Il numero, ben determinato, dei punti d'incontro di una M_k di S_d con un S_{d-k} generico si chiama *ordine* della M_k.

(**) Cfr. Kronecker, pag. 31; Molk, pag. 155.

dove f è funzione *intera*, e le ψ funzioni *razionali* (*). Si possono allora riguardare le (1) e (2) come equazioni di $d-k$ varietà M_{d-1} (la prima *cono*, le altre *monoidi*) che si tagliano secondo la M_k (**). Ma si può anche dire che le (2) fanno corrispondere birazionalmente la M_k primitiva a quella (projezione) che in S_{k+1} è definita dalla (1).

Introducendo coordinate omogenee ($x_0\, x_1 \ldots x_d$ pei punti di S_d e $y_0\, y_1 \ldots y_{k+1}$ per quelli di S_{k+1}) si può dare ad una tal rappresentazione di una M_k di S_d la forma:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_d = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots : \psi_d(y)$$

con

$$f(y_0\, y_1 \ldots y_{k+1}) = 0,$$

essendo le ψ ed f *forme* (algebriche intere) nelle y, tali che ogni punto x corrisponda in generale ad un solo punto y.

5. Fra le varietà algebriche son da distinguere le varietà *razionali* od *omaloidi*. Chiameremo così quelle per le quali le coordinate dei punti son funzioni *razionali* di un certo numero k di parametri indipendenti, *con la condizione* che vi sia corrispondenza univoca in ambi i sensi fra i punti della varietà ed i gruppi di valori di quei k parametri. Vedremo poi (n.° 24) che questa condizione, almeno nel caso di $k=1$, è superflua.

§ 2. Le corrispondenze algebriche.

6. La nozione di *corrispondenza algebrica* fra due varietà X, Y rientra in quella già definita di *varietà algebrica:* concetto noto, importante e fecondo. Se cioè si considera la *coppia di punti* x, y presi su X, Y come *elemento,*

(*) Estensione della nota rappresentazione *monoidale* delle curve sghembe dovuta al CAYLEY: v. HALPHEN: *Recherches de géomètrie à n dimensions* (Bulletin de la Soc. math. de France, 1873, tom. 2, pag. 34-52). Ivi si troverà pure, dedotto da questa rappresentazione, il teorema che il numero delle intersezioni di una M_k ed una M_{d-k} di S_d è dato dal prodotto dei loro ordini.

(**) La M_k però non è l'intersezione *completa* di quelle varietà (sicchè non vi è contraddizione con un asserto precedente): esse hanno anche comuni tutti quei punti che verificano la (1) e rendono indeterminate le ψ, i quali punti possono non giacere sulla M_k. — È facile vedere che si può render *completa* la rappresentazione in discorso ponendo insieme colle *equazioni* (1) e (2) una *disuguaglianza* a cui debbano soddisfare le coordinate (cfr. MOLK, pag. 153).

una varietà algebrica di tali elementi darà origine a ciò che diremo appunto una *corrispondenza algebrica* fra X, Y. Questa è dunque definita da un sistema di equazioni algebriche fra le coordinate dei punti x, y, sistema che abbraccia anche le equazioni che definiscono rispettivamente X ed Y. La definizione della corrispondenza può esser tale che nelle sue equazioni compajano (razionalmente) oltre ai punti x, y, anche dei parametri variabili. Ma per quanto sopra (n.° 4) s'è detto si potranno sempre eliminare tali parametri.

Se ad ogni punto y di Y corrisponde un numero finito $\alpha > 0$ di punti x su X, si potrà dal sistema dato di equazioni ricavare le coordinate di x come funzioni algebriche ad α valori delle coordinate di y, vale a dire si potrà ottenere per ciascuna coordinata di x un'equazione di grado α i cui coefficienti son funzioni razionali delle y: e ciò con semplici eliminazioni (operazioni di massimo comun divisore). Invero se il campo X è determinato da *una* variabile x (X è una *retta*) avremo per definire la corrispondenza un certo numero di equazioni fra x e le y; ed è noto che da esse si trae razionalmente (appunto con l'operazione del massimo comun divisore) un'equazione unica di grado α in x, la quale determina appunto nel modo detto tutti i punti x di X corrispondenti ad uno stesso punto y. Se poi i punti x hanno *più* coordinate $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$, basta che nel sistema delle equazioni che definiscono la nostra corrispondenza fra i punti x, y di X, Y si riguardino $x_2\ x_3 \ldots$ come *parametri,* per avere una corrispondenza fra l'unica variabile x_1 ed il punto y di Y, sì che ad ogni tal punto y corrispondono α valori di x_1: laonde x_1 sarà funzione algebrica ad α valori delle coordinate y; ed analogamente $x_2, x_3 \ldots$

7. Segue da ciò che una corrispondenza algebrica fra due varietà è *univoca* in un senso, solo quando essa in quel senso è *razionale,* vale a dire quando le coordinate dei punti dell'una varietà si possono esprimere come funzioni algebriche ad un valore, cioè *razionali* di quelle dei punti omologhi dell'altra; sicchè chiamando x ed y le coordinate omogenee dei punti omologhi delle due varietà si possa porre (le ψ essendo forme):

$$x_0 : x_1 : \ldots = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots$$

Sarà *biunivoca* solo se è *birazionale,* sicchè oltre a queste equazioni si possan scrivere le analoghe:

$$y_0 : y_1 : \ldots = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots$$

Due varietà in corrispondenza birazionale con una terza sono pure in corrispondenza birazionale fra loro.

La definizione algebrica data precedentemente (n.° 5) delle varietà razionali equivale a dire che sono quelle che corrispondono (algebricamente e) biunivocamente a *spazi*. Segue che se una varietà corrisponde biunivocamente ad una razionale sarà essa stessa razionale; e che due M_k razionali sono riferibili fra loro biunivocamente in infiniti modi.

8. Considerando *tra due varietà semplicemente infinite* (M_1) *razionali* una corrispondenza (α, α') (*), risulta dal n.° 6 che essa si può rappresentare con un'equazione di gradi α, α' fra i *parametri* x, x' degli elementi omologhi delle due forme; in particolare che una corrispondenza (1, 1) si può rappresentare con un'equazione *bilineare,* sicchè si riduce ad una *projettività* nel caso che si tratti di due forme fondamentali (mentre se si tratta di forme non fondamentali si può assumere l'univocità — sempre, s'intende, con l'algebricità, — oppure l'equazione bilineare, come *definizione* delle corrispondenze *projettive*). Se nell'equazione di una corrispondenza (α, α') fra gli elementi di una M_1 razionale si suppone che gli elementi omologhi x, x' coincidano si ottengono $\alpha + \alpha'$ *elementi uniti:* noto *principio di corrispondenza* formulato dallo Chasles (**). È nell'applicazione di questo principio che comparirà nei punti più essenziali del nostro studio l'algebricità degli enti e quindi il *teorema fondamentale dell'algebra.*

(*) Nel seguito dicendo una corrispondenza (α, α') fra due varietà s'intenderà una tal corrispondenza che ad ogni punto della *1.ª varietà* corrispondano α' punti nella *2.ª varietà,* e ad ogni punto della 2.ª α punti nella 1.ª.

(**) Cfr. su esso i miei Appunti storici nella *Biblioteca mathematica,* tom. 6 (1892) p. 33.

Come si sa, nell'applicare questo principio si deve badare alla *multiplicità* da attribuire ai vari elementi uniti: ed appunto nello stabilire quella multiplicità sta qualche volta il difficile. Un caso semplice noto è il seguente: quando un elemento è tale che, in qualunque delle due varietà sovrapposte lo si consideri, sempre *due* dei suoi omologhi dell'altra varietà cadano in esso, allora lo si deve contare *due* volte (almeno) nel numero complessivo $\alpha + \alpha'$ degli elementi uniti. La proposizione (che non sarebbe più vera se in luogo di *due* si ponesse un numero maggiore) si verifica subito sulle equazioni, ad es. ponendo che l'elemento di cui si tratta corrisponda al valore $x = 0$ del parametro. Essa si può invertire quando la corrispondenza è *involutoria* o *simmetrica;* sicchè è condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento unito di una corrispondenza involutoria conti due volte nel numero complessivo degli elementi uniti, che due dei suoi elementi omologhi coincidano con esso.

Una proposizione generale sulla multiplicità degli elementi uniti è stata data dal sig. Zeuthen nella *Note sur le principe de correspondance* (Bulletin des sciences math., tom. 5, 1873, pag. 186).

§ 3. La geometria sopra una varietà algebrica.

9. Possiamo ora (cfr. n.° 1) definire semplicemente l'oggetto della *geometria sopra una varietà M_k*. Essa è *la geometria che studia le proprietà della M_k invariabili per trasformazioni birazionali della varietà stessa* (*).

Le proprietà *projettive* della M_k, cioè quelle che non mutano per trasformazioni projettive o lineari, mutano generalmente per trasformazioni birazionali qualunque della M_k: quindi è solo una parte di esse che costituisce la geometria sulla M_k. Così mutano in generale per trasformazioni birazionali la dimensione dello spazio cui appartiene la M_k, l'ordine di questa, le sue singolarità, ecc.

Si può profittare di ciò, prendendo come rappresentante delle M_k, o meglio di un *corpo* o *classe* di M_k composto di varietà tutte riferibili birazionalmente fra loro, una che stia in uno spazio di opportuna dimensione (abbastanza elevata od abbastanza bassa); o che abbia un ordine conveniente, ad es. minimo; o che abbia singolarità opportune; ecc.

10. Riguardo alla *dimensione dello spazio* della M_k possiamo già enunciare questa proposizione importante (n.° 4): *per la geometria su una M_k di un S_d, ove $d > k+1$, si può sostituire a quella una M_k di un S_{k+1}*. E se la M_k è razionale, cioè trasformazione birazionale di un S_k, le si può addirittura sostituire un S_k.

In particolare per la geometria su una curva si può assumere la *curva piana;* e la *retta* se si tratta di curva razionale. Per la geometria sopra una superficie si può assumere la *superficie dello spazio ordinario;* e il *piano* se la superficie è razionale. Ecc.

11. Riguardo alle *singolarità* di una M_k, esse nella geometria sopra la varietà vanno considerate come *decomposte* o *risolte* in *elementi*. Questa risoluzione si effettua geometricamente mediante trasformazioni birazionali della varietà, che la riducano ad altra in cui quella singolarità sia scomparsa (cfr. la

(*) A vero dire si usa spesso chiamare « geometria *sulla varietà* » quella che studia gli enti *contenuti* nella varietà, senza preoccuparsi delle trasformazioni che si assumono come fondamentali: così quando si chiama *geometria sulla superficie* la teoria di Gauss, ecc., delle linee tracciate su questa. Però per brevità di linguaggio, quando si è nel campo algebrico-geometrico ho creduto opportuno (anche in lavori precedenti) di fissare per quella locuzione il senso più ristretto sopra enunciato.

nota al n.° 20). Analiticamente la stessa risoluzione trova la sua espressione in opportuni *sviluppi in serie* delle coordinate dei punti della varietà negl'intorni dei punti singolari. Si dimostra che nell'intorno di un punto qualunque della M_k le coordinate dei punti di questa si posson esprimere mediante *uno o più* gruppi di serie di potenze intere di k parametri: ognuno di questi gruppi di serie rappresenta un *elemento* della M_k; e l'intorno di un punto qualunque, singolare o no, di questa varietà è un insieme di siffatti elementi. Nel caso di una curva piana $f(x\ y)=0$ gli elementi che contengono un suo punto $(x_0\ y_0)$ sono tanti quanti gli sviluppi di $y-y_0$ in serie di potenze di $x-x_0$: la loro considerazione trae origine, come si sa, da (Cauchy e) Puiseux; essi furono poi più ampiamente studiati dal Weierstrass (nelle sue lezioni sulle funzioni abeliane) appunto col nome di *elementi*, dal Cayley che li chiamò *rami, lineari e superlineari*, dall'Halphen col nome di *cicli* (corrispondenti ai *sistemi ciclici* del Puiseux di valori della funzione y di x intorno al punto $x_0\ y_0$), e da tanti altri geometri (*). Analogamente in un punto qualunque di una superficie si hanno uno o più *elementi*, o *falde* superiori, o *cicli di falde* secondo una denominazione dell'Halphen (**). — È chiaro che in seguito a trasformazioni birazionali un elemento si muta in un elemento, ma posson diventare staccati fra loro gli elementi che dapprima avevan comune (come origine) uno stesso punto singolare. Quindi allorquando studiando la geometria su una varietà si ha in questa un punto (singolare) pel quale passano più *elementi* (rami, falde, ecc.) si dirà che ivi si considera un punto *ben determinato*, solo quando sia fissato *l'elemento* su cui lo si vuol considerare.

(*) Nel seguito avremo occasione di fare qualche citazione più precisa.

(**) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (1877) (Annali di Mat., ser. 2.ª tom. 9). I lavori sulle singolarità superiori delle superficie e varietà di maggior dimensione sono finora assai scarsi rispetto a quelli relativi alle singolarità delle curve. Per la scomposizione in elementi (sviluppi in serie) delle superficie e varieta superiori va citato specialmente: G. Kobb: *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Mathématiques, 4.e sér., tom. 8, 1892), a cui si collega la Nota dello stesso autore: *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Bulletin de la Soc. math. de France, tom. 21, juin 1893). Veggasi pure il § III del lavoro del sig. Del Pezzo: *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rendic. del Circolo mat. di Palermo, tom. 6, 1892).

§ 4. Le serie lineari e le involuzioni. Varietà imagini.

12. Una grande classe di proprietà relative alla geometria su una varietà X di dimensione k contenuta in S_d si legano alla considerazione delle *serie o sistemi lineari* di M_{k-1} giacenti in X. Chiameremo così la serie di M_{k-1} che su questa M_k si ottiene come sezione con un sistema lineare di M_{d-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0;$$

con l'avvertenza che ove questo sistema di varietà avesse su X una M_{k-1} *base,* la quale così verrebbe a comparire come *parte* in tutte le M_{k-1} della serie, si possa ad arbitrio toglierla da tutte, ovvero conservarla in tutte. — Così allorquando una curva C^n (d'ordine n) di S_d si sega con un sistema lineare di M^{ν}_{d-1} il quale abbia l punti base su essa, si ottiene una *serie lineare di gruppi* di $n\nu$ punti con quegli l punti fissi; ovvero, togliendo $1, 2, \ldots, l$ di questi punti, delle serie lineari di gruppi di $n\nu - 1$, $n\nu - 2, \ldots, n\nu - l$ punti.

In particolare è una serie lineare quella segata su una varietà dagl'iperpiani del suo spazio.

Una serie lineare su X può anche comporsi di *un solo* elemento (M_{k-1}), come il sistema lineare di M_{d-1} che la definisce. Una M_{k-1} qualunque di X costituisce su questa una *serie lineare di dimensione zero.*

13. In generale la *dimensione della serie lineare* che si considera sulla varietà X si collega semplicemente alla *dimensione h del sistema lineare di M_{d-1}* ed al *numero delle varietà di questo sistema le quali passano per X.* Se due M_{d-1} segano su X lo stesso elemento M_{k-1} della serie, la varietà del loro fascio che passerà per un punto di X esterno a quella M_{k-1} ed alla base del sistema lineare conterrà X (*). Se dunque per X non passa alcuna M_{d-1} del sistema lineare, ogni M_{k-1} della serie lineare sarà segata su X da *una sola* varietà del sistema; sicchè la dimensione della serie lineare sarà evidentemente quella stessa, h, del sistema di M_{d-1}. Se invece per X passano ∞^t varietà M_{d-1} del sistema ($t \geqq 0$), esse formeranno un sistema lineare; e questo, con un'altra M_{d-1} del sistema primitivo ∞^h, determinerà un sistema lineare ∞^{t+1} composto di *tutte* le M_{d-1} che passano per la M_{k-1} segata su X da quella.

(*) A partir di qui supponiamo X (ed in generale ogni varietà su cui studiamo la geometria) *irriducibile,* cioè non composta di due o più distinte varietà della stessa dimensione.

Prendendo allora entro al sistema ∞^h un sistema lineare ∞^r, ove $r = h - t - 1$, che non abbia alcun elemento M_{d-1} comune col sistema ∞^t, esso avrà comune con ogni sistema lineare ∞^{t+1} passante per questo una sola varietà, sempre diversa quando è diverso il sistema ∞^{t+1}; ed è chiaro che *questo nuovo sistema lineare ∞^r di M_{d-1} darà da se su X tutta quanta la serie lineare di M_{k-1}, ogni elemento una volta sola* (*). La serie sarà dunque di dimensione r.

Da r punti *generici* di X sarà individuato un elemento M_{k-1} della serie lineare. Basterà prendere il 1.° punto fuori dei punti base del sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, onde le varietà di questo sistema passanti per esso formeranno un sistema ∞^{r-1}; poi il 2.° punto fuori dei punti base di questo, onde le M_{d-1} passanti per questi 2 punti formeranno un sistema ∞^{r-2}; poi il 3.° punto fuori dei punti base di questo, ecc. ecc.: e ciò si potrà continuare fino alla fine, perchè mai i punti base dei successivi sistemi invaderanno tutta X, essendo che X non sta in alcuna M_{d-1} del sistema ∞^r.

14. La nozione di *serie lineari* spetta giustamente alla geometria sulla varietà. Trasformando *razionalmente* (non occorre *birazionalmente,* cioè l'*invertibilità*) la varietà X in un'altra varietà X' mediante le formole:

$$x_l = f_l(x'),$$

la serie lineare che su X è segata dalle varietà

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

avrà per corrispondenti su X' le varietà che vi sono staccate dall'equazione trasformata:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i [f(x')] = 0,$$

equazione della forma:

$$\Sigma \lambda_i \Phi_i(x') = 0,$$

ove le Φ sono forme nelle x': equazione dunque di un sistema lineare. La serie lineare di X si muta dunque in una serie lineare di X'. Riguardo ai punti fissi, o punti base, della prima serie, cioè punti x di X pei quali le $\varphi_i(x)$ si annullano, essi si mutano in punti x' di X' per cui le $\Phi_i(x')$ son nulle, cioè in punti base della seconda serie: ma l'inverso esigerebbe qualche considerazione ulteriore (che pel seguito non occorre) nel caso di un punto x' di X'

(*) Nel seguito si potrà sempre intendere che al sistema primitivo ∞^h di M_{d-1} si sia sostituito un sistema ∞^r così fatto.

che fosse *fondamentale* per la trasformazione, cioè tale da annullare tutte le $f_l(x')$.

15. Per tal modo le serie lineari vengono a presentarsi spontaneamente nello studio delle trasformazioni birazionali della varietà. Ad esempio alle sezioni iperplanari di questa corrispondono nella varietà trasformata le varietà di una serie lineare.

Viceversa supponiamo data sulla varietà X di dimensione k una serie lineare infinita di M_{k-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

nella quale non vi siano (si sian tolte) *parti* (di dimensione $k-1$) fisse; e si consideri la varietà Y dei punti y di coordinate

$$y_i = \varphi_i(x),$$

ove le x son legate dalle equazioni che definiscono X. Essa sarà in corrispondenza razionale (in un senso) con X, per modo che a quella data serie lineare di X corrisponde su Y quella costituita dalle sue sezioni iperplanari. La serie lineare data su X determina dunque una trasformazione razionale di questa varietà in un'altra Y su cui la serie corrispondente è segata dagl'iperpiani.

Si può anche dire che quella trasformazione viene eseguita ponendo una corrispondenza lineare o projettiva fra le varietà che costituiscono la serie lineare $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ e gl'iperpiani $\Sigma \lambda_i y_i = 0$ di uno spazio d'ugual dimensione: allora a quelle varietà che passano per un punto generico x di X corrisponderanno iperpiani passanti pure per un determinato punto y; ed il luogo generato da y sarà appunto la varietà Y.

16. È importante di riconoscere sulla serie lineare data su X quando è che la trasformazione che essa definisce è univoca, ossia razionale, *in ambi i sensi* (birazionale). Se un punto y della varietà trasformata Y corrisponde a *due* punti x', x'' di X, sarà (n.° 15)

$$\varphi_i(x') = \varphi_i(x''),$$

a meno di un fattore. Ciò equivale a dire che le due equazioni:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x') = 0,$$
$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x'') = 0,$$

fra i parametri indipendenti λ sono equivalenti fra loro: ossia che il passaggio di una varietà della serie:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

per l'uno dei due punti x' x'' trae di conseguenza il passaggio per l'altro. Dunque: la serie lineare data su X definirà una trasformazione biunivoca, cioè birazionale, di X in una nuova varietà (nel senso spiegato, cioè che a quella serie corrispondano le sezioni iperplanari della nuova varietà), solo quando essa sia tale che il passaggio di un suo elemento per un punto generico di X *non* tragga di conseguenza il passaggio per altri punti mobili.

Il fatto che così si esclude avverrebbe *necessariamente* quando la dimensione r della serie lineare fosse minore di quella k della varietà X: giacchè allora le ∞^{r-1} varietà M_{d-1} passanti per un punto di X taglierebbero questa secondo una M_{k-r} variabile. Ma può accadere anche se $r \geqq k$; quantunque se $r > k$ esso sia da considerarsi come eccezionale, cioè esiga che le varietà φ si prendano in modo particolare rispetto ad X.

17. Se su X il passaggio di un elemento M_{k-1} della serie lineare per un punto mobile trae il passaggio per altri *in numero finito*, $\mu - 1$, i punti di X vengono a raggrupparsi a μ a μ in un particolare aggruppamento tale che ogni punto di X individua il gruppo di μ punti di cui fa parte. Un siffatto aggruppamento lo diremo un'*involuzione di grado* μ fra i punti di X. La serie lineare si dirà *composta* mediante l'involuzione, perchè ogni suo elemento è tutto composto di gruppi dell'involuzione. Quando una serie lineare è composta con un'involuzione di grado μ la varietà Y rappresentante la serie ha la stessa dimensione k di X ed è con questa in corrispondenza $(1, \mu)$.

Data su X un'involuzione qualunque di grado μ si costruiscono subito delle serie composte mediante quell'involuzione. Si rappresentino cioè i gruppi di questa coi punti di una nuova varietà X' di dimensione k (*). Fra X' e X vi sarà corrispondenza $(1, \mu)$, e quindi alle serie lineari su X' corrisponderanno (n.° 14 applicato con lo scambio di X e X') su X serie lineari, le quali evidentemente saran composte con la data involuzione (**). —

Non vi sono differenze sostanziali quando in luogo dell'involuzione, cioè dei *gruppi* di un numero finito μ di punti, si abbiano su X infinite *varietà* M_i

(*) Come ben si sa, un gruppo di μ punti $x, y, \ldots$ di S_d si può determinare simmetricamente ad es. mediante i valori delle somme (funzioni simmetriche) $a_{il\ldots} = \Sigma x_i y_l \ldots$ (in cui la somma s'intende fatta tenendo fissi gl'indici e permutando le lettere $x\, y \ldots$): il che equivale a considerare quel gruppo come un inviluppo di classe μ d'iperpiani. Assunte quelle $a_{il\ldots}$ come coordinate di punti si ha che un'involuzione di grado μ su una M_k di S_d vien rappresentata da una M_k del nuovo spazio.

(**) Da una proposizione che stabiliremo al n.° 27 (v. anche una nota ivi) seguirebbe poi subito che in tal modo si ottengono su X *tutte* le serie composte con la data involuzione.

tali che per un punto generico di X ne passi una sola, e gli elementi M_{k-1} della serie lineare su X sian composti con quelle M_i per modo che quelli che passano per un punto contengano tutta la M_i passante per quel punto. Data su X un'infinità di varietà M_i così fatta, cioè tale che per ogni punto ne passi una sola (sicchè saranno ∞^{k-i}), si costruiscon subito nel modo anzi detto delle serie lineari composte con esse. — Si noti però che una varietà Y rappresentata da una serie lineare così composta avrà ogni suo punto per imagine di tutti i punti di X situati su una di quelle M_i, sicchè sarà solo di dimensione $k-i$. Si è dunque nel caso in cui una varietà X si trasformi razionalmente in una *Y di dimensione minore.*

18. Se X è uno spazio S_k (e $x_0 \ldots x_k$ le coordinate in questo), una serie lineare di M_{k-1} in esso sarà data senz'altro dall'equazione:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

sarà cioè un ordinario sistema lineare di varietà dell' S_k. Essa definirà una trasformazione razionale

$$y_i = \varphi_i(x)$$

di quello spazio in una nuova varietà Y. Se la dimensione r di quel sistema lineare è $\geqq k$, la Y sarà in corrispondenza *birazionale* coll' S_k e quindi sarà una varietà razionale, se le M_{k-1} passanti per un punto non passano di conseguenza per altri. Nel caso di $r = k$ la Y è pure un S_k e la corrispondenza fra i due spazi X, Y è birazionale o *Cremoniana* se il sistema lineare considerato di X è *omaloidico,* cioè tale che k varietà generiche di esso si taglino in un sol punto variabile. — Data nello spazio X un'involuzione qualunque di grado μ (oppure un sistema di varietà M_i tale che per un punto generico ne passi una sola) si costruiranno subito, nel modo detto superiormente (n.° 17) infiniti sistemi lineari di M_{k-1} composti con essa (o col sistema di M_i).

§ 5. Seguito. Varietà multiple.

19. Abbiam visto come una serie lineare ∞^r di M_{k-1} su una varietà X di dimensione k si possa sempre rappresentare con una varietà Y di S_r, la cui dimensione sarà pure k nel caso che $r \geqq k$ e che la serie non sia composta mediante M_i $(i > 0)$ nel senso esposto (n.° 17). Questa rappresentazione è molto importante, servendo la varietà Y per lo studio della serie lineare di X, e viceversa questa serie lineare su X per lo studio di Y. Naturalmente,

come già avvertimmo (n.° 15), in questa rappresentazione la serie lineare di M_{k-1} si suppone priva di *parti* fisse. Se no, per averne l'imagine, si dovrà considerare, insieme con la varietà Y le cui sezioni iperplanari corrispondono alla serie lineare di X privata della parte fissa, l'imagine di questa su Y.

20. I caratteri della varietà imagine dànno caratteri della serie lineare, e viceversa. Così abbiam già notato come la dimensione della serie lineare sia pur quella dello spazio cui *appartiene* (o in cui *è immersa*) la varietà imagine Y. Vediamo ora che cosa sia per la serie lineare l'ordine della varietà Y. Quest'ordine è il numero dei punti d'incontro di k sezioni iperplanari indipendenti di Y. A questi punti corrispondono — biunivocamente, se, almeno pel momento, supponiamo che la serie lineare non sia in alcun modo composta, sicchè la corrispondenza fra X e Y sia biunivoca — i punti variabili di X in cui s'incontrano k elementi (M_{k-1}) indipendenti della serie lineare. Onde l'ordine di Y è uguale al numero, che diremo n, di questi punti variabili. Nel caso più semplice di $k = 1$, l'ordine della curva Y imagine di una serie lineare sulla curva X è il numero dei punti (variabili) di ciascun gruppo di questa serie.

Se sulla varietà X vi sono μ punti (non fissi per la serie) tali che il passaggio per essi sia *una* sola condizione per gli elementi M_{k-1} della serie (cioè tali che il passaggio per l'uno abbia come conseguenza il passaggio per gli altri), si potranno i k elementi indipendenti su nominati assumere in guisa che passino tutti per quei μ punti: sicchè si taglieranno solo più in $n - \mu$ altri punti. Per tal modo si vede che a quei μ punti corrisponderà su Y *un* solo punto, il quale però conterà come μ intersezioni di k sezioni iperplanari qualunque passanti per esso: onde il punto stesso sarà *multiplo*, μ-plo, per Y(*).

(*) Lo stesso fatto accade, almeno in generale, se X ha un punto μ-plo x che non sia punto base per la serie lineare ossia pel sistema lineare di M_{a-1} che la definisce: generalmente gli corrisponderà ancora e per ragioni analoghe un punto μ-plo di Y. Ma se x è punto base, non si hanno immediatamente punti omologhi su Y: per averne bisogna considerare i punti di X che sono infinitamente vicini ad x, vale a dire le *tangenti* ad X in x. Ognuna di queste, quando non sia tangente comune a tutte le M_{a-1} del sistema, ha un determinato punto come corrispondente su Y. E se le M_{a-1} che toccano in x una tangente generica di X non ne toccano di conseguenza altre, avverrà che a tangenti diverse corrisponderanno su Y punti diversi: cosicchè allora le imagini su Y dei punti di X infinitamente vicini ad x formeranno una M_{k-1}. L'ordine di questa sarà il numero delle tangenti variabili in x ad X che son pure tangenti ad una M_{a-1} generica: quindi in generale, se il sistema di M_{a-1} passa *semplicemente* pel punto x, sarà uguale alla multiplicità μ di x per X. Ecc., ecc.

Ora se questo fatto accade *sempre*, per ogni punto di Y, cioè se la serie lineare data su X è *composta* mediante un'involuzione di grado μ, ogni punto di Y verrà ad essere μ-plo, e quindi Y non sarà più d'ordine n come nel caso della serie semplice, ma solo d'ordine $n:\mu$. Però, volendo evitare la distinzione fra serie lineari semplici e composte, potremo dire che sempre l'ordine di Y è n, ma che Y può ridursi ad una *varietà multipla*, doppia, tripla,... μ-pla, cioè ad una varietà d'ordine $n:\mu$ da contarsi μ volte.

21. *La considerazione delle varietà multiple è utilissima.* Essa permette di riguardare come *biunivoca* anche nel caso che prima si escludeva la corrispondenza razionale fra le due varietà X e Y. Se Y è μ-pla, ogni suo punto va considerato come un gruppo di μ punti generalmente distinti; e la corrispondenza con X viene ad essere biunivoca in quanto i μ punti di X che prima corrispondevano ad uno stesso punto di Y ora invece si considerano come corrispondenti rispettivamente ai μ punti di Y sovrapposti in quello. — Così quando la dimensione r della serie lineare data su X è $=k$, la Y coincide con S_k, ma continua ad essere una M_k d'ordine n ($=\mu$ nel caso attuale): *uno spazio S_k (retta, piano...) n-plo.* Invece di assumere come limite minimo dello spazio che può contenere una M_k^n l'S_{k+1}, possiamo ora prendere l'S_k e così parlare di curva d'ordine n distesa sulla retta, di superficie d'ordine n distesa sul piano, ecc. Ed invece di prendere come rappresentanti delle M_k nella geometria su queste varietà le M_k di S_{k+1} (v. n.° 10) possiamo anche assumere le M_k di S_k, ossia gli S_k multipli (che si otterrebbero ad es. projettando su un S_k le M_k qualunque che son date) (*).

Riguardo alle varietà multiple aggiungiamo che col loro mezzo si può riguardare come biunivoca una corrispondenza *d'indici qualunque* (μ, μ') fra due varietà: basta che queste si considerino come multiple risp. secondo μ' e μ. Ciò si rende sensibile ad es. considerando come intermediaria la varietà delle rette che congiungono i punti omologhi delle due varietà date (o semplicemente la varietà delle coppie di punti omologhi): ad essa è riferita biunivocamente la 1.ª di queste se i suoi punti si contano μ' volte, e la 2.ª se se ne contano μ volte i punti. — Si avverta poi in generale che quando s'introduce nello studio una varietà multipla, per potersene valere, anzi perchè la cosa

(*) Com'è noto, alla rappresentazione delle curve mediante una retta multipla si collega subito la rappresentazione *reale* con *superficie di* RIEMANN: i punti complessi della retta si rappresentano coi punti reali del piano o della sfera reale; ed all'esser la retta n-pla corrisponde il sovrapporsi di n fogli sulla superficie, ecc.

abbia un senso ben definito, bisogna che sia sempre data una varietà semplice con cui quella varietà multipla sia in corrispondenza biunivoca determinata: come nell'esempio citato, in cui i μ punti di una varietà μ-pla che occupano uno stesso luogo son rappresentati da μ rette distinte uscenti da questo. —

Si potrebbero anche considerare varietà multiple in cui ogni punto va contato *infinite volte*. Così abbiam visto (n.° 17) che quando la varietà X si trasforma razionalmente mediante una sua serie lineare composta di varietà M_i ($i > 0$) tali che per un punto generico di X ne passi una sola, la trasformata Y ha i suoi punti che sono imagini ognuno di tutti i punti di X costituenti una M_i; ciascun punto di Y si dovrebbe dunque contare ∞^i volte per poter concepire come biunivoca la corrispondenza fra X e Y. Anche qui può soccorrere la rappresentazione mediante la varietà delle coppie di punti omologhi di X ed Y. —

22. Meritano un cenno speciale le *varietà doppie*. Quando una varietà Y di dimensione k si considera come *doppia*, ciò vuol dire che si pensa ad una altra varietà X con un'*involuzione di 2.° grado* riferita biunivocamente ad Y, ogni punto di Y rappresentando una coppia di punti di quell'involuzione su X e viceversa. Mentre le coordinate dei punti y di Y son funzioni razionali di quelle dei punti omologhi x di X, le coordinate di un punto x di X son funzioni algebriche a due valori di quelle del punto omologo y, e quindi del tipo

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)},$$

ove le funzioni A_i, B_i, R son razionali e si possono anzi, introducendo coordinate omogenee, supporre intere. La $R(y)$ si può supporre priva di fattori multipli; e si può ammettere che sia una stessa funzione per tutti i valori di i, sicchè anche x_k contenga solo il radicale che compare in x_i: giacchè è chiaro che in generale x_k è funzione algebrica ad un valore delle y e della x_i, cioè delle y e di $\sqrt{R(y)}$, e però si esprimerà razionalmente con queste. — L'equazione:

$$R(y) = 0$$

determina sulla varietà Y una varietà M_{k-1} composta di quei punti y [all'infuori eventualmente di punti eccezionali che annullino anche le $A_i(y)$] pei quali coincidono i due omologhi su X: *la varietà limite* o *varietà di diramazione* della varietà doppia Y, o della corrispondenza (1, 2) fra Y ed X. Ad essa corrisponde univocamente su X la M_{k-1} *doppia* dell'involuzione di 2.° grado.

Abbiansi due varietà X, X' che si rappresentino sulla varietà doppia Y con la stessa varietà M_{k-1} di diramazione $R(y)=0$; per modo che si possan definire risp. con le equazioni:

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)}$$
$$x'_i = A'_i(y) + B'_i(y)\sqrt{R(y)}.$$

È chiaro che esse saranno in corrispondenza algebrica biunivoca, se si considerano come omologhi due loro punti x, x' quando corrispondano agli stessi valori delle y e di $\sqrt{R(y)}$ [oppure anche a valori opposti per $\sqrt{R(y)}$; sicchè si hanno *due* corrispondenze biunivoche]. Dunque le varietà semplici che rappresentano una data M_k doppia con una determinata M_{k-1} limite sono tutte equivalenti fra loro (per trasformazioni birazionali) (*). Ha quindi un senso pienamente determinato il dire: la M_k doppia con una data varietà limite. Due varietà X, X' di dimensione k, riferite biunivocamente a due varietà *doppie* Y, Y' determinate risp. da due M_{k-1} limiti, si potranno riferire biunivocamente fra loro se si posson riferire biunivocamente le varietà *semplici* Y, Y' in modo che si corrispondano quelle due M_{k-1} (**).

È così che si può parlare della retta doppia con $2p+2$ dati punti di diramazione come rappresentante di una classe ben determinata di curve (*iperellittiche;* cfr. § 16); del piano doppio con conica limite e di quello con quartica limite (***); ecc. --

Tutto ciò non si potrebbe estendere senz'altro a varietà μ-ple per $\mu > 2$. Non possiamo cioè asserire che sia ben determinata una tal varietà quando si assegni su essa la varietà limite.

(*) Almeno finchè la loro rappresentazione analitica si può far dipendere da un radicale quadratico il cui annullamento non stacchi dalla M_k alcun'altra M_{k-1} che la varietà limite. Questa restrizione vale anche per le linee seguenti.

(**) Se dunque una varietà X ammette un'involuzione di 2.° grado riferibile nel modo detto alla varietà Y, ma non più involuzioni trasformabili birazionalmente fra loro, i suoi *moduli* (cioè numeri che non mutano per trasformazioni birazionali della varietà X) saranno precisamente i moduli che la M_{k-1} $R(y)=0$ ha *sopra la* Y (cioè numeri relativi alla detta M_{k-1} i quali non mutano per trasformazioni birazionali di Y).

(***) Così dal fatto che queste due specie di piani doppi si posson sempre ottenere come imagini (projezioni) di una quadrica (da un punto esterno) o di una superficie cubica (da un suo punto semplice), e dall'essere queste superficie rappresentabili biunivocamente sul piano, cioè razionali (escluso il cono cubico), segue che quei due piani doppi (il 2.° se la quartica limite non si spezza in 4 rette concorrenti) son riferibili biunivocamente al piano, cioè che son razionali tutte le superficie rappresentabili su quei due piani doppi.

§ 6. Serie lineari contenute in una data.

23. Data sulla varietà X di dimensione k dello spazio S_d una serie lineare ∞^r di M_{k-1}, che possiam supporre vi sia segata da un dato sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, i sistemi lineari minori che son contenuti in questo quando $r>1$ segano su X delle serie lineari di M_{k-1} contenute nella ∞^r. Rappresentando questa con la varietà Y (di dimensione $\leqq k$) di S_r, le serie lineari minori che così si ottengono saran segate su Y dalle forme fondamentali d'iperpiani di S_r. *E la serie lineare ∞^r non contiene altre serie minori che queste.* E più in generale possiamo osservare che: *se entro una serie lineare di dimensione $r>1$ di M_{k-1} su X si ha una serie algebrica infinita tale che per r' punti generici di X* (*) *passi una sola di queste M_{k-1}, questa serie sarà una serie lineare di quelle già considerate entro la data.* In fatti rappresentando la serie lineare ∞^r su Y, quella serie algebrica di M_{k-1} di X avrà per imagine una serie di sezioni iperplanari di Y tale che per r' punti generici di Y ne passerà una sola (**): donde segue (***) che gl'iperpiani di quelle se-

---

(*) E quindi per i gruppi di punti (o le M_i) collegati ad essi, nel caso che la serie lineare ∞^r sia composta con un'involuzione (o con un sistema di M_i).

(**) Anche se Y fosse *multipla*, sicchè a quegli r' punti corrispondessero su X altrettanti gruppi di punti, od M_i (v. la nota preced.).

(***) Si ha in S_r una serie algebrica $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y passa un solo iperpiano. Si tratta di dimostrare che la serie si compone degl'iperpiani passanti per un $S_{r-r'-1}$.

Sia anzitutto $r'=1$. Allora se gli ∞^1 iperpiani non formassero un fascio, per un punto generico di S_r ne passerebbe più di uno, onde essi avrebbero un *inviluppo* M_{r-1}; e su questo dovrebbe stare Y, perchè per ogni suo punto coincidono gl'iperpiani che lo contengono. Dunque gli ∞^1 iperpiani sarebbero *tangenti* ad Y nei punti in cui l'incontrano; sicchè le varietà d'incontro sarebbero *varietà di contatto* (come sarebbero ad es. quelle determinate su un ordinario cono quadrico dai suoi piani tangenti), a differenza di quelle segate su Y degl'iperpiani generici di S . Invece l'ipotesi che sopra si ammette è che la serie algebrica $\infty^{r'}$ stia in quella lineare ∞^r *semplicemente*, cioè senza contar come *multiple* le sue varietà. Segue che veramente per $r'=1$ si hanno gl'iperpiani di un fascio.

Ed ora suppongasi $r'>1$ e che si sia dimostrato l'asserto per serie (algebriche) d'iperpiani di dimensione $<r'$, sicchè per es. si abbia che una $\infty^{r'-1}$ d'iperpiani tale che per $r'-1$ punti generici di Y ne passi un solo si componga degl'iperpiani uscenti da un $S_{r-r'}$. Data la $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y ne passi un solo, e preso su Y un punto A (non comune alla $\infty^{r'}$), gl'iperpiani di quella serie i quali passano per A passeranno per un $S_{r-r'}$; mentre gl'iperpiani della stessa serie i quali passano per un nuovo

zioni costituiscono appunto una forma fondamentale, cioè passano per uno stesso $S_{r-r'-1}$ (*).

24. L'ultima proposizione, generale, trova un'applicazione immediata alle *varietà razionali*. Se X è una M_k razionale e su essa si ha una serie infinita algebrica di M_{k-1}, nella rappresentazione birazionale di X su un S_k a quelle varietà corrisponderanno M_{k-1} di un certo ordine: contenute dunque nella serie lineare composta di tutte le M_{k-1} di quell'ordine dell' S_k. Dunque anche la serie algebrica di M_{k-1} di X è contenuta in una serie lineare di M_{k-1}; e però le si può applicare quella proposizione generale, sicchè: *sopra una M_k razionale una serie infinita algebrica di M_{k-1} tale che per un certo numero di punti generici ne passi una sola è una serie lineare.*

Così per $k = 1$ si ha che sopra una curva razionale una serie (algebrica) di gruppi di punti tale che da alcuni punti generici sia individuato un gruppo è *lineare*, ossia un'*involuzione* ordinaria. — Se una curva si può rappresentare ponendo per le coordinate delle funzioni razionali di un parametro λ, e ad ogni punto della curva corrispondono n valori di λ, in altri termini se la curva è in corrispondenza $(1, n)$ con una retta (su cui si distende il parametro λ), gli ∞^1 gruppi di n punti di questa che corrispondono ai singoli punti della curva saranno tali che ogni punto della retta farà parte di un solo gruppo. Dunque formeranno un'involuzione, cioè una varietà semplicemente infinita razionale, alla quale sarà riferita biunivocamente la curva: sicchè questa sarà *razionale*. Cfr. la definizione del n.° 5 (**).

---

punto B di Y non situato su questo spazio passeranno per un secondo $S_{r-r'}$; e questi due spazi avranno comune un $S_{r-r'-1}$ per cui debbon passare gl'iperpiani della serie che contengono in pari tempo A e B. Gl'iperpiani della serie uscenti da un nuovo punto C di Y non posto sull'$S_{r-r'+1}$ congiungente i due $S_{r-r'}$ avranno comune un terzo $S_{r-r'}$ che incontrerà quei due secondo spazi $S_{r-r'-1}$ necessariamente coincidenti (col primo $S_{r-r'-1}$), giacchè altrimenti l'$S_{r-r'}$ relativo a C starebbe nell'$S_{r-r'-1}$ congiungente i primi due. Dunque movendosi C su Y gl'iperpiani della serie $\infty^{r'}$ passanti per esso passano sempre per un $S_{r-r'-1}$ fisso: come si voleva dimostrare.

(*) Questa proposizione, essenziale pel seguito, fu da me esposta già da alcuni anni pel caso che la varietà X sia una curva. Essa va confrontata con quella, più recente, che esporremo al n. 27 (v. anche la relativa nota a pie' di pag.).

(**) Appunto ora il sig. Castelnuovo è riuscito a dimostrare l'analoga proposizione per le superficie: ogni superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri è rappresentabile biunivocamente sul piano; ossia ogni serie algebrica di gruppi di punti del piano tale che un punto generico stia in un sol gruppo *(involuzione piana)* è razionale: *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ottobre 1893).

25. Da quella proposizione del n.° 23 che si riferisce alle serie lineari contenute in una data ∞^r di X, segue che se si cambia (com'è possibile) il sistema lineare di M_{d-1}

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

che sega su X la serie lineare ∞^r di M_{k-1} senza che questa muti, con che cambieranno anche i sistemi lineari di M_{d-1} contenuti in quello, non muteranno però le serie lineari minori di M_{k-1} che questi staccano su X. Cosicchè le relazioni fra le serie lineari minori contenute nella serie lineare ∞^r (riguardo agli elementi M_{k-1} con cui si posson determinare o che esse hanno di comune, ecc.) son le stesse che quelle esistenti fra i sistemi lineari minori contenuti in un sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, ossia quelle esistenti fra gli spazi contenuti in un S_r. Inoltre, mutando il sistema lineare di M_{d-1} che stacca su X la data serie, cioè mutando le φ, la varietà Y definita dalle formole:

$$y_i = \varphi_i(x),$$

rimarrà sempre *collineare* a sè stessa (sicchè, projettivamente parlando, non muta); giacchè due tali varietà Y saranno dalla corrispondenza con la X riferite fra loro in una corrispondenza algebrica univoca tale che alle sezioni iperplanari dell'una corrispondono le sezioni iperplanari dell'altra, e agl'iperpiani di una forma fondamentale gl'iperpiani di una forma fondamentale: donde una collineazione fra i due S_r e le rispettive varietà Y. Trasformando *birazionalmente* X in una nuova varietà X', e quindi (n.° 14) la serie lineare ∞^r di X in una serie lineare ∞^r di X', avremo che le varietà Y, Y' imagini di queste due serie saranno *collineari* fra loro. *La geometria sulla varietà X (geometria delle trasformazioni birazionali) quando su questa si fissi una serie lineare ∞^r di M_{k-1} equivale alla geometria projettiva della varietà Y imagine della serie.*

26. Se la serie lineare ∞^r considerata su X contiene una serie lineare $\infty^{r'}$, esse si potranno (pel n.° preced.) supporre date su X dalle equazioni

$$\sum_0^r \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

$$\sum_0^{r'} \lambda_l \varphi_l(x) = 0,$$

e quindi le varietà imagini Y, Y' si potranno rappresentare con

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 0, \ldots, r)$$

$$y'_l = \varphi_l(x) \qquad (l = 0, \ldots, r')$$

(le x essendo legate dalle equazioni che definiscono X). Ora da queste formole riesce evidente che Y' si può riguardare come projezione di Y (dallo spazio $S_{r-r'-1}$, che congiunge i punti fondamentali $r'+1,\ldots, r$ di S_r). D'altra parte è chiaro che viceversa se una varietà Y' è projezione di un'altra Y, la serie lineare rappresentata da Y' ha per omologa (è projezione di) quella serie che su Y vien segata dagl'iperpiani passanti per lo spazio centrale di projezione, e quindi è contenuta nella serie rappresentata da Y. *È dunque la stessa cosa dire che una serie lineare è contenuta in un'altra e dire che la varietà imagine della 1.ª serie è projezione della varietà imagine dell'altra* (*).

Riguardo a ciò conviene osservare che la serie lineare $\infty^{r'}$ potrebbe avere dei punti fissi i quali non fossero tali per la serie lineare ∞^r: si ottiene una tal serie lineare contenuta nella ∞^r se si considerano gli elementi M_{k-1} di questa i quali passano per 1, 2,... punti dati di X (in modo che esistano elementi siffatti). Questi punti che son fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r possono anche (per $k>1$) essere infiniti, in guisa da formare una o più varietà; e possono addirittura costituire una M_{k-1} che farà parte di tutte le M_{k-1} elementi della serie $\infty^{r'}$. In tali casi la serie $\infty^{r'}$ è segata su Y da una forma fondamentale $\infty^{r'}$ d'iperpiani il cui sostegno $S_{r-r'-1}$ incontra Y nei punti fissi speciali per quella serie: la varietà Y', essendo la projezione di Y da quel sostegno su un $S_{r'}$, avrà dunque in tal caso un ordine minore di quello di Y, — s'intende finchè sussiste la nozione di *ordine*, cioè finchè $r'\geqq k$. — Saranno uguali gli ordini di Y, Y' se lo spazio centrale di projezione $S_{r-r'-1}$ non incontra Y, vale a dire se non vi sono punti su X che sian fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r. Allora (cfr. n.° 20) il numero dei punti d'incontro variabili di k elementi generici della serie ∞^r è lo stesso che il numero dei punti variabili d'incontro di k elementi generici della serie $\infty^{r'}$.

Una serie lineare ∞^r di M_{k-1} sulla varietà X di dimensione $k\leqq r$ si può chiamare *completa* (« *Vollschaar* ») se non è contenuta in una serie lineare

(*) Così, per fare sin da ora qualche esempio, dal fatto che sopra una M_1 razionale (o retta) una serie lineare di gruppi di n punti è contenuta in quella ∞^n composta da *tutti* i gruppi di n punti segue che una curva razionale d'ordine n (o minore) è sempre projezione della curva d'ordine n appartenente ad S_n. Similmente si vede che le superficie razionali rappresentate sul piano da sistemi lineari di curve d'ordine n sono projezioni di quella superficie, d'ordine n^2, appartenente allo spazio di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$, che è rappresentata dal sistema di *tutte* le curve piane d'ordine n. Ecc., ecc. Cfr. VERONESE: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., tom. 19, 1881).

di maggior dimensione (dello stesso ordine) con lo stesso numero di punti d'incontro variabili di k elementi generici; *parziale* nel caso opposto. D'altra parte dicesi *normale* una varietà M_k di S_r se non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore (*). Noi possiamo dunque dire che: *una serie lineare completa ha per imagine una varietà normale, e viceversa.*

27. Credo opportuno di non chiudere questo paragrafo senza prima esporre una proposizione più completa che quella generale del n.° 23: *Sulla varietà X di dimensione $k > 1$ una serie algebrica ∞^r di M_{k-1} irriducibili tale che $r > 1$ e che per r punti generici di X passi una sola M_{k-1} è certamente una serie lineare* (**).

Consideriamo anzitutto il caso di $r = 2$, sicchè su X si abbia una ∞^2 di M_{k-1} tali che per due punti generici ne passi una sola, o, come diremo più brevemente, una *rete* di M_{k-1}. Per un punto A di X (non fisso per la rete) ne passeranno ∞^1 formanti ciò che diremo un *fascio*. Presa una M_{k-1} nella rete ma non in questo fascio, per ogni punto generico B di essa passerà *un* elemento del fascio; sicchè quella M_{k-1} (non potendo, in causa della supposta irriducibilità, incontrare secondo *parti* M_{k-1} di sè stessa qualche elemento del fascio) dovrà comporsi di ∞^1 varietà M_{k-2} d'intersezione di essa risp. con gli ∞^1 elementi del fascio A. Una tale M_{k-2} d'intersezione di due M_{k-1} della rete ha tutti i suoi punti C su tutte le ∞^1 M_{k-1} della rete che passano per uno di essi, B: giacchè per B e C passano per ipotesi *due* elementi M_{k-1} della rete, e quindi infiniti. Adunque dalle mutue intersezioni degli elementi

(*) Si dice pure che una data M_k ha per *spazio normale* un S_r quando la varietà *normale* dello stesso ordine di cui essa è projezione appartiene ad S_r.

(**) Essa è dovuta al sig. ENRIQUES, di cui riproduco pure, un po' modificata, la dimostrazione; v. *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, luglio 1893). — Quasi simultaneamente il sig. CASTELNUOVO ha trattato il caso di $k = 1$ dimostrando che: *sopra una curva algebrica una serie ∞^r, ove $r > 1$, di gruppi di punti tale che r punti generici stiano in un sol gruppo è lineare, tolto il caso che i suoi gruppi si compongano raggruppando ad r ad r i gruppi di un'involuzione semplicemente infinita non razionale* (*di grado* $\geqq 1$): v. la Nota *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, giugno 1893). La dimostrazione è meno semplice che quella relativa al caso $k > 1$ (caso che si potrebbe far derivare, come i due Autori citati hanno osservato, da quello $k = 1$): essa vien basata dal sig. CASTELNUOVO sulla rappresentazione per mezzo d'integrali Abeliani delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva (rappresentazione già abilmente adoperata dal sig. HURWITZ in lavori che avremo da citare più tardi).

della rete si ottengono su X infinite M_{k-2} tali che un punto generico di X sta su *una* di esse (l'intersezione di due M_{k-1} passanti per esso) e che le M_{k-1} della rete si *compongono* mediante le M_{k-2}, nel senso in cui alla fine del n.° 17 abbiam parlato di serie di M_{k-1} composte di M_i. Due M_{k-1} della rete si tagliano in *una* M_{k-2}; per due M_{k-2} passa *una* M_{k-1}. Rappresentando per semplicità queste ∞^2 M_{k-2} biunivocamente sui punti di una superficie F, alle M_{k-1} della rete corrisponderanno su F una ∞^2 *algebrica* di linee tali che due di esse si tagliano in *un* punto e che per due punti ne passa *una*. In particolare dunque (supponendo questi due punti infinitamente vicini) le linee uscenti da un punto generico di F (fascio) corrispondono biunivocamente (ed algebricamente) alle loro tangenti in quel punto e quindi costituiscono una ∞^1 *razionale*. I punti di F potendosi determinare come intersezioni delle linee di due tali fasci, se ne trae subito — come nell'ordinaria costruzione delle collineazioni piane mediante due coppie di fasci omologhi di raggi — che F si può riferire birazionalmente ad un piano in modo che le ∞^2 linee corrispondono alle rette del piano (potendosi anzi prendere ad arbitrio di 4 linee date di F le 4 rette omologhe sul piano). Si può dunque ottenere la rete di M_{k-1} di X trasformando razionalmente la serie delle rette del piano: donde segue (n.° 14) che essa è una serie lineare.

Se poi si ha su X una ∞^r (con $r > 2$) di M_{k-1} irriducibili tale che per r punti generici ne passi una sola, suppongasi già dimostrato per valori di r minori del dato che una serie siffatta è lineare, sicchè si può riferire univocamente agl'iperpiani di uno spazio in guisa che agli elementi della serie passanti per un punto generico di X corrispondano gl'iperpiani di una forma fondamentale (di modo che questo riferimento sarà determinato dando di $r+2$ elementi della serie gli $r+2$ iperpiani omologhi). Si fissino poi su X due punti A, B ed in uno spazio S_r due punti A', B'; e si riferiscano le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B agl'iperpiani di S_r passanti risp. per A', B' in guisa che alle M_{k-1} di quelle due serie passanti per un punto generico di X corrispondano risp. gl'iperpiani di quelle *stelle* passanti risp. per due rette delle stelle stesse; ma di più si faccia in modo che ad ogni M_{k-1} comune alle due serie, cioè passante per A e per B, corrisponda sempre uno stesso iperpiano (per A' e B') in ambe le stelle. Allora accadrà che le due rette delle stelle A', B' che corrispondono nel modo detto ad un punto qualunque P di X s'incontreranno in un punto P', cioè staranno in ∞^{r-3} iperpiani: quelli che in entrambe le stelle corrispondono alle ∞^{r-3} M_{k-1} passanti per A, B e P; sicchè per ogni punto P di X si ha un punto P' in S_r. D'altra parte segando una

M_{k-1} fissa non passante per A nè per B con la serie lineare ∞^{r-1} delle M_{k-1} che passano per A (o per B) si ha, come subito si vede, sulla M_{k-1} una *serie lineare* ∞^{r-1} di M_{k-2}: e si posson riferire le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B *prospettivamente* fra loro, riguardando come omologhi due elementi che determinino una stessa M_{k-2} sulla M_{k-1} fissa. La corrispondenza sarà tale che si corrisponderanno pure fra loro le serie lineari minori contenute in quelle due, e che saranno omologhe di sè stesse le M_{k-1} comuni alle due serie, cioè passanti per A e per B. Ne deriverà fra le stelle d'iperpiani A' e B' una collineazione in cui saranno uniti tutti gl'iperpiani comuni alle due stelle, cioè una *prospettività*. L'iperpiano in cui si tagliano allora gli elementi omologhi delle due stelle si faccia corrispondere alla M_{k-1} che s'era fissata su X. È chiaro che se questa passa pel punto P prima considerato, l'iperpiano corrispondente passerà per P'. Si saran dunque riferiti univocamente i punti P di X ai punti P' di una varietà di S_r per modo che ai punti di una M_{k-1} della serie ∞^r data su X corrispondono i punti di quella varietà posti in un iperpiano. Dunque (n.° 14) la serie ∞^r è lineare. —

Mettendo a riscontro la proposizione ora dimostrata con quelle dei n.i 23 e 24 si vede che in quelle avevamo imposto alla serie che si considerava la condizione di esser *contenuta in una serie lineare* (n.° 23), od in particolare (n.° 24) di stare su una varietà X razionale: ed in tali casi esse valevano anche per serie ∞^1. Qui invece abbiam dovuto porre la condizione dell'*irriducibilità* degli elementi M_{k-1} generici della serie; ed oltre a ciò abbiam dovuto escludere le serie ∞^1: esclusione necessaria poichè è chiaro che si può con una ∞^1 di M_{k-1} generare una M_k per modo che ogni punto di questa stia su una sola M_{k-1} e che quella ∞^1 non sia razionale, e quindi non sia una serie lineare.

CAPITOLO II.

§ 7. L'ente algebrico semplicemente infinito. Le serie lineari ∞^1 e le funzioni razionali dell'ente.

28. D'or innanzi il nostro argomento si restringerà alla geometria su una M_1, o varietà algebrica semplicemente infinita, o, come diremo pure brevemente, *ente algebrico* (*) (sottintendendo « semplicemente infinito »). Questo

(*) *Algebraische Gebilde* secondo WEIERSTRASS.

ente sarà di solito rappresentato con una *curva* (*); e perciò parleremo dei *punti* dell'ente, considerando però sempre come diversi i punti che stanno in *elementi* diversi nel senso del n.° 11, sicchè ad es. in un ordinario punto s-plo di una curva piana (imagine dell'ente algebrico) noi avremo s punti ben distinti dell'ente.

Una serie lineare di gruppi di n punti dell'ente algebrico dicesi di *ordine* n, e s'indica brevemente (coi sig.i Brill e Noether) con g_n; e con g_n^r se r è la sua dimensione. Così una g_n^0 sarà un gruppo di n punti. — Se una g_n^r non ha punti fissi, sicchè $r > 0$, essa avrà per imagine (n.° 20) una curva d'ordine n appartenente ad S_r (sulla quale la serie stessa sarà segata dagl'iperpiani di questo spazio): però questa curva sarà multipla, cioè si ridurrà ad una d'ordine $n:\mu$ contata μ volte, se la serie è composta mediante un'involuzione di grado μ. Se poi la g_n^r (con $r > 0$) ha k punti fissi, la sua imagine sarà una curva d'ordine $n-k$ appartenente ad S_r e sulla quale son fissati k punti; ed ancora questa curva potrà esser semplice o multipla.

I caratteri, le singolarità della serie lineare sono i caratteri, le singolarità della curva imagine (e dei punti fissi della serie). Così ad un gruppo della g_n^r dotato di punti (non fissi) *multipli* secondo a, b,... corrisponderà per la curva imagine un iperpiano avente con essa *contatti* a-punto, b-punto,.... ad es. ai gruppi che hanno punti (mobili) r-pli gl'iperpiani *osculatori* alla curva nei vari punti, ai gruppi con punti $(r+1)$-pli gl'iperpiani *iperosculatori* o *stazionari* della curva. D'altra parte μ punti dell'ente algebrico i quali ai gruppi della g_n^r che si costringano a contenerli presentino non μ, ma un numero minore h di condizioni $(<r)$, sicchè quei gruppi siano ∞^{r-h} (dei μ

(*) Ad onta di ciò adotto la denominazione più vaga di « *ente algebrico* », affinchè si pensi simultaneamente a tutta la *classe* di varietà ∞^1 equivalenti per trasformazioni birazionali, e non si ponga mente invece alle singolarità *projettive* che può avere una *curva* della classe.

Ci accadrà pure qualche volta che l'ente algebrico sia rappresentato da una *rigata* (come varietà ∞^1 di rette). Allora una *serie lineare di generatrici della rigata* può esser data direttamente (mediante la definizione della rigata con coordinate di retta); oppure anche può esser ottenuta come corrispondente prospettivamente ad una serie lineare di gruppi di punti di una qualunque curva *direttrice* della rigata (chiamando così una linea che sia incontrata in un sol punto da ogni generatrice: ad es. il resto di una sezione iperplanare della rigata condotta per 0, 1, 2,... generatrici). Così, se per una particolare direttrice passano degl'iperpiani, questi segano ulteriormente la rigata in gruppi di generatrici di una serie lineare (come appare considerando gl'incontri di questi gruppi di generatrici con un'altra direttrice).

punti si dice che hanno un certo grado di *neutralità* rispetto alla serie), avranno per imagini μ punti della curva giacenti in un S_{h-1}, *spazio* μ *secante:* ad es. per $h=1$, se cioè i μ punti impongono *una* sola condizione, le loro imagini sulla curva si sovrappongono in un *punto* μ*-plo* di questa (cfr. n.° 20); per $h=2$ cioè quando i μ punti contano come *due* condizioni, si ha in corrispondenza una *retta* μ*-secante* della curva; ecc. In particolare se i μ punti considerati dell'ente algebrico coincidono (nel senso ricordato della geometria sull'ente), anche sulla curva imagine si avranno μ punti coincidenti, *in un sol ramo (od elemento o ciclo) della curva;* e per $h=1$ si avrà così sulla curva un punto μ-plo (ramo od elemento o ciclo d'ordine μ); per $h=2$ una tangente che incontra in quel punto μ volte la curva; per h qualunque, quando cioè i gruppi della g_n^r per cui un dato punto è μ-plo sono ∞^{r-h} invece che $\infty^{r-\mu}$, la curva imagine avrà nel punto corrispondente un S_{h-1} osculatore che la incontra ivi μ volte.

Le formole di Plücker, di Cayley, di Veronese, che legano i caratteri di una curva piana, sghemba (di S_3), iperspaziale (di S_r), si possono considerare come relazioni fra caratteri di una serie lineare di gruppi di punti ∞^2, ∞^3, ∞^r.

29. Su ciò avremo occasione di ritornare. Intanto è bene rilevar subito una limitazione per la dimensione e l'ordine di una serie lineare, la quale deriva immediatamente dalla definizione di quei due caratteri. Poichè (n.° 13) si posson prendere ad arbitrio sull'ente algebrico r punti per determinare un gruppo di una g_n^r, sarà sempre

$$n \geqq r,$$

ossia

$$n - r \geqq 0;$$

il numero $n-r$ è quello dei punti di un gruppo che rimangon determinati in generale dai rimanenti (r). — Se la g_n^r ha k punti fissi, e se poi la g_{n-k}^r che da essa rimane togliendo questi punti è composta con un'involuzione di grado μ, allora dando r punti generici per un gruppo della g_n^r si vengono ad avere immediatamente $\mu r + k$ punti del gruppo; sicchè sarà

$$n \geqq \mu r + k.$$

Nel caso particolare che sia $n=r$ si trae da quest'ultima relazione: $k=0$, $\mu=1$; cioè che la serie data non ha punti fissi e non è composta. Inoltre fissando $n-1$ punti e considerando i gruppi della serie che li contengono, il punto residuo di quei gruppi descriverà una g_1^1, varietà *razionale,* che non sarà altro che la serie dei punti dell'ente algebrico. Dunque: *se un ente algebrico contiene una serie lineare il cui ordine è eguale alla dimensione, l'ente è razionale. Per una g_n^r sopra un ente non razionale è sempre $n > r$.*

30. Conviene considerare anzitutto in modo particolare *le serie lineari semplicemente infinite*. Si può dire che esse sono le più importanti, in quanto che dalle loro proprietà si posson trarre quelle delle serie più ampie.

Esse son caratterizzate come infinità di gruppi di n punti (se n ne è l'ordine) dell'ente algebrico dalle due proprietà: 1.° di esser razionali, 2.° che un punto generico (cioè non comune a tutti i gruppi) individua il gruppo che lo contiene. Invero dalla 1.ª proprietà segue che gl'infiniti gruppi corrispondono algebricamente e biunivocamente ai valori di un parametro z; e della 2.ª che se x è il punto dell'ente, la corrispondenza fra i gruppi ed i punti che li compongono dà z come funzione algebrica univoca, e quindi (n.° 7) razionale, delle coordinate x, ossia

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{1}$$

ove le φ, ψ son forme dello stesso grado nelle x. Se ne trae

$$\varphi(x) - z\psi(x) = 0,$$

equazione lineare nel parametro z, la quale prova appunto che la serie di gruppi è lineare.

Per tal modo si vede anche come le *funzioni razionali dell'ente algebrico*, vale a dire le funzioni razionali delle coordinate dei punti dell'ente, ossia della forma (1) (dove le x son legate dalle equazioni che definiscono l'ente) (*), corrispondano alle serie lineari ∞^1: essendo gruppi di una tal serie i gruppi dei punti in cui una data funzione razionale z dell'ente assume uno stesso valore (**). L'ordine n della serie lineare, ossia il numero dei punti di

(*) La denominazione « *funzioni razionali* dell'ente » è quella usata dal Weierstrass nelle già citate Lezioni; mentre altri autori dicono « funzioni *algebriche* dell'ente ». — In ogni punto *ben determinato* dell'ente una data funzione razionale z prende un valore *ben determinato*, o direttamente [per semplice sostituzione delle coordinate del punto nell'espressione (1) della funzione] o come *limite* (quando la detta sostituzione annullasse numeratore e denominatore di quell'espressione).

(**) Secondo l'osservazione fatta nella nota preced. si ottengono così nei vari gruppi della serie i soli punti che variano da un gruppo all'altro, e non i punti *fissi:* sicchè propriamente le funzioni razionali dell'ente non sono atte a rappresentare le serie lineari dotate di punti fissi; o meglio possono rappresentarle solo in parte, cioè astraendo da questi punti.

ciascun gruppo, in particolare il numero degli *zeri* [$\varphi(x)=0$] o degl'*infiniti* [$\psi(x)=0$] della funzione razionale z, dicesi *grado* (*) od *ordine* di z.

Data una g^1_n (senza punti fissi, come tutte le serie che consideriamo nel seguito di questo paragrafo)

$$\varphi(x) - z\psi(x) = 0,$$

è chiaro che essa sarà rappresentata nel senso spiegato non solo dalla funzione razionale

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

ma anche dalle trasformazioni lineari a coefficienti costanti

$$\frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ossia} \quad \frac{a\varphi(x)+b\psi(x)}{c\varphi(x)+d\psi(x)}$$

di quella (**). Ed anzi queste saranno *tutte* le funzioni razionali dell'ente che corrispondono a quella g^1_n, giacchè se

$$Z = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$$

indica una funzione razionale corrispondente a quella serie, fra i valori di z e Z che corrispondono ad uno stesso punto x dell'ente vi sarà una corrispondenza algebrica *biunivoca*, e quindi *bilineare*. (***)

(*) Secondo WEIERSTRASS. Il KLEIN invece lo chiama *valenza (Werthigkeit)*.

(**) Da ciò segue che due gruppi *qualunque* della g^1_n si possono assumere come gruppi degli zeri e degl'infiniti di una funzione razionale dell'ente. Si può dunque esprimere che due gruppi (ben distinti) di n punti stanno in una stessa g_n (infinita), e per conseguenza in una g^1_n, dicendo che sono gli zeri e gl'infiniti di una stessa funzione razionale dell'ente: come appunto soglion fare gli analisti (chiamando *equivalenti* due tali gruppi). — Così pure si può dire che le g^1_n contenenti un dato gruppo di n punti si posson rappresentare mediante le funzioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti in quegli n punti (funzioni di grado n). Convien però tener presente (v. sopra) che con ciò si vengono ad escludere fra le dette g^1_n quelle che hanno punti fissi (fra gli n dati). Volendo evitare tale esclusione si dovrà dire che le g^1_n contenenti il dato gruppo di n punti son rappresentate dalle funzioni razionali dell'ente che hanno i loro infiniti FRA quegli n punti (funzioni di grado $\leq n$): allora quelle fra tali funzioni che *non sono* infinite in uno di quei punti rappresenteranno serie g^1_n per cui questo è un punto fisso.

(***) Le considerazioni di questo n.° 30 si applicherebbero evidentemente, quasi senza modificazioni, alle serie lineari ∞^1 di M_{k-1} su una M_k, e alle *funzioni razionali della* M_k.

31. Consideriamo ora due funzioni razionali qualunque

$$z = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad s = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \tag{2}$$

dei gradi risp. n, m, dell'ente algebrico; tali però che non ogni gruppo di punti $z = \text{cost.}$ abbia più di un punto comune con qualche gruppo $s = \text{cost.}$, vale a dire tali che le serie g_n^1, g_m^1 rappresentate da quelle funzioni non abbiano infinite *coppie comuni* (cioè coppie di punti che stiano in gruppi delle due serie). Fra z ed s, considerando come omologhi i valori che assumono in uno stesso punto dell'ente, vi sarà una corrispondenza algebrica (m, n), e quindi (n.° 8) un'equazione:

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0, \tag{3}$$

la quale risulterebbe dall'eliminazione delle x fra le (2) e le equazioni che definiscono l'ente algebrico. Le coordinate x saranno poi esprimibili come funzioni razionali di s e z: i punti dell'ente essendo in corrispondenza biunivoca coi gruppi di valori (s, z) soddisfacenti all'equazione (3). Sicchè per la geometria sull'ente si potrà assumere a rappresentante di questo quell'equazione. Vale a dire si può in generale rappresentare un ente algebrico mediante l'equazione che lega due sue funzioni razionali qualunque (con la detta restrizione), cioè con la varietà ∞^1 costituita dalle soluzioni di quell'equazione. — È noto come questa varietà si possa rappresentare in modo sensibile distendendo ad es. la variabile complessa z sul piano o sulla sfera reale e deponendo su ogni valor di z gli n corrispondenti valori di s: donde nasce una *superficie di* Riemann ad n fogli (cfr. la nota al n.° 21). —

Qui si presenta un nuovo modo analitico di considerare l'ente algebrico (*). In luogo di definirlo assumendo particolari coordinate e quindi particolari equazioni fra queste, si pensino simultaneamente per ciascun punto dell'ente i valori che in esso prendono *tutte* quante quelle variabili s, z, le x,... che finora chiamavamo « funzioni razionali dell'ente ». Il *punto* dell'ente è precisamente un insieme, una coesistenza di valori di quelle variabili. Due qualunque di queste verificano in tutti i punti un'equazione algebrica; e se non vi sono infinite coppie di punti nei quali ognuna delle due prenda lo stesso valore, ogni altra variabile si potrà esprimere come funzione razionale di quelle due.

(*) Veggasi per maggiori schiarimenti la memoria Dedekind-Weber.

32. L'equazione (3) si può rappresentare geometricamente in più modi, prendendo z, s come coordinate di elementi geometrici. Così assumendole risp. per coordinate degli elementi di due fasci di raggi S, S' in uno stesso piano, quella sarà l'equazione di una curva piana, generata nel seguente modo: Le due serie lineari g_n^1, g_m^1 dell'ente algebrico, considerate come varietà ∞^1 razionali, si riferiscono biunivocamente risp ai due fasci di raggi S, S': considerando come omologhi nelle due serie due gruppi che contengano uno stesso punto dell'ente, ne deriva una corrispondenza (m, n) fra i raggi di quei due fasci; ed il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi è la curva γ rappresentata dall'equazione (3). Su γ, considerata come imagine dell'ente algebrico, la serie g_n^1 è quella staccata dalle rette del fascio S (fuori del centro del fascio stesso), e così la g_m^1 è staccata dal fascio S'. La curva è in generale d'ordine $m+n$ ed ha S per punto m-plo, S' per punto n-plo. Ma se ad es. nel riferire le due serie dell'ente algebrico ai fasci S, S' si fa corrispondere la retta SS' comune a questi a due gruppi che abbiano un punto comune, sicchè quella retta corrisponda a sè stessa nella corrispondenza (m, n) tra i due fasci, essa si staccherà dal luogo generato da questi, e la curva γ si ridurrà all'ordine $m+n-1$ avendo i punti S, S' come multipli secondo $m-1$, $n-1$; ecc. — Un punto μ-plo di γ fuori di S, S' corrisponderà in generale a μ punti dell'ente posti in un gruppo della g_n^1 ed in un gruppo della g_m^1; e viceversa. — (*)

§ 8. Genere dell'ente algebrico.

33. Per una serie lineare ∞^1 oltre all'*ordine* si può considerare un altro carattere: il numero degli *elementi* (gruppi di punti; o valori di una corrispondente funzione razionale z dell'ente) *di diramazione,* ossia dei gruppi della serie che contengono due punti coincidenti (punti *doppi* della serie). Nella rappresentazione dell'ente algebrico con l'equazione

$$F(s, z) = 0,$$

e quindi con la curva γ generata dai due fasci S, S' (n.° 32), gli elementi di

(*) Si può similmente rappresentare un ente algebrico contenente k serie lineari ∞^1 date, mediante una curva di S_k generata da k fasci d'iperpiani riferiti tra loro (e seganti poi sulla curva risp. quelle serie). Ecc., ecc.

diramazione per la serie $z = \text{cost.}$, segata dalle rette del fascio S, corrispondono alle tangenti condotte da S a toccar γ fuori di S ed inoltre, nel caso che γ abbia cuspidi, alle rette passanti per queste: i punti doppi della serie stessa essendo quei punti di contatto e queste cuspidi (non i *nodi* di γ perchè ognuno di essi rappresenta due punti distinti dell'ente).

Con l'ordine di una serie lineare ∞^1 e col numero dei suoi elementi di diramazione ossia dei suoi punti doppi si forma un'espressione, la quale non muta valore cambiando la serie sull'ente algebrico: il *genere*.

Si considerino in fatti sull'ente algebrico due serie g_m^1, g_n^1 dotate risp. di μ, ν punti doppi. Riguardando nella g_n^1 come omologhi due elementi (gruppi) quando contengono due punti di uno stesso gruppo della g_m^1, avremo fra gli elementi di quella serie una corrispondenza simmetrica d'indice $n(m-1)$; ed in questa saranno elementi uniti quei μ gruppi che contengono risp. i μ punti doppi della g_m^1, ed inoltre quei d gruppi che hanno *coppie* di punti comuni con gruppi della g_m^1. Applicando dunque il principio di corrispondenza (n.° 8) entro la g_n^1, forma razionale, con l'avvertenza di contare due volte ciascuno degli ultimi d elementi uniti perchè su esso cadono *due* degli elementi omologhi (v. una nota al detto n.°), avremo:

$$2n(m-1) = \mu + 2d. \tag{1}$$

Similmente scambiando le due serie si ha:

$$2m(n-1) = \nu + 2d. \tag{1'}$$

Sottraendo l'una dall'altra queste due relazioni viene:

$$\nu - 2n = \mu - 2m. \tag{2}$$

Dunque la differenza fra il numero ν dei punti doppi ed il doppio dell'ordine n di una serie lineare ∞^1 non muta al mutar di questa. Si osservi poi che in forza della (1') il numero ν è sempre pari. Sarà quindi intero ed invariabile al variar della serie il numero $\frac{\nu}{2} - n + 1$; ed è questo numero che noi chiameremo il *genere dell'ente algebrico* (*). Lo indicheremo con p, sicchè

$$p = \frac{\nu}{2} - n + 1, \tag{3}$$

(*) Questa definizione del genere, sotto forma più analitica, si trova già in altri autori: v. ad es. NOETHER, Math. Ann., tom. 8, pag. 497; DEDEKIND-WEBER, pag. 264. Nella *Theorie der Abel'schen Functionen* del RIEMANN — ove, com'è noto, il numero p è introossia:

$$\nu = 2(n + p - 1). \tag{4}$$

34. Osserviamo subito, nel caso che l'ente sia *razionale,* che una g^1_n definisce fra i punti dell'ente una corrispondenza simmetrica d'indice $n-1$, considerando come omologhi i punti di uno stesso gruppo: e quindi applicando il principio di corrispondenza (il che si può fare nell'ipotesi della razionalità dell'ente) la serie stessa avrà $2(n-1)$ punti doppi. Sostituendo questo valore a ν nella formola (3) si ha $p = 0$. Dunque *gli enti razionali hanno il genere* $p = 0$.

Rileviamo anche subito come la definizione data del genere renda evidente che questo carattere spetta veramente alla geometria sull'ente: vale a dire *per trasformazioni birazionali dell'ente il genere non muta.* In fatti per una tal trasformazione una serie lineare ∞^1 si muta in altra dello stesso ordine e con lo stesso numero di punti doppi.

35. Ritornando al ragionamento generale del n.° 33, osserviamo che rappresentando l'ente algebrico, nel modo ricordato da principio, con la curva γ su cui le serie g^1_n, g^1_m vengon staccate dai fasci di rette S, S', la corrispondenza che si considerò fra i gruppi della g^1_n si potrebbe sostituire con una corrispondenza fra le rette del fascio S; ecc. Allora il numero d che s'è incontrato delle coppie di punti comuni alle due serie non è altro (v. la fine del n.° 32) che il numero dei punti doppi che γ ha, fuori di S, S'.

Si può, introducendo appunto quel numero d relativo alle due serie g^1_m, g^1_n [numero che prima avevamo eliminato dalle relazioni (1), (1')], ed eliminando invece ν fra le (3) e (1'), ricavare quest'altra espressione del genere (pure invariantiva per trasformazioni birazionali)

$$p = (m-1)(n-1) - d, \tag{5}$$

che definisce il genere dell'ente algebrico in funzione degli ordini di *due* serie lineari semplicemente infinite esistenti su esso e del numero delle coppie di punti che esse hanno comuni. Così si ha dalla (5) che se l'ente contiene due g^1_2

---

dotto per la prima volta, partendo dalla *connessione* dell'ente algebrico, cioè della superficie reale che lo rappresenta — s'incontra non solo la formola (3) (nel § 7), ma anche la (1) (nel § 6).

Come fu già notato, sarebbe forse stato opportuno dare un nome speciale all'espressione $\frac{\nu}{2} - n$, cioè $p - 1$, anzi che a p: poichè appunto quell'espressione, $p - 1$, compare di solito nelle formole.

il suo genere sarà 1 oppure 0, secondo che queste serie non hanno ovvero hanno una coppia comune. Ecc. (*) —

36. Nelle applicazioni particolari tanto della definizione primitiva (3) del genere quanto della (5) può accadere di dover badare a *multiplicità* di soluzioni che compajano nei numeri ν e d. Dalla possibilità, su cui ritorneremo in seguito, di rappresentare l'ente algebrico con una curva piana dotata di soli punti multipli *ordinari*, od anzi di soli *nodi*, si trae subito l'esistenza d'infinite serie lineari g_n^1 che hanno i ν elementi di diramazione tutti *semplici*, ossia che non hanno altri punti multipli che punti doppi; non che l'esistenza d'infinite coppie di serie lineari g_n^1, g_m^1 che hanno in comune solo *coppie* di punti, non terne, ecc. Se però avvenisse che le due serie considerate g_n^1, g_m^1 avessero comune una s-pla di punti distinti — cioè se vi fossero sull'ente s punti comuni ad un gruppo dell'una serie e ad un gruppo dell'altra (il che significa che la curva γ avrebbe un punto s-plo) — è chiaro che quella s-pla darebbe $\frac{s(s-1)}{2}$ coppie di punti comuni alle due serie, e quindi di tanto influirebbe nel numero d $\left(\text{allo stesso modo che un ordinario punto } s\text{-plo di } \gamma \text{ equivale ad } \frac{s(s-1)}{2} \text{ punti doppi}\right)$. — Se invece nel n.° 33 si avesse una g_n^1 dotata di un punto i-plo, si vede facilmente con noti procedimenti analitici che questo andrebbe contato come $i-1$ punti doppi nel numero complessivo ν, vale a dire che il gruppo (il valor corrispondente della funzione razionale z rappresentante la g_n^1) dotato di punto i-plo è un elemento di diramazione *d'ordine* $i-1$, che conta come $i-1$ elementi di diramazione *semplici*. Si può rappresentare l'ente algebrico con la curva γ in modo che quel punto sia semplice per questa: allora l'essere quel punto i-plo per la g_n^1 staccata su γ dal fascio di rette S significa che una retta di questo fascio ha in quel punto un contatto i-punto con γ: ed è ovvio che essa conterà precisamente come $i-1$ tangenti semplici condotte da S a γ (**). — Da ultimo si osservi come

(*) La (5) si trova alla fine del § 7 della citata Memoria del RIEMANN. — Si confronti anche, per quella formola, come per la rappresentazione contenuta nel precedente n.° 32, il n.° 4 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del CASTELNUOVO.

(**) Del resto, basandosi su un teorema già citato (in nota al n.° 8) del sig. ZEUTHEN relativo alla multiplicita degli elementi uniti in una corrispondenza, si può nel ragionamento col principio di corrispondenza fatto al n.° 33 tener conto direttamente dei punti *multipli* (non solo *doppi*) delle due serie, ed allora in quelle formole viene a comparire dalla formola (3) appaja che se la si volesse applicare anche a serie g_n^1 dotate di punti fissi, ognuno di questi dovrebbe contare nel numero ν come *due* punti doppi.

§ 9. Genere di una curva piana.

37. La formola (5) del paragrafo prec. dà il genere di una curva piana, d'ordine $m+n$ con un punto m-plo ed uno n-plo, ovvero d'ordine $m+n-1$ con un punto $(m-1)$-plo ed uno $(n-1)$-plo, ecc.: d indica il numero dei rimanenti punti doppi, ovvero la somma $\Sigma \frac{s(s-1)}{2}$ estesa ai rimanenti punti multipli.

Si può anche determinare il genere di una curva piana qualunque γ ricorrendo alla definizione del n.° 33, applicata alla serie lineare che è segata su essa da un fascio di rette col centro in un punto O del piano esterno a γ. Se n è l'ordine, n' la classe di questa curva, quella serie lineare sarà una g_n^1 ed avrà per elementi di diramazione quelli che corrispondono alle n' tangenti di γ che escono da O. E non ne avrà altri se la curva non ha altre singolarità che punti multipli *ordinari,* cioè a tangenti distinte. In tal caso dunque la formola (3) del n.° 33 darà il genere di γ se per n si mette l'ordine e per ν la classe n' della curva.

Poniamo invece che γ abbia anche *singolarità superiori* (come cuspidi ecc.) (*). Abbiamo già ricordato (n.° 11) che un punto singolare $P(x_0\, y_0)$ di una curva piana algebrica γ è origine di uno o più rami o cicli od elementi che corrispondono ai vari sviluppi che in prossimità di esso si posson fare di $y-y_0$ in serie di potenze di $x-x_0$. Si consideri uno di questi rami e la corrispondente serie di potenze: il minimo denominator comune i degli esponenti fratti (ridotti ai minimi termini) di quella serie dicesi grado di moltiplicità od *ordine* del ramo (con la sola restrizione che la retta $x=0$ non

---

in luogo di ν la somma $\Sigma(i-1)$ estesa a tutti i punti multipli (secondo i) della g_n^1, ecc. Qualche cosa di equivalente vien fatto appunto dal sig. ZEUTHEN nel n.° 4 della *Note sur les singularités des courbes planes* (Math. Ann., tom. 10, 1876).

(*) Queste singolarità sono ampiamente trattate dal punto di vista che qui accenniamo nell'*Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* che l'HALPHEN fece seguire all'edizione francese del trattato delle curve piane del SALMON (Paris, 1884). Ivi si trovano anche citati gl'importanti lavori precedenti di CAYLEY, STOLZ, SMITH, ecc. — Altri abbiamo già nominati prima, o citeremo tosto.

sia parallela alla retta t tangente in P al ramo stesso): esso non è altro che il numero delle intersezioni (infinitamente vicine a P) del ramo con una retta infinitamente vicina a P (ma faciente un angolo finito con t); o, come si suol dire più brevemente, il numero delle intersezioni che in P si hanno fra il ramo stesso ed una retta generica (diversa da t) passante per P. Considerando la curva γ, e quindi il ramo di essa, come inviluppo, si ha il carattere duale all'ordine i: la *classe* i' del ramo; cioè il numero delle tangenti al ramo (infinitamente vicine a t) che escono da un punto infinitamente vicino a t (ma a distanza finita da P); o più brevemente la multiplicità che ha la tangente t pel ramo considerato Si sa (*) che il numero delle intersezioni coincidenti in P del ramo stesso con la sua tangente t, come pure il numero delle tangenti al ramo coincidenti in t che escono da P, sono uguali alla somma $i_1 = i + i'$ dell'ordine e della classe del ramo (**).

Come origine del ramo considerato d'ordine i il punto P rappresenterà un punto i-plo per la g_n^1 segata su γ dal fascio di rette O (mentre come origine di un *altro* ramo rappresenterebbe un *altro* punto dell'ente: v. n.° 11), e quindi (n.° 36) equivarrà ad $i-1$ punti doppi di quella serie. L'influenza della retta OP nel numero complessivo ν degli elementi di diramazione della g_n^1 sarà dunque rappresentata da una somma di tante espressioni $(i-1)$ quanti sono i rami di γ che passano per P. Estendendo ciò a tutte le singolarità superiori di γ, cioè a tutti i suoi rami superlineari, si ha che in generale

$$\nu = n' + \Sigma(i-1). \tag{1}$$

E sostituendo questo valore nella formola (3) del n.° 33 si ha:

$$p = \frac{n'}{2} - n + 1 + \frac{1}{2}\Sigma(i-1), \tag{2}$$

oppure:

$$n' = 2(n+p-1) - \Sigma(i-1). \tag{3}$$

38. Considerando le singolarità di una curva piana da un punto di vista un po' differente si può esprimere il genere p sotto una forma diversa dalla (2), facendo cioè comparire invece della classe n' di γ e degli ordini dei suoi punti di diramazione altri caratteri relativi ai punti singolari di γ.

(*) V. ad es. il n.° 1 della Memoria del sig. ZEUTHEN citata al n. 36, ed il n.° 7 del citato studio dell'HALPHEN.

(**) Per un ordinario punto semplice i caratteri i, i' sono (1, 1); per un flesso (1, 2); per una cuspide (2, 1); per un regresso di 2.ª specie (2, 2); ecc.

Dall'applicazione di successive trasformazioni quadratiche piane a γ e dall'esame dell'effetto che esse hanno su un punto singolare qualunque di questa curva, il sig. NOETHER dedusse (*) che una singolarità superiore di γ si può riguardare come la riunione (in un senso preciso) di un certo numero di punti singolari *ordinari* a cui s'aggiunge pure un certo numero di *punti di diramazione* di γ [nel senso che si trova chiarito nei lavori citati, e che viene a coincidere col significato delle espressioni $(i-1)$ del n.° preced.]. Dicendo s la moltiplicità di uno dei punti singolari ordinari di cui la singolarità superiore è composta, l'abbassamento che questa produce nella classe è dato dalla somma di tutte le corrispondenti espressioni $s(s-1)$ e del numero dei punti di diramazione di γ che cadono in quella singolarità (**). Segue che la classe di γ sarà data da

$$n' = n(n-1) - \Sigma s(s-1) - \Sigma(i-1), \tag{4}$$

ove le somme si estendono a tutte le singolarità ordinarie ed a tutti i punti di diramazione che compongono i vari punti singolari di γ.

Ritornando dunque alla determinazione del genere, noi avremo sostituendo nella (1)

$$\nu = n(n-1) - \Sigma s(s-1), \tag{5}$$

e quindi per la definizione (n.° 33) del genere p applicata alla g_n^1 del n.° 37:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}. \tag{6}$$

In particolare se γ ha per soli punti multipli d nodi ed r cuspidi, sarà:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r. \tag{7}$$

39. Ritornando alla formola (3) del n.° 37

$$n' = 2(n+p-1) - \Sigma(i-1), \tag{3}$$

(*) *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln.* Note 2 (Götting. Nachrichten, 1871). — *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., tom. 9). — *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., tom. 23).

Veggasi pure l'importante Nota, d'indole più sintetica, del sig. BERTINI: *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rendic. del R. Ist. Lomb. (2), tom. 21, 1888).

(**) Cfr. NOETHER, Math. Ann., tom. 9, § 7 e Math. Ann., tom. 23, § 17.

da essa si trae per dualità

$$n = 2(n' + p - 1) - \Sigma(i' - 1),$$

ed eliminando n' fra le due:

$$\Sigma(2i + i' - 3) = 3(n + 2p - 2), \tag{8}$$

od anche introducendo il numero $i_1 = i + i'$ (n.° 37) dei punti d'incontro che nel punto singolare hanno luogo fra il ramo (i, i') e la sua tangente

$$\Sigma(i + i_1 - 3) = 3(n + 2p - 2). \tag{8'}$$

Se la curva γ non ha punti multipli che ordinari (cioè sempre $i = 1$) alla somma che compare nel 1.° membro della (8) od (8') contribuiscono i soli flessi. Vediamo così che il numero r' dei flessi per una curva piana di genere p e d'ordine n è *in generale*

$$r' = 3(n + 2p - 2); \tag{9}$$

ma in pari tempo vediamo che un ramo singolare qualunque che la curva venga ad avere contribuirà all'espressione del 2.° membro per $2i + i' - 3$, ossia $i + i_1 - 3$ unità, conta cioè per altrettante unità nel numero complessivo r' dei flessi quale sarebbe dato dalla (9).

La formola (7) del n.° prec. dà per dualità, chiamando d' il numero delle tangenti doppie non stazionarie:

$$d' = \frac{(n' - 1)(n' - 2)}{2} - r' - p.$$

Suppongasi γ dotata solo di d nodi senz'altri punti multipli (*generale* nel suo ordine e genere), sicchè la (3) si ridurrà a

$$n' = 2(n + p - 1),$$

e si sostituisca questo valore di n' e quello di r' dato dalla (9). Verrà:

$$d' = 2(n + p - 2)(n + p - 3) - 4p. \tag{10}$$

Aggiungasi che in tal caso (essendo $r = 0$) la (7) diventa

$$d = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - p. \tag{11}$$

Tutte queste formole si possono interpretare in un modo più generale del consueto, considerando la curva piana come imagine di una g_n^2 qualunque *non composta* (perchè la curva γ si suppose che non fosse *multipla*) dell'ente algebrico di genere p (v. n.° 28). Così la (11) dà *il numero delle coppie neutre della* g_n^2 (coppie di punti per cui passano infiniti gruppi); la (10) *il numero dei gruppi della* g_n^2 *dotati di due punti doppi distinti;* la (9) *il numero dei punti tripli della* g_n^2. Ciò per una g_n^2 *generale* dell'ente algebrico di genere p: ma se la serie ha singolarità speciali si dovrà tenerne conto in quei numeri. Così se un punto dell'ente algebrico è i-plo per gli ∞^1 gruppi della g_n^2 che lo contengono, ma per uno di essi è multiplo secondo $i_1 (> i)$, allora per avere i punti tripli della g_n^2 che cadono fuori di quello, si dovrà togliere $i + i_1 - 3$ unità dall'espressione (9). Ecc.

Estenderemo ora successivamente alcuni risultati degli ultimi due paragrafi.

§ 10. Formola di Zeuthen (*).

40. Nel § 8 la definizione del genere di un ente algebrico ci permise di concludere subito l'invariabilità di esso per trasformazioni birazionali, perchè queste mutano una serie lineare ∞^1 in una serie lineare ∞^1. Ora questo fatto vale anche (n.° 14) per una trasformazione, che sia razionale *in un senso* solo. Vediamo di profittarne.

Sia fra due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza algebrica $(1, \mu)$, sicchè le coordinate dei punti di γ sian funzioni razionali di quelle dei punti omologhi di γ'; e sianvi su γ y punti di diramazione, cioè punti per ognun dei quali due fra i μ punti omologhi di γ' coincidono. Ad una g_n^1 di γ con ν punti doppi corrisponderà su γ' una $g_{\mu n}^1$ composta (con l'involuzione dei gruppi di μ punti corrispondenti ai singoli punti di γ), la quale avrà per punti doppi i $\mu\nu$ punti omologhi di quei ν ed inoltre gli y punti nominati prima, che corrispondono, contati due volte, ai punti di diramazione di γ (**). Applicando dunque a queste due serie ∞^1 sugli enti γ, γ' dei generi p, p' la definizione del genere, ossia la formola (4) del n.° 33,

(*) V. *Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes* (Math. Ann., tom. 3, pag. 150; 1871).

(**) Se un punto di diramazione di γ è tale che, non solo due, ma i fra i suoi μ omologhi su γ' coincidono in un punto, questo sarà i-plo per la $g_{\mu n}^1$, cioè (n.° 36) conterà come $i-1$ punti doppi. Dunque quel punto di diramazione si dovrà riguardare come multiplo secondo $i-1$, cioè conterà come $i-1$ nel numero complessivo y.

avremo:

$$\nu = 2n + 2(p - 1)$$

$$y + \mu\nu = 2\mu n + 2(p' - 1).$$

Di qui si eliminano simultaneamente n e ν e si ha:

$$y = 2(p' - 1) - 2\mu(p - 1). \qquad (1)$$

Questa formola è molto importante. Da essa segue:

$$p' - 1 \geqq \mu(p - 1),$$

sicchè ad es. se fosse $p = p' > 1$ dovrebb'essere $\mu = 1$, cioè la corrispondenza fra i due enti sarebbe *biunivoca* (*). Si può anche dire che la (1) dà il *numero y dei punti doppi di un'involuzione di grado μ e di genere p sopra un ente algebrico di genere p'*. Oppure anche il *numero y dei punti di diramazione che un ente algebrico di genere p ha quando, contandolo μ volte, lo si riguarda come un ente algebrico di genere p'*.

41. Si può subito dedurre dalla (1) la *formola di* Zeuthen più generale. Abbiasi fra i due enti algebrici γ, γ' dei generi p, p' una corrispondenza (x, x') con y, y' punti di diramazione (tenendo conto delle loro moltiplicità: v. n.° preced., in nota); e consideriamo l'ente algebrico ausiliario Γ di genere π costituito dalle coppie di punti omologhi di γ, γ': rappresentato ad es. se γ, γ' son curve dalle rette congiungenti i punti omologhi (cfr. n.° 21). Sarà γ con Γ in corrispondenza $(1, x')$ con y punti di diramazione su γ; sicchè applicando la (1) avremo:

$$y = 2(\pi - 1) - 2x'(p - 1).$$

Similmente da γ' e Γ in corrispondenza $(1, x)$ con y' punti di diramazione si ha

$$y' = 2(\pi - 1) - 2x(p' - 1).$$

E sottraendo si ottiene appunto la detta formola generale

$$y - y' = 2x(p' - 1) - 2x\,(p - 1)\ (**). \qquad (2)$$

(*) Nota osservazione del sig. Weber (Journal für Math., tom. 76, 1873, pag. 345).

(**) La si poteva anche stabilire senza passare per la (1), che ne è un caso particolare, considerando su γ e γ' due serie g^1_n, $g^1_{n'}$, alle quali corrisponderanno su Γ due serie $g^1_{nx'}$, $g^1_{n'x}$; ed applicando a queste il teorema espresso dalla formola (2) del n.° 33. Od anzi, più direttamente ancora, nello stesso modo con cui si dimostrò quel teorema, Come si vede, questo ragionamento equivale a supporre che nel n.° 40, ove fra i due enti γ, γ' dei generi p, p' si considerava una corrispondenza $(1, \mu)$, l'ente γ' sia *multiplo,* ad es. secondo μ_1, sicchè propriamente si riduca ad un ente γ_1 di un certo genere p_1 da contarsi μ_1 volte. La formola (1) naturalmente rimane ancora applicabile (potendosi ad es. imaginare che γ' si sostituisca con un ente di genere p', equivalente a γ' ma *semplice*); ma di più si può applicare alla corrispondenza $(1, \mu_1)$ fra γ_1 e γ'; e così si ottiene la (2) per la corrispondenza (μ, μ_1) fra γ_1 e γ.

§ 11. Punti $(r+1)$-pli di una serie lineare ∞^r.

42. Il numero dei punti doppi di una g_n^1 sopra un ente algebrico di genere p è dato (n.° 33) da

$$2(n+p-1).$$

Il numero dei punti tripli di una g_n^2 (n.° 39) da

$$3(n+2p-2).$$

In generale, indicando con N_r il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r, dimostreremo facilmente che il suo valore è

$$N_r = (r+1)(n+rp-r).$$

Per comodità rappresentiamo la g_n^r (supposta priva di punti fissi) con una

---

vale a dire applicando il principio di corrispondenza entro la g_n^1 o la $g_{n'}^1$ a determinare il numero d dei gruppi dell'una serie che contengono due punti di cui risp. due punti omologhi sono in un gruppo dell'altra serie. Ciò dà per d due valori, dalla cui uguaglianza si trae una relazione, che per $x = x' = 1$ coincide colla (2) del n.° 33, ed in generale, posta la definizione del genere, diventa appunto la formola (2) di sopra.

Avverto che il concetto comune a questi ragionamenti si trova già nella Nota del sig. Schubert *Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven* (Math. Ann., tom. 16), ove in sostanza le g_n^1, $g_{n'}^1$ son segate su due curve piane in corrispondenza biunivoca mediante due fasci di rette. Nelle dimostrazioni più antiche dei sig.[i] Bertini (Giornale di Mat., tom. 7, 1869) e Zeuthen dell'invariabilità del genere le serie stesse erano trasportate sopra un ente ausiliario: la curva generata da quei due fasci di rette. In quelle dei sig.[i] Cremona (Memorie della R. Acc. di Bologna, 1866, *Preliminari,* ecc., n.° 54) e Voss (Gött. Nachr., 1873, pag. 414) l'ente ausiliario è invece risp. la rigata o l'inviluppo piano delle rette congiungenti i punti omologhi delle due curve piane.

curva C d'ordine n di S_r. Allora (cfr. n.° 28) il numero cercato N_r sarà quello degl'iperpiani a contatto $(r+1)$-punto, cioè stazionari od iperosculatori, di C; mentre N_{r-1} sarà il numero degl'iperpiani osculatori (a contatto r-punto) uscenti da un punto dato (cioè il numero dei punti r-pli della g_n^{r-1} segata su C dagl'iperpiani che passano per quel punto), ossia la *classe* di C; N_{r-2} sarà il numero degl'iperpiani a contatto $(r-1)$-punto uscenti da una data retta, cioè l'ordine della varietà M_{r-1} costituita dagli ∞^1 S_{r-2} osculatori a C nei suoi vari punti; ecc. — Consideriamo come imagine dell'ente algebrico di genere p la ∞^1 degl'iperpiani osculatori a C. I gruppi degli N_{r-1} iperpiani osculatori che escono dai singoli punti di una retta a fissata ad arbitrio formeranno una serie lineare ∞^1; nella quale, come facilmente si vede, sono elementi doppi gli N_r iperpiani stazionari, non che gl'iperpiani osculatori a C in quegli N_{r-2} punti i cui S_{r-2} osculatori incontrano a (giacchè ogni S_{r-2} osculatore si può riguardare come l'intersezione di due iperpiani osculatori infinitamente vicini). Dunque, applicando la formola ricordata che dà il numero dei punti doppi di una serie lineare ∞^1, sarà:

$$N_r + N_{r-2} = 2(N_{r-1} + p - 1),$$

ossia

$$N_r = 2N_{r-1} - N_{r-2} + 2p - 2. \tag{1}$$

Da questa formola ricorrente, basandosi sui valori già ottenuti per N_r nei casi di $r = 1, 2$, si trae appunto

$$N_r = (r+1)(n + rp - r) \text{ (*)}. \tag{2}$$

(*) Questa dimostrazione semplicissima della formola (2) non ricorre ad altro, in sostanza, che alla definizione del genere (poichè anche il caso prima trattato di $r=2$ derivava dallo stesso concetto). Una dimostrazione, pure assai semplice, e basata sulla ricerca successiva delle tangenti stazionarie di una curva piana, dei piani stazionari di una curva sghemba, ecc., è stata data dal sig. Brill al principio della Nota: *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Math. Ann., tom. 4, 1871). E la stessa formola si ritrova (ancora come numero degl'iperpiani stazionari di una curva) fra quelle del Veronese (Math. Ann., tom. 19, v. pag. 201); e poi al n.° 7 delle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* del Castelnuovo (ove è ottenuta segando con un piano fisso, anzi che con la retta a); ecc. — Essa non è che un caso particolare di quella generalissima del sig. De Jonquières (*Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque*, etc., Journal für Math., tom. 66, 1866) che dà il numero dei gruppi di una g_n^r aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo $k_2, \ldots$, ove $\Sigma(k-1) = r$ (v. nel seguito il n.° 49; cfr. anche Cayley, *On the Curves wich satisfy given conditions*, Phil. Trans., tom. 158, 1867, n.i 74 e seguenti).

43. La stessa formola ricorrente (1) può servire a determinare l'abbassamento che nel valore generale (2) di N_r produce un punto singolare qualunque di C, cioè un punto dell'ente che sia comunque singolare per la g_n^r. Per un punto P della curva C di S_r, considerato su un determinato *ramo* o *ciclo* di questa curva (cioè come imagine di un determinato elemento dell'ente algebrico), si hanno r caratteri analoghi a quelli definiti al n.° 37 pei rami di curve piane (*): cioè l'ordine i di multiplicità del punto (ossia del ramo), il numero i_1 ($> i$) dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo con la retta tangente in P, il numero i_2 ($> i_1$) dei punti d'incontro coincidenti in P del ramo col piano osculatore in $P, \ldots$, infine i numeri i_{r-2} ($> i_{r-3}$), i_{r-1} ($> i_{r-2}$) dei punti d'incontro in P del ramo con l' S_{r-2} e con l'iperpiano osculatore in P. Riferendosi all'ente algebrico qualunque ed alla g_n^r, il punto P rappresenta la singolarità seguente (cfr. n.° 28): *un punto dell'ente che è i-plo per gli ∞^{r-1} gruppi (generici) della g_n^r che lo contengono, è i_1-plo per ∞^{r-2} gruppi, i_2-plo per ∞^{r-3} gruppi,..., i_{r-2}-plo per ∞^1 gruppi, e i_{r-1}-plo per un gruppo.* — Ora l'abbassamento che una tal singolarità produce nel valore (2) di N_r sappiamo già (n.i 36 e 39) che per $r = 1$ è $i - 1$, e per $r = 2$ è $i + i_1 - 3$. Dico che in generale esso è

$$i + i_1 + \cdots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2} \cdot \tag{3}$$

Ammetteremo che ciò valga per valori minori di r, e dimostreremo che è vero per r.

A questo fine osserviamo che i caratteri introdotti si possono anche interpretare in quest'altro modo. Come il punto P è i-plo per la curva C (o meglio pel ramo considerato), così la tangente considerata in P è multipla secondo $i_1 - i$ nella superficie sviluppabile luogo delle tangenti a C (o meglio nella falda di questa sviluppabile che proviene da quel ramo); il piano osculatore in P è multiplo secondo $i_2 - i_1$ nella M_3 luogo dei piani osculatori a $C; \ldots$; l' S_{r-2} osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-2} - i_{r-3}$ nella M_{r-1} luogo

(*) Essi corrispondono a caratteri degli sviluppi in serie che rappresentano il ramo di curva considerato; e compajono già ad esempio (v. n.° 87) nel *Lückensatz* del WEIERSTRASS. Cfr. anche i lavori citati al n.° 11, e: FINE, *On the Singularities of Curves of Double Curvature,* American Journal, tom. 8, 1886; FINE, *A Theorem respecting the Singularities of Curves of Multiple Curvature,* ibid., tom. 9, 1887; DEL PEZZO, *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche,* Rend. della R. Accad. di Napoli, 1893. — I numeri i, $i_1 - i$, $i_2 - i_1, \ldots$. $i_{r-2} - i_{r-3}$, $i_{r-1} - i_{r-2}$ nominati poi nel seguito son da considerarsi come i successivi *ranghi* del ramo o ciclo: il primo e l'ultimo sono l'*ordine* e la *classe*.

degli S_{r-2} osculatori; infine l'iperpiano osculatore in P è multiplo secondo $i_{r-1} - i_{r-2}$ per la ∞^1 degl'iperpiani osculatori di C, cioè conta $i_{r-1} - i_{r-2}$ volte nel numero complessivo degl'iperpiani osculatori uscenti da un suo punto, vale a dire assorbe $i_{r-1} - i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori di C uscenti da un punto generico di S_r, quando questo punto vada a cadere su quell'iperpiano. Ciò risulta in modo intuitivo se si considera uno spazio osculatore in P, S_k, come congiungente lo spazio osculatore immediatamente inferiore, S_{k-1}, ad un punto di C infinitamente vicino a P: quell' S_k apparirà multiplo secondo $i_k - i_{k-1}$, perchè tanti sono i punti infinitamente vicini a P che esso congiunge all' S_{k-1}. Ma possiamo vedere la cosa in modo più rigoroso, ad es. per quanto si riferisce all'iperpiano osculatore, considerando la curva C' projezione di C da un punto generico O sopra un iperpiano S_{r-1}: gli S_{r-2} stazionari di C' son le tracce degl'iperpiani osculatori a C uscenti da O. In generale la curva C' avrà nel punto P' projezione di P una singolarità di caratteri i, $i_1, \ldots, i_{r-2}$; e ne deriva un abbassamento nel numero dei suoi S_{r-2} stazionari espresso dalla formola (3) dove in luogo di r si ponga $r-1$. Ma se il centro O di projezione va sull'iperpiano osculatore in P a C, l'ultimo carattere della singolarità P' di C' si muta in i_{r-1}; e per conseguenza quell'abbassamento s'accresce di $i_{r-1} - i_{r-2}$ unità. Dunque tanti sono appunto gl'iperpiani osculatori a C uscenti da O che vengono a coincidere nell'iperpiano osculatore in P.

Ciò premesso, rifacciamoci al ragionamento con cui nel n.° prec. si ottenne la formola (1), cioè alla considerazione della serie lineare ∞^1 dei gruppi d'iperpiani osculatori a C uscenti dai singoli punti della retta fissa a. Noi abbiamo per ipotesi che la singolarità P di C produce nell'ordine N_{r-1} della detta serie lineare un abbassamento espresso da (3) ove r si muti in $r-1$. Così pure nel computo degli elementi doppi di quella serie noi abbiamo un analogo abbassamento nel numero N_{r-2} di quelli che provenivano dagli S_{r-2} osculatori a C che incontravano la retta a (poichè l' S_{r-2} osculatore in P non incontrerà in generale a, e deve quindi esser sottratto). Fatte queste riduzioni nel 2.° membro della (1), il numero N_r così modificato esprimerà il numero dei rimanenti elementi doppi di quella serie lineare: elementi doppi che non erano altro che gl'iperpiani stazionari di C. Ora l'iperpiano osculatore in P assorbe, come abbiam visto, $i_{r-1} - i_{r-2}$ degl'iperpiani osculatori uscenti dal suo punto d'incontro con a, ossia è multiplo secondo $i_{r-1} - i_{r-2}$ per la serie lineare: e però (n.° 36) assorbirà $i_{r-1} - i_{r-2} - 1$ elementi doppi della serie stessa. Dunque concludiamo che per effetto della singolarità P il numero degl'iperpiani stazionari quale sarebbe espresso dalla (2), subisce, *se si vuol togliere l'iperpiano osculatore in P*, la riduzione complessiva

$$\left[i_{r-1} - i_{r-2} - 1\right] + 2\left[i + i_1 + \cdots + i_{r-2} - \frac{(r-1)r}{2}\right]$$
$$-\left[i + i_1 + \cdots + i_{r-3} - \frac{(r-2)(r-1)}{2}\right] = i + i_1 + \cdots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2},$$

che è appunto l'espressione (3) (*).

Quando il punto P stesse su più di un ramo della curva C, per ciascun ramo la formola (3) darebbe l'influenza che esso ha sul numero complessivo degl'iperpiani stazionari; sicchè si dovrebbero sommare gli abbassamenti che così sarebbero prodotti dai vari rami. — Se invece si considera la questione in modo più astratto, cioè come relativa ad un ente algebrico ed ai punti $(r+1)$-pli di una g_n^r di questo, l'influenza di un punto dell'ente, singolare per quella serie, sul numero di quei punti multipli sarà data dalla (3) *senz'altro,* perchè al punto dell'ente corrisponde un ramo ben determinato della curva C.

44. Nella dimostrazione (n.° 42) della formola (2) per il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r sull'ente algebrico di genere p si è supposto che la serie stessa non fosse composta (cioè che la curva imagine C non fosse multipla). È facile vedere però che la stessa formola sussiste anche quando la g_n^r è composta mediante un'involuzione, purchè si computi nel modo indicato dalla (3) del n.° prec. l'influenza dei punti doppi di quell'involuzione sul numero che si cerca.

Sia μ il grado e π il genere dell'involuzione con cui è composta la g_n^r; sicchè, posto $n = m\mu$, si avrà entro l'ente γ_1 i cui elementi sono i gruppi di μ punti di quell'involuzione, una serie lineare g_m^r i cui gruppi formano

(*) Nella citata formola del VERONESE, che dà il numero degl'iperpiani stazionari, si tien conto dell'influenza che su quel numero hanno le tangenti stazionarie, i piani stazionari,...; sicchè si hanno casi particolari dell'abbassamento generale espresso dalla (3). — Questo abbassamento generale si trova poi calcolato, pel caso della *serie canonica* (di cui diremo in seguito) sull'ente di genere p, nella Memoria del sig. HURWITZ: *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (Math. Ann., tom. 41, 1892; v. pag. 408-9, da confrontarsi col n.° 87 del presente scritto): mentre pel caso $p = 0$, come influenza di una singolarità data nel numero dei punti $(r+1)$-pli di un'involuzione ∞^r fra i punti di una retta, è dato dal sig. GUCCIA nella Nota: *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1893: v. il Lemma II).

appunto i gruppi di punti della serie g_n^r dell'ente algebrico primitivo γ. Il numero degli elementi $(r+1)$-pli di quella g_m^r (che possiam supporre semplice) sull'ente γ_1 di genere π sarà, per la (2):

$$(r+1)(m+r\pi-r),$$

ed ognuno di essi si comporrà di μ punti di γ $(r+1)$-pli per un gruppo della g_n^r. Se poi consideriamo in questo ente un punto P che sia doppio per l'involuzione ed i gruppi della g_m^r di γ_1 che contengono l'elemento passante per P (che è un gruppo di μ punti di γ di cui due coincidenti in P) 1, 2,..., $r-1$, r volte, noi vediamo che P è multiplo secondo 2, 4,..., $2(r-1)$, $2r$ per ∞^{r-1}, ∞^{r-2},..., ∞^1, ∞^0 ossia 1, gruppi della g_n^r; sicchè stando alla formola (3) dovrebbe influire nel numero dei punti $(r+1)$-pli di questa serie per

$$2+4+\cdots+2(r-1)+2r-\frac{r(r+1)}{2}=\frac{r(r+1)}{2}.$$

Ora questi punti P doppi per l'involuzione di grado μ e genere π sono, per la formola di Zeuthen (n.° 40)

$$2(p-1)-2\mu(\pi-1).$$

Dunque in complesso troviamo come numero dei punti $(r+1)$-pli della g_n^r

$$\mu(r+1)(m+r\pi-r)+\frac{r(r+1)}{2}[2(p-1)-2\mu(\pi-1)]$$
$$=\mu m(r+1)+r(r+1)(p-1)=(r+1)(n+rp-r),$$

sicchè riman valida la (2) del n.° 42.

45. La detta formola del n.° 42, completata con le osservazioni precedenti, assegna tutti i successivi *ranghi* di una curva di qualsiasi spazio, dati l'ordine ed il genere (e i caratteri dei punti singolari): o dualmente, dati il genere e la classe. Più in generale essa dà immediatamente il numero dei punti in cui una data curva ha il contatto più elevato possibile con varietà di un dato sistema lineare.

Come esempio consideriamo i *punti sestattici* di una curva piana γ di genere p e d'ordine n, cioè i punti in ognun dei quali γ ha contatto sipunto con una conica. Le ∞^5 coniche del piano segano su γ (supposto $n>2$) una serie lineare g_{2n}^5: i punti in discorso sono punti sestupli di questa serie. Il loro numero sarebbe quindi (n.° 42)

$$12n+30(p-1). \qquad (4)$$

Ma si posson fare delle riduzioni, se si voglion togliere i punti singolari (flessi, cuspidi, ecc.) di γ: ed il n.° 43 ci permette di determinare queste riduzioni. La curva abbia in un punto P un ramo o ciclo d'ordine i e classe i' (incontrato dunque dalla tangente t in $i+i'$ punti coincidenti in P). Le ∞^4 coniche passanti per P dànno in quella serie lineare gruppi per cui P è i-plo. Se poi consideriamo una conica tangente in P a t, delle $2n$ intersezioni sue con γ cadranno in P $i+i'$ se $i' \leqq i$, e $2i$ se $i' \geqq i$ (*). Se $i' < i$ abbiamo dunque nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi con P multiplo secondo $i_1 = i + i'$: fra questi poi gli ∞^2 gruppi che son dati dalle coppie di rette uscenti da P hanno in questo punto la multiplicità superiore $i_2 = 2i$; e se una retta della coppia è t (∞^1 gruppi) si ha in P la multiplicità $i_3 = 2i + i'$; e finalmente pel gruppo dato dalla conica ridotta a t contata due volte, P è multiplo secondo $i_4 = 2i + 2i'$. — Se invece $i' > i$ avremo nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P è multiplo secondo $i_1 = 2i$: e poi ∞^2 gruppi dati dalle coniche spezzate in t ed un'altra retta qualunque, pei quali P avrà la maggior multiplicità $i_2 = i + i'$; e se la seconda retta passa per P (∞^1 gruppi), o se coincide addirittura con t (un gruppo), ancora come prima avremo in P le multiplicità $i_3 = 2i + i'$, e $i_4 = 2i + 2i'$. — Se finalmente $i' = i > 1$, le coniche tangenti in P a t dànno ancora nella g^5_{2n} ∞^3 gruppi per cui P ha la multiplicità $i_1 = 2i$; ma le ∞^2 coniche degeneri che, dopo quelle, si consideravano nei casi precedenti, non darebbero multiplicità maggiori: si devon dunque considerare le ∞^2 coniche che toccano t in P ed inoltre passano per un punto di γ (del ramo) infinitamente vicino a P. La multiplicità di P per gli ∞^2 gruppi che così si hanno sarà *in generale:* $i_2 = 2i + 1$. Dopo ciò le coniche spezzate in t ed una retta passante per P (∞^1), od in particolare coincidente con t daranno ancora le multiplicità ordinatamente superiori $i_3 = 3i$, $i_4 = 4i$. — Ed ora sostituendo i valori trovati nella (3), cioè:

$$i + i_1 + \cdots + i_4 - 15,$$

si ha che: un ramo d'ordine i e classe i' diversi fra loro abbassa il numero (4) dei punti sestattici di

$$8i + 4i' - 15$$

(*) Ciò si verifica immediatamente sostituendo nel 1.° membro dell'equazione della conica (o curva qualunque) tangente in P a t le serie di potenze che danno le coordinate del ramo considerato di γ ed osservando qual è l'esponente minimo che comparirà nel risultato della sostituzione.

unità (ad es. un flesso di 1 unità, una cuspide di 5); mentre un ramo d'ordine e classe uguali fra loro $i > 1$ lo abbassa *in generale* di $12i - 14$. — Naturalmente si avranno altri valori per questi abbassamenti se la formola (4) si modifica eliminandone il genere mediante la (2) del n.° 37 o la duale (*).

È chiaro poi che si posson determinare in modo analogo i punti in cui una curva piana o sghemba ha contatti superiori con cerchi, sfere, curve o superficie del 3.° ordine, ecc.

§ 12. Formola di corrispondenza di Cayley e Brill.

46. Possiamo applicare il risultato del n.° 42 a ritrovare per una via nuova e semplice la nota formola del sig. Cayley che dà il numero dei punti uniti di una corrispondenza algebrica (α, α') sopra un ente algebrico di genere p, nel caso *particolare* che questa corrispondenza si possa rappresentare con UNA (**) equazione:

$$f(x, x') = 0,$$

(*) Indicando con M il numero dei rami d'ordine uguale alla classe, e supposto che questi rami non presentino particolarità (v. sopra) alle ∞^2 coniche che li osculano, abbiamo ottenuto pel numero dei punti sestattici che cadono fuori dei punti singolari:

$$12n + 30(p-1) - \Sigma(8i + 4i' - 15) - M,$$

ove la somma si estende a tutti i rami pei quali i ed i' non sono entrambi uguali ad 1. Sostituendo la (2) del n.° 37 quel numero diventa (n' essendo la classe di γ)

$$15n' - 18n + \Sigma(7i - 4i') - M;$$

e sotto questa forma in sostanza il numero dei punti sestattici si trova (ottenuto per mezzo dell'invariante differenziale che caratterizza le coniche) nel n.° 32 del citato *Étude sur les points singuliers* etc. dell'Halphen; v. anche il precedente lavoro dello stesso Autore *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du 3.e dégré* (Bulletin de la Soc. Math. de France, tom. 4, 1875).

(**) Dal n.° 6 si trae che una corrispondenza (α, α') fra due enti algebrici (distinti o no) si può sempre rappresentare con DUE equazioni fra le coordinate dei punti omologhi. Ad es. se si tratta di due curve piane e si projettano i punti omologhi risp. mediante i raggi x, x' di due fasci, questi saran legati da un'equazione $f(x, x') = 0$ dei gradi α, α'; e similmente con altri due fasci di raggi y, y' si ha un'altra equazione $\varphi(y, y') = 0$. E si può sempre supporre (mutando eventualmente i fasci, cioè le coordinate), come subito si vede, che due punti $(x\ y)$, $(x'\ y')$ delle due curve i quali verifichino quelle due equazioni (oltre quelle delle curve stesse) siano in generale omologhi nella data corrispondenza.

fra le coordinate dei punti omologhi x, x', la quale, dato x non sia soddisfatta da altri punti dell'ente algebrico che dagli α' corrispondenti punti x' ed eventualmente da punti fissi dell'ente e dallo stesso punto x contato un certo numero γ ($\geqq 0$) di volte. Considerando un sistema lineare di varietà che comprenda tutte quelle rappresentate (nelle coordinate variabili x') dalla detta equazione quando per x si pongono successivamente i vari punti del dato ente, si vede subito che il detto caso particolare di corrispondenza (α, α') è quello in cui *i gruppi composti degli α' punti x' corrispondenti ad uno stesso punto x dell'ente e di questo punto x contato γ ($\geqq 0$) volte sono ∞^1 gruppi di una serie lineare d'ordine $\alpha' + \gamma$.* Dimostreremo che il numero U dei punti uniti è dato da

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p \ (*).$$

La minima serie lineare contenente quei gruppi di $n' = \alpha' + \gamma$ punti sia una $g^r_{n'}$, che supporremo *semplice.* Allora l'ente algebrico si potrà rappresentare con una curva semplice C di genere p e d'ordine n' appartenente ad S_r; e per ogni punto x di C gli α' punti x' omologhi saranno le ulteriori intersezioni di C con un iperpiano determinato avente in x un contatto γ-punto con C, vale a dire passante per l' $S_{\gamma-1}$ osculatore in x a C (donde appare che $\gamma \leqq r$). Si hanno così ∞^1 iperpiani passanti risp. per gli ∞^1 $S_{\gamma-1}$ osculatori di C. Poichè ad ogni punto x' corrispondono α punti x, per ogni punto P di C — considerato come punto x' — passeranno α iperpiani di quella ∞^1; mentre per lo stesso P — considerato come punto x — passerà (se $\gamma > 0$) l'iperpiano inerente all' $S_{\gamma-1}$ osculatore in P: però siccome i punti di C si posson riguardare come intersezioni di γ spazi $S_{\gamma-1}$ osculatori infinitamente vicini (ossia sono γ-pli per la M_γ luogo di quegli ∞^1 $S_{\gamma-1}$), così si può dire che in quell'ultimo iperpiano cadono γ iperpiani del sistema infinitamente vicini (**);

(*) Questa formola è stata data per la prima volta dal sig. CAYLEY: *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Comptes rendus, tom. 62, 1866; v. anche i Proceedings Lond. Math. Soc. dello stesso anno). Il sig. BRILL ne diede poi dimostrazioni complete nelle Note: *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (Götting. Nachrichten, 1871; e Math. Ann., tom. 6, 1872); *Ueber die Correspondenzformel* (Math. Ann., tom. 7, 1874). V. anche quella più recente dello stesso sig. BRILL: *Ueber algebraische Correspondenzen* (Math. Ann., tom. 31, 1888). — Lo studio generale delle corrispondenze algebriche *d'ogni specie* sopra un ente algebrico qualunque, ed il calcolo del numero dei loro punti uniti, furon poi fatti dal sig. HURWITZ nella Nota: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Berichte sächs. Ges. d. W., 1886; e Math. Ann., tom. 28).

(**) La considerazione duale riescirà forse più intuitiva a qualche lettore.

onde si conchiude che per P (e quindi anche per un punto qualunque di S_r) passano in tutto $\alpha + \gamma$ iperpiani del sistema, ossia che questo è di classe $n = \alpha + \gamma$. Questo sistema ∞^1 d'iperpiani essendo in corrispondenza biunivoca coi punti x di C sarà un ente di genere p, che si potrà anche assumere in luogo di C come rappresentante dell'ente algebrico dato. Allora l'ultima considerazione svolta ci fa vedere che *il gruppo degli α punti x dell'ente corrispondenti ad un dato punto x', preso insieme con questo punto x' contato γ volte, dà un gruppo variabile entro una serie lineare d'ordine $n = \alpha + \gamma$ e di dimensione r*: la serie lineare che entro quel sistema ∞^1 d'iperpiani è staccata dai punti di S_r (vale a dire è costituita dai gruppi degl'iperpiani del sistema passanti pei vari punti di S_r) (*).

Se, riferendoci al detto sistema di classe n d'iperpiani, diciamo che un punto, retta,..., S_i,... è *del sistema* quando si può determinare come l'intersezione dell'opportuno numero ($r - i$ nel caso dell' S_i) d'iperpiani del sistema infinitamente vicini fra loro, avremo nei vari spazi del sistema gli analoghi (duali) dei successivi spazi osculatori di una curva. Ed è chiaro ad es. che gli ordini delle ∞^1 di $S_{r-\gamma}$ e di $S_{r-\gamma-1}$ del sistema saranno risp. i numeri degli elementi γ-pli, $(\gamma+1)$-pli di una g_n di dimensione $\gamma - 1$, o γ contenuta entro la g_n^r che nel sistema d'iperpiani di classe n e genere p è staccata dai punti di S_r: ossia i numeri $N_{\gamma-1}$, N_γ, adoperando ancora il simbolo del n.° 42.

Ogni punto P di C sta, come già rilevammo, su γ iperpiani infinitamente vicini del sistema, cioè su un $S_{r-\gamma}$ del sistema. Ed un punto unito della corrispondenza fra x e x' sarà un punto pel quale accade che uno degli α iperpiani del sistema uscenti da esso e distinti in generale da quelli (v. sopra) viene pure a coincidere con essi: ossia un punto che sta su ($\gamma + 1$ iperpiani infinitamente vicini cioè su) un $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. Ogni $S_{r-\gamma}$ del sistema contiene un determinato punto P di C ed un determinato $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: la questione che ci occupa consisterà nel trovare quante volte quel punto e quell' $S_{r-\gamma-1}$ sono incidenti. A tal fine da uno spazio fisso O_γ di dimensione γ projettiamo ogni punto P di C sul corrispondente $S_{r-\gamma-1}$ del sistema: avremo un punto P_1 che descriverà una curva C_1, e si tratterà di trovare le coincidenze di P e P_1, cioè i punti d'incontro delle due curve C e C_1. Consideriamo la

(*) Tale serie è certo di dimensione r e non minore; perchè l'ipotesi contraria significherebbe che tutti quegli ∞^1 iperpiani passano per un punto (od uno spazio): dal che seguirebbe che avrebbe dimensione minore di r la serie lineare d'ordine n' prima considerata contenente ogni punto x contato γ volte ed i suoi α' punti x' omologhi.

rigata descritta dalla retta PP_1: essa incontra O_γ secondo una curva C_2 che è il luogo delle traccie su questo spazio degli ∞^1 $S_{r-\gamma}$ del sistema, e quindi d'ordine $N_{\gamma-1}$; dunque l'ordine di quella rigata, per la quale C e C_2 sono direttrici (semplici) prive di punti comuni (se lo spazio O_γ non incontra C), sarà la somma degli ordini di queste, cioè $n' + N_{\gamma-1}$ (*). Per avere invece l'ordine della curva C_1, osserviamo che essa è incontrata da un iperpiano passante per O_γ in tanti punti P_1 mobili quante sono in quell'iperpiano le generatrici della rigata ovvero i punti P di C, cioè n'; e di più nei punti fissi che C_1 ha su O_γ, i quali sono i punti d'incontro di questo spazio con la varietà degli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema, e quindi sono N_γ. Dunque l'ordine di C_1 sarà $n' + N_\gamma$. Segue (*) che sulla rigata d'ordine $n' + N_{\gamma-1}$ il numero dei punti d'incontro (punti *uniti*) delle due curve direttrici C e C_1 sarà:

$$U = n' + (n' + N_\gamma) - (n' + N_{\gamma-1}) = n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}.$$

Ponendo qui per N_γ e $N_{\gamma-1}$ i valori assegnati dal n.° 42 e rimettendo poi per n, n' i loro valori attuali $\alpha + \gamma$, $\alpha' + \gamma$, quel numero diventa:

$$\begin{aligned} U &= n' + (\gamma + 1)(n + \gamma p - \gamma) - \gamma(n + \gamma p - p - \gamma + 1) \\ &= n + n' + 2\gamma p - 2\gamma = \alpha + \alpha' + 2\gamma p, \end{aligned}$$

come appunto si voleva dimostrare.

47. Il ragionamento precedente fu esposto con l'ipotesi $\gamma > 0$. Nel caso $\gamma = 0$, senza modificarsi pel concetto, si abbrevia alquanto nello sviluppo. Ogni punto P di C viene allora projettato dal centro fisso O sull'iperpiano corrispondente del sistema in un punto P_1. Il cono projettante sarà dell'ordine n' (di C); la curva C_1 luogo di P_1 sarà dell'ordine $n + n'$ (con O punto n-plo, corrispondentemente agli n iperpiani del sistema uscenti da esso); per conseguenza le direttrici C e C_1 di quel cono s'incontreranno in $n' + (n + n') - n' = n + n'$ punti, cioè (essendo $\gamma = 0$) $\alpha + \alpha'$, come darebbe la formola generale.

Si osservi pure che la projezione che in generale si faceva dei punti P sui corrispondenti $S_{r-\gamma-1}$ del sistema da uno spazio fisso O_γ ha senso ed è utile finchè $\gamma < r - 1$. Quando $\gamma = r - 1$ una projezione non occorre più: l'$S_{r-\gamma-1}$ del sistema è un punto P_1, che genera una curva C_1; mentre gli $S_{r-\gamma}$

(*) Com'è ben noto, e risulta del resto dall'applicazione del principio di corrispondenza in un fascio d'iperpiani, l'ordine della rigata luogo delle congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza univoca è la somma degli ordini di queste diminuita del numero dei loro punti uniti.

del sistema son le generatrici di una rigata. L'ordine di questa è $N_{\gamma-1}$; l'ordine di C_1 è N_γ; quindi le intersezioni delle direttrici C e C_1 della rigata sono $n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}$, come sopra.

Nel caso estremo $\gamma = r$ il ragionamento basato sugli $S_{r-\gamma-1}$ del sistema non si applicherebbe più. Si noti però che in tal caso gl'iperpiani del sistema avrebbero con C contatto r-punto, cioè sarebbero gl'iperpiani osculatori di C: sicchè la classe del sistema sarebbe (n.° 42) $n = r(n' + rp - p - r + 1)$; mentre i punti uniti della corrispondenza su C sarebbero i punti ove l'iperpiano osculatore è stazionario, i quali sono in numero di $(r+1)(n' + rp - r)$. Quest'espressione, tenendo conto di quel valore di n, si può metter sotto la forma $n + n' + 2rp - 2r$, che equivale nel caso attuale ad $\alpha + \alpha' + 2\gamma p$.

48. Si è pure supposto nella dimostrazione del n.° 46 che la serie lineare $g^r_{n'}$ contenente ogni punto x dell'ente algebrico contato γ volte ed i suoi α' punti omologhi x' non fosse composta. Ma il lettore potrà verificare (in modo analogo a quello tenuto nel n.° 44) come nel caso che la detta serie fosse composta coi gruppi di un'involuzione di grado μ e genere π, il teorema rimanga vero, perchè la ricerca dei punti uniti della data corrispondenza si riduce a cercare gli elementi uniti di una nuova corrispondenza entro quell'ente di genere π (la detta involuzione): e vi sarà solo da ammettere che a quest'ultima corrispondenza la formola del n.° 46 sia applicabile. Ai punti uniti che così proverranno dai gruppi uniti della corrispondenza entro l'involuzione saranno da aggiungere nel caso che $\gamma > 0$ i punti doppi dell'involuzione stessa, ognuno contato γ volte se si vuol che rimanga valida anche in questo caso l'espressione generale del numero dei punti uniti.

E qui osserviamo in generale che un punto unito può contare più volte nel numero U trovato per due cause diverse. Può cioè accadere nel ragionamento del n.° 46 che un punto equivalga a più intersezioni (sia punto di contatto, ecc.) delle due curve C e C_1, vale a dire della curva C e della varietà costituita dagli ∞^1 $S_{r-\gamma-1}$ del sistema. E può avvenire invece (se $\gamma > 0$) che un punto *(singolare)* produca un abbassamento nei numeri N_γ, $N_{\gamma-1}$ che colà compajono, e quindi anche una riduzione nel numero $U = n' + N_\gamma - N_{\gamma-1}$. Limitandoci a questo secondo caso, la proposizione del n.° 43 applicata al caso attuale dà subito (applicando la legge di dualità) il risultato seguente: Nel numero complessivo $\alpha + \alpha' + 2\gamma p$ dei punti uniti un punto unito singolare conterà k volte se (condizione *sufficiente,* ma non necessaria) l' $S_{\gamma-1}$ osculatore in esso alla curva C la incontra in $\gamma + k$ punti coincidenti in quello: o, riferendoci all'ente algebrico astratto, se per la serie lineare minima $g^r_{\alpha'+\gamma}$ contenente ogni punto x γ volte coi suoi α' punti omologhi x' vi sono $\infty^{r-\gamma}$ gruppi pei quali quel punto è multiplo secondo $\gamma + k$. Così ad esempio per una corrispondenza fra i punti di una curva piana per la quale sia $\gamma = 1$, un punto singolare che sia origine di un ramo superlineare d'ordine i e che non stia su tutte le curve che segano su quella la data corrispondenza sarà da contarsi in generale $i - 1$ volte fra i punti uniti; ecc. (*).

49. Alla formola del n.° 46 lo stesso sig. Cayley ha dato (loc. cit.) una forma più generale, che si applica alla soluzione dei *problemi di contatto* (**).

Suppongasi che nella corrispondenza (α, α') da noi considerata tra i punti x, x' dell'ente algebrico il gruppo degli α' punti x' corrispondenti ad un punto x si scomponga in un certo numero a'_1 di punti A'_1 multipli secondo λ_1, a'_2 punti A'_2 multipli secondo $\lambda_2, \ldots$, cosicchè sarà:

$$\alpha' = a'_1 \lambda_1 + a'_2 \lambda_2 + \cdots$$

Rappresentando come al n.° 46 l'ente algebrico con la curva C avremo che gl'iperpiani del sistema ∞^1 che ivi si consideravano avranno con C un contatto γ-punto in x, λ_1-punto in ogni punto A'_1, λ_2-punto in ogni $A'_2, \ldots$ Quindi se si contano gl'iperpiani del sistema uscenti da un punto P di C, — fra i quali già s'era visto che γ si dovevan considerare come coincidenti nell'iperpiano inerente a quel punto considerato come punto x, — si vede che per ragioni analoghe ogni iperpiano pel quale P sia un punto A'_1, o $A'_2, \ldots$ sarà da contarsi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ volte fra gl'iperpiani del sistema uscenti da P. In altri termini si rappresenti un punto dell'ente con A_1, o $A_2, \ldots$ secondo che riguardandolo come punto x si voglion considerare come suoi omologhi (punti x') gli A'_1, od $A'_2, \ldots$: ad A_1 corrisponderanno a'_1 punti A'_1 (distinti da esso), e suppongasi che viceversa ad A'_1 corrispondano a_1 punti A_1; e similmente ad A'_2 corrispondano a_2 punti A_2, ecc. Allora gli α punti x corrispondenti ad un dato punto x' e distinti da esso si scindono in a_1 punti A_1 multipli secondo λ_1, a_2 punti A_2 multipli secondo $\lambda_2, \ldots$, sicchè:

$$\alpha = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots$$

Ciò posto diciamo u_1 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_1, a'_1) fra i punti A_1, A'_1; u_2 il numero dei punti uniti della corrispondenza (a_2, a'_2) fra A_2, A'_2; ecc. È facile vedere che ognuno di quegli u_1 punti conterà λ_1

(*) Cfr. specialmente la citata Nota del sig. Brill, Math. Ann., tom. 31.

(**) V. anche i citati lavori del sig. Brill (Math. Ann., tom. 6, 7 e 31).

volte nel numero complessivo U dei punti uniti della corrispondenza (α, α') fra x, x'; e similmente gli u_2 punti saranno λ_2-pli nel numero U; ecc. Sarà dunque:

$$U = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \cdots$$

Ponendo questi valori di α, α', U nella formola:

$$U = \alpha + \alpha' + 2\gamma p,$$

essa diventa:

$$(u_1 - a_1 - a'_1)\lambda_1 + (u_2 - a_2 - a'_2)\lambda_2 + \cdots = 2\gamma p.$$

Questa relazione generale serve a determinare il numero dei punti uniti (u_1, o u_2,...) di una delle corrispondenze parziali (a_1, a'_1), (a_2, a'_2),... quando si conoscano i numeri di punti uniti di tutte le altre.

È appunto questo caso che si presenta nel problema dei contatti, ossia in generale nel problema di determinare il numero dei gruppi di una g_n^r aventi un punto multiplo secondo k_1, uno multiplo secondo k_2,..., ove $\Sigma(k-1) = r$. Nella citata Nota del sig. Brill (Math. Ann., tom. 6; v. pag. 46) si vedrà come, seguendo quel concetto e tenendo conto della natura delle corrispondenze che così si presentano (la quale deriva dal lavoro dello stesso scienziato citato in nota al n.° 42), si possan subito ricavare due formole ricorrenti mediante cui si stabilisce la formola generale del sig. De Jonquières (citata nella stessa nota al n.° 42) che risolve il detto problema.

§ 13. **Una formola generale per le involuzioni sopra un ente algebrico.**

50. Abbiasi sopra una curva C d'ordine n appartenente allo spazio S_r una semplice infinità di gruppi di m punti tale che ogni punto stia in un sol gruppo, ossia un'involuzione di grado m. Siano di dimensione k, ossia degli S_k, gli spazi a cui appartengono i gruppi generici: sicchè sarà $k \leq r$. S'indichi con ν finchè $k \leq r-1$ il numero di quegli S_k che incontrano un S_{r-k-1} arbitrario, ossia l'ordine della varietà M_{k+1} costituita da quegli ∞^1 S_k (per $k = r-1$ la classe della ∞^1 d'iperpiani). Vedremo di esprimere in funzione di tutti questi numeri il numero y dei punti doppi di quell'involuzione (*).

(*) Il procedimento che seguiremo, come la formola a cui esso ci condurrà, son dovuti al sig. Schubert. Veggasi, anche per il seguito, la mia Nota: *Sulle varietà algebriche*, ecc., citata nell'Introduzione.

A tal fine introduciamo gli ordini $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ delle varietà costituite risp. dalle rette, piani,..., $S_i, \ldots$ congiungenti $2, 3, \ldots, i+1, \ldots$ punti di un gruppo. Come ultimo di questi numeri si può assumere x_{k-1}; od anzi x_k, se $k \leqq r-1$, ed allora sarà da porre (come apparirà poi) $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Similmente si potrà cominciare col numero (corrispondente a $i=0$) $x_0 = n$.

Applicando il principio di corrispondenza (*) ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie di punti che fan parte di uno stesso gruppo del sistema, — il che dà in quel fascio una corrispondenza simmetrica d'indice $(m-1)n$, si ha anzitutto

$$2(m-1)n = 2x_1 + y.$$

Però se vi son dei punti doppi di C, ognun dei quali rappresenti due punti di uno stesso gruppo dell'involuzione, il loro numero raddoppiato si dovrà aggiungere al 2.° membro di quell'equazione, poichè ognuno di essi dà origine ad una coincidenza (doppia) che non conta in generale fra le y.

Più generalmente si considerino due S_i (per $i = 1, 2, \ldots, k-1$) i quali congiungano sempre i punti $P_1 \ldots P_i$ di un gruppo risp. a due ulteriori punti A, A' del gruppo medesimo; e fissato ad arbitrio un fascio di S_{r-i-1} (cioè l'S_{r-i} che li contiene e l'S_{r-i-2} per cui essi passano), si riguardino in esso come omologhi due spazi che siano incidenti a due tali S_i. Applicando a questo fascio ed alla corrispondenza che così si avrà fra i suoi elementi il principio di corrispondenza, si otterranno (pei suddetti valori di i) $k-1$ relazioni. L'ultima, cioè quella che si ha per $i = k-1$, quando fosse $k = r$ proverrebbe dal segare con una retta una corrispondenza fra iperpiani. — In generale, qualunque sia i, la corrispondenza fra gli S_i che formino coppia nel senso spiegato è simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)$: quindi quella che si ha fra gli S_{r-i-1} del fascio sarà pure simmetrica e d'indice $(i+1)(m-i-1)x_i$, ed avrà perciò

$$2(i+1)(m-i-1)x_i$$

coincidenze. Ora queste si possono avere nei 4 modi seguenti:

1.° Essendo i due S_i *distinti*, ma incidenti all'S_{r-i} del fascio in *uno* stesso punto: che sarà dunque nello spazio S_{i-1} $(P_1 \ldots P_i)$ comune a quelli. Si hanno così x_{i-1} coincidenze, di cui ognuna, per l'arbitrio che rimane nella

(*) V. n.° 8, anche per le coincidenze che contiamo come *doppie*.

scelta di A, A' fra gli $m-i$ punti di un gruppo che restano togliendo $P_1 \dots P_i$, conta per $(m-i)(m-i-1)$ (*).

2.° Essendo i due S_i *distinti* ed incidenti all' S_{r-i} in *due* punti distinti: i quali dunque saranno in un S_{r-i-1} (unito) del fascio, sicchè la retta che li congiunge incontrerà il sostegno S_{r-i-2} di questo; ossia l' S_{i+1} $(P_1 \dots P_i\, A A')$ di quei due S_i sarà incidente all' S_{r-i-2}. Si hanno dunque x_{i+1} coincidenze siffatte, ognuna multipla secondo $(i+1)(i+2)$. Ciò finchè i non arriva a $k-1$. Quando $i=k-1$, allora (se $k \leqq r-1$) ognuno dei ν S_k (gli S_{i+1} del caso attuale) che incontrano l' S_{r-k-1} (l' S_{r-i-2}) dà $\binom{m}{k+1} \cdot k(k+1)$ aggruppamenti $(P_1 \dots P_{k-1}\, A A')$, sicchè vale ancora la determinazione precedente del numero delle coincidenze, purchè si ponga $x_k = \binom{m}{k+1}\nu$. Solo se $k=r$ questa specie di coincidenze pel caso estremo $i=k-1$ non si presenta evidentemente più: ma siccome appunto allora il simbolo ν non ha significato, converremo di porre $\nu=0$ se $k=r$, e con ciò rimarrà vero anche allora quanto s'è detto.

3.° *Coincidendo* i due S_i *pel coincidere* di A e A': ciò dà $\binom{m-2}{i} y$ coincidenze nel fascio.

4.° *Coincidendo* i due S_i *senza* che coincidano A e A', cioè essendovi un S_i con $i+2$ punti di un gruppo. Ogni elemento unito del fascio ottenuto in questo modo conterebbe per $(i+1)(i+2)$. Però l'esistenza in un gruppo dell'involuzione (appartenente quindi ad un S_k) di $i+2$ punti situati in un S_i impone al gruppo $k-i$ condizioni; sicchè si può dire che in generale essa ha luogo solo nel caso estremo $i=k-1$, cioè che vi sono solo dei gruppi nei quali $k+1$ punti appartengono ad un S_{k-1}. Sia z il loro numero.

Sommando insieme tutte le coincidenze si ha la relazione generica, che per $i=1, 2, \dots, k-2, k-1$ dà il gruppo seguente:

(*) Qui e nel seguito siamo nel caso di coincidenze multiple nell'applicazione del principio di corrispondenza, ma senza le difficoltà che altre volte si hanno per la determinazione delle multiplicità. Si osservi in fatti che qui il problema algebrico, dal fascio di S_{r-i-1} si può riportare di nuovo ai particolari aggruppamenti $P_1 \dots P_i A A'$ di punti di C: donde segue che un elemento unito di quel fascio dovrà contare sempre tante volte quanti sono i particolari aggruppamenti da cui proviene. — Un' osservazione analoga si può fare spesso.

$$\left.\begin{array}{llll}
2(m-1)n = & & 1\cdot 2x_1 & +y \\
2\cdot 2(m-2)x_1 = & (m-1)(m-2)n & +2\cdot 3x_2 & +(m-2)y \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
1)(m-i-1)x_i = & (m-i)(m-i-1)x_{i-1} & +(i+1)(i+2)x_{i+1} & +\binom{m-2}{i}y \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
)(m-k+1)x_{k-2} = & (m-k+2)(m-k+1)x_{k-3} & +(k-1)k\,x_{k-1} & +\binom{m-2}{k-2}y \\
2k(m-k)x_{k-1} = & (m-k+1)(m-k)x_{k-2} & +k(k+1)\left[\binom{m}{k+1}\nu+z\right] & +\binom{m-2}{k-1}y.
\end{array}\right\}\quad(1)$$

Da esse si trae successivamente:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = (m-1)n - \frac{1}{2}y \\
x_2 = \binom{m-1}{2}n - \frac{1}{2}(m-2)y \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_i = \binom{m-1}{i}n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{i-1}y \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right\}\quad(1')$$

e per ultima (*):

$$\binom{m}{k+1}\nu + z = \binom{m-1}{k}n - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}y, \qquad (2)$$

che è appunto la formola cercata, la quale può servire a determinare y in funzione degli altri caratteri n, m, k, ν, z.

Riguardo agli ultimi due converrà tener presente che quando fosse $k = r$, cioè i gruppi dell'involuzione non stessero in spazi inferiori allo spazio di C, si dovrebbe porre $\nu = 0$; e che il simbolo z rappresenta il numero di quei gruppi che sono *singolari* pel fatto di contenere $k+1$ punti appartenenti ad un S_{k-1}. Se vi fossero *(eccezionalmente)* dei gruppi più particolari, nei quali un numero $< k+1$ di punti fossero già legati linearmente, il modo come abbiamo proceduto prova che la relazione (2) varrebbe ancora, dando a z il

(*) Direttamente si trarrebbe la (2) dalle (1) moltiplicandole risp. pei fattori $k.(m-2)\ldots(m-k)$: $(k-1).(m-3)\ldots(m-k)$;...; $(k-i)i!\,(m-i-2)\ldots(m-k)$;...; $2(k-2)!\,(m-k)$: $(k-1)!$: e poi sommandole e dividendo per $(k+1)!$

significato di una *somma* nella quale entrerebbero con determinati coefficienti i numeri di quei gruppi particolari dell'involuzione. In altri termini si può ritener sempre valida quella formola conservando a z il significato primitivo come numero dei gruppi *singolari* prima nominati, purchè in esso si computino convenientemente, cioè con le debite multiplicità, i gruppi eccezionali suddetti.

Si osservi anche, riandando il ragionamento fatto, che esso non esige che la ∞^1 dei gruppi di m punti su C sia un'involuzione, vale a dire che un punto individui il gruppo che lo contiene. Se ogni punto di C fosse su μ gruppi non vi sarebbe evidentemente altro da modificare che la 1.ª e la 2.ª delle relazioni (1), nelle quali i termini contenenti n dovrebbero essere moltiplicati per μ (sarebbe cioè da porsi $x_0 = n\mu$). Dunque anche nelle (1') e nella (2) vi sarà solo da scrivere $n\mu$ in luogo di n. Ma invece di far ciò, a noi converrà rilevare questo: che la formola (2) vale anche per un'involuzione su una curva C *multipla,* purchè con n s'intenda l'ordine di questa curva tenuto conto della sua multiplicità (cioè moltiplicato per μ nel caso che C sia μ-pla).

51. Introducendo il genere p della curva C ed il genere π dell'involuzione, cioè della ∞^1 di gruppi di m punti di C, noi abbiamo pel numero y dei punti doppi l'espressione (n.° 40):

$$y = 2(p-1) - 2m(\pi - 1), \tag{3}$$

valida anche nel caso che C sia multipla, purchè allora p ne rappresenti il genere come curva multipla.

Dalle (2) e (3) eliminando y si trae la formola generale

$$z = \binom{m-1}{k}(n-k) - \binom{m}{k+1}\nu - \binom{m-2}{k-1}(p - m\pi), \tag{4}$$

nella quale pure converrà ricordare che n e p indicano l'ordine ed il genere della curva C tenuto conto della sua multiplicità.

52. Questa formola (4) è molto importante e dà luogo a vari corollari fecondi. Rileviamo subito il caso particolare che è essenziale per la teoria delle serie lineari, quale sarà svolta nel seguito; cioè quello in cui i gruppi di m punti dell'involuzione si compongono in generale di punti linearmente indipendenti, vale a dire appartengono in generale a spazi S_{m-1}. Sarà allora $k = m - 1$; sicchè la (4) diventa:

$$n - p = \nu - m\pi + m - 1 + z. \tag{5}$$

In particolare se quell'involuzione è *razionale*, ossia è una serie lineare g^1_m sarà:

$$n - p = \nu + m - 1 + z. \tag{6}$$

53. Quando i gruppi dell'involuzione considerata su C non stiano in generale in spazi inferiori a quello di questa curva, cioè $k = r$, si deve porre (n.° 50) $\nu = 0$. Con ciò la (4) diventa:

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p - m\pi), \tag{7}$$

ed esprime il numero dei gruppi dell'involuzione che contengono $r+1$ punti posti in un iperpiano.

Ora s'imagini che la curva C rappresenti una serie lineare qualunque g^r_n di un ente algebrico di genere p sul quale esiste l'involuzione di grado m e genere π. I gruppi dell'involuzione di C che contengono $r+1$ punti posti in un iperpiano sono i gruppi che hanno $r+1$ punti posti in un gruppo della g^r_n. Dunque la formola (7) dà *il numero dei gruppi di $r+1$ punti dell'ente algebrico di genere p comuni ad una g^r_n* (cioè a gruppi di questa) *e ad un'involuzione di grado m ($> r$) e genere π*: s'intende, nel caso (generale) che il numero di quei gruppi non sia infinito. — Per $\pi = 0$ la (7) diventa:

$$z = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p, \tag{8}$$

la quale assegnerà *il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g^r_n ed una g^1_m*. — (*)

Si noti che il teorema ora enunciato relativo alla formola (7) abbraccia a sua volta quello espresso dalla formola più generale (4). Basta applicarlo sostituendo alla g^r_n la g^k_n che sulla curva C è segata dagl'iperpiani passanti per un S_{r-k-1}: allora il numero dei gruppi di $k+1$ punti comuni a quella g^k_n ed all'involuzione di grado m sarà rappresentato da $\binom{m}{k+1}\nu + z$, ove a ν e z si dia di nuovo il significato generale che avevano nel n.° 51.

(*) Nelle *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (n.° 8) il sig. CASTELNUOVO ritrova per altra via (servendosi della formola data qui al n.° 42) la formola (8). — Nella Nota: *Un'applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche* (Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, tom. 3, 1889) egli assegnò più in generale il numero dei gruppi di $r+r'$ punti comuni ad una g^r_n ed una $g^{r'}_{n'}$.

§ 14. Serie complete e curve normali. Serie residue.

54. Un altro teorema fondamentale sulle serie lineari, d'indole più elementare che quello del paragrafo preced., è il seguente: *Se sopra un ente algebrico due serie lineari d'ordine n hanno un gruppo (di n punti) comune, esse son contenute in una stessa serie lineare d'ordine n.*

Il concetto della dimostrazione consiste nel rappresentare l'ente algebrico con due curve, in corrispondenza univoca, imagini delle due serie (*), e quindi con la rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di quelle curve: dalla quale poi si deduce una terza curva che rappresenta una serie lineare contenente le due date.

Consideriamo anzitutto il caso di due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ prive di punti fissi. Saran rappresentate da due curve (semplici o multiple) γ, γ' d'ordine n, appartenenti risp. ad S_r, $S_{r'}$, e in corrispondenza biunivoca fra loro. Supporremo quei due spazi indipendenti, cioè congiunti da un $S_{r+r'+1}$. Il gruppo di n punti comune alle due serie lineari sarà rappresentato su γ, γ' da due gruppi omologhi di n punti posti risp. in un S_{r-1} ed in un $S_{r'-1}$. Condotto per questi due spazi un iperpiano ($S_{r+r'}$), che non contenga nè l' S_r nè l' $S_{r'}$, esso segherà la rigata d'ordine $2n$ luogo delle congiungenti i punti omologhi di γ, γ' in n generatrici (le congiungenti quei due gruppi omologhi di punti) e poi ancora in una curva direttrice d'ordine n, γ''. Sulla rigata, considerata come imagine dell'ente algebrico (cfr. la seconda nota al n.° 28) le due serie g_n^r, $g_n^{r'}$ (serie di gruppi di generatrici) son segate dagl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$, S_r: quindi anche sulla curva γ'' le stesse serie (di gruppi di punti) son segate da quegl'iperpiani; e però saran contenute nella serie lineare d'ordine n che è rappresentata da γ'', cioè che è segata su questa curva dal sistema di tutti gl'iperpiani.

Poniamo ora che una almeno delle due serie abbia punti fissi. Possiam supporre per brevità che nessuno di questi sia fisso per entrambe: altrimenti, dimostrato il teorema per le serie che si avrebbero dalle date astraendo dai punti fissi comuni, rimarrebbe evidentemente provato anche per le serie primitive. Siano k i punti fissi della serie g_n^r e k' quelli della $g_n^{r'}$. Le due serie saran rappresentate da una curva γ d'ordine $n-k$ di S_r con k punti fissi A

(*) Le serie si posson supporre entrambe infinite: in caso opposto la proposizione sarebbe evidente.

e da una curva γ' d'ordine $n-k'$ di $S_{r'}$ (spazio che assumeremo di nuovo indipendente da S_r) con k' punti fissi B'; gli omologhi A' dei punti A su γ' saran distinti dai punti B', e così gli omologhi B su γ dei B' saran distinti dai punti A. Il gruppo di n punti che si suppon comune alle due date serie lineari si comporrà dei $k+k'$ punti fissi rispettivi e di altri $n-k-k'$ punti: siano C e C' i punti imagini di questi ultimi risp. su γ e γ'; per essere quel gruppo di n punti nella g_n^r dovranno i punti B e C, che coi punti fissi A ne costituiscono l'imagine su γ, essere in un S_{r-1}, e similmente i punti A' e C' di γ' saranno in un $S_{r'-1}$. Indichiamo risp. con a, b, c le rette congiungenti i punti omologhi A e A', B e B', C e C' delle due curve γ e γ', vale a dire le rette che sono imagini dei tre gruppi di punti dell'ente algebrico sulla rigata luogo delle rette congiungenti i punti omologhi di γ, γ'. Questa rigata è d'ordine $2n-k-k'$; e su essa la serie g_n^r si compone delle k generatrici a fisse insieme coi gruppi di $n-k$ generatrici variabili poste negl'iperpiani che passano per $S_{r'}$; e la serie $g_n^{r'}$ si compone delle k' generatrici b fisse insieme coi gruppi di $n-k'$ generatrici degl'iperpiani passanti per S_r. Ora un iperpiano passante per l' S_{r-1} dei punti B e C e per l' $S_{r'-1}$ degli A' e C' (ma non per S_r nè per $S_{r'}$) sega la rigata secondo le $n-k-k'$ generatrici c e secondo una curva direttrice d'ordine n, γ'', passante per i punti B ed A'; e su questa nuova curva quelle due serie saranno segate completamente da quegl'iperpiani passanti risp. per $S_{r'}$ (e quindi pei punti fissi A') e per S_r (e quindi pei punti fissi B): sicchè le serie g_n^r, $g_n^{r'}$ staranno nella serie d'ordine n che su γ'' è segata da tutti gl'iperpiani (*).

55. Dal teorema fondamentale così dimostrato seguono immediatamente corollari importanti.

(*) Sapendo che le due serie son contenute in una stessa serie lineare si può subito, grazie ad un'osservazione fatta al n.° 25 intorno alle serie lineari contenute in una serie lineare, e basandosi su una nota proposizione relativa alle intersezioni di spazi, ecc., precisare di più il nostro teorema così: Se una g_n^r ed una $g_n^{r'}$ hanno comuni *precisamente* ∞^i gruppi di n punti, cioè una g_n^i $(i \geqq 0)$, e son contenute in una serie d'ordine n e dimensione t e *non minore* di t, si ha $t+i=r+r'$.

Qui rileviamo come lo stesso concetto che ha servito a dimostrare il teorema fondamentale di questo n.° 54 possa servire per stabilire l'analogo teorema relativo a due serie lineari di M_{k-1} sopra una M_k, qualunque sia k: si ricorrerà cioè ancora alla varietà delle rette congiungenti i punti omologhi di due M_k in corrispondenza biunivoca fra loro. Così pure le conseguenze che da quel teorema fondamentale trarremo nei n.i successivi hanno le analoghe nella geometria su una M_k qualunque.

Se due serie lineari d'ordine n hanno un gruppo (di n punti) comune, o l'una di esse starà nell'altra, o entrambe staranno in una serie lineare d'ordine n di maggior dimensione. Segue che se chiamiamo (come al n.° 26) *completa* (o *normale*) una serie lineare d'ordine n quando *non* sta in una (dello stesso ordine e) di maggior dimensione, e *parziale* od *incompleta* nel caso opposto; sarà certo parziale una serie che abbia comune un gruppo con un'altra senza contenerla tutta quanta; in altri termini *una serie completa contiene ogni serie con cui abbia un gruppo comune.* In particolare *due serie complete aventi un gruppo comune* (e quindi dello stesso ordine) *coincidono.*

Se un gruppo di n punti, o più in generale una serie g_n, non costituisce una serie completa (in particolare una g_n^0 completa), starà in serie lineari d'ordine n di maggior dimensione. Ma siccome questa dimensione non può essere maggiore di n (n.° 29), fra quelle serie contenenti la data ve ne sarà *almeno* una che non è più contenuta in una serie di maggior dimensione, ossia che è completa. La proposizione ultima ci prova che ve ne sarà *una* sola. Vale a dire *è ben determinata ed unica la serie completa d'ordine n che contiene un dato gruppo di n punti, o una data serie lineare d'ordine n:* s'intende che quella serie completa potrebbe anche ridursi ad un sol gruppo, cioè ad una g_n^0.

56. *Se una serie lineare g_n^r è completa, è tale anche la serie dei resti* (se ne esistono) *di k punti fissi rispetto ad essa:* vale a dire se k punti fissi A stanno precisamente in ∞^ρ gruppi ($\rho \geqq 0$) cioè in una g_n^ρ della g_n^r (sicchè $\rho \geqq r - k$), la serie lineare g_{n-k}^ρ costituita da quei gruppi dai quali si tolgano i k punti A è completa (*). Invero, posto che quest'ultima serie stia in una $g_{n-k}^{\rho'}$, ove $\rho' \geqq \rho$, aggiungendo a questa i k punti A come punti fissi si avrà una $g_n^{\rho'}$ che ha comune colla g_n^r la g_n^ρ su nominata; e quindi, poichè la g_n^r si suppone completa, essa conterrà (n.° 55) la $g_n^{\rho'}$. Dunque nella g_n^r vi sono $\infty^{\rho'}$ gruppi contenenti i punti A, sicchè $\rho' \leqq \rho$; onde $\rho' = \rho$: sicchè la serie g_{n-k}^ρ non è contenuta in una di maggior dimensione.

Non è escluso che sia $\rho = r$, cioè che i k punti A sian comuni a *tutti* i gruppi della serie data.

57. I teoremi precedenti (n.^{i} 55 e 56) si possono enunciare in altro modo,

(*) Debbo quest'osservazione, come pure l'applicazione che ne faremo al n.° 77, al sig. Castelnuovo; il quale nell'autunno del 1890 mi comunicò gentilmente, per uso del mio corso, qualche aggiunta o perfezionamento alle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche.*

considerando in luogo delle serie lineari le curve imagini, le quali son *normali* se le serie son complete (n.° 26). Avremo (*):

Due curve d'ordine n in corrispondenza biunivoca tale che ad una particolare sezione iperplanare (gruppo di n punti) dell'una corrisponda una sezione iperplanare dell'altra son projezioni di una stessa curva d'ordine n. Se le due curve date son normali, la corrispondenza nominata sarà projettiva (una collineazione).

Le curve normali d'ordine n di cui una data curva qualsiasi del medesimo ordine è projezione sono tutte projettive (collineari) fra loro. —

Projettando una curva normale d'ordine n appartenente ad S_r da k suoi punti qualunque, cioè dallo spazio che li congiunge (la cui dimensione sarà $h \leq k-1$), sopra uno spazio duale di questo (cioè di dimensione $\rho = r - h - 1$), si ottiene una curva (d'ordine $n-k$) normale.

58. Sia data sull'ente algebrico una serie lineare completa g_N^R. I resti (supposto che ne esistano) di un dato gruppo di n punti G_n rispetto ad essa formano (n.° 56) una serie lineare completa $g_{n'}^{r'}$, ove $n + n' = N$. E similmente i resti di *qualunque* gruppo $G'_{n'}$ di quest'ultima serie rispetto alla g_N^R formeranno una g_n^r completa; la quale dovrà contenere G_n e però sarà sempre *la* serie completa individuata (n.° 55) da questo gruppo. Se ora consideriamo i resti (sempre rispetto alla g_N^R) di un altro *qualunque* gruppo di questa g_n^r, essi formano una $g_{n'}$ completa che contiene il gruppo $G'_{n'}$ e quindi coincide colla $g_{n'}^{r'}$. Dunque non solo ogni gruppo della g_n^r ed ogni gruppo della $g_{n'}^{r'}$ saranno resti l'un dell'altro rispetto alla g_N^R; ma ciascuna delle due serie abbraccia *tutti* i resti di un gruppo qualunque dell'altra, rispetto alla g_N^R. Le due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ si dicono *residue* rispetto alla g_N^R. Fra gli ordini passa la relazione $n + n' = N$; e quanto alle dimensioni quella di ciascuna delle due serie dà l'indice d'infinità dei gruppi della g_N^R che contengono un dato gruppo qualsiasi dell'altra.

Se la g_N^R è rappresentata da una curva normale d'ordine N di S_R, abbiamo che su questa curva i gruppi della g_n^r appartengono a spazi $S_{R-r'-1}$ e

(*) Si noti che queste proposizioni, e così altre che incontreremo in seguito, valgono anche, pel modo come son dedotte (cioè trasportando risultati relativi a serie lineari, che possono essere *composte*), per *curve multiple*. Così quando si projetta una curva su uno spazio inferiore può darsi che essa sia projettata *più volte*, cioè che la projezione sia una curva multipla. Le nostre proposizioni varranno anche allora, purchè, al solito, si tenga il debito conto della multiplicità nel valutar l'ordine della curva, nella considerazione delle corrispondenze, ecc.

quelli della g_n^r a spazi S_{R-r-1}, e che due spazi determinati risp. da gruppi delle due serie stanno sempre in un iperpiano S_{R-1}.

59. Una questione inversa, almeno in parte, a quella delle *serie residue* è quella della *serie somma* (*). Siano date sull'ente algebrico due serie lineari qualunque g_n^r, $g_{n'}^{r'}$. Presi in esse risp. due gruppi G_n, $G'_{n'}$, si consideri la serie completa g_N^R d'ordine $N = n + n'$ che è individuata dal gruppo *somma* (cioè insieme) di quei due. Rispetto a questa nuova serie saranno residue (n.° 58) le due serie complete d'ordini n, n' individuate risp. dai gruppi G_n, $G'_{n'}$: serie che contengono risp. g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. Dunque ogni gruppo di g_n^r ed ogni gruppo di $g_{n'}^{r'}$ presi insieme dànno sempre un gruppo di N punti della g_N^R. *Esiste quindi una serie lineare d' ordine $N = n + n'$ che contiene tutti i gruppi somma di un gruppo della g_n^r con un gruppo della $g_{n'}^{r'}$.* — La minima serie lineare d'ordine N così fatta è quella che il sig. Castelnuovo (loc. cit.) chiama *serie somma* di g_n^r e $g_{n'}^{r'}$. I gruppi somme dei gruppi di queste due sono $\infty^{r+r'}$: ma essi non costituiscono in generale una serie lineare. La dimensione della serie somma sarà dunque $\geqq r + r'$.

Dalla definizione della somma di *due* serie si passa subito a quella della somma di *più* serie lineari, come pure delle *serie multiple* di una serie lineare data: nozione fondamentale per alcune importanti ricerche (**).

CAPITOLO III.

§ 15. Le serie segate su una curva piana dalle curve aggiunte.

60. Nel Cap. preced. abbiamo studiato delle proprietà generali delle serie lineari, indipendentemente dalla costruzione effettiva di queste. Per tale costruzione, da cui poi faremo discendere l'esistenza di serie con dati caratteri, conviene ora che ricorriamo alla rappresentazione dell'ente algebrico con una *curva piana semplice.* Questa curva potremo supporla dotata di sole *singolarità or-*

(*) Cfr. Castelnuovo: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1893), n.° 1.

(**) V. specialmente il lavoro citato nella nota preced. — Cfr. anche, per la questione del *massimo genere* di un ente algebrico contenente una g_n^r (questione che si tratta appunto considerando i successivi multipli di questa serie) l'ultima parte delle *Ricerche,* ecc., del Castelnuovo e la Nota del prof. Bertini: *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 26, 1890).

dinarie (punti multipli a tangenti distinte); poichè, se già non fosse, si può render tale con un numero finito di trasformazioni quadratiche del piano (*).

Indichiamo con s in generale la multiplicità di un punto singolare per la curva piana γ d'ordine m (cosicchè le somme rispetto ad s che avremo da considerare si estenderanno a tutti i punti multipli di γ). Dicesi *curva aggiunta* (**) di γ ogni curva che in ciascun punto multiplo, s-plo, di γ abbia la multiplicità $s-1$ almeno. È chiaro che una serie lineare segata su γ da un sistema lineare *qualunque* di curve si può intendere staccata da un sistema *di curve aggiunte,* bastando aggiungere a tutte le curve del sistema primitivo una curva aggiunta fissa (ad es. la 1.ª polare di un punto rispetto a γ) per mutarlo in un sistema di curve aggiunte, che all'infuori di nuovi punti fissi segherà su γ la serie lineare primitiva.

61. Le curve aggiunte di γ d'un dato ordine l (abbastanza grande) formano un sistema lineare che sega su γ una serie lineare g_n^r di cui vogliamo determinare (per quanto si può) i caratteri.

Anzitutto la dimensione h di quel sistema lineare di curve aggiunte sarà:

$$h \geqq \frac{l(l+3)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}, \tag{1}$$

ossia, introducendo il genere p di γ che vale (n.° 38)

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{s(s-1)}{2}, \tag{2}$$

sarà:

$$h \geqq \frac{l(l+3)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} + p. \tag{1'}$$

Nella (1), e quindi anche nella (1'), il segno d'uguaglianza varrebbe se le condizioni che i singoli punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine l, pel fatto che in un punto s-plo di γ queste curve devon avere un punto

(*) V. i lavori citati al n.° 38 del sig. Noether (Math. Ann., tom. 9 e 23); e del sig. Bertini (la cui dimostrazione geometrica è di una notevole semplicità).

Si potrebbe anzi — ma ciò non occorre per noi — riferire biunivocamente l'ente algebrico o la curva piana ad una curva piana che non abbia altri punti multipli che *nodi.* Anche di questa proposizione è stata data una dimostrazione geometrica semplicissima dal sig. Bertini (*Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche,* Rivista di Mat., tom. 1, 1891).

(**) Cfr., anche pel seguito, la Memoria Brill-Noether.

$(s-1)$-plo, fossero tutte distinte $\left(\text{e quindi in numero di } \Sigma\frac{s(s-1)}{2}\right)$. In caso opposto la differenza fra il 1.° membro h ed il 2.° di quelle disuguaglianze esprimerà quante fra quelle $\left(\Sigma\frac{s(s-1)}{2}\right)$ condizioni sono conseguenza delle rimanenti (indipendenti fra loro). — Ponendo

$$l = m - 3 + \alpha,$$

la (1′) si potrà anche scrivere così:

$$h \geqq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1. \qquad (1'')$$

Se $l < m$, ossia $\alpha < 3$, non vi saranno nel detto sistema lineare d'ordine l curve che contengano γ; sicchè la dimensione r della serie segata su γ da quel sistema sarà (n.° 13) la stessa che quella del sistema, vale a dire $r = h$. Se invece $l \geqq m$, ossia $\alpha \geqq 3$, vi saranno curve aggiunte d'ordine l, cioè curve del sistema, spezzate nella curva γ ed in una curva (qualunque) d'ordine $l - m$, ossia $\alpha - 3$; e saranno (quante le curve piane di tal ordine, cioè) ∞^t, ove $t = \frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$. Dunque (n.° cit.) la dimensione r della serie lineare sarà in tal caso

$$r = h - t - 1,$$

espressione che coincide con $r = h$ per $\alpha = 1, 2$, cioè per $l = m - 2,\ m - 1$. In conseguenza introducendo r nella (1″) potremo dire che: *la dimensione r della serie lineare segata su γ dalle curve aggiunte d'ordine $l = m - 3 + \alpha$, quando quest'ordine è $l \leqq m - 3$ è*

$$r \geqq m\alpha + \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} + p - 1, \qquad (3\,a$$

e quando invece è $l > m - 3$

$$r \geqq m\alpha + p - 2. \qquad (3\,b)$$

Quanto poi all'*ordine n della serie medesima* si ha sempre evidentemente (togliendo le intersezioni che cadono necessariamente nei punti multipli di γ):

$$n = ml - \Sigma s(s-1);$$

ossia, introducendo p con la (2):

$$n = m\alpha + 2p - 2. \qquad (4)$$

62. Dalle (3 *a*), (3 *b*) e (4) segue che per la g_n^r segata su γ dal sistema di tutte le sue aggiunte d'ordine l si ha:

$$n - r < p \quad \text{se} \quad l \leqq m - 3 \tag{5 a}$$

$$n - r \leqq p \quad \text{se} \quad l > m - 3. \tag{5 b}$$

63. Dall'esistenza che così è provata di serie lineari g_n^r per le quali $n - r \leqq p$, osservando (n.° 29) che $n - r \geqq 0$, si trae $p \geqq 0$: ossia *il genere di un ente algebrico (irriduttibile) è sempre* $\geqq 0$.

Se poi è precisamente $p = 0$, si trae $n - r = 0$, e quindi (n.° cit.) che γ è razionale: proposizione inversa di quella del n.° 34. Dunque *gli enti algebrici di genere zero sono gli enti razionali.*

64. La formola (1'') per h prova che *curve aggiunte a* γ *di un dato ordine* $l > m - 3$ *esistono sempre* (se $m > 2$).

Quanto alle *aggiunte d'ordine* $m - 3$, per esse quella formola (1'') dà $h \geqq p - 1$, sicchè *ne esisteranno certo* se $p \geqq 1$. Per $p = 0$ *non ve ne sono,* giacchè altrimenti renderebbero negativo il valore di n dato dalla (4). Per $p = 1$ ve n'è *una sola,* perchè la (4) dà $n = 0$, e però quelle aggiunte (cioè i gruppi che esse segano su γ) non posson essere infinite. — In generale le curve aggiunte d'ordine $m - 3$, o, come diremo più brevemente (secondo l'uso), « le φ » di γ segano su questa curva una serie lineare d'ordine $2p - 2$ e di dimensione $r \geqq p - 1$; la quale, se $p > 1$, sarà rappresentata da una particolare curva (d'ordine $2p - 2$ appartenente ad S_r ove $r \geqq p - 1$). Vedremo poi che è precisamente $r = p - 1$.

65. *Ogni serie lineare* $g_{n'}^{r'}$ si può staccare su γ mediante curve aggiunte di un certo ordine l (n.° 60): vale a dire i suoi gruppi sono *resti* di certi k punti fissi rispetto alla g_n^r che è segata su γ da *tutte* le aggiunte d'ordine l. Si ha dunque:

$$n' = n - k;$$

e, supposto che *la* $g_{n'}^{r'}$ *sia completa,* e quindi comprenda *tutti* quei resti,

$$r' \geqq r - k.$$

Dunque:

$$n' - r' \leqq n - r.$$

In base al n.° 62 otteniamo così la seguente proposizione. *Per ogni* g_n^r *completa di un ente algebrico di genere p si ha:*

$$n - r \leqq p, \quad \textit{ossia} \quad r \geqq n - p;$$

e se poi, riferito l'ente ad una curva piana d'ordine m, la serie si può staccare su questa mediante un sistema lineare di curve φ (aggiunte d'ordine $m-3$), sarà:

$$n-r<p, \quad ossia \quad r>n-p.$$

Al n.° 55 abbiam visto che un gruppo di n punti dell'ente algebrico, od in generale una serie lineare d'ordine n, sta sempre in una serie completa ben determinata. Ora potremo aggiungere che la dimensione di questa serie completa è $\geqq n-p$; sicchè la serie completa d'ordine n determinata da un dato gruppo di n punti sarà certo infinita quando $n>p$.

Il teorema precedente ci dà pure che: *per le curve normali d'ordine n e genere p appartenenti ad S_r si ha $n-r\leqq p$, ossia $r\geqq n-p$.*

Sia che ci riferiamo alle g_n^r *complete,* ovvero alle curve d'ordine n di S_r *normali,* avremo in particolare che: se $p=0$ sarà $r=n$; se $p=1$ sarà $r=n-1$, non potendo essere $r>n-1$, cioè $r=n$, altrimenti (n.° 29) l'ente sarebbe razionale.

66. Una serie lineare d'ordine n e dimensione $>n-p$ presenta, come vedremo, delle particolarità che riguardano anche i suoi gruppi, e quindi le serie lineari minori d'ordine n in essa contenute. Perciò noi chiameremo *speciali* tutte le serie lineari d'ordine n (in particolare i gruppi di n punti) contenute in serie d'ordine n e dimensione $>n-p$. Se una serie speciale è completa, la sua dimensione sarà certo $>n-p$.

I resti di k punti qualunque rispetto ad una serie speciale completa g_n^r (anche se fra quei k punti vi sono dei punti fissi di questa) formano una serie completa (n.° 56), che è ancora speciale, perchè d'ordine $n-k$ e dimensione $\geqq r-k>n-k-p$. Ne deriva che se una serie speciale (completa o no) ha punti fissi, sarà speciale anche la serie che rimane astraendo da questi.

Diremo anche *speciali* le curve imagini di serie speciali. Le curve speciali d'ordine n e genere p saranno dunque quelle che hanno spazi normali di dimensione $>n-p$.

Per una g_n^r *completa non speciale,* od una curva *normale non speciale* d'ordine n appartenente ad S_r, sarà $r=n-p$. —

Per $p=0$ e $p=1$ non vi sono serie lineari speciali o curve speciali (v. la fine del n.° 65). Per $p>1$ invece abbiam visto (n.° cit.) che si ottengono serie lineari speciali staccandole su una curva piana mediante sistemi lineari di curve φ. Dimostreremo presto (§ 17) che in questo modo si posson ottenere *tutte* le serie speciali. — Prima però sarà utile che esaminiamo la cosa per una classe speciale di enti: quelli *iperellittici.*

§ 16. Digressione sugli enti ellittici ed iperellittici.

67. Gli enti algebrici sui quali esiste una serie lineare g_2^1, vale a dire (n.° 30) un'involuzione razionale di 2.° grado, diconsi *iperellittici* (*). Chiamando λ il parametro (o funzione razionale dell'ente algebrico) che è in corrispondenza biunivoca con le singole coppie dell'involuzione (parametro che è determinato, a meno di una trasformazione lineare), la corrispondenza (1, 2) che si avrà fra λ ed i corrispondenti punti dell'ente trae (n.° 22) che le coordinate di questi punti si potranno esprimere sotto la forma:

$$x_i = A_i(\lambda) + B_i(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}, \tag{1}$$

essendo le A_i, B_i ed R polinomi in λ. Si può supporre che $R(\lambda)$ non abbia radici doppie: allora l'equazione

$$R(\lambda) = 0, \tag{2}$$

darà gli elementi di diramazione della g_2^1 ossia i punti doppi di questa. Se l'ente algebrico ha il genere p, i punti doppi della g_2^1 sono (n.° 33) $2p+2$; e tale sarà dunque il grado del polinomio $R(\lambda)$, supposto che $\lambda = \infty$ non corrisponda ad un elemento di diramazione, nel qual caso invece il grado di R si ridurrebbe a $2p+1$.

Viceversa sian date comunque delle espressioni della forma (1). Da esse sarà definito un ente iperellittico nel quale le singole coppie di una g_2^1 (coppie provenienti dalla bivalenza del radicale quadratico che compare in quelle espressioni) corrispondono biunivocamente ai valori del parametro λ; purchè però, nel caso particolare in cui un gruppo generico di valori delle x_i si ottenga dalle (1) non per *un* sol valore di λ, ma per m valori, si consideri come *punto dell'ente* non il solo insieme delle x_i ma l'insieme di queste e di *un* valor corrispondente di λ (cioè si conti m volte, ossia come m-plo, l'ente descritto dal gruppo delle x_i) (**).

(*) Ad esempio per $p=2$ esiste sempre una g_2^1: la serie staccata sulla curva piana dalle φ (v. n.° 64); sicchè *ogni ente di genere 2 è iperellittico.*

(**) Del resto è facile vedere che nel caso particolare in cui le (1) definiscano non una corrispondenza (1, 2) ma invece una corrispondenza $(m, 2)$, con $m>1$, fra il parametro λ (ossia un ente razionale) ed il punto x di un ente algebrico, questo (non più contato m volte, come sopra, ma riguardato come semplice) sarà *razionale:* vale a dire è razionale un aggruppamento dei punti λ (di un ente razionale) ad m ad m quando ogni

Dalla rappresentazione (1) degli enti iperellittici segue subito (n.° 22) che per l'equivalenza di due enti iperellittici di genere p, cioè perchè si possa stabilire fra essi una corrispondenza biunivoca, è *sufficiente* che entro le rispettive involuzioni g_2^1 abbiano gli stessi birapporti i $2p+2$ elementi di diramazione, cioè che abbiano gli stessi birapporti le radici delle corrispondenti equazioni (2). E questa condizione è anche *necessaria* se $p > 1$, perchè allora ognuno dei due enti contiene una sola g_2^1 (n.° 35), e la corrispondenza biunivoca fra gli enti dovrà pure riferire biunivocamente le loro g_2^1 facendo corrispondere gli elementi di diramazione. Di qui, e dalla possibilità di scegliere *ad arbitrio* nelle (1) il polinomio $R(\lambda)$ di grado $2p+2$, segue che *i moduli (indipendenti) dell'ente iperellittico di genere $p > 1$ sono $2p-1$*: i birapporti indipendenti dei $2p+2$ elementi di diramazione della g_2^1. — Se poi si suppone che i due enti iperellittici a cui si riferivano le osservazioni precedenti coincidano, si vede che condizione necessaria e sufficiente perchè *un ente iperellittico di genere $p > 1$ ammetta una corrispondenza biunivoca fra i suoi punti* diversa da quella che è data dalla g_2^1 è che entro questa serie si possa fare una trasformazione biunivoca, vale a dire bilineare, che muti in sè il gruppo dei $2p+2$ elementi di diramazione; ossia che ammetta una trasformazione bilineare in sè l'equazione (2). Ecc. ecc.

68. L'ente algebrico di genere $p=1$ dicesi *ellittico*. Esso contiene (pel n.° 65) infinite g_2^1 (serie complete), le quali son tali che da una coppia di punti dell'ente è individuata una tal serie: in particolare sarà individuata una g_2^1 dandone un punto doppio (dei 4 che essa ha). Ora se A, A' sono punti doppi di due g_2^1, la corrispondenza univoca involutoria che è determinata fra i punti dell'ente che forman coppie in quella g_2^1 che contiene la coppia AA' muterà l'una nell'altra quelle prime due g_2^1: donde segue che i birapporti delle due quaterne dei loro elementi di diramazione sono uguali. Dunque le infinite g_2^1 di un ente ellittico hanno le quaterne dei loro elementi di diramazione

---

punto sta in 2 gruppi dell aggruppamento. Invero rappresentando λ sui punti di una curva razionale normale d'ordine m di S_m, quei gruppi di m punti saranno segati su quella curva da una ∞^1 d'iperpiani tale che per ogni punto della curva (e quindi di S_m) passano 2 iperpiani: questa varietà sarà dunque di 2.ª classe (l'insieme degl'iperpiani tangenti di un cono di 2.° ordine); e quindi *razionale*.

Quest'osservazione (il cui sviluppo è in qualche relazione col n.° 23) è il risultato di una conversazione avuta col sig. Enriques, il quale pure rilevò con me che essa si può notevolmente estendere.

tutte projettive, cioè con lo stesso birapporto: e questo dicesi *birapporto dell'ente ellittico.*

Ciò premesso, il ragionamento che si faceva al n.° prec. per $p > 1$ si potrà ancora applicare al caso di $p = 1$. Avremo di nuovo che condizione non solo *sufficiente,* ma anche *necessaria* perchè fra due enti ellittici si possa stabilire una corrispondenza biunivoca (e quindi infinite) è che essi abbiano lo stesso birapporto. Questo è dunque *il modulo* di un ente ellittico. Vale la formola $2p - 1$ anche per $p = 1$.

69. Possiam determinare facilmente nel caso dell'ente iperellittico di genere $p > 1$ la costituzione delle *serie speciali* (n.° 66: come ivi notammo le serie speciali esistono solo per $p > 1$).

Abbiasi su quell'ente una serie lineare g_n^r priva di punti fissi, la quale non sia composta mediante la serie g_2^1. Sarà rappresentata da una curva d'ordine n di S_r, semplice o multipla, ma tale sempre che le coppie della g_2^1 son rappresentate su essa da coppie di punti essenzialmente distinti, eccetto solo i $2p + 2$ punti doppi della g_2^1. La rigata delle congiungenti queste coppie di punti sarà dunque (applicando il principio di corrispondenza ad un fascio d'iperpiani projettanti le coppie stesse; cfr. del resto la prima formola del n.° 50) d'ordine

$$\frac{1}{2}[2n - (2p + 2)],$$

ossia $n - p - 1$. Ora siccome questa rigata appartiene ad S_r il suo ordine dev'essere $\geqq r - 1$. Dunque:

$$n - p - 1 \geqq r - 1, \quad \text{ossia} \quad r \leqq n - p \ (*).$$

Ma una serie speciale d'ordine n o ha dimensione $> n - p$, o è contenuta in una serie di tal dimensione. Dunque *sull'ente iperellittico di genere p una serie lineare speciale priva di punti fissi è necessariamente composta mediante la g_2^1*: e quindi, se si tratta di una g_n^r, essa non è altro che un'involuzione di dimensione r e di grado $\frac{n}{2}$ entro l'ente razionale che ha per elementi le coppie della g_2^1.

(*) Segue che una curva *semplice* iperellittica di genere p ha sempre l'ordine ($\geqq p + r$ se r è la dimensione dello spazio a cui essa appartiene, e quindi) $\geqq p + 2$: e che se il suo ordine è precisamente $p + 2$ la curva è piana e le rette contenenti le coppie della g_2^1 formano una rigata di 1.° grado, ossia un fascio, cioè concorrono in un punto il quale dunque sarà multiplo secondo p per la curva. Se la curva è sghemba ed il suo ordine ha il valor minimo $p + 3$, essa starà su una quadrica; ecc.

Se una serie lineare g_n^r così composta è *completa,* essa deve abbracciare *tutti* i gruppi di $\frac{n}{2}$ elementi di quest'ente razionale, cioè dev'essere $r = \frac{n}{2}$,

$$n = 2r. \qquad (3)$$

E riprendendo l'ipotesi che sia speciale, e quindi (perchè completa)

$$r > n - p, \qquad (4)$$

dalla (3) e da questa si trae:

$$r \leq p - 1, \qquad n \leq 2p - 2 \text{ (*)}. \qquad (5)$$

Queste relazioni (5), le quali *limitano la dimensione e l'ordine delle serie speciali,* varranno poi anche nel caso che queste non siano complete; perchè valgono per le serie complete (dello stess'ordine e di maggior dimensione) che le contengono.

Possiamo applicarle subito alla serie lineare speciale che su una curva piana iperellittica di genere p è segata dalle φ: serie lineare che abbiam visto (n.° 64) essere d'ordine $n = 2p - 2$ e dimensione $r \geq p - 1$. Da quest'ultima relazione confrontata con la prima delle (5) si deduce che è precisamente $r = p - 1$. Quella stessa (5), oppure la (3), ci prova che la detta serie non è contenuta in una di pari ordine e maggior dimensione: vale a dire che la serie è completa. Inoltre essa non ha punti fissi, perchè altrimenti la serie che si avrebbe prescindendo da questi dovrebbe ancora verificare la (3) e quindi avere l'ordine $2p - 2$. Si vede dunque, nel caso iperellittico, che le φ sono precisamente ∞^{p-1} e staccano sulla curva fondamentale una serie lineare completa priva di punti fissi: la quale è composta con la g_2^1, vale a dire non è altro che *la g_{2p-2}^{p-1} costituita da tutti gli ∞^{p-1} gruppi di $p-1$ coppie della g_2^1.*

§ 17. Le serie speciali sopra un ente qualunque.

70. Il procedimento che abbiam seguito nel n.° prec. per gli enti iperellittici si può estendere ad enti algebrici qualunque: solo, in luogo della rigata costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti della g_2^1 su una curva

(*) Volendo considerare anche le serie *non speciali* complete composte con la g_2^1, per esse si avrà in luogo della (1): $r = n - p$; e quindi combinando con la (3) si ha, invece delle (5): $r = p$, $n = 2p$.

iperellittica, si dovrà considerare la varietà degli spazi che contengono i gruppi di una g^1_m sopra una curva qualunque, ricorrendo ad una formola generale del § 13.

Suppongasi dunque che sull'ente algebrico di genere p esistano simultaneamente due serie g^r_n, g^1_m prive di punti fissi, tali che sulla curva C (semplice o multipla) d'ordine n di S_r imagine della g^r_n i gruppi della g^1_m appartengano in generale a spazi S_{m-1}, cioè si compongano di punti linearmente indipendenti (sicchè $m-1 \leq r$). Abbiamo allora (n.° 52):

$$n-p=\nu+m-1+z; \tag{1}$$

ove nel caso di $m-1=r$ si deve porre $\nu=0$, mentre quando $m-1<r$ il simbolo ν rappresenta l'ordine della varietà di dimensione m costituita dagli ∞^1 spazi S_{m-1}. Ora la massima dimensione che possa avere lo spazio cui appartiene una varietà irriduttibile di dimensione m e d'ordine ν è appunto, come si sa, $\nu+m-1$. Sarà dunque:

$$\nu+m-1 \geq r,$$

relazione valida anche nel primo caso. Si ha poi sempre $z \geq 0$. In conseguenza la formola fondamentale (1) ci dà:

$$n-p \geq r.$$

Segue che *quando $n-r<p$ i gruppi di punti di una g^1_m sopra la curva di genere p, ordine n, appartenente ad S_r appartengono a spazi di dimensione $\leq m-2$* (*).

71. Abbiasi ora sulla stessa curva C rappresentante la g^r_n, sempre coll'ipotesi $n-r<p$, una serie lineare qualunque g^q_Q: dimostreremo che i suoi gruppi G_Q appartengono a spazi di dimensione $\leq Q-q-1$. Invero se di un gruppo G_Q di quella serie si fissano $q-1$ punti generici, i rimanenti

(*) Così sopra una curva di genere p dello spazio ordinario, la quale abbia l'ordine $<p+3$ se è sghemba, $<p+2$ se è piana, le terne di punti di una g^1_3 stanno su rette (formanti una rigata razionale); ecc. —

Se si applica la formola più generale del n.° 52, relativa ad un'involuzione di grado m e di genere qualunque π, anzi che quella sopra adoperata che si riferisce al caso di $\pi=0$, si avrà il seguente risultato più generale: *quando $n-r<p-m\pi$ i gruppi di punti di un'involuzione di grado m e genere π sopra una curva d'ordine n e genere p appartenente ad S_r stanno in spazi di dimensione $\leq m-2$.* V. Castelnuovo: *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1891).

$Q-q+1$ formano un gruppo di una serie lineare ∞^1; e quindi, per la proposizione precedente (n.° 70), appartengono ad un $S_{Q-q-1-\delta}$, ove $\delta \geqq 0$. Se potesse il numero δ mutare con la scelta dei primi $q-1$ punti entro al G_Q, si prenda per δ il minimo valor possibile. Indi fra quei $Q-q+1$ punti che appartengono all' $S_{Q-q-1-\delta}$ se ne prendano $Q-q$ tali che anch'essi determinino questo spazio, cioè non stiano in uno spazio minore (cosa che si vede subito esser possibile). Allora ogni altro punto di G_Q insieme con quei $Q-q$ ne darà $Q-q+1$ i quali apparterranno ad un $S_{Q-q-1-\delta'}$ con $\delta' \geqq \delta$, e questo spazio dovrà coincidere con quello, di dimensione non minore, determinato dai $Q-q$ punti. Dunque quest'ultimo spazio, $S_{Q-q-1-\delta}$, contiene tutti i punti del gruppo G_Q.

Osservando poi che una curva speciale di genere p e d'ordine n è sempre projezione di una appartenente ad un S_r con $n-r<p$; e d'altra parte che la proposizione dimostrata vale anche nel caso che la g_Q^q avesse punti fissi, come si vede applicandola alla serie che rimarrebbe astraendo da questi; possiamo enunciarla così: *Sopra una curva speciale i gruppi di punti di una serie lineare qualunque g_Q^q stanno in spazi di dimensione $\leqq Q-q-1$.*

È questo il *lemma* da cui dedurremo tutte le principali proprietà delle serie speciali: esso è dovuto al sig. Castelnuovo (*).

72. Anzitutto applichiamolo al caso che la serie g_Q^q non sia altro che la g_n^r *speciale* segata su una curva speciale di genere p, ordine n, di S_r, dagl'iperpiani S_{r-1}. I suoi gruppi dovranno stare in spazi di dimensione $\leqq n-r-1$; mentre *appartengono* a quegli S_{r-1}. Dunque sarà $n-r-1 \geqq r-1$, ossia $n \geqq 2r$. *Per una serie lineare speciale g_n^r, o per una curva speciale d'ordine n di S_r, si ha sempre*

$$n \geqq 2r. \tag{1}$$

Se la serie lineare speciale avesse punti fissi, la (1) varrebbe per quella che se ne otterrebbe astraendo da questi; e quindi, a maggior ragione, per la serie primitiva.

73. Da questo teorema segue che *la serie speciale segata su una curva piana dalle sue φ* (n.° 64) *è precisamente di dimensione $p-1$, coi $2p-2$ punti tutti variabili, e completa.* Poichè, se, astraendo da x punti fissi, essa

(*) *Ricerche di geom.*, ecc.. n.° 14. Fra i perfezionamenti di quel lavoro (accennati qui nella nota al n.° 56) pensati poi dal Castelnuovo vi era appunto l'uso più sistematico di quella proposizione.

si riducesse ad una serie speciale d'ordine $2p-2-x$, e di dimensione $p-1+y$, ovvero contenuta in una dello stesso ordine e di tal dimensione; applicando la (1) si avrebbe:

$$2p-2-x \geqq 2(p-1+y),$$

donde:

$$x=0, \qquad y=0.$$

74. La stessa formola (1), applicata ad una serie g_n^r speciale *completa*, per la quale dunque:

$$r \geqq n-p+1,$$

ci dà (sommandola con questa, tal quale, oppure raddoppiata):

$$r \leqq p-1, \qquad n \leqq 2p-2; \tag{2}$$

precisamente come al n.° 69 per gli enti iperellittici. Ed anche qui potremo dire che queste due relazioni (2) varranno pure, a maggior ragione, per le g_n^r speciali *parziali*. Valgon dunque per tutte le g_n^r speciali, o le curve speciali d'ordine n di S_r.

Ne segue che *se* $r>p-1$, *o se* $n>2p-2$, *la* g_n^r, *oppure la curva d'ordine* n *di* S_r, *son certo non speciali; sicchè ove la serie sia completa, o la curva sia normale, sarà* $r=n-p$.

Quindi una superficie a sezioni iperplanari di genere p, d'ordine $n>2p-2$, appartiene al più ad S_{n-p+1}; ecc. ecc.

75. Applicando il lemma del n.° 71 ad una g_{2p-2}^{p-1} situata su una curva C di genere $p>1$ e d'ordine $2p-2$ che appartenga ad S_{p-1}, si ha che i suoi gruppi di $2p-2$ punti dovranno stare in spazi S_{p-2}, e però saranno i gruppi di punti segati su C dagl'iperpiani. Ora una curva quale la C si ha come imagine della g_{2p-2}^{p-1} (n.° 73) che sopra la curva piana è segata dalle sue φ: noi vediamo dunque che sull'ente non esisterà un'altra g_{2p-2}^{p-1} che quella rappresentata dalla C. *Sopra un ente algebrico di genere* $p>1$ *esiste una sola serie* g_{2p-2}^{p-1}.

Questa serie lineare speciale si può chiamare *la serie canonica,* e *canonici* i suoi gruppi di $2p-2$ punti. Così pure si posson chiamare *curve canoniche* del genere p quelle d'ordine $2p-2$ appartenenti ad S_{p-1}: le quali curve, quando rappresentano uno stesso ente algebrico, cioè quando sono in corrispondenza biunivoca, sono fra loro projettive (perchè rappresentano una medesima serie lineare). *La geometria sull'ente algebrico di genere* $p>1$ (geometria delle trasformazioni *birazionali* dell'ente) *equivale alla geometria projettiva delle curve canoniche di genere* p.

La rappresentazione algebrica delle curve canoniche si ha, ad es., considerando una curva piana d'ordine m

$$f(x) = 0, \tag{3}$$

p sue aggiunte d'ordine $m-3$ linearmente indipendenti $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots \varphi_{p-1}(x)$; e ponendo:

$$y_0 : y_1 : \ldots : y_{p-1} = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots : \varphi_{p-1}(x), \tag{4}$$

per definire, con la (3), i punti y della curva canonica. Questa viene anche chiamata *la curva delle* φ (*).

Nel caso iperellittico (n.° 69) la serie canonica è *composta* con la g_2^1; la curva canonica si riduce ad una curva *doppia*, la curva (razionale normale) d'ordine $p-1$ di S_{p-1} contata due volte. In nessun altro modo una curva d'ordine $2p-2$ di S_{p-1} può esser *multipla:* e però in un ente che non sia iperellittico la serie canonica non sarà mai composta, le curve canoniche son semplici, le φ che passano per un punto generico della curva piana non passano di conseguenza per altri.

§ 18. **Digressione. Applicazione alle curve aggiunte ed al *Restsatz*.**

76. Gli ultimi risultati ci permettono di completare quelli del § 15 relativi alle curve aggiunte. Colà avevamo ottenuto (n.° 61) per la dimensione della serie lineare g_n^r segata su una curva piana d'ordine m e genere p da tutte le aggiunte di un dato ordine $m-3+\alpha$ maggiore di $m-3$:

$$r \geqq m\alpha + p - 2, \tag{1}$$

e per l'ordine della serie stessa:

$$n = m\alpha + 2p - 2. \tag{2}$$

Poichè quest'ordine è $> 2p-2$ (o quella dimensione è $> p-1$) la serie *non* sarà speciale (n.° 74); e per conseguenza

$$r \leqq n - p. \tag{3}$$

Di qui e dalla (2) si trae subito, confrontando con la (1), che in questa come nella (3) vale il segno d'uguaglianza.

(*) Com'è noto, le forme $\varphi(x)$ si posson anche definire come i *differenziali di 1.ª specie* esistenti sull'ente algebrico (p dei quali sono linearmente indipendenti).

Questo fatto, per quanto si riferisce alla (3), ci prova (tenuto conto che la serie non è speciale) che: *la serie lineare segata sulla curva piana d'ordine m da tutte le sue aggiunte di un dato ordine* $> m - 3$ *è completa;* come già s'era visto (n.° 73) per la serie segata dalle aggiunte d'ordine $m - 3$.

Il valere poi il segno d'uguaglianza nella (1), ossia nella (3 b) del n.° 61 per $l > m - 3$, — come pure nella (3 a) dello stesso n.° per $l = m - 3$ (quest'ultimo fatto in forza del n.° 73), — dimostra [v. l'osservazione che nel n.° 61 fa seguito alla relazione (1')] che: *per le curve aggiunte d'ordine* $\geqq m - 3$ *di una curva piana d'ordine m i passaggi pei punti multipli di questa* ($s - 1$ *volte per un punto* s-plo) *costituiscono condizioni tutte distinte.* — Ciò non varrebbe più per curve aggiunte d'ordine $< m - 3$ (cfr. n.° 85).

77. *Le aggiunte di un dato ordine qualunque (ove esistano) segano sulla curva piana d'ordine m una serie lineare completa.* Ciò è dimostrato (n.i 73 e 76) per le aggiunte di un dato ordine $\geqq m - 3$. Ora dall'esser vero per le aggiunte di un dato ordine minore di m, ad es. per le aggiunte d'ordine $m - 1$, si trae facilmente che vale anche per le aggiunte di un ordine minore, $m - 1 - a$, se esistono. Invero queste ultime curve, insieme con una curva α d'ordine a, fissata ad arbitrio purchè irriduttibile e non passante pei punti multipli della curva fondamentale γ, dànno curve aggiunte d'ordine $m - 1$: sicchè la serie lineare che esse segano su γ si compone di resti degli am punti d'incontro di α con γ rispetto alla serie lineare segata su γ dalle aggiunte d'ordine $m - 1$. Ed abbraccia *tutti* questi resti, poichè ogni aggiunta d'ordine $m - 1$ che passi per quegli am punti dovrà contenere in conseguenza tutta la curva α d'ordine a, e quindi spezzarsi in questa ed in curve aggiunte d'ordine $m - 1 - a$. Applicando dunque il teorema del n.° 56 avremo che, essendo completa la serie data dalle aggiunte d'ordine $m - 1$, è pure completa quella segata dalle aggiunte d'ordine $m - 1 - a$.

78. Applicando lo stesso teorema del n.° 56 ai resti di k punti qualunque rispetto alla serie completa (n.° 77) segata sulla curva piana γ dalle sue aggiunte di un dato ordine avremo: *Le aggiunte di un dato ordine passanti per dati punti di* γ *vi segano, fuori di questi (e dei punti multipli di* γ*) una serie lineare completa.*

Di qui si trae un modo per costruire la serie completa d'ordine n che su γ è individuata da un dato gruppo qualunque di punti G_n. Si conduca per questo una curva aggiunta ψ (il che si può sempre fare, prendendola d'ordine abbastanza elevato), e sia $G_{n'}$ il resto (fuori dei punti multipli di γ) della sua intersezione con γ. Le aggiunte, dello stesso ordine di ψ, passanti per $G_{n'}$, segheranno ulteriormente γ secondo una serie lineare completa che comprende il gruppo G_n: cioè secondo la serie voluta. — Mutando la curva aggiunta ψ muterà $G_{n'}$, anzi muterà anche n' se cambia l'ordine di ψ: ma si otterrà sempre come risultato la stessa serie completa d'ordine n. Si ha così (almeno in parte) quello che i sig.i Brill e Noether chiamano *Restsatz* (*), cioè: *se due gruppi di n punti sono resti o corresiduali rispetto ad un gruppo di n' punti nel senso che formino con questo l'intersezione di γ (fuori dei punti multipli) e di due curve aggiunte, essi sono pure tali rispetto ad ogni altro resto dell'uno dei due.*

Si vede come in sostanza questo teorema derivi dalla proprietà fondamentale che presentano rispetto ad una curva piana γ le sue aggiunte di un dato ordine di segarla secondo una serie lineare *completa:* proprietà che qui s'è dedotta, in ultima analisi, dalla formola (6) del § 13. Da essa poi s'è tratto il *teorema del resto* applicando un altro fatto essenziale (di carattere più semplice) stabilito nel § 14. Il teorema fondamentale $A\varphi+B\psi$ del Noether (v. la prefazione) da cui Brill e Noether traggono quel *Restsatz* è più complesso, ed adempie insieme per questo scopo ai due uffici dei §§ 13 e 14.

79. La proprietà fondamentale suddetta, di segare su γ una serie completa non spetta in generale al sistema di *tutte* le curve di un dato ordine. È facile verificare, scrivendo (analogamente al § 15) la dimensione e l'ordine della serie g_n^r e imponendo la condizione (n.° 65) $n-r \leqq p$, che il modo più naturale per avere un sistema lineare di curve di dato ordine l che seghi su γ una serie *completa* consiste nell'assoggettare le curve d'ordine l ad avere in ogni punto s-plo di γ un punto $(s-1)$-plo (**). Ma anche se si considerano curve aggiunte per cui un punto s-plo P di γ sia, non solo $(s-1)$-plo, ma s-plo, esse daranno fuori dei punti multipli di γ una serie lineare completa: giacchè l'imporre ad una curva aggiunta che abbia in P un punto s-plo anzi

(*) Mem. cit., pag. 273.

(**) Anche un'altra considerazione può indurre fin da principio a dar la preferenza alle curve aggiunte di γ per la *geometria su* γ. Se su questa curva si sega una serie lineare di dimensione abbastanza elevata mediante un sistema lineare di curve che in un punto P s-plo per γ o non passino o abbiano un punto semplice, doppio, ... $(s-2)$-plo, il passaggio di un gruppo della serie lineare per gli s punti di γ che cadono in P si avrà imponendo alle curve del sistema un nuovo passaggio per P, e quindi importerà solo 1 condizione, o 2, o 3,... o $(s-1)$: sicchè quegli s punti di γ presentano particolarità per la serie: formano un gruppo *neutro*. Perchè ciò non accada deve P essere almeno $(s-1)$-plo per le curve del sistema.

che solo $(s-1)$-plo equivale ad imporle il passaggio per gli s punti di γ che cadono in P; e quindi si è ridotti ad applicare il principio del n.° 78.

Ne segue che dato un *sistema lineare* ∞^k *di curve piane (irriduttibili) del genere p determinato dai punti base* e con n intersezioni variabili delle curve del sistema (ossia del *grado* n, seguendo la denominazione introdotta dal sig. Jung), su ognuna di queste le altre segano una serie lineare g_n^{k-1} *completa*. Sarà dunque (n.° 65)

$$k \geqq n - p + 1;$$

ed avrà luogo il segno d'uguaglianza se la serie non è speciale, ad es. se $n > 2p - 2$, oppure $k > p$; il segno d'inuguaglianza se la serie è speciale. — Ora una superficie razionale d'ordine n (semplice o multipla), la quale sia *normale*, è appunto rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve che non sta in uno dello stesso ordine e grado e di maggior dimensione (n.° 26), e che per conseguenza è determinato dai punti base (*). In conseguenza potremo dire che *una superficie razionale normale ha per sezioni iperplanari delle curve normali.* Se n è l'ordine e p il genere di queste curve, la superficie appartiene ad S_{n-p+1} od a spazi superiori secondo che le curve non sono ovvero sono speciali. Ecc. (**).

§ 19. Il teorema Riemann-Roch.

80. Ritornando al § 17 ed al lemma (n.° 71) che ivi avevamo stabilito e cominciato ad applicare, noi possiamo dedurne per le serie lineari *speciali* una proprietà caratteristica che dà ragione del loro nome.

Applichiamolo in fatti al caso di una serie lineare g_n^r sopra la curva canonica (n.° 75), d'ordine $2p-2$ appartenente ad S_{p-1}: esso ci dice che *i gruppi di quella serie stanno in spazi di dimensione* $\leqq n - r - 1$. Ora poichè quei gruppi stanno in S_{p-1}, ciò non avrà alcun significato se $n - r \geqq p$. Ma se invece $n - r < p$, ad es. se la serie è speciale e completa, e se inoltre si

(*) Viceversa è facile vedere, in forza del n.° 26, che una superficie rappresentata da un tal sistema lineare è certo normale; perchè non può accadere che il sistema sia tale che, aggiungendogli una curva fissa, venga a stare entro un sistema lineare di maggior dimensione (ed ordine) ma dello stesso grado del primitivo.

(**) V. la mia Nota: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Rendic. del Circ. mat. di Palermo, tom. 1, 1887).

suppone $r > 0$, quel fatto costituirà una *particolarità* per i gruppi della serie; giacchè lo spazio determinato da n punti *qualunque* della curva è l' S_{p-1} se $n \geqq p$, se no un S_{n-1}: in ambi i casi uno spazio la cui dimensione *non* è nelle ipotesi attuali $\leqq n - r - 1$. Dunque *i gruppi di una serie lineare speciale infinita d'ordine n sono veramente speciali, nel senso che un gruppo qualunque di n punti dell'ente algebrico* NON *sta in generale in una tal serie* (*).

Di un gruppo di n punti che debba far parte di una g_n^r speciale completa si potranno prendere ad arbitrio sull'ente *al più* $n - r$ punti; giacchè sulla curva canonica i rimanenti r punti dovranno stare sull' S_{n-r-1} che congiunge quegli $n - r$.

81. La proprietà dei gruppi di una g_n^r sopra la curva canonica di stare in spazi di dimensione $\leqq n - r - 1$ si può anche enunciare dicendo che per essi passano $\infty^{r'}$ iperpiani S_{p-2}, ove $r' \geqq p - 1 - (n - r)$, ossia:

$$r' \geqq p - 1 - n + r, \tag{1}$$

mentre per un gruppo generico di n punti ne passerebbero ∞^{p-1-n}. S'intende che quest'esponente, od anche r', potrebb'essere negativo e così *svanirebbe* la corrispondente infinità. — Possiamo anche dire che ogni gruppo della g_n^r sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, od in $\infty^{r'}$ curve φ (sulla curva piana γ), valendo la relazione (1); ossia che esso impone *al più* $n - r$ condizioni (invece di n) agl'iperpiani di S_{p-1}, o ai gruppi canonici, o alle φ, che lo debbano contenere. Tali gruppi canonici, o φ, ecc., esisteranno certo, vale a dire sarà per la (1) $r' \geqq 0$, nel caso che $n - r < p$, ad es. nel caso delle serie speciali complete.

82. Il risultato ottenuto si può precisare meglio. Per stabilirlo avevamo fatto uso del lemma del n.° 71, ossia, in ultima analisi, di una formola del § 13. Lo completeremo ricorrendo al § 14: appunto come per il *Restsatz* (n.° 78) avevamo adoperato elementi di quei due paragrafi.

Fissiamo come ipotesi che la serie lineare g_n^r dei n.i prec.i sia completa, cioè che r significhi la dimensione della serie *completa* determinata da un gruppo G_n di n punti; ed inoltre che essa sia *speciale,* sicchè $n - r < p$. *Esisteranno* allora (n.° prec.) $\infty^{r'}$ resti $G_{n'}$ di G_n rispetto alla serie canonica e formeranno (n.° 56) una serie *completa* $g_{n'}^{r'}$; ove han luogo la (1) e

$$n + n' = 2p - 2. \tag{2}$$

(*) Così la serie lineare *completa* determinata da un gruppo di n punti presi in modo generico, se $n > p$ sarà una g_n^{n-p} (non speciale), se $n \leqq p$ sarà la g_n^0 che si riduce a quel solo gruppo.

Ma, per le relazioni esistenti fra le due serie complete g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ residue rispetto alla serie canonica (n.° 58), ogni gruppo $G_{n'}$ della seconda starà su ∞^r gruppi canonici, e quindi applicando alla $g_{n'}^{r'}$ la (1) si avrà:

$$r \geqq p - 1 - n' + r'. \tag{1'}$$

Sommando queste due formole (1) e (1'), e tenendo conto della (2), si vede che in quelle varrà il segno $=$. Restano dunque pienamente precisate le cose precedenti col seguente teorema, al quale secondo l'uso (v. n.° seg.) daremo il nome di *teorema* Riemann-Roch:

Se un gruppo G_n determina una serie completa di dimensione r e sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici (o curve φ) si ha:

$$r' = p - n + r - 1, \tag{3}$$

sicchè G_n starà certo in gruppi canonici ($r' \geqq 0$) se è speciale (cioè $n - r \leqq p - 1$), e viceversa (*). *In altri termini G_n impone precisamente $n - r$ condizioni (anzi che n) ai gruppi canonici (od alle φ) che vengano obbligati a contenerlo* (**).

Possiamo anche enunciarlo sotto quest'altra forma (dovuta ai sig.[i] Brill e Noether, ed alla quale il sig. Klein dà il nome di *teorema di reciprocità*): *se due gruppi risp. di n ed n' punti formano, presi insieme, un gruppo canonico, sicchè:*

$$n + n' = 2p - 2, \tag{2}$$

e se le serie complete d'ordini n, n' da essi determinate (serie residue rispetto alla serie canonica) hanno le dimensioni r, r', avrà luogo la relazione (3), *oppure:*

$$n - n' = 2(r - r'), \tag{4}$$

che si trae dalla (3) raddoppiandola e sottraendone la (2).

83. Si può porre il teorema Riemann-Roch sotto un'altra forma, più analitica, che ci dà ragione del suo nome. Proponiamoci cioè di cercare il nu-

(*) Invece di dire che G_n sta in $\infty^{r'}$ gruppi canonici, o φ, si dica che *sta in* $(r' + 1)$ *gruppi canonici*, o φ, *linearmente indipendenti*. Allora il caso che *non* stia in tali gruppi corrisponderà ad $(r' + 1) = 0$, $r' = -1$; ed anche allora varrà la (3) poichè essendo la g_n^r completa non speciale è $r = n - p$.

(**) Ad esempio se una coppia di punti impone *una* sola condizione ai gruppi canonici, essa determina una g_2^1, e quindi l'ente è *iperellittico:* in altri termini se la curva canonica ha un punto doppio essa è una curva doppia.

mero delle costanti da cui dipende una funzione razionale dell'ente algebrico la quale debba avere tutti i suoi infiniti (semplici) *fra* i punti di un dato gruppo G_n. Se la serie lineare completa g_n^r determinata da questo gruppo si può staccare dall'ente mediante l'equazione:

$$\lambda_0 \psi_0(x) + \lambda_1 \psi_1(x) + \cdots + \lambda_r \psi_r(x) = 0, \tag{5}$$

ed in particolare il gruppo G_n è dato da

$$\psi_0(x) = 0, \tag{6}$$

la detta funzione razionale dell'ente si avrà (n.° 30) dividendo una forma generica (5) per la (6), cioè sarà:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + \cdots + \lambda_r \frac{\psi_r(x)}{\psi_0(x)};$$

cosicchè conterrà linearmente $r+1$ costanti arbitrarie $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. In conseguenza il risultato del n.° preced. si potrà enunciare così:

Le funzioni razionali dell'ente algebrico di genere p, i cui infiniti (semplici) sono fra gli n punti di un dato gruppo, dipendono linearmente da $n-p+2+r'$ costanti, se per quel gruppo passano $\infty^{r'}$ gruppi canonici (od iperpiani di S_{p-1}; o se in esso s'annullano $r'+1$ funzioni φ, o differenziali di 1.ª specie, linearmente indipendenti).

Nel n.° 5 della *Theorie der Abel'schen Functionen* il Riemann pel caso di $n > p$ ottiene in generale (dalla rappresentazione delle funzioni razionali dell'ente mediante integrali di 2.ª specie) che quelle funzioni razionali dipendono da $n-p+1$ costanti (il che corrisponde all'ipotesi che per gli n punti non passi alcuna φ, ossia $r'+1=0$), ed inizia il calcolo per $n \leqq p$. Questo calcolo, con l'introduzione delle φ che passano pei dati punti, fu poi fatto completamente dal Roch (*); il quale così ottenne la proposizione generale ora esposta. Ciò spiega la denominazione di *teorema* Riemann-Roch (n.° 82) introdotta per iniziativa dei sig.ⁱ Brill e Noether. Non è però inutile rilevare in pari tempo che il Roch, invece di parlare di funzioni razionali i cui infiniti *sono fra* i punti di G_n, dice che gl'infiniti *sono* i punti di G_n: il che costituisce un'inesattezza, poichè se la g_n^r completa determinata da G_n (e quindi ogni g_n^1 contenente G_n) avesse qualche punto fisso non esisterebbero funzioni razionali aventi n soli infiniti risp. nei punti di G_n; le funzioni razionali i cui

(*) *Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen* (Journal für Math., tom. 64, 1864).

infiniti sono *fra* i punti di G_n sarebbero tutte quante *finite* (n.° 30) in quei punti che son fissi per la g_n^r (cfr. il n.° 87).

84. Il teorema Riemann-Roch abbraccia tutte quante le proprietà viste precedentemente (§ 17) delle serie speciali, e permette di precisar meglio qualcuna di esse. Così dal fatto (v. la fine del n.° 80) che di un gruppo G_n che debba far parte di una g_n^r speciale si posson prendere ad arbitrio sull'ente *non più* di $n-r$ punti, mentre quando la g_n^r è data si posson prendere ad arbitrio r punti per determinare un suo gruppo, si trae che $r \leqq n-r$, ossia

$$n \geqq 2r:$$

cioè la proposizione del n.° 72, dalla quale poi nei n.i 73 e 74 abbiam dedotto varie conseguenze.

Osserviamo inoltre, appunto in relazione colla fine del n.° 80, che se per avere un gruppo G_n che determini una g_n^r speciale completa ed infinita si posson prendere ad arbitrio *precisamente* $n-r$ punti della curva canonica C, deve lo spazio S_{n-r-1} che congiunge $n-r$ punti qualunque di C incontrare ulteriormente questa curva in r punti. Ora si vede facilmente che se C è curva *semplice*, cioè (v. la fine del n.° 75) se l'ente non è iperellittico, la cosa non è possibile se non quando quello spazio sia un iperpiano (*), cioè:

$$n-r=p-1.$$

In tal caso la (3) ci dà $r'=0$; sicchè i gruppi G_n saranno i resti rispetto alla serie canonica di $n'=2p-2-n$ punti indipendenti rispetto a questa, cioè formanti una g_n^0 completa. Dunque: tolto il caso che l'ente sia iperellittico; e tolto il caso delle g_n^r complete che son residue rispetto alla serie canonica di un numero qualunque di punti indipendenti rispetto a questa, supposto cioè:

$$n-r<p-1,$$

saranno *meno* di $n-r$ i punti dell'ente che si posson assumere ad arbitrio per formare un gruppo di una g_n^r speciale completa (**). Con tali restrizioni

(*) V. il principio della Memoria del sig. Del Pezzo, *Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni* (Rendic. della R. Accad. di Napoli, 1886); non che il n.° 2 della Nota del sig. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc., citata alla fine del n.° 59 (ed il ragionamento del sig. Castelnuovo riferito in quella Nota).

(**) V. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Abhandl. d. k. Akad. zu Berlin, 1882), teor. III'.

sarà dunque $r < n - r$ ossia

$$n > 2r.$$

In questo modo viene ulteriormente precisato il cit. n.° 72. Il segno d'uguaglianza, cioè la

$$n = 2r$$

potrà valere solo, oltre che nel caso iperellittico (n.° 69), per g_n^r le quali diano

$$n - r \geqq p - 1,$$

donde (combinando con quella) $r \geqq p - 1$; e quindi per nessun'altra serie *speciale* che la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}.

§ 20. Alcune applicazioni note.

85. Un'ovvia applicazione del teorema Riemann-Roch serve per rispondere alla questione se una curva piana γ di genere p e d'ordine n sia projezione di una curva dello stesso ordine appartenente allo spazio ordinario o ad uno spazio superiore (*). Ciò equivale a dire (v. n.° 26) che la g_n^2 staccata su γ dalle rette del suo piano è contenuta in una g_n^r con $r > 2$. La cosa si decide subito se la curva, ossia la g_n^2, *non è speciale*: γ avrà per spazio normale S_{n-p}. In caso contrario, ad esempio se $n < p + 2$, si esprimerà che la serie *completa* contenente la g_n^2, cioè contenente un gruppo di questa, è di dimensione r, dicendo (teorema Riemann-Roch) che quel gruppo sta in $\infty^{p-n+r-1}$ curve φ, cioè aggiunte d'ordine $n - 3$ di γ. Ora siccome quel gruppo si compone di n punti in linea retta, le aggiunte d'ordine $n - 3$ che lo contengono saranno quelle che si spezzano nella retta stessa ed in aggiunte d'ordine $n - 4$. Sicchè quel fatto si esprimerà dicendo che γ ammette $\infty^{p-n+r-1}$ curve aggiunte d'ordine $n - 4$. Se si contano come *distinte* le condizioni che i punti multipli di γ impongono alle aggiunte d'ordine $n - 4$ si trova (n.° 61) che queste curve sono ∞^{p-n+1}: l'essere invece $\infty^{p-n+r-1}$ significa che $r - 2$ di quelle condizioni sono conseguenza delle rimanenti. Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perchè una curva piana di genere p e d'ordine n, la quale sia speciale (ad esempio tale che* $n < p + 2$), *sia projezione di una*

(*) Per lo spazio ordinario veggasi ad es. Noether, loc. cit., § 3; per uno spazio qualunque il § 4 della Nota del sig. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi*, ecc.

curva normale dello stesso ordine di S_r è che precisamente $r-2$ fra le condizioni che i passaggi pei suoi punti multipli impongono alle sue curve aggiunte d'ordine $n-4$ siano conseguenza delle rimanenti (*). (Cfr. la fine del n.° 76.)

Con ciò si ha pure un modo per riconoscere se una data curva di uno spazio qualunque S_k sia projezione di una curva dello stesso ordine di uno spazio superiore S_r. Basterà applicare il teorema precedente alla curva γ d'ordine n projezione della curva data da un S_{k-3} sopra un piano; oppure applicarlo a dirittura alla data parlando (anzi che di curve aggiunte a γ) di *coni aggiunti* d'ordine $n-4$ uscenti da un S_{k-3}, e (anzi che di punti s-pli di γ) di spazi S_{k-2} s-secanti della curva data uscenti pure dall' S_{k-3}, ecc. —

Si osservi anche come si possan subito trasportare con la legge di dualità le considerazioni precedenti. Così il fatto che una curva piana di genere p e d'ordine $n > p+2$ è sempre projezione di una curva sghemba dello stesso ordine dà, per dualità (nello spazio ordinario, sostituendo prima alla curva piana il cono projettante), quest'altro: *una curva piana di genere p e di classe $n' > p+2$ sta sempre su una superficie sviluppabile, non conica, della stessa classe.* Ecc.

86. La questione trattata nel n.° prec. conduce naturalmente a pensare quest'altra: se una curva d'ordine n (di uno spazio qualunque) sia projezione di una curva d'ordine $n+1$, $n+2$,... da uno spazio che ne contenga 1, 2,... punti. Basterà che ci limitiamo a vedere se una curva C d'ordine n di S_r sia projezione di un'altra C' d'ordine $n+1$ di S_{r+1} da un punto P' di C'. Indicando con P la traccia su C della retta tangente in P' a C', ciò equivale a vedere se la serie lineare g_n^r che è segata su C dagli S_{r-1} del suo spazio S_r, quando ai suoi gruppi si aggiunga il punto fisso P, dia origine ad una g_{n+1}^r *parziale* (perchè projezione della g_{n+1}^r che su C' è segata dagl'iperpiani passanti per P', la quale è contenuta nella g_{n+1}^{r+1} segata da *tutti* gl'iperpiani), oppure *completa*.

Domandiamo dunque se aggiungendo ai gruppi di una g_n^r sopra un ente di genere p un punto fisso P si può ottenere una g_{n+1}^r *completa.* Perchè ciò accada occorre anzitutto, evidentemente, che già la g_n^r sia completa. Inoltre

(*) Si noti che l'esistenza di curve aggiunte d'ordine $n-4$ trae già di conseguenza che la curva è speciale (perchè i suoi gruppi di n punti in linea retta staranno su aggiunte d'ordine $n-3$). — Il teorema esposto si può completare considerando anche le curve aggiunte d'ordine $< n-4$: v. i lavori citati.

questa serie dev' essere speciale, altrimenti sarebbe $n - r = p$, e quindi $(n+1) - r > p$, sicchè (n.° 65) la g^r_{n+1} *non* sarebbe certo completa. Supposto che sian soddisfatte quelle due condizioni, cioè che la g^r_n sia speciale e completa, un suo gruppo G_n imporrà, pel teorema RIEMANN-ROCH, $n - r$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo; e per esprimere che anche la g^r_{n+1} è completa si dovrà similmente dire che il suo gruppo costituito da G_n con P impone ai gruppi canonici $(n+1) - r$ condizioni, cioè una condizione di più: vale a dire che non tutti i gruppi canonici passanti per G_n passano anche per P. Dunque *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie completa d'ordine $n+1$ che contiene un dato gruppo di $n+1$ punti abbia un punto P (di questo gruppo) per punto fisso è che i rimanenti n punti del gruppo stiano in gruppi canonici (uno almeno) nei quali non stia P.* Questa proposizione è dovuta al sig. NOETHER (*), che le dà il nome di *teorema di riduzione (Reductionssatz).*

Ed ora, in base ad essa, possiamo rispondere così alla domanda postaci da principio. *Una curva di genere p e d'ordine n* NON *è projezione di una curva d'ordine $n+1$ di uno spazio superiore solo quando essa è speciale e tale che i gruppi canonici passanti per gli n punti in cui essa è segata da un dato iperpiano non abbiano altri punti comuni.* — Ad esempio una curva piana d'ordine n è projezione di una curva sghemba d'ordine $n+1$ da un punto di questa solo quando essa non è speciale, cioè non ammette delle curve aggiunte d'ordine $n-4$; e quando, essendo speciale, queste curve aggiunte hanno sulla data curva (fuori dei punti multipli) dei punti fissi comuni (ognun dei quali si potrà poi assumere come traccia della tangente alla curva sghemba nel centro di projezione).

87. Il *teorema di riduzione* si può (col sig. NOETHER, loc. cit.) enunciare sotto forma più analitica così: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni razionali di un ente algebrico i cui infiniti (semplici) sono fra $n+1$ punti dati siano tutte finite in uno, P, di questi, è che esista almeno un gruppo canonico (una φ) che contenga i rimanenti n punti ma non P.* (Cfr. la fine del n.° 83.)

(*) V. il n.° 3 della Nota *Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn* WEIERSTRASS (Journal für Math., tom. 97, 1884); cfr. anche Math. Ann., tom. 37, pag. 424. — Questo teorema di riduzione si può pure, seguendo il sig. NOETHER, mettere al principio (dopo il teorema del resto) di una trattazione algebrico-geometrica delle serie lineari: veggasi la Memoria del sig. BERTINI pubblicata con questa.

Da esso si trae facilmente, seguendo il sig. NOETHER (*), un elegante teorema del WEIERSTRASS, anzi una generalizzazione di esso. Abbiansi sull'ente algebrico n punti *qualunque*, in tal numero però che per essi non passi alcun gruppo canonico (alcuna φ): li ordineremo convenientemente, e chiamandoli $P_1\, P_2 \ldots P_n$ considereremo i gruppi di punti che si ottengono da

$$G_m = (P_1\, P_2 \ldots P_m),$$

ponendo $m = 1, 2, \ldots, n$, e li assumeremo come gruppi dei punti infiniti di funzioni razionali dell'ente: ossia considereremo delle g_m^1 contenenti quei gruppi G_m. Anzitutto prendiamo tanti degli n punti dati da avere un gruppo $G_{\mu+1} = (P_1\, P_2 \ldots P_{\mu+1})$ il quale determini una serie completa, priva di punti fissi, e di dimensione 1: sicchè i gruppi minori G_m per $m = 1, 2, \ldots, \mu$ *non* staranno in serie g_m^1. Pel teorema di riduzione i punti $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ imporranno μ condizioni distinte ai gruppi canonici obbligati a contenerli; e questi gruppi passeranno tutti per $P_{\mu+1}$. Se fra gli n punti dati ve ne sono ancora altri pei quali passino tutti quei gruppi, indichiamoli con $P_{\mu+2}, P_{\mu+3}, \ldots P_{\mu_1-1}$ e poi indichiamo con P_{μ_1} un nuovo punto (degli n). La serie completa determinata da $G_{\mu+2}$ *non* avrà (pel teorema di riduzione) il punto $P_{\mu+2}$ come punto fisso, e quindi sarà ∞^2 (perchè deve contenere la $g_{\mu+2}^1$ che si ha aggiungendo $P_{\mu+2}$ ai gruppi della $g_{\mu+1}^1$ determinata da $G_{\mu+1}$) e non avrà nemmeno punti fissi nei punti precedenti (perchè non ne ha la $g_{\mu+1}^1$ nominata). Similmente non avranno punti fissi le serie determinate da $G_{\mu+3}, \ldots, G_{\mu_1-1}$. Invece la serie completa determinata da G_{μ_1} avrà P_{μ_1} per punto fisso. Ai gruppi canonici che li devon contenere i punti $P_1 \ldots P_{\mu_1}$ impongono $\mu + 1$ condizioni distinte. Se quei gruppi passano ancora per altri punti degli n dati li indicheremo con $P_{\mu_1+1}, P_{\mu_1+2}, \ldots P_{\mu_2-1}$; e con P_{μ_2} indicheremo un nuovo punto. La serie completa determinata da G_{μ_1+1} non avrà per punti fissi nè P_{μ_1} nè P_{μ_1+1}, perchè ogni gruppo canonico che passa per G_{μ_1-1} e per uno di questi due punti passa pure per l'altro; nè ha punti fissi nei punti di G_{μ_1-1}, perchè non ne ha la serie determinata da questo gruppo. Similmente non hanno punti fissi le serie complete determinate da $G_{\mu_1+2}, \ldots, G_{\mu_2-1}$; mentre quella determinata da G_{μ_2} avrà P_{μ_2} per punto fisso. Ed ora si continui, considerando i gruppi canonici passanti per G_{μ_2} — ai quali gruppi canonici sono con ciò imposte $\mu + 2$ condizioni distinte —, e quei nuovi punti fra gli n dati che son comuni ad essi; ecc. Si arriverà fino ad aver un gruppo G_{μ_i} che imporrà

(*) Nota citata (Journal für Math., tom. 97).

$p-1$ condizioni distinte ai gruppi canonici, vale a dire che starà in un solo gruppo canonico: sarà evidentemente $l=p-\mu-1$. S'indicheranno allora con $P_{\mu_l+1},\ldots, P_{\mu_{l+1}-1}$ i nuovi punti fra gli n dati, che stanno in quel gruppo canonico; e finalmente con $P_{\mu_{l+1}},\ldots, P_n$ i rimanenti.

Allora fra i gruppi di punti G_m i soli che determinino serie complete dotate di punti fissi saranno quelli che corrispondono ai valori seguenti di m:

$$1,\ 2,\ldots,\ \mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_{l+1},$$

(ognun dei quali imponeva ai gruppi canonici una nuova condizione, rispetto al gruppo precedente), i quali complessivamente sono in numero di p. Possiamo esprimer ciò in altro modo dicendo che: *tra le funzioni razionali dell'ente che sono infinite risp. nei soli punti dei vari gruppi* G_m $(m=1,\ 2,\ldots)$ *mancano solo quelle corrispondenti a* p *valori di* m.

È questa la proposizione con cui il sig. NOETHER generalizza un teorema del WEIERSTRASS. Questo (che nelle Lezioni del sommo analista si trova distinto col nome di *Lückensatz*) si deduce supponendo che gli n punti considerati coincidano: *Tra le funzioni razionali dell'ente i cui infiniti coincidono tutti (e siano m) in un dato punto* (*) *mancano solo quelle che corrispondono a p distinti valori del grado m, ossia dell'ordine d'infinità di quel punto.* In altri termini se si considerano le serie lineari complete d'ordine m che hanno un dato punto P come m-plo, i valori di m che corrispondono a serie per cui P è punto fisso sono sempre in numero di p. — Rappresentando l'ente di genere $p>1$ con la curva canonica C di S_{p-1}, mancheranno le funzioni razionali di grado m che sono infinite solo in P, vale a dire la g_m completa determinata dal punto m-plo P avrà questo punto come punto fisso, se (pel teorema di riduzione) esistono iperpiani che in P incontrino $m-1$ volte, e non m volte la curva C. Ciò accade in un punto *generico* di C pei valori (**)

$$m=1,\ 2,\ldots,\ p;$$

in un ordinario punto d'iperosculazione (di contatto con iperpiani stazionari) per

$$m=1,\ 2,\ldots,\ p-1,\ p+1;$$

ed in generale in un punto singolare qualsiasi di C (v. n.° 43), il quale sia

(*) Cotali funzioni hanno un'importanza particolare in quelle Lezioni.

(**) Su questo cfr. anche NOETHER: *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Journal für Math., tom. 92, 1882).

multiplo secondo i ($\geqq 1$) per la curva (*) e conti $i_1, i_2, \ldots, i_{p-2}$ volte come punto comune a questa ed alla retta tangente, al piano osculatore,..., all'iperpiano osculatore, per

$$m = 1, \quad i+1, \quad i_1+1, \quad i_2+1, \ldots, \quad i_{p-2}+1 \text{ (**)}.$$

§ 21. Sulle corrispondenze univoche e sui moduli di un ente algebrico.

88. La determinazione delle serie lineari esistenti sopra un dato ente algebrico si fa in modo noto, basandosi sulle proprietà fondamentali stabilite nei paragrafi preced., specialmente sul teorema Riemann-Roch: possiamo limitarci a rimandare per essa alla Memoria Brill-Noether (***). —

Vogliamo invece fare ancora un cenno sulla questione della possibilità di riferire biunivocamente fra loro due enti algebrici di genere p: il che ci condurrà in pari tempo al numero dei *moduli*, ed alla determinazione degli enti algebrici con infinite trasformazioni biunivoche in sè.

Se $p = 0$, cioè se gli enti son *razionali*, esistono sempre ∞^3 corrispondenze biunivoche fra essi: le corrispondenze bilineari. Non vi son moduli.

Se $p = 1$, cioè se gli enti sono *ellittici*, vi è (n.° 68) *un* modulo; e vi sono ∞^1 corrispondenze biunivoche fra i punti di un ente, ossia fra quelli di due enti che abbian lo stesso modulo. —

In quei due casi di $p = 0$ e $p = 1$ ogni punto dell'ente si può, con una trasformazione biunivoca di questo, mutare in ogni altro; non vi sono sull'ente punti *particolari* (dal punto di vista della geometria sull'ente). Quando invece si abbia $p > 1$ vi saranno sull'ente dei punti particolari, a cui potremo

---

(*) Tolto il caso iperellittico si ha sempre $i = 1$: v. la 2ª nota al n.° 82.

(**) Su questi punti singolari dell'ente algebrico ed i valori di m nel *Lückensatz* è ritornato recentemente il sig. Hurwitz nella Memoria citata al n.° 43 (Math. Ann., tom. 41, 1892). Nel numero complessivo dei punti d'iperosculazione della curva canonica quale risulta dal n.° 42 egli determina l'influenza di un punto singolare qualunque (v. n.° 43); e giunge al notevole risultato che i punti singolari *distinti* sono sempre in numero $> 2p+2$, tolto il caso iperellittico nel quale sono appunto $2p+2$.

(***) Ed anche, per il numero delle serie minime (quando questo numero è finito), alla Nota del sig. Castelnuovo: *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere* (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, settembre 1889).

ricorrere per la nostra questione. Tali sono i punti p-pli della serie canonica, i quali sono in generale (n.° 42, per $n=2p-2$, $r=p-1$) in numero di $(p-1)p(p+1)$ (*). Per un punto siffatto P indichiamo con m il minimo numero tale che esista una g^1_m di cui P sia punto m-plo: la g^1_m non avrà punti fissi e sarà *unica,* perchè se vi fosse una g^2_m avente P per punto m-plo, il resto di P rispetto ad essa sarebbe una g^1_{m-1} avente P per $(m-1)$-plo. Sarà $m \leqq p$; m sarà il primo dei gradi *non* mancanti di funzioni razionali infinite nel solo punto P, del *Lückensatz* del Weierstrass (v. la fine del n.° 87). — Ciò posto la g^1_m che si sarà in tal modo determinata avrà in tutto $2(m+p-1)$ elementi di diramazione o punti doppi. Di questi possono coincidere in uno stesso punto al più $m-1$ (n.° 36): così appunto accade pel punto m-plo P. Ma siccome $m \leqq p$ sarà $2(m+p-1) > 4(m-1)$, e quindi la g^1_m avrà più di 4 elementi di diramazione *distinti.* Ora se fra due enti γ, γ' vi è una corrispondenza biunivoca, al punto particolare P di γ dovrà corrispondere uno degli analoghi punti (in numero finito), P', di γ', alla g^1_m determinata da P la g^1_m determinata da P': e la corrispondenza biunivoca fra queste due g^1_m dovrà far corrispondere agli elementi di diramazione dell'una quelli dell'altra. Essendo *più di* 2 questi elementi distinti in ogni g^1_m, le corrispondenze siffatte, possibili fra queste, (corrispondenze projettive o bilineari), saranno in numero finito. Fissata poi una corrispondenza fra le due g^1_m le corrispondenze biunivoche possibili fra γ e γ' che dànno origine a quella saranno pure in numero finito: anzi non ve ne potrà essere più di una, quando per quelle coppie di gruppi di diramazione omologhi che contengono più punti doppi si sia fissata anche la corrispondenza tra questi (**). Concludiamo dunque che: *fra due enti di genere* $p>1$, *o sopra un*

(*) Il ragionamento che segue si può riferire alle curve canoniche del genere p. Allora le corrispondenze biunivoche di cui si parla diventano (n.° 75) *collineazioni.*

(**) Ciò si può dimostrare geometricamente, riducendosi a provare che *una corrispondenza biunivoca fra i punti di* γ *la quale abbia per punti uniti tutti i* $2\ (m+p-1)$ *punti doppi di una* g^1_m $(m>2)$ *è un'identità.* Ed invero *una corrispondenza biunivoca non identica fra i punti di un ente del genere* p *non può avere più di* $2p+2$ *punti uniti:* giacchè determina fra i gruppi di una g^1_{p+1} (che non sia trasformata in sè stessa dalla corrispondenza), quando si considerino come omologhi due gruppi che contengano 2 punti omologhi, una corrispondenza $(p+1,\ p+1)$ la quale avrà $2p+2$ elementi uniti.

Quest'ultima proposizione si trova al principio del lavoro del sig. Hurwitz (Math. Ann., tom. 41) citato in nota al n.° 87: da essa e dall'altro risultato ivi ricordato sul numero dei punti singolari *distinti* dell'ente algebrico l'A. trae una nuova dimostrazione del fatto che il numero delle corrispondenze biunivoche fra i punti dell'ente è finito.

ente di tal genere, non vi può essere che un numero finito di corrispondenze biunivoche (*).

Di qui segue poi che sopra un ente di genere $p > 1$ una corrispondenza biunivoca è sempre *periodica* (**), ecc.

89. Dal ragionamento precedente si trae anche subito il numero dei moduli. In generale dei $2(m+p-1)$ elementi di diramazione della g_m^1 di γ ve ne saranno $m-1$ coincidenti in quello che contiene il punto P e poi altri $m+2p-1$: in tutto $2p+m$ elementi distinti; e quindi $2p+m-3$ birapporti. Per tutti gli enti equivalenti (per trasformazioni birazionali) a γ questi birapporti avranno gli stessi valori (sebbene non siano individuati questi valori, non essendo il punto P su γ *individuato,* ma solo *determinato* in un numero finito di modi). Viceversa dati questi birapporti, comunque, un *teorema d'esistenza per le funzioni algebriche,* del RIEMANN (***) ci assicura che esistono degli

(*) Come si sa, è dovuto al sig. SCHWARZ il teorema che un ente di genere $p > 1$ non può ammettere un'infinità *continua* (analitica) di corrispondenze birazionali: v. *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler, eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen* (Journal für Math., tom. 87, 1879). Che ciò valga anche per un'infinità qualunque, *discontinua,* sembra esser stato dimostrato per la prima volta dal sig. KLEIN in una lettera del 1882 al sig. POINCARÉ (v. pag. 16 della Nota di quest'ultimo: *Sur un théorème de* M. FUCHS, Acta math., tom. 7, 1884). Del resto la seconda delle due Note (Math. Ann., tom.[i] 20 e 21, 1882-83) che il sig. NOETHER ha dedicato al teorema del sig. SCHWARZ contiene una dimostrazione che si può estendere al caso di un'infinità discontinua di corrispondenze: ed è appunto quella dimostrazione opportunamente modificata che sopra si è esposta.

Nuovi importanti risultati sulle corrispondenze biunivoche che possono esistere sopra un ente algebrico si trovano poi nel lavoro del sig. HURWITZ: *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (Gött. Nachr., 1887, Math. Ann., tom. 32), e nell'altro più recente (Math. Ann., tom. 41) già citato.

(**) Cfr. i citati lavori del sig. HURWITZ. V. anche una mia Nota (Rend. del R. Ist. Lomb., 1888) citata nella prefazione, per la convenienza di rappresentare l'ente mediante la curva canonica, e quindi le corrispondenze biunivoche sull'ente mediante collineazioni (cicliche) che mutano in sè questa curva (ad es. pel caso delle corrispondenze *involutorie,* cioè degli enti che considereremo al n.° 90).

(***) *Th. d. Abel'sche Funct.,* n.[i] 3 e 5: il teorema consiste in questo, che si posson fissare *ad arbitrio* i $2(m+p-1)$ punti di diramazione della superficie ad m fogli distesa sul piano xy per determinare un sistema di funzioni algebriche di $x+iy$ diramate come questa superficie; e questo sistema risulta bene individuato quando si sia fissato per ciascun punto di diramazione quali sono i fogli che esso congiunge. Cfr. anche la determinazione del numero dei moduli, fatta nel n.° 12 di quella Memoria.

Non sembra che finora si sia riusciti a stabilire per via geometrica, od algebrica, il enti di genere p contenenti una g^1_m con un elemento di diramazione $(m-1)$-plo e $2p+m-1$ elementi di diramazione semplici, i quali abbiano precisamente quei dati birapporti: e ci dice anzi che quegli enti costituiscono un numero finito di *classi* di enti equivalenti (per trasformazioni birazionali). Dunque quei birapporti, nel senso spiegato, si posson riguardare come moduli dell'ente algebrico: *i moduli sono* $2p+m-3$. Se l'ente è *generale* di genere $p>1$, sarà $m=p$ (P sarà un punto p-plo della serie canonica) e quindi *i moduli dell'ente generale di genere* $p>1$ *sono* $3p-3$. Se l'ente è iperellittico, P sarà un punto doppio della g^1_2; si avrà $m=2$, ed il numero dei moduli si ridurrà a $2p-1$ come al n.° 67.

90. Possiamo determinare il numero dei moduli in un altro caso, che pure abbraccia il caso iperellittico: quello di un *ente del genere p che contenga una ed una sola involuzione di 2.° grado del genere* π, vale a dire di un ente che equivalga ad una curva di genere p tracciata sopra una rigata del genere π in guisa da incontrarne due volte le generatrici (e da esser semplice per la rigata): come la curva d'intersezione della rigata con una quadrica. Dal n.° 22 (nota) segue (salva la restrizione ivi indicata) che i moduli di un ente così fatto saranno i moduli dell'ente di genere π costituito dall'involuzione di 2.° grado, più i moduli od invarianti per trasformazioni birazionali che su quest'ente hanno gli elementi di diramazione dell'involuzione, i quali sono (n.° 40) in numero di $2(p-2\pi+1)$. È chiaro che ognuno di questi elementi ha un modulo: tolti i casi di $\pi=0$, 1, nei quali corrispondentemente alle ∞^3, ∞^1 trasformazioni biunivoche ammesse dall'ente di genere π si diminuisce di 3 o di 1 unità il numero complessivo $2(p-2\pi+1)$ dei moduli di quegli elementi. Ma in quei casi aumenta risp. di 3 o di 1 il numero dei moduli di quell'ente, che per $\pi>1$ sarebbe $3\pi-3$. Dunque in tutti i casi *il numero dei moduli dell'ente di genere p considerato* sarà:

$$(3\pi-3)+2(p-2\pi+1)=2p-\pi-1.$$

Quest'espressione, tanto minore quanto maggiore è π, fa vedere che per un ente di genere p il contenere un'involuzione di 2.° grado costituisce una particolarità tanto maggiore quanto più grande è il genere di tale involuzione.

---

teorema di Riemann relativo al numero dei moduli, in modo pienamente soddisfacente. Nella Memoria Brill-Noether esso è dimostrato in vari modi (l'uno dei quali adopera appunto, come sopra si fa, una g^1_p con punto p-plo): i quali però presuppongono tutti, in sostanza, il suddetto teorema d'esistenza (o qualcosa di equivalente) per completare i conti di costanti con cui si stabilisce l'esistenza di certe curve (ad es. di curve per cui si sono assegnati *ad arbitrio* i birapporti degli elementi di diramazione di una g^1_m, ecc.).

§ 22. Sulle rigate algebriche.

91. Termineremo questo lavoro con qualche applicazione alle rigate e varietà costituite da ∞^1 spazi (*).

Nel § 13 abbiamo ottenuto, per una varietà M_{k+1} d'ordine ν luogo di una ∞^1 del genere π di spazi S_k, ognun dei quali contenga $k+1$ punti di una curva d'ordine n e genere p, la formola (n.° 52):

$$n-p=\nu-(k+1)\pi+k+z; \tag{1}$$

e questa (per $\pi=0$) è poi stata fondamentale in questo 3.° Cap. per ottenere le proprietà essenziali delle serie lineari speciali sopra la curva di genere p. Ora da essa possiamo inversamente, valendoci di queste proprietà, dedurre risultati importanti per la varietà M_{k+1}.

Si osservi in fatti che, data ad arbitrio in S_r la varietà M_{k+1}, si posson sempre tracciare su essa infinite curve γ ognuna delle quali incontri gli S_k generatori della M_{k+1} in $k+1$ punti, per modo che sempre, senz'eccezione, il gruppo di $k+1$ punti di ogni S_k si componga di punti linearmente indipendenti, cioè non situati in uno spazio minore, sicchè, pel significato di z nella formola (1) applicata ad una tal curva,

$$z=0.$$

Si ottiene, ad esempio, una tal curva segando la M_{k+1} con un cono M_{r-k} projettante da un S_{r-k-2} (che non incontri la M_{k+1}) una curva razionale normale d'ordine $k+1$ (**): giacchè un tal cono è segato da un S_k generatore della M_{k+1} secondo $k+1$ punti, che si posson riguardare come situati su una curva razionale normale d'ordine $k+1$, e quindi non possono giacere in uno spazio inferiore. Ciò posto, se n è l'ordine e p il genere di una curva γ della detta specie, varrà la (1) con $z=0$. Se γ è projezione di una curva γ' dello stesso ordine n appartenente ad uno spazio superiore ad S_r, la M_{k+1} data sarà projezione di una M_{k+1} appartenente a questo spazio superiore, luogo degli S_k contenenti i gruppi di punti di γ' che han per projezioni i gruppi di $k+1$

(*) V. i miei lavori sulle rigate e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, citati nella prefazione.

(**) Se $r=k+1$, cioè se si tratta di una ∞^1 di spazi S_k in S_{k+1}, per la curva che si vuol costrurre si potrà a dirittura assumere una curva razionale normale d'ordine $k+1$

punti di γ posti negli spazi generatori della varietà data. L'ordine della nuova M_{k+1} sarà ancora ν: poichè in caso opposto dovrebbe qualcuno dei suoi S_k incontrare lo spazio centrale di projezione, donde deriverebbero su γ dei gruppi di $k+1$ posti in spazi inferiori ad S_k, il che è contrario all'ipotesi fatta su γ. Adunque la M_{k+1} data è o non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore secondo che la stessa proprietà ha o no una qualunque delle curve γ tracciate su essa nel modo detto. Applicando a queste curve un risultato del n.° 65, e tenendo conto della (1) avremo che: *Una varietà M_{k+1} luogo di una ∞^1 del genere π e d'ordine ν di spazi S_k ha per spazio normale uno di dimensione*

$$\nu-(k+1)\pi+k,$$

oppure maggiore: ciò a seconda che le dette curve γ tracciate su essa sono *non speciali* oppure *speciali.* Corrispondentemente a ciò si potrebbe chiamar *speciale* la varietà M_{k+1} nel 2.° caso.

Se $\pi=0$, visto che una M_{k+1}^{ν} non può appartenere ad uno spazio superiore di $S_{\nu+k}$, sarà precisamente questo lo spazio normale: cioè *le M_{k+1}^{ν} luoghi di una ∞^1 razionale di S_k son projezioni di quelle (dello stesso ordine) appartenenti ad $S_{\nu+k}$.* —

Si avverta che queste proposizioni valgono anche per le varietà ∞^1 di S_k contenute nello spazio S_{k+1}: ν indicherà allora la *classe* della varietà (come già si osservò al n.° 50) (*). — Ed anche si noti come applicando ad una curva γ della M_{k+1}, invece che il n.° 65, una proposizione del n.° 86, si

(*) In conseguenza, posto $k=1$, i risultati che nei miei lavori sulle rigate sono stabiliti mediante projezione delle rigate *normali* (v. specialmente, per quelli più generali relativi al genere p, il lavoro dei Math. Ann., tom. 34), in particolare le proposizioni sulle *direttrici* dei vari ordini (ad es. su quelle *d'ordine minimo*) di una rigata, valgono anche per le rigate *piane*, vale a dire per gl'inviluppi piani di rette; dànno cioè le varie curve (punteggiate) che con una data ∞^1 di rette del piano sono in corrispondenza biunivoca e *prospettiva*, ossia tale che ogni punto sta sulla retta omologa; e forniscono così le generazioni di una curva piana algebrica come inviluppo delle rette congiungenti i punti omologhi di due curve in corrispondenza biunivoca. — Similmente si può procedere per $k=2$, ed applicando metodi analoghi a quelli dei citati lavori sulle rigate si possono ottenere facilmente (*e sarebbe bene che fosse fatto*) dei risultati sulle curve (e rigate) direttrici di una varietà ∞^1 di piani, anche nel caso che questa stia nello spazio ordinario, vale a dire che si tratti dei piani di una sviluppabile ordinaria. Si avranno così le curve (e rigate) riferite prospettivamente ad una ∞^1 di piani, e quindi le generazioni di questa varietà mediante i piani congiungenti i punti omologhi di tre curve in corrispondenza unipossa riconoscere se la M_{k+1} sia projezione di varietà appartenenti a spazi superiori e di ordini *superiori:* il che può anche esser utile.

92. Limitiamoci ora al caso di $k=1$, cioè delle rigate. Avremo, come caso particolare, dal n.° prec., che *una rigata di genere p e d'ordine ν ha per spazio normale un $S_{\nu-2p+1}$, od uno spazio superiore.*

Poniamo che la rigata sia *piana,* cioè si riduca al sistema delle tangenti di una curva piana di genere p e *classe* ν. Avremo che se $\nu \geqq 2p+2$ la curva, e precisamente la serie delle sue tangenti, si può sempre ottenere come projezione (contorno apparente) di una rigata (appartenente ad $S_{\nu-2p+1}$ e quindi *non* piana) d'ordine ν. Indicando con n l'ordine e con r il numero delle cuspidi (o più in generale dei punti di diramazione) della curva piana, la relazione (n.° 37) $\nu+r=2(n+p-1)$ riduce la condizione $\nu \geqq 2p+2$ a

$$r \leqq 2n-4.$$

Dunque: *una curva piana (non retta) di genere p e di classe $\nu \geqq 2p+2$, ossia d'ordine n e con un numero di cuspidi (punti di diramazione) $\leqq 2n-4$, ad esempio una curva priva di tali singolarità, è sempre il contorno apparente di una rigata non piana (di genere p e d'ordine ν) da un punto esterno* (*).

---

voca (o mediante i piani congiungenti le rette ed i punti omologhi di una rigata ed una curva in corrispondenza univoca).

Nel caso che la varietà di piani sia *razionale* la cosa è già effettuata nella mia Nota: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Atti della R. Acc. di Torino, tom. 21, 1885), ed in quella simultanea del sig. Brill: *Ueber rationale Curven und Regelflächen* (Sitzber. bay. Akad., 1885; ristampata nei Math. Ann., tom. 36, 1890). E quelle stesse quistioni, o le duali, relative ad una curva razionale, piana o sghemba, si ritrovano in lavori più recenti del sig. W. Stahl (*Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven,* Math. Ann., tom. 38, 1891; *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven,* Math. Ann., tom. 40, 1892; ecc.) e d'altri; senza che nessuno abbia avvertito come esse sian risolte dai miei lavori sulle rigate, e varietà di piani, razionali. Richiamo l'attenzione su ciò non per la questione di priorità, ma per rilevare come i metodi geometrici da me adoperati diano molto di più che quelli algebrici usati da quegli Autori: diano cioè la risoluzione degli stessi problemi pel genere p *qualunque* (v. ad es. il cit. lavoro Math. Ann., tom. 34).

(*) Sappiamo poi che quando ad es. è $n \geqq p+3$ la curva è projezione di una curva sghemba dello stesso ordine; sicchè la rigata d'ordine ν su nominata si potrà assumere sviluppabile se la curva piana non ha cuspidi (in caso contrario queste potrebbero esigere che il centro di projezione giaccia sulla sviluppabile). — Osservazione duale (v. n.° 85) per la proposizione duale.

Trasportando per dualità (nello spazio) si ha quest'altro teorema: *una curva piana di genere p e d'ordine $n \geqq 2p+2$, ossia una curva piana di classe ν con un numero di flessi (tangenti di diramazione) $\leqq 2\nu-4$, sta sempre su una rigata non cono dello stesso ordine.* —

In questi enunciati le condizioni che abbiamo imposte alla curva piana son *sufficienti,* ma non *necessarie.* Per riconoscere in qualunque caso se essi valgano anche non verificandosi le dette condizioni si farà così (v. n.° 91). Si costruisca una curva γ, semplice o multipla, in tal corrispondenza con la serie delle tangenti della data curva piana C che ogni tangente di questa abbia due punti omologhi su γ e li contenga, mentre ogni punto di γ abbia per omologa una sola tangente di C (passante per esso); e che la coincidenza dei due punti di γ corrispondenti ad una stessa tangente di C abbia solo luogo per *contatti,* non in punti doppi di γ. Così γ potrà essere (secondo il metodo generale del n.° 91) la curva d'intersezione di una conica con la rigata delle tangenti di C, vale a dire una curva d'ordine 2ν composta di quella conica riguardata come ν-pla; oppure il luogo delle intersezioni delle tangenti di C cogli elementi omologhi di un sistema ∞^1 di coniche in corrispondenza biunivoca con quelle tangenti. In ogni caso si veda se la curva γ così ottenuta è speciale o no. Se non è speciale, le condizioni che sopra abbiam poste per la 1.ª proposizione, cioè $\nu \geqq 2p+2$ od $r \leqq 2n-4$, saranno necessarie. Se invece γ è speciale sarà C il contorno apparente di una rigata non piana d'ordine ν anche se $\nu=2p+1$ ossia $r=2n-3$; e potrà esserlo anzi per valori minori di ν. — Dualmente si opera per la proposizione duale.

93. Le rigate che al n.° 91 abbiam detto potersi chiamare speciali, quelle cioè d'ordine n e genere p che hanno per spazi normali spazi superiori ad S_{n-2p+1} (sicchè $p>0$), presentano delle proprietà particolari che vogliamo ancora esaminare.

Anzitutto possiam subito vedere che *una rigata d'ordine n e genere $p>0$ che abbia per sezioni iperplanari delle curve normali è un cono.* Invero sia S_r il suo spazio: due S_{r-1} generici taglieranno la rigata secondo due curve normali d'ordine n, le quali dalle generatrici della rigata son riferite univocamente, con un gruppo di n punti uniti nei punti d'incontro della rigata coll'S_{r-2} comune ai due S_{r-1}. La corrispondenza fra le due curve sarà dunque (n.° 57) contenuta in una *collineazione* tra i loro spazi: e questa avendo n punti uniti su un S_{r-2}, con $n \geqq (r-2)+2$ (ossia $n \geqq r$, perchè quelle curve d'ordine n degli S_{r-1} sono di genere >0 e quindi appartengono a spazi inferiori ad S_n), mentre $r-1$ qualunque di quei punti non stanno in un S_{r-3}, avrà tutti i punti dell'S_{r-2} per punti uniti, cioè sarà una *prospettività:* le rette congiungenti i punti omologhi, in particolare le generatrici della rigata, passeranno per uno stesso punto. La rigata è dunque un cono.

Così ad esempio *se una rigata di genere $p>0$ e d'ordine $n>2p-2$ appartiene ad un S_{n-p+1}, ovvero ha un tale spazio per spazio normale, essa è un cono.* — Si noti che con quelle ipotesi, $p>0$ e $n>2p-2$, gli spazi normali per le rigate speciali vanno da S_{n-2p+2} ad S_{n-p+1} (v. la fine del n.° 74): sicchè la proposizione ora enunciata si riferisce alle rigate speciali *estreme.*

94. Proposizioni molto più generali potremo ottenere per un'altra via, basata sul teorema Riemann-Roch.

Sia F una rigata di genere $p>0$ e d'ordine n appartenente ad S_r. Per un numero $i+1$ di generatrici arbitrarie, ove $i \geqq 0$ ed inoltre, per ciò che diremo poi, $i \leqq p-1$, conduciamo un iperpiano S_{r-1}: ciò sarà sempre possibile se

$$r \geqq 2i+2. \tag{1}$$

L'intersezione residua di quell'iperpiano con F sarà una curva d'ordine $n-i-1$, la quale potrà spezzarsi ulteriormente. Comunque però essa sia, non potrà stare in un S_{r-2} nell'ipotesi già fissata di $i \leqq p-1$, altrimenti gl'iperpiani passanti per questo spazio segherebbero F (oltre che in quella curva) in una serie lineare g_{i+1} di generatrici, di cui farebbe parte il gruppo di $i+1$ ($\leqq p$) generatrici che s'era *scelto ad arbitrio,* il che contraddirebbe al teorema Riemann-Roch.

Supposto dunque, per maggior generalità, che quella curva d'ordine $n-i-1$ si spezzi in una curva γ^m d'ordine m *direttrice* irriduttibile, semplice o multipla, ed in $(n-m-i-1)$ generatrici (numero $\geqq 0$), dovrà lo spazio S_h a cui *appartiene* γ essere di dimensione

$$h \geqq r-n+m+i: \tag{2}$$

altrimenti esso, insieme con quelle generatrici (che si appoggiano a γ, e quindi ad S_h), determinerebbe uno spazio di dimensione $r-2$, o minore, che conterrebbe la curva complessiva.

La curva γ^m di S_h è certo *speciale* se

$$h \geqq m-p+1,$$

condizione che è sicuramente soddisfatta, grazie alla relazione (2), se poniamo la seguente condizione

$$i \geqq n - p - r + 1. \tag{3}$$

Siccome $i \leqq p - 1$, questa nuova condizione ha per conseguenza

$$r \geqq n - 2p + 2, \tag{4}$$

e quindi esige che F sia una *rigata speciale.* Supposto che così sia, siccome lo spazio normale della rigata sarà S_{n-2p+2} od uno spazio superiore, potremo anche supporre soddisfatta la (4); ed allora la (3) ci darà per i un limite minimo che riescirà $\leqq p - 1$, cosicchè la si potrà soddisfare con un valore di i tale che $0 \leqq i \leqq p - 1$. Se si può fare in modo che quel valore di i verifichi anche l'altra condizione (1), potremo asserire che la curva γ^m da noi costruita è speciale. Ora la (1) varrà certo se $r \geqq 2p$ (poichè $p \geqq i + 1$); od anche se $n \geqq 4p - 2$, perchè da questa e dalla (4) segue $r \geqq 2p$. Possiamo dunque dire che *una rigata di genere $p > 0$ e d'ordine n la quale sia speciale, cioè abbia per spazio normale un S_r ove $r \geqq n - 2p + 2$, contiene sempre una curva direttrice speciale (se esiste un valore di i compreso tra* 0 *e $p - 1$, i limiti inclusi, il quale verifichi le condizioni* (1) *e* (3)*; ed in particolare) se è $r \geqq 2p$, od anche se è $n \geqq 4p - 2$.* S'intende che quella curva potrà esser *semplice* o *multipla.*

95. Il fatto che la curva γ di genere p, d'ordine m, di S_h è speciale ci dà (n.i 74 e 72)

$$h \leqq p - 1, \qquad m \leqq 2p - 2,$$
$$m \geqq 2h.$$

Ma possiamo ottenere pei numeri h ed m delle limitazioni ulteriori, considerando la serie lineare g_{n-m}^{r-h-1} che sulla rigata F è segata dagl'iperpiani passanti per S_h, e supponendo che questa serie *non* sia speciale. *Basta* perciò che la sua dimensione sia $\geqq p$, vale a dire:

$$r \geqq p + h + 1;$$

oppure che il suo ordine sia $\geqq 2p - 1$, vale a dire:

$$n \geqq 2p + m - 1.$$

La 1.a condizione si verifica certo, in causa della $h \leqq p - 1$, se poniamo:

$$r \geqq 2p;$$

la 2.ª invece, in causa della $m \leqq 2p - 2$, se poniamo:

$$n \geqq 4p - 3.$$

Allora dal fatto che quella serie non è speciale seguirà

$$(n - m) - (r - h - 1) \geqq p,$$

ossia:

$$m - h \leqq n - p - r + 1. \tag{5}$$

Questa confrontata con la (3) dà:

$$m - h \leqq i. \tag{6}$$

E d'altra parte la (5) stessa, o la (6), in forza della $m \geqq 2h$ dànno pure

$$h \leqq n - p - r + 1 \tag{7}$$

$$h \leqq i. \tag{8}$$

Ora s'indichi di nuovo con S_r lo spazio normale per la rigata, e nella costruzione della curva γ fatta nel n.° prec. si prenda per i il valor minimo, cioè, per la (3),

$$i = n - p - r + 1,$$

sicchè la condizione (1) diventa:

$$n \geqq p + 3i + 1.$$

Potremo allora completare l'enunciato con cui finiva il n.° prec. così: *Se si pone* $r = n - p - i + 1$, $(0 \leqq i \leqq p - 1)$, *la rigata contiene una curva direttrice speciale (se* $n \geqq p + 3i + 1$ *ed in particolare) se* $n \geqq 4p - 2$, *oppure se* $r \geqq 2p$ *(vale a dire* $n \geqq 3p + i - 1$*); e sotto l'una o l'altra di queste due condizioni lo spazio normale per quella curva sarà di dimensione* $h \leqq i$, *mentre l'ordine* m *della curva stessa sarà tale che* $2h \leqq m \leqq h + i$.

Dando ad i i valori $0, 1, 2, \ldots$ (il primo dei quali riporterà al teorema del n.° 93); ovvero a p i valori $1, 2, \ldots$; si otterranno come casi particolari una serie di proposizioni notevoli relative alle rigate speciali.