

12.

Eine neue Art, die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen.

(Von Herrn Th. Clausen zu München.)

1. Es kann der Fall eintreten, daß man bloß mit einem Azimuthaltheodoliten versehen, die Zeit und die Polhöhe an einem Orte zu bestimmen wünscht, wozu, wie man leicht sieht, die Azimuthaldifferenzen zwischen dreien Sternen und einem beliebigen Punkte, zur gegebenen Zeit gemessen, hinreichen. Abgesehen von dem Nutzen, den die Auflösung dieser Aufgabe in practischer Hinsicht hat, gewährt sie auch ein besonderes theoretisches Interesse, aus welchem Grunde ich sie vorzüglich unternommen habe.

Durch einige sehr leichte und oft angestellte Betrachtungen reducirt sich das eben genannte Problem darauf: Wenn auf der Sphäre drei Punkte A, B, C (Taf. II. Fig. I.) gegeben sind, einen vierten Punkt D zu finden, an dem die Winkel $ADB = \epsilon$ und $ADC = \epsilon'$ sind.

Es sei:

$$\begin{array}{lll} AB = l; & BAD = a + \xi; & \cotang l = d; \\ AC = l'; & CAD = a - \xi; & \cotang l' = d'; \\ AD = y; & & \cotang \epsilon = e; \\ & & \cotang \epsilon' = e'; \end{array}$$

so hat man:

$$\begin{aligned} e \sin(a + \xi) + \cos(a + \xi) \cos y - d \sin y &= 0, \\ e' \sin(a - \xi) + \cos(a - \xi) \cos y - d' \sin y &= 0, \end{aligned}$$

woraus man leicht folgert:

$$\begin{aligned} [(d-d') \cos a \cos \xi + (d+d') \sin a \sin \xi] \cos y &= (ed' - e'd) \sin a \cos \xi + (ed' + e'd) \cos a \sin \xi, \\ [(d-d') \cos a \cos \xi + (d+d') \sin a \sin \xi] \cos y &= \frac{1}{2}(e - e') \sin 2a + \frac{1}{2}(e + e') \sin 2\xi. \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen giebt, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} (d-d') \cos a &= g \cos G; & (ed' - e'd) \sin a &= g \sin G; \\ (d+d') \sin a &= h \sin H; & (ed' + e'd) \cos a &= h \cos H; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= hh \cos 2H \sin^2 \xi + 2gh \sin(G-H) \sin \xi \cos \xi - gg \cos 2G \cos^2 \xi \\ &\quad + \frac{1}{4}(e-e')^2 \sin 2a^2 + \frac{1}{2}(e^2 - e'^2) \sin 2a \sin 2\xi + \frac{1}{4}(e+e')^2 \sin 2\xi^2. \end{aligned}$$

Macht man ferner:

$$A = \frac{1}{2} h h \cos 2H - \frac{1}{2} g g \cos 2G + \frac{1}{4} (e - e')^2 \sin 2a,$$

$$C = \frac{1}{4} (e + e')^2,$$

$$D = -\frac{1}{4} h h \cos 2H - \frac{1}{4} g g \cos 2G;$$

$$F = \frac{1}{2} g h \sin (G - H) + \frac{1}{4} (e - e')^2 \sin 2a,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$0 = A + C \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi.$$

Dieser gebe ich folgende Form:

$$0 = A + x - x \cos 2\xi^2 + (C - x) \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi,$$

und bestimmen x so, daß

$$(a.) \quad 0 = -x \left(\cos 2\xi - \frac{D}{x} \right)^2 + (C - x) \left(\sin 2\xi + \frac{F}{C - x} \right)^2;$$

subtrahirt man die beiden Gleichungen, so findet man:

$$0 = A + x + \frac{DD}{x} - \frac{FF}{C - x},$$

oder

$$(b.) \quad x^3 + (A - C)x^2 + (DD + FF - AC)x - CDD = 0.$$

Damit die Gleichung (a.) möglich sei, muß der Werth von x zwischen 0 und C liegen. Sie hat wirklich innerhalb dieser Grenzen wenigstens eine Wurzel, da der Werth der Gleichung (b.), wenn $x = 0$, $-CDD$ oder negativ ist, weil C positiv; wenn $x = C$, $+CFF$ oder positiv ist.

Nachdem x bekannt ist, hat man sogleich aus der Gleichung (a.):

$$\sqrt{(C - x) \sin 2\xi} - \sqrt{x \cdot \cos 2\xi} + \frac{F}{\sqrt{(C - x)}} + \frac{D}{\sqrt{x}} = 0,$$

oder, wenn man $\sqrt{\frac{x}{C}} = \cos P$ setzt,

$$\cos(2\xi + P) = \frac{D}{C \cos P} + \frac{F}{C \sin P}.$$

Die Bestimmung der übrigen Stücke des Vierecks $ABCD$ hat nun keine weitere Schwierigkeit, so wenig als die Bestimmung der Lage des Punctes D gegen jeden andern Punct auf der Sphäre, dessen Lage gegen A , B und C bekannt ist; ich füge sie daher nicht bei, um Weitläufigkeit zu vermeiden.

2. Eine andere Aufgabe entsteht, wenn die Polhöhe eines Ortes gegeben ist, und man sucht an der gegebenen Azimuthdifferenz zweier Sterne die Zeit. Diese reducirt sich auf die vorige, mit dem Unterschiede, daß statt des Winkels ε' die Seite $CD = \eta$ gegeben ist. In diesem Falle hat man folgende Gleichungen:

$$\cotang \varepsilon \sin(a + \xi) + \cos(a + \xi) \cos \gamma - \cotang l \sin \gamma = 0,$$

$$\cos \eta - \cos l' \cos \gamma - \cos(a - \xi) \sin l' \sin \gamma = 0,$$

woraus man leicht folgert:

$$\begin{aligned} & [\cotang l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2\xi] \cos \gamma \\ &= \cotang l \cos \eta - \tfrac{1}{2} \cotang \varepsilon \sin l' \sin 2a + \tfrac{1}{2} \cotang \varepsilon \sin l' \sin 2\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\cotang l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2\xi] \sin \gamma \\ &= (\cotang \varepsilon \cos l' \sin a + \cos \eta \cos a) \cos \xi + (\cotang \varepsilon \cos l' \cos a - \cos \eta \sin a) \sin \xi. \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen giebt, wenn man setzt:

$$\cotang \varepsilon \cos l' = g \cos G; \quad \cotang l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a = h \sin H;$$

$$\cos \eta = g \sin G; \quad \cotang l \cos \eta - \tfrac{1}{2} \cotang \varepsilon \sin l' \sin 2a = h \cos H.$$

$$\begin{aligned} 0 &= hh \cos 2H - h \cos H \cotg \varepsilon \sin l' \sin 2\xi + \tfrac{1}{4} \cotg^2 \varepsilon \sin l'^2 \sin 2\xi^2 - h \sin H \sin l \cos 2\xi \\ &- \tfrac{1}{4} \sin l'^2 \cos 2\xi^2 + g g \sin(G+a)^2 \cos \xi^2 + \tfrac{1}{4} g g \sin 2(G+a) \sin 2\xi + g g \cos(G+a)^2 \sin \xi^2; \end{aligned}$$

und wenn man

$$A = hh \cos 2H + \tfrac{1}{2} g g - \tfrac{1}{4} \sin l'^2,$$

$$C = \tfrac{1}{4} \frac{\sin l'^2}{\sin \varepsilon^2},$$

$$2D = -h \sin H \sin l' - \tfrac{1}{2} g g \cos 2(G+a),$$

$$2F = -h \cos H \cotang \varepsilon \sin l' + \tfrac{1}{2} g g \sin 2(G+a)$$

setzt, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$0 = A + C \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi$$

völlig wie oben.

München, den 6. October 1829.

Druckfehler. Im 6. Bande 3. Hefte S. 293. Z. 8. und 11. v. o. lese man *ff* statt *H*.