

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXIII.

I. *Ueber eine neue Interferenzerscheinung;
von Otto Lummer.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 1–8.)

Als ich im Frühjahr 1883 im hiesigen physikalischen Laboratorium mit dem Spectrometer arbeitete, um die Winkel des Fresnel'schen Biprismas zu bestimmen, sah ich bei Senkrechtstellung des Fernrohres mittelst des Gauss'schen Oculars auf die Prismenflächen neben dem gespiegelten Fadenkreuz immer noch eine ganze Anzahl feiner Interferenzstreifen auftreten, deren Entstehung ich mir nicht auf bekannte Weise erklären konnte. Die nähere Untersuchung dieser Interferenzerscheinung, welche ich auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Geheimrath Prof. v. Helmholtz, anstellte, führte zur vorliegenden Arbeit, welche mitzutheilen mir gestattet sei.

Erscheinung.

Die von der Sonne oder einer beliebigen Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen σ (Fig. 1) fallen auf die planparallele Glasplatte P , von welcher sie nach der achromatischen Linse L von ziemlich grosser Brennweite (20–50 cm) reflectirt werden. In der Linse L gebrochen, gehen die Strahlen weiter bis zum Silberspiegel R , der senkrecht zur optischen Axe der Linse L stehen möge. Es werden dann die nahe der optischen Axe verlaufenden Strahlen nach L zurückgeworfen und gelangen nach dem Austritt aus L zurück zur Platte P , wo sie theils reflectirt, theils hindurchgelassen werden. Betrachten wir vorerst letztere, so mögen dieselben durch die zu L centrirt Linse O direct in das hinter derselben befindliche Auge A gelangen. Ist dann O

genau auf die Brennebene F von L eingestellt, und befindet sich in derselben ein Fadenkreuz, so bietet sich dem Auge A folgende Erscheinung dar.

Neben dem wirklichen Fadenkreuze erscheint ein an R gespiegeltes, welches genau mit dem wirklichen zusammenfällt, sobald R senkrecht auf OL steht; ausserdem aber ist das Gesichtsfeld von einer Anzahl Interferenzstreifen durchzogen, welche, parallel laufend der Durchschnittslinie von Platte und Spiegel, bei natürlichem Lichte farbig, bei monochromatischem Lichte dagegen abwechselnd hell und dunkel sind. Die Erscheinung ist symmetrisch zu einem hellen Centralstreifen, sodass die farbigen Streifen Aehnlichkeit haben mit den am Fresnel'schen Spiegel auftretenden. Eine unsere Erscheinung ganz besonders auszeichnende Beziehung ist aber die Veränderung des Abstandes der Streifen mit der Entfernung des Spiegels von der Linse. Befindet sich nämlich der Spiegel R nahe der Linse L , so ist der Streifenabstand so klein, und infolge dessen sind die Streifen so fein, dass dieselben kaum sichtbar; je grösser aber RL , um so weiter entfernen sich die Streifen voneinander, bis, wenn R in den Brennpunkt der Linse gekommen, der Streifenabstand so gross geworden, dass der weissliche Centralstreifen fast das ganze Gesichtsfeld einnimmt. Rückt jetzt der Spiegel noch weiter von L fort, so wiederholt sich das umgekehrte Schauspiel, die Streifen rücken mit zunehmender Entfernung des Spiegels wieder zusammen und verschwinden ob ihrer Feinheit schliesslich gänzlich der Wahrnehmung.

Analog, aber glanzvoller gestaltet sich die Erscheinung, wenn sie im reflectirten Lichte beobachtet wird. Um dies verwirklichen zu können, ändert man den Versuch folgendermassen um. Man lässt die von der Lichtquelle S (Fig. 1) ausgehenden Strahlen σ nicht direct auf P auffallen, sondern von einer Glasplatte G nach P reflectiren. Die auf dem früher beschriebenen Wege nach L , R und zurück nach P gelangenden Strahlen werden hier, wie schon erwähnt, theils reflectirt, kommen nach G zurück, gehen durch G hindurch, und dringen in das hinter G befindliche Auge. Wenn

letzteres passend accommodirt, wird es wiederum, aber viel deutlicher und schöner, die Interferenzstreifen sehen, deren Beziehung zum Spiegelabstand RL dieselbe ist, wie diejenige der im durchgehenden Lichte erzeugten Streifen. Um hier genau den Ort zu bestimmen, an welchem die Streifen entstehen, bediente ich mich folgenden Mittels, welches für uns später noch in anderer Beziehung von grossem Nutzen sein wird. An die Stelle des Auges wurde ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr T gebracht, an dessen Rohr unmittelbar vor dem Objectiv eine zweite achromatische Linse (λ) befestigt war. Bei dieser Anordnung können durch das Fernrohr nur solche Gegenstände wahrgenommen werden, welche sich in der Brennweite der Linse λ befinden. Hat man also die Streifen mittelst Fernrohres aufgesucht und verschiebt eine feine Nadel längs des Weges λPL , bis dieselbe mit den Streifen zugleich in T deutlich sichtbar wird, so bezeichnet die Nadel den Ort der Streifen. Es befinde sich der Ort zwischen P und G . Dann treten ausser der wirklichen Nadel noch vier Spiegelbilder derselben auf, von denen die beiden mittleren sich nahezu decken, und, was für uns von Wichtigkeit, gleichsam die Streifen überlagern, während umgekehrt die beiden äusseren Bilder von den bunten Streifen durchbrochen sind. Daraus folgt erstens, dass die Nadel und somit die Streifen im ersten Brennpunkte der Linse L befindlich sind, zweitens aber, dass nur solche Strahlen zur Interferenz kommen, die denselben Verlauf nehmen würden, wie die die mittleren zusammenfallenden Bilder der Nadel erzeugenden Strahlen, falls die Nadel nicht da wäre. Es wird Aufgabe des theoretischen Theiles dieser Arbeit sein, zu erforschen, welches diese Strahlen sind. Verschiebt man die Platte P parallel zu sich selbst, so ändert sich die Interferenzerscheinung ebensowenig, wie der Ort derselben. Immer muss die Bedingung gelten, $LP + P\lambda =$ der Summe der Brennweiten der Linsen L und λ . Kommt P gerade nach F , dem ersten Brennpunkte von L , so scheinen die Streifen auf der Oberfläche von P fest zu haften, welche mit ihren Ritzen und Schrammen zugleich deutlich sichtbar wird. Befindet sich P ausserhalb der Brennweite PL , so tritt nur

ein Spiegelbild einer in F befindlichen Nadel auf; die Interferenzerscheinung ist dieselbe wie vorher. — Schliesslich sei noch bemerkt, dass das Bestreichen der Hinterfläche von P mit Asphaltlack, wodurch derselben ihre Reflexionskraft genommen wird, stets das Verschwinden der Streifen zur Folge hat, während das Belegen dieser Fläche den Glanz der Erscheinung um Bedeutendes erhöht.

Theorie.

Da beide Flächen der Platte P mitwirken, kommen hauptsächlich vier Lichtantheile in Betracht. Jeder vom leuchtenden Punkte S (Fig. 2) ausgehende Strahl SA nämlich theilt sich gemäss der Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche von P in unzählig viele einander parallel laufende Strahlen, von denen wir nur die beiden ersten (α und β) verfolgen wollen, insofern die übrigen äusserst lichtschwach sind. Durch die Linse L in dem Punkte B der zweiten Brennebene von L vereinigt, gelangen α und β an den Silberspiegel R . Dort werden sie so reflectirt, als ob sie von C kämen, dem Spiegelpunkte von B in Bezug auf R . Nach dem Austritt aus der Linse L sind demnach α und β beide nach dem zu C conjugirten Punkte D gerichtet. Ehe aber α und β nach dorthin gelangen, treffen sie auf die Platte P , wo jeder theilweise reflectirt und gebrochen wird, sodass sich α in die parallelen Strahlen α_1 und α_2 und β in die parallelen Strahlen β_1 und β_2 zerlegt. Analog dem Strahle SA erzeugt ein jeder von S ausgehende Strahl vier Strahlen α_1 , α_2 , β_1 und β_2 ; im allgemeinen werden somit vier Bilder von S auftreten müssen, deren gegenseitiger Abstand sowohl von der Dicke der Platte P , der Entfernung des Spiegels R , als der Lage des Lichtpunktes S abhängen wird.

Dem früher Gesagten gemäss interferiren diejenigen Strahlen miteinander, welche die mittleren Bilder erzeugen, also Strahlen wie α_2 und β_1 . In der That zeichnen sich α_2 und β_1 dadurch vor den übrigen aus, dass beide nahezu einen gleich grossen Weg durch Glas zurückzulegen haben. Während nämlich β_1 beim Hingang zur Linse durch die Platte gegangen, beim Rückweg aber direct reflectirt wor-

den ist, ist umgekehrt α_2 erst direct reflectirt und hat dann die Platte durchsetzt. Alle übrigen Lichtantheile unterscheiden sich durch eine Wegdifferenz im Glas von mehr denn der doppelten Dicke der Platte; α_1 und β_2 sogar durch eine solche von mehr denn der vierfachen Plattendicke. Dass aber die Unterschiede der im Glas zurückgelegten Wege massgebend sind, geht daraus hervor, dass, wie leicht einzusehen, alle von α_1 , α_2 , β_1 und β_2 in Luft zurückgelegten Wege einander absolut gleich sind, wenn der Spiegel R im Brennpunkte (F) von L steht. In diesem speciellen Falle ist der Wegunterschied von α_2 und β_1 Null, der zwischen je zwei anderen Strahlen viele 1000 Wellenlängen, soviel eben Wellenlängen auf die doppelte resp. vierfache Plattendicke kommen. Da nun die Interferenzstreifen bei Anwendung weissen Lichtes auftreten, können dieselben bekanntlich nur von Strahlen mit geringer Wegdifferenz gebildet werden. Es kann somit gar kein Zweifel übrig bleiben, dass Strahlen wie α_2 und β_1 es sind, denen die Erscheinung ihre Entstehung verdankt. Unsere Aufgabe ist demnach die, zu berechnen, welches bei beliebiger Stellung des Spiegels, der Platte etc. die Phasendifferenz im Schnittpunkte zweier den Strahlen α_2 und β_1 analog verlaufender Strahlen ist.

Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung des allereinfachsten Falles, wo die beiden Strahlen bis zu ihrem Schnittpunkte in einer und derselben Ebene verlaufen. Es ist diese Ebene die durch die optische Axe der Linse L gelegte Lothebene von Platte und Spiegel, welche wir zur Ebene der Zeichnung machen wollen. Dann sei LF (Fig. 3) die Axe der Linse L , deren zweiter Brennpunkt in F liege; senkrecht dazu stehe der Spiegel R , während die Normale der bei P befindlichen Platte einen bestimmten Winkel (φ) mit ihr einschliesse. Wir müssen zwei Fälle voneinander unterscheiden, nämlich: $RL >$ und $RL < FL$; ersteren behandeln wir zuerst. Zur Vereinfachung nehmen wir noch an, die auf P auffallenden Strahlen kämen von einem unendlich fernen leuchtenden Punkte, d. h. sie liefen einander parallel. Es ist diese Annahme erlaubt, da die Erscheinung ganz dieselbe bleibt, ob man eine irdische Lichtquelle oder die Sonne als

solche anwendet. Dann wollen wir uns den Einfallswinkel der Strahlen so gewählt denken, dass sie parallel der optischen Axe von der Platte nach der Linse reflectirt werden. Es seien Sr und Ss zwei von dem unendlich fernen leuchtenden Punkte S kommende Strahlen, von denen ersterer bei r direct nach h reflectirt werde, während Ss bei s nach dem Innern der Platte gebrochen, bei g von deren Hinterfläche nach h gespiegelt und dort parallel dem Strahle rh nach g abgelenkt werde. g und h seien die Schnittpunkte der Strahlen mit der zweiten Hauptebene der Linse L . Laut Voraussetzung ist rh und $hg \parallel PL$; die Linse vereinigt die Strahlen rh und hg demnach in ihrem zweiten Brennpunkte F , wo sich die beiden Strahlen durchkreuzen, um ihren Weg ungestört bis zum Spiegel R fortzusetzen, den sie resp. in den Punkten x und y treffen mögen. Wir hätten nun die in x und y gespiegelten Strahlen weiter zu verfolgen bis zu dem Punkte, in welchem sie sich schneiden, nachdem sie von L gebrochen, der der optischen Axe zunächstlaufende an der Platte direct reflectirt worden ist, der andere aber zweimal die Platte durchsetzt hat, und für diesen Schnittpunkt die Phasendifferenz zu berechnen. Statt dessen können und wollen wir so verfahren: Wir konstruiren uns in Bezug auf R die Spiegelbilder der Linse L und der Platte P ; dieselben seien L_1 und P_1 , sodass $RL_1 = RL$ und $RP_1 = RP$ ist; betrachten L_1 und P_1 als wirklich gegeben, verlängern, als ob der Spiegel gar nicht vorhanden wäre, die Strahlen Fx und Fy bis L_1 und suchen die Phasendifferenz der aus L_1 austretenden Strahlen 1 und 2 in demjenigen Punkte, in welchem sie wieder zusammentreffen, nachdem 2 an P_1 direct reflectirt worden, 1 aber zweimal durch P_1 gegangen ist. Es leuchtet von selbst ein, dass wir auf die letzte Art ganz dieselbe Phasendifferenz erhalten als vorher, indem von x und y an der Verlauf der Strahlen im zweiten Falle das Spiegelbild des Verlaufes im ersten, bis zu x und y aber in beiden Fällen der Weg ganz derselbe ist. Weswegen wir den zuletzt angegebenen Weg einschlagen, wo vom Spiegel ganz abstrahirt werden kann, wird später klar werden. Um die Phasendifferenz zu berechnen, verfolgen wir den Gang der von F

nach L_1 gehenden Strahlen genauer. Sind m_1 und n_1 die Schnittpunkte der Strahlen mit der ersten Hauptebene von L_1 , so gehen sie von da parallel der optischen Axe bis zur zweiten Hauptebene von L_1 ; die Schnittpunkte seien m und n . Da $FL_1 > \mathfrak{F}L_1$, die Brennweite der Spiegellinse (L_1), so werden die Strahlen durch die Linse wirklich vereinigt im Punkte B , welches der conjugirte Punkt zu F in Bezug auf die Spiegellinse und somit der zweite Hauptbrennpunkt des Systems beider Linsen ($L + L_1$) ist. Befindet sich, wie wir annehmen wollen, die Platte P innerhalb der Brennweite von L , so liegt auch P_1 innerhalb L_1E ; die nach B gehenden Strahlen mB und nB werden also die Vorderfläche von P_1 treffen, noch ehe sie in B ankommen. Der Bedingung gemäss werde md bei d gespiegelt, na gehe dagegen nach b , werde dort gespiegelt nach c und hier austretend aus der Platte, vereinige er sich bei u_1 mit dem von d kommenden Strahle. Die Phasendifferenz in u_1 ist zu suchen. Da nun die Phasendifferenz zweier Strahlen nichts weiter ist als die Differenz ihrer optischen Längen, so müssen wir die optischen Längen der Strahlen $Srhndbcu_1$ und $Ssqkgmdu_1$ berechnen. Die scheinbar langwierige Rechnung wird bedeutend vereinfacht durch Benutzung des von v. Helmholtz¹⁾ abgeleiteten Satzes über die optischen Längen zweier Strahlen, welcher aussagt, dass, wenn Lichtstrahlen von einem Punkte ausgegangen und durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung gebrochen worden sind, sie nach der letzten Brechung senkrecht stehen auf jeder krummen Fläche, für deren sämtliche Punkte die optische Länge des Strahles einen constanten Werth hat. Errichten wir also in k eine Senkrechte zum Strahle kg , welche auch auf rh senkrecht steht und letzteren Strahl in i schneiden möge, so haben Fhi und Fgk gleiche optische Längen. Ebenso die Strahlen Fml und Fna , wenn l der Schnittpunkt des Strahles mB mit dem um B als Centrum und der Strecke aB als Radius beschriebenen Kreise ist. Schliesslich ist noch $Sr = St$, wenn rt senkrecht auf Sr und Ss , sodass wir für die Phasendifferenz (Δ) im Punkte u_1 erhalten:

1) v. Helmholtz, Wissensch. Abhdl. 2. p. 148.

$A = st + 2n \cdot qs + ld + du_1 - [ri + 2n \cdot ab + cu]$;
 wo n den Brechungsindex der Platte bedeutet. In diesen Ausdruck führen wir noch einige andere Zeichen ein, und zwar wollen wir nennen d die Dicke der Platte, e den Einfallswinkel der Strahlen Sr oder Ss , welcher nach unserer Annahme gleich ist dem Winkel (φ) zwischen der Platten-normale und der optischen Axe, b den zugehörigen Brechungswinkel, ferner e_1 , e_2 und b_1 , b_2 die Einfalls- und Brechungswinkel resp. der Strahlen na und md . Wie leicht aus der Fig. 3 abzuleiten ist, gelten dann folgende Beziehungen: Es ist: $qs = (d/\cos b)$; $ab = (d/\cos b_1)$; $ri = rk \sin e$ und $st = rs \cdot \sin e = (rk - sk) \sin e = rk \sin e - 2d \operatorname{tg} b \sin e$. Demnach wird: $A = (2nd/\cos b) - 2d \operatorname{tg} b \sin e - (2nd/\cos b_1) + ld + du_1 - cu_1$. Um die noch übrig bleibende Strecke $ld + du_1 - cu_1$ durch die eingeführten Zeichen auszudrücken, müssen wir erst folgende Construction machen. Wir tragen du_1 von d auf dem Strahle dB ab bis u ; verbinden c mit u und verlängern diese Verbindungslinie bis sie die in $B \parallel$ zur Platte gezogene Linie in v trifft. Da du_1 und du mit dP_1 , der Vorderfläche der Platte, denselben Winkel ($90 - e_2$) einschliessen, so ist u der Spiegelpunkt von u_1 in Bezug auf dP_1 ; demnach auch $cu = cu_1$ und, da $\sphericalangle u_1 c P_1 = 90 - e_1 = \sphericalangle P_1 a B$, und $\sphericalangle u_1 c P_1 = \sphericalangle P_1 c u$ ist, so läuft $cu \parallel aB$. Laut Construction ist $Bv \parallel ac$. Es sind also ac und Bv Parallele zwischen Parallelen, woraus folgt: $cv = aB$ und $ac = Bv$. Darnach wird unser Ausdruck: $ld + du_1 - cu_1 = lu - cu$, wofür wir schreiben wollen: $lB - uB - (cv - uv) = uv - uB$. Sowohl uv als uB ist Seite des Dreicks uvB . Mittelst des Sinussatzes erhalten wir daher:

$$uv = \frac{Bv \sin uBv}{\sin Buv}; \quad uB = \frac{Bv \sin Bvu}{\sin Buv},$$

worin zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \sphericalangle uBv &= \sphericalangle mdP_1 = e_2 & \sphericalangle Buv &= \sphericalangle duc = e_1 - e_2; \\ \sphericalangle uvB &= \sphericalangle ucP_1 = e_1 & \text{und } Bv &= 2d \operatorname{tg} b_1, \end{aligned}$$

sodass wird:

$$ld + du_1 - cu_1 = 2d \operatorname{tg} b_1 \frac{\cos e_2 - \cos e_1}{\sin (e_1 - e_2)}$$

und somit:

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos b} - \frac{2d \sin b}{\cos b} \sin e - \frac{2nd}{\cos b_1} + 2d \operatorname{tg} b_1 \frac{\cos e_2 - \cos e_1}{\sin(e_1 - e_2)};$$

$$\Delta = \frac{2d}{\cos b} (n - \sin e \sin b) - \frac{2d}{\cos b_1} \left(n - \sin b_1 \frac{\cos e_2 - \cos e_1}{\sin(e_1 - e_2)} \right).$$

Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz ist:

$$n = \frac{\sin e}{\sin b} = \frac{\sin e_1}{\sin b_1} = \frac{\sin e_2}{\sin b_2},$$

woraus folgt:

$$n \cdot \cos b = \sqrt{n^2 - \sin^2 e} \quad \text{und} \quad \cos n \cos b_1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 e_1};$$

benutzen wir diese Werthe, so erhalten wir für die Phasendifferenz in u_1 :

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 e} - \frac{2dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1}} \left(n - \frac{\sin e_1 (\cos e_2 - \cos e_1)}{n \sin(e_1 - e_2)} \right).$$

Eine sehr wesentliche Vereinfachung dieses Ausdruckes erzielen wir durch Einführung der Winkel, welche die Strahlen mB und nB mit der optischen Axe BL, L des Systems bilden, und zwar sei:

$$\angle mBL = \varepsilon_2 \quad \text{und} \quad \angle nBL = \varepsilon_1.$$

Dann gilt: $e_2 = \varphi + \varepsilon_2$ und $e_1 = \varphi + \varepsilon_1$ und folglich wird, da der Voraussetzung gemäss: $e = \varphi$ sein soll, die Phasendifferenz:

$$\Delta = 2d \left[\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi + \varepsilon_1)}} \left(n^2 - \frac{\sin(\varphi + \varepsilon_1) [(\cos(\varphi + \varepsilon_2) - \cos(\varphi + \varepsilon_1))]}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \right) \right].$$

Dieser Werth für Δ ist scheinbar complicirter denn der vorherige. Bedenken wir aber, dass ε_1 und ε_2 nur sehr kleine Winkel sein können, so dürfen wir über diese Winkel Annahmen machen, welche unsern letzten Ausdruck für Δ auf einen äusserst einfachen reduciren. In der That sind ε_1 und ε_2 gleich Null, wenn RF , der Abstand des Spiegels vom Brennpunkte der Linse L , gleich Null ist, während bei einer Entfernung von $RF = \frac{3}{4}$ der Brennweite von L , letztere zu 30 cm genommen, der grösstmögliche Werth von E je nach dem Radius der Linsenöffnung nur 1° bis 2° beträgt. Bei solch'

grossen Spiegelabstände sind die Streifen ob ihrer Feinheit und ihres winzigen Abstandes aber überhaupt kaum noch sichtbar. Für die der Messung zugänglichen und deutlich sichtbaren Streifen wird in Δ also:

$$\sin \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \cos \varepsilon_1 = 1, \quad \sin \varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \cos \varepsilon_2 = 1$$

zu setzen erlaubt sein, wodurch $\sin(\varphi + \varepsilon_1) = \sin \varphi + \varepsilon_1 \cos \varphi$,
 $\sin^2(\varphi + \varepsilon_1) = n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi$, und

$$\frac{\cos(\varphi + \varepsilon_2) - \cos(\varphi + \varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} = \frac{0}{0} = \sin \varphi + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \cos \varphi$$

wird. Den in Δ auftretenden Factor:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi}} = (n^2 - \sin^2 \varphi - \varepsilon_1 \sin 2\varphi)^{-1/2}$$

können wir dann nach aufsteigenden Potenzen von ε_1 entwickeln, von denen die zweiten und höheren Potenzen unserer Annahme gemäss fortzulassen sind. Nach einigen leicht auszuführenden Zwischenrechnungen erhalten wir schliesslich:

$$\Delta = \frac{d \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Eine analog dieser durchzuführende Rechnung für den Fall, dass beide auf L auffallenden Strahlen unterhalb der optischen Axe verlaufen, ergibt für die Phasendifferenz Δ in deren Schnittpunkt:

$$\Delta = - \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Liegt nur g unterhalb, h aber oberhalb L , laufen also die beiden Strahlen zu beiden Seiten der optischen Axe, so wird:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Ganz allgemein ist demnach die Phasendifferenz in dem Schnittpunkte zweier der Axe paralleler Strahlen, welche den bewussten Gang zurückgelegt haben:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2),$$

wo das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen, je nachdem der zu ε gehörige Strahl vor der Linse L oberhalb oder unterhalb der optischen Axe läuft.

Ehe wir irgendwelche Discussionen an unsere für Δ ge-

wonnene Gleichung knüpfen, wollen wir letztere noch zweckentsprechend umzugestalten suchen. Dazu bietet uns die durch Beobachtung festgestellte Thatsache, dass sich die Streifen in der Brennebene der Linse entwickeln, die beste Gelegenheit. Ziehen wir demnach die in P_1 (Fig. 3) gespiegelte optische Axe P_1E_1 , machen $P_1E_1 = PE$, sodass E_1 der Brennpunkt der Linse L_1 längs $L_1P_1E_1$ ist, dann muss der Betrachtung zufolge u_1 ein Punkt der durch E_1 gelegten, senkrecht auf P_1E_1 stehenden Brennebene der Linse sein.

Wie leicht einzusehen, muss alles, was für u_1 in Bezug auf E_1 und P_1E_1 gelten möge, auch für u in Bezug auf E_1 und P_1EB Giltigkeit haben. Der Bequemlichkeit halber wollen wir alle unsere folgenden Betrachtungen für letzteren Punkt anstellen und so verfahren, als ob u wirklich der Schnittpunkt von mdu und $nabcu$ wäre. Es sind dann einfach die für die Ebene Eu gefundenen Resultate auf die Brennebene E_1u_1 zu übertragen.

Mittelst der Thatsache, dass u ein Punkt der durch E gehenden Brennebene ist, können wir nun leicht ϵ_1 und ϵ_2 und damit auch die Phasendifferenz A als Funktionen der Brennweite der Linse L und des Abstandes RF des Spiegels vom zweiten Brennpunkte von L darstellen.

Wir gehen dazu aus von der Betrachtung eines zusammengesetzten Systems centrirter Linsen. Dasselbe bestehe aus zwei centrirten optischen Systemen A und B (Fig. 4), welche dieselbe Axe haben. Es seien p_1 und p_2 die beiden Brennpunkte, a_1 und a_2 die beiden Hauptpunkte des Systems A ; π_1 und π_2 die Brennpunkte, α_1 und α_2 die Hauptpunkte von B . Der Abstand $a_2\alpha_1$ sei d ; die Hauptbrennweiten des ersten Systems a_1p_1 und a_2p_2 bezeichnen wir mit f_1 und f_2 , die des zweiten $\alpha_1\pi_1$ und $\alpha_2\pi_2$ mit φ_1 und φ_2 .

Der erste Brennpunkt (t_1) des combinirten Systems ist dann das Bild, welches A von π_1 , der zweite Brennpunkt (t_2) dasjenige, welches B von p_2 entwirft. In der That vereinigen sich alle von t_1 ausgehenden Strahlen nach der Brechung im ersten Systeme A in π_1 und treten aus dem zweiten Systeme B parallel zur optischen Axe aus, während alle parallel der optischen Axe auf A auffallende Strahlen sich in p_2 durch-

kreuzen und vom System B in $t_{\text{,,}}$ vereinigt werden. Nach von Helmholtz¹⁾ gilt dann:

$$a_1 t_1 = \frac{(d - \varphi_1) f_1}{d - \varphi_1 - f_2} \quad \text{und} \quad a_2 t_{\text{,,}} = \frac{(d - f_2) \varphi_2}{d - \varphi_1 - f_1}.$$

Sind ferner r_1 und $r_{\text{,,}}$ die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems, deren gemeinsames im mittleren Medium gelegenes Bild s sei, so gilt auch nach ihm:

$$a_1 r_1 = \frac{d f_1}{d - \varphi_1 - f_2} \quad \text{und} \quad a_2 r_{\text{,,}} = \frac{d \varphi_2}{d - \varphi_1 - f_2}.$$

Diese Werthe nehmen nun eine bedeutend einfachere Gestalt an für den speciellen Fall, dass A und B zwei identische optische Systeme sind, welche sich in einem und demselben Medium befinden. Ein Beispiel hierfür ist der von uns betrachtete Fall, wo A und B durch die beiden gleichen Linsen L und L_1 repräsentirt werden, die rings von Luft umgeben sind. Dann ist zu setzen: $a_1 p_1 = a_2 p_2 = a_1 \pi_1 = a_2 \pi_2$, und wir erhalten, wenn wir diese den Linsen L und L_1 gemeinschaftliche Brennweite mit f und ferner den Abstand beider $d = 2LF + 2RF = 2f + 2e$ bezeichnen:

$$a_1 t_1 = \frac{(d - f)f}{d - 2f} = a_2 t_{\text{,,}} = \frac{f^2}{2e} + f \quad \text{und} \quad a_2 r_1 = a_2 r_{\text{,,}} = \frac{f^2}{e} + f.$$

Ferner ist s die Mitte von LL_1 , und somit ist das Bild des Spiegels R (Fig. 3) entworfen von L_1 die zweite, entworfen von L dagegen die erste Hauptebeue des combinirten Systems ($L + L_1$).

In unserem speciellen Falle der Combination zweier Linsen in Luft von ganz derselben Brennweite gilt aber noch eine Beziehung, die für uns, wie wir sehen werden, von der grössten Bedeutung ist. Ganz allgemein besteht für einen von $t_{\text{,,}}$ (Fig. 4) ausgehenden Strahl $t_{\text{,,}} m_2 m_1 g_2 g_1 \infty$ die Relation:

$$a_2 g_2 = \frac{a_1 m_1 \cdot a_2 p_2}{a_1 p_2} = \frac{u \pi_2 \cdot a_2 t_{\text{,,}} \cdot a_2 p_2}{\pi_2 t_{\text{,,}} \cdot a_1 p_2},$$

wenn u der Schnittpunkt dieses Strahles mit der durch π_2 gelegten zweiten Brennebene des Systems B ist. Ist nun $a_1 p_1 = a_2 p_2 = a_1 \pi_1 = a_2 \pi_2 = f$ und $d = 2(f + e)$, so wird nach dem vorigen:

1) v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abh. 2. p. 105 ff.

$$\alpha_2 t_{..} = \frac{f^2}{2e} + f; \quad a_2 p_2 = f; \quad \pi_2 t_{..} = \frac{f^2}{2e}; \quad \alpha_1 p_2 = f + 2e,$$

der Factor von $u\pi_2$ demnach:

$$\frac{\alpha_2 t_{..} \cdot a_2 \pi_2}{\pi_2 t_{..} \cdot \alpha_1 p_2} = \frac{\frac{f^2 + 2ef}{2e} \cdot f}{\frac{f^2}{2e} (f + 2e)} = 1 \quad \text{und somit} \quad a_2 g_2 = u\pi_2. \quad -$$

Wir kehren jetzt zur Figur 3 zurück und wenden die zuletzt abgeleiteten Resultate an Δ passend zu transformiren. Gemäss dieser Resultate ist:

$$L_{..}B = f + \frac{f^2}{2e},$$

sodass, wenn $L_{..}E = f$, wie es laut Beobachtung der Fall:

$$BE = \frac{f^2}{2e}$$

wird. Dann ist aber auch $Eu = Lg$ und $Ez = Lh$, wo z der Schnittpunkt des verlängerten Eu mit dem Strahle nB ist, und wir können für die aus den Dreiecken BzE und BuE folgenden Werthe:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \frac{2e}{f^2} \cdot Ez \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \frac{2e}{f^2} \cdot Eu$$

auch schreiben:

$$\varepsilon_1 = \frac{2e}{f^2} \cdot Lh, \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{2e}{f^2} \cdot Lg.$$

Die für den Punkt u_1 berechnete Phasendifferenz war:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{V n^2 - \sin^2 \varphi} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Setzen wir hierin die obigen für ε_1 und ε_2 gefundenen Werthe ein, so erhalten wir das Resultat.

$$\Delta = \frac{d \cdot e \cdot \sin 2\varphi}{f^2 V n^2 - \sin^2 \varphi} (Lg + Lh).$$

Selbstverständlich muss auch hier Lg bezüglich Lh positiv oder negativ genommen werden, je nachdem g , resp. h ober- oder unterhalb L liegt.

Unser schliesslich für Δ abgeleiteter Werth ist insofern äusserst einfach und interessant, als der darin auftretende Factor $Eu + Ez = Lg + Lh$ nichts anderes ist, als der Abstand zweier von der Mitte gleichweit entfernt liegender

Punkte der Erscheinung. Ist dies bewiesen, so ergibt sich aus der Phasendifferenzgleichung sofort, wie der Abstand zweier Streifen variiert mit der Aenderung der Entfernung (e) des Spiegels, der Dicke (d) der Platte etc. etc.

Bekanntlich ist nach dem Interferenzprincip von Thomas Young im Punkte u ein Maximum oder Minimum der Helligkeit, je nachdem die Phasendifferenz in u ein gerades oder ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge des angewendeten Lichtes ist. Um daher den Ort der hellen und dunklen Streifen zu bestimmen, setzen wir:

$$A = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Lg + Lh) = p \frac{\lambda}{2},$$

wo λ die Wellenlänge des Lichtes und p eine ganze positive oder negative Zahl bedeute. Bei einer bestimmten Stellung der Platte, des Spiegels und bei Anwendung einer gewissen Linse ist der Factor von $Lg + Lh$ constant. In diesem Falle ändert sich also A proportional $Lg + Lh$, und der Punkt, auf welchen sich A bezieht, ist um $Eu = -Lg$ von E entfernt, wenn auch hier die von E abgerechneten Strecken positiv oder negativ in Rechnung gezogen werden, je nachdem sie ober- oder unterhalb der optischen Axe liegen. Ist also Lg positiv, so ist Eu gleich gross, aber negativ und umgekehrt.

Es fragt sich nun, ob und für welchen Punkt A gleich Null wird. Inderthat tritt dieser Fall ein, wenn $Lg = -Lh$, d. h. wenn die beiden Strahlen auf verschiedenen Seiten der optischen Axe und gleichweit von ihr entfernt auf die Linse L auftreffen. Die Grösse des Abstandes Lg der Strahlen von der optischen Axe ist aber bestimmt durch die Bedingung, dass der Schnittpunkt beider Strahlen, welchen wir C nennen wollen, ein Punkt der durch E gehenden Brennebene sein soll; dadurch ist dann zugleich die Entfernung CE gegeben, insofern gilt: $CE = -Lg = Lh$, d. h. insofern C soviel oberhalb E liegt, als g unterhalb L .

Damit u , der Schnittpunkt des beliebigen Strahlenpaares kg und rh in der Brennebene E liegt, muss die Bedingung erfüllt sein: $EL_{''} = BL_{''} - BE = f$.

Nun ist:

$$BL_{\mu} = f + \frac{f^2}{2e} \quad \text{und} \quad BE = \frac{uz}{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2} = \frac{uz}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \\ = \frac{uz \cdot f^2}{2e(Lh - Lg)} = \frac{uz \cdot f^2}{2e \cdot gh},$$

wo aber uz eine für jedes Strahlenpaar ganz bestimmte Grösse hat. Denn es ist:

$$uz = ac \cdot \cos e_1 = 2d \operatorname{tg} b_1 \cos(\varphi + \varepsilon_1),$$

welcher Ausdruck mit Benutzung der früher eingeführten Vernachlässigungen schliesslich folgende Gestalt annimmt:

$$uz = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \varepsilon_1 \left(\frac{2d \cos 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \frac{2d \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}^3} \right).$$

Für bestimmte Werthe z. B. $d = 4 \text{ mm}$, $n = 1,5$ und $\varphi = 45^\circ$ ist: $uz = 3,024 + \varepsilon_1 \cdot 0,8639$.

Darnach variirt uz also mit ε_1 , d. h. es ist verschieden für die verschiedenen Strahlenpaare. Da nun:

$$EL_{\mu} = f + \frac{f^2}{2e} \left(1 - \frac{uz}{gh} \right) = f$$

sein soll, so muss $gh = uz$ werden; also muss auch gh verschieden sein, je nachdem der Abstand Lg des Strahlenpaares von der optischen Axe ein anderer ist.

Dennoch dürfen wir in dem für Δ gefundenen Werthe:

$$\Delta = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (2Lg + gh),$$

$gh = uz$ als constant ansehen, welches auch der Werth von Lg sein möge. Der Grund hiervon ist folgender. Setzen wir für gh seinen Werth:

$$uz = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} + \varepsilon_1 \cdot K,$$

wo K die Klammergrösse bedeute, und für e/f^2 den früher abgeleiteten Werth $\varepsilon_1/2 \cdot Lh$ oder $\varepsilon_2/2 \cdot Lg$ ein, so können wir Δ schreiben:

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \left(2Lg + \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \right) \frac{\varepsilon_1}{2Lg} \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{K d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \frac{1}{2Lg},$$

und, der Uebersicht wegen wieder die numerischen Werthe eingeführt:

$$\Delta = \frac{3,024}{2 \cdot Lg} (2 Lg + 3,024) \varepsilon_2 + \frac{2,6}{2 \cdot Lg} \varepsilon_1 \varepsilon_2;$$

$$\Delta = \left(3,024 + \frac{4,572}{Lg} \right) \varepsilon_2 + 1,3 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{Lg}.$$

Für jeden Werth von Lg ist der Factor von $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ kleiner als der von ε_2 . Der Consequenz halber müssen wir demnach das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen, weil wir es bei der Ableitung von Δ gethan haben. In der That ist Δ von der Ordnung der Wellenlänge unendlich klein. Das zweite Glied rechts ist aber ungefähr das Quadrat des ersten, also eine für uns ganz verschwindend kleine Grösse.

Ergibt sich somit, dass $gh = uz = (d \sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})$ gesetzt werden darf¹⁾, so sind wir jetzt auch im Stande, die Entfernung CE anzugeben. Denn da $Lg + Lh = 2Lg + gh$, so ist $\Delta = 0$ für $Lg = -Lh = -(gh/2)$, und demnach ist $CE = -Lg = + (gh/2) = (d \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi})$; für die eingeführten numerischen Werthe wird diese Grösse 1,512 mm. Um soviel liegt der Punkt C oberhalb der optischen Axe. Dass C der einzige Punkt ist, in welchem die sich schneidenden Strahlen keinen Gangunterschied haben, folgt sehr einfach daraus, dass für jeden Punkt u die Entfernung $Eu \geq EC$, also auch Δ in u von Null verschieden ist, insofern ja $\Delta = (de/f^2) (\sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}) (2Eu + uz)$. Es lässt sich nun zeigen, dass in je zwei Punkten u , welche sich in gleichem Abstände von C , der eine aber oberhalb, der andere unterhalb der Axe befinden, die absolute Grösse der Phasendifferenz ganz dieselbe ist. Dazu betrachten wir neben dem in Fig. 3 gezeichneten Strahlenpaare rh und kg ein anderes, unterhalb der optischen Axe verlaufendes Paar $r_1 h_1$ und $k_1 g_1$, für welches gelten möge: $Lg = -Lh_1$ und $Lh = -Lg_1$; es ist dann von selbst $|g_1 h_1| = |gh|$, wo unter $|m|$ der absolute

1) Diese Grösse hat übrigens eine ganz gewisse Bedeutung. Ziehen wir nämlich von s (Fig. 3) eine Parallele zum Strahle kg , so ist der senkrechte Abstand dieser beiden Strahlen, welche aus Ss entstehen, gerade $d \sin 2\varphi / \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$; unser obiges Resultat sagt also aus, dass wir Sr mit Ss zusammenfallen lassen dürfen, d. h. dass das zur Interferenz kommende Strahlenpaar aus einem einzigen einfallenden Strahle entsteht. Hierin ist auch der Grund dafür zu suchen, dass die Erscheinung so ganz unabhängig von der Entfernung der Lichtquelle ist.

Werth von m verstanden werde, sodass sich auch dieses zweite Paar in einem Punkte der Brennebene E schneidet. Dieser Schnittpunkt sei u_2 ; unserer früheren Resultate gemäss ist dann in u_2 :

$$Au_2 = -\frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Lh_1 + Lg_1);$$

ferner $Eu_2 = |Lg_1|$.

Das heisst also, in einem um $Eu_2 = Lh$ oberhalb E liegenden Punkte ist die Phasendifferenz dem absoluten Werthe nach gleich derjenigen im Punkte u , welcher unterhalb E um $Eu = Lg$ von E entfernt liegt.

Wir wollen sehen, welches der Mittelpunkt (C_1) des Abstandes uu_2 ist. Wie aus dem Vorhergehenden folgt, ist: $C_1E = (Eu_2 + (-Eu))/2$, also: $C_1E = (Lh - Lg)/2 = +gh/2$, d. h. der Punkt C_1 ist identisch mit dem Punkte C , in welchem $A = 0$ ist. Ferner ist $uu_2 = |Eu_2| + |Eu| = |Lh| + |Lg| = |2Lg + gh|$, sodass unser Resultat, zu dem wir endlich gekommen, lautet:

„Die Phasendifferenz in gleichweit zu beiden Seiten von C liegenden Punkten u und u_2 ist ihrem absoluten Werthe nach einander gleich, und zwar ist sie: $d.e.\sin 2\varphi.uu_2/f^2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$, wenn uu_2 den Abstand der beiden Punkte bedeutet.“

Wir wollen den Abstand der p ten hellen oder dunklen homologen Streifen mit D_p bezeichnen. Gemäss dem letzten Resultate in Verbindung mit dem Young'schen Interferenzprincipe ist dann:

$$D_p = \frac{f^2 \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{d \cdot e \sin 2\varphi} \cdot p \frac{\lambda}{2},$$

wo p jede ganze Zahl sein kann. Je nachdem p gerade oder ungerade, ist D_p der Abstand zweier homologer Maxima oder Minima. Demnach verhalten sich bei bestimmter Stellung des Spiegels die Abstände der dunklen Streifen wie 1:3:5 etc., d. h. die Streifen sind äquidistant. Dies ist richtig für jeden Werth von e . Stets also ist der Abstand zweier beliebiger, benachbarter Minima gleich dem Abstände der ersten Minima voneinander, welchen wir kurzweg „Streifenabstand“ nennen und mit D bezeichnen wollen. Für diesen wird unsere obige Gleichung:

$$D = \frac{\lambda \cdot f^2}{2d \cdot e} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\sin 2\varphi},$$

welche aussagt, dass der Streifenabstand proportional ist der Wellenlänge des Lichtes, dem Quadrate der Brennweite der Linse und dem Ausdruck $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} / \sin 2\varphi$, sich aber umgekehrt verhält wie die Dicke der Platte und die Entfernung des Spiegels vom Brennpunkte der Linse.

Bei einer dicken Platte sind demnach die Streifen enger aneinander, als bei einer dünnen, während sie bei rothem Lichte breiter erscheinen, als bei blauem oder violetterm. Aus letzterem Grunde müssen bei Anwendung gemischten Lichtes farbige Streifen auftreten, die symmetrisch zu einem weissen Centralstreifen liegen und nach innen zu roth, nach aussen violett gefärbt sein müssen. Um die Aenderung des Streifenabstandes vom Winkel φ kennen zu lernen, müssen wir wissen, wie sich $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} / \sin 2\varphi$ ändert mit φ . In einer früheren Abhandlung¹⁾ habe ich diesen Ausdruck schon einmal zu betrachten gehabt; wie dort bewiesen, wird derselbe ein Minimum für $\varphi = 48^\circ 57' 57''$, wenn $n = 1,53$ gesetzt wird. Darnach sind die Streifen am engsten, wenn φ ca. 48° , und sie werden weiter, sowohl wenn φ grösser, als wenn φ kleiner denn ca. 48° . Am interessantesten von allen Beziehungen ist jedoch die Abhängigkeit des Streifenabstandes von der Entfernung des Spiegels vom Brennpunkte der Linse. Für $e = 0$ ist $D = \infty$, d. h. wenn der Spiegel im Brennpunkte steht, treten gar keine Streifen auf. Sowie e einen gewissen Werth erreicht, ist D so klein geworden, dass im Gesichtsfelde Streifen erscheinen. Ihr Abstand ist verkehrt proportional e . Treten z. B. für $e = 1$ cm vier Streifen auf, so für $e = 2$ cm acht; für 3 cm 16 Streifen etc. bis für $e = \infty$. $D = 0$ geworden, d. h. unendlich viele Streifen auftreten.

Einen dem meinigen sehr ähnlichen, aber, wie ich annehmen muss, von demselben wesentlich verschiedenen Versuch hat Hr. Mascart angestellt und beschrieben.²⁾ Auch er benutzt in derselben Anordnung Spiegel, Objectivlinse und

1) O. Lummer, Wied. Ann. 23. p. 49 ff. 1884.

2) Mascart, Ann. de chem. et de phys. 23. p. 149 ff. 1871.

Platte. Aber seiner Theorie nach, welche mit der obigen in directem Widerspruch stünde, falls sein Versuch mit dem meinen identisch wäre, kommen erst dann Streifen zu Stande, wenn mittelst eines Fernrohres beobachtet wird. Denn er sagt p. 150: „Alle parallel zur optischen Axe der Objectivlinse verlaufenden Strahlen werden im Brennpunkt (k) convergiren; nachdem sie am Spiegel reflectirt worden sind, werden sie von k' divergiren (k' ist der Spiegelpunkt von k) und von neuem das Objectiv durchsetzend, treffen sie convergent auf die Platte auf. Die verschiedenen Strahlen, welche dieses Bündel zusammensetzen, werden nicht dieselben Einfallswinkel haben, aber nichtsdestoweniger werden sie nach dem Gesetz der Refraction unter sich concordant sein in demjenigen Punkte, wo die Beobachtungslinse sie vereinigen wird etc.“ Weiter sagt er, dass alle parallel der optischen Axe auffallenden Strahlen den Centralstreifen, alle parallel einer anderen Richtung auffallenden Strahlen einen gewissen anderen Streifen bilden. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Streifen nicht wie bei uns im Focus der Objectivlinse, sondern dort auftreten, wo die von der Platte zurückkehrenden Strahlen vereinigt werden von einer zweiten Linse, der Beobachtungslinse. Uebrigens scheint Hr. Mascart nur dann Streifen gesehen zu haben, wenn der Spiegelabstand e sehr klein war, denn nur unter dieser beschränkenden Annahme berechnet er die Phasendifferenz; experimentelle Bestimmungen aber fehlen ganz. Leider ist es mir nicht gelungen, mittelst der aus Hrn. Mascart's Theorie zu folgender Beobachtungsweise Streifen zu erhalten.

Wie bei der Beschreibung der Erscheinung erwähnt, bleibt letztere ungeändert, in welcher Entfernung auch die Platte P von der Linse stehen möge, wenn nur ihre Neigung gegen die optische Axe dieselbe bleibt. In der That ist die Phasendifferenz im Schnittpunkte zweier Strahlen auch unabhängig von der Entfernung $L_1P_1 = LP$, sodass damit schon die Richtigkeit der beobachteten Thatsache erwiesen ist.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man für die verschiedenen Entfernungen der Platte ein und dasselbe Strahlen-

paar bis zu seinem Schnittpunkte u_1 verfolgt und die Phasendifferenz daselbst berechnet. Wie der Verlauf der Strahlen in dem Falle ist, wo sich die Platte ausserhalb der Brennweite der Linse befindet, zeigt Fig. 5. Die interferierenden Strahlen gehen jetzt divergent von der Platte so, als ob sie von u kämen.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, dass der Spiegel innerhalb LF , der Brennweite der Linse L steht. Der Abstand des Spiegels R (Fig. 6) von dem Brennpunkte F der Linse werde wieder mit e bezeichnet, aber negativ gerechnet. Ist dann L_1 das Spiegelbild von L und P_1 dasjenige von P in Bezug auf den Spiegel R , sodass $RL = RL_1$ und $PR = P_1R$ ist, so ist der Verlauf zweier parallel PL auf L auftreffender Strahlen, wie ihn Fig. 6 darstellt. Die in F sich schneidenden Strahlen treten aus L_1 divergent aus, und zwar scheinen sie von B , dem zu F in Bezug auf L_1 conjugirten Punkte zu kommen. Nach dem Austritt werde wieder derjenige Strahl an der Vorderfläche von P_1 reflectirt, welcher die Platte P durchsetzt hat und umgekehrt. Bei der in Fig. 6 gewählten Stellung der Platte, wo $L_{11}P_1$ kleiner als $L_{11}E$ und E der zweite Brennpunkt von L_1 ist, schneiden sich dann die von P_1 kommenden Strahlen in dem Punkte u_1 . Construiren wir zu diesem Schnittpunkte u_1 das Bild u , welches die Vorderfläche von P_1 entwirft, so muss auch hier laut Beobachtung u ein Punkt der Brennebene Eu von L_1 sein. Unsere Aufgabe ist, die Phasendifferenz der in u_1 sich schneidenden Strahlen zu berechnen, welche den bestimmten von uns bezeichneten Weg zurückgelegt haben. Da $du_1 = du$ und $cu_1 = cu$, so ist in u dieselbe Phasendifferenz als in u_1 , und werden wir der Bequemlichkeit halber wieder u als Schnittpunkt der Strahlen betrachten. Was dann für u bezüglich P_1E gilt, gilt für u_1 bezüglich P_1E_1 , wenn E_1 der Bildpunkt von E in Bezug auf die Vorderfläche von P_1 .

Die Berechnung der Phasendifferenz, die immer nach denselben Grundsätzen ausgeführt wird, ergibt für den Punkt u :

$$\Delta = \frac{d \sin 2\varphi}{2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

wo die eingeführten Zeichen ganz dieselbe Bedeutung haben wie im früher betrachteten Falle, und über die $\frac{2}{3}\epsilon_1$ und ϵ_2 , welche aB und dB mit L_1B bilden, dieselben Annahmen gemacht sind, wie dort. Verlängern wir Bd und Ba , so schneiden diese Verlängerungen die durch E gelegte Brennebene in u und z , und auch hier gilt, wie leicht zu finden:

$$Eu = Lg \text{ und } Ez = Lh;$$

ferner ist:

$$[BL_{11}] = \frac{f^2}{2e} - f \text{ also: } [BE] = \frac{f^2}{2e} - f + f = \frac{f^2}{2e},$$

insofern: $L_{11}E = f$ sein soll. Drücken wir ϵ_1 und ϵ_2 durch e und f aus, so wird in u die Phasendifferenz:

$$\Delta = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Eu + Ez)$$

oder:

$$\Delta = \frac{de}{f^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} (Lg + Lh).$$

Damit haben wir das interessante Resultat erhalten, dass zwei bestimmte, parallel zur Axe der Linse L auf letztere auffallende Strahlen sich in ein und demselben Punkte u der Brennebene Euz von L_1 , und zwar mit ganz derselben Phasendifferenz treffen, gleichviel ob der Spiegel um die Strecke e vor oder hinter dem Brennpunkte F liegt.

Auch im jetzigen Falle ist der in Δ vorkommende Factor $Lg + Lh = 2Lg + gh$, wo gh als constant zu betrachten ist, der Abstand homolog zum Mittelstreifen gelegener Minima, sodass für den Abstand D zweier benachbarter dunkler Streifen gilt:

$$D = \frac{\lambda f^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{2d.e.\sin 2\varphi},$$

wo alle rechts vorkommenden Grössen ganz dieselben sind, wie im früheren Falle, und nur e von F nach L zu gerechnet werden muss, anstatt wie früher, von F nach L_1 zu. Die Resultate, welche wir gewonnen, sind somit folgende:

1) Die Mitte der Erscheinung liegt, wenn sie im durchgehenden Lichte betrachtet wird, auf derjenigen Seite der optischen Axe, von welcher das Licht auf die Platte auffällt.

2) Der Abstand der Minima ist proportional der Wellenlänge des Lichtes.

3) Die Streifen sind äquidistant.

4) Der Streifenabstand ist derselbe, wenn der Spiegel ebensoweit vor als hinter dem Brennpunkte der Linse steht.

5) Der Streifenabstand ist umgekehrt proportional der Entfernung e des Spiegels vom Brennpunkte der Linse, gleichviel, ob e positiv oder negativ ist; ferner

6) umgekehrt proportional der Dicke der Platte,

7) direct proportional dem Quadrate der Brennweite der benutzten Linse.

8) Der Streifenabstand ist ein Minimum für q ca. 49° . —

Es wird jetzt unsere Aufgabe sein, diese Gesetze einzeln experimentell zu prüfen. Wir gehen demnach über zum experimentellen Theil dieser Arbeit.

Experimenteller Theil.

Um deutlich zu erkennen, dass der Centralstreifen nicht auf der optischen Axe der Linse liegt, stellt man am besten den Versuch im durchgehenden Lichte dar, ganz wie Fig. 1 zeigt, und bringt das gespiegelte Fadenkreuz mit dem wirklichen zur genauen Coincidenz; der Fadenkreuzschnittpunkt ist dann der Brennpunkt der Linse, und durch ihn geht die optische Axe derselben. Ist der Spiegel dann so gestellt, dass die Streifenbreite klein und der Streifen viele auftreten, so sieht man deutlich den Mittelstreifen auf der rechten Seite der optischen Axe, und zwischen letzterer und dem Mittelstreifen noch mehrere Minima liegen.

Alle anderen abgeleiteten Resultate betreffen die Relation des Streifenabstandes zu den verschiedenen vorkommenden veränderlichen Grössen. Wollen wir demnach diese Relationen experimentell nachweisen, so müssen wir in jedem einzelnen Falle im Stande sein, die Streifenabstände messen zu können.

Das von mir benutzte Princip zur Messung des Streifenabstandes ist ein äusserst einfaches und bequemes.

Seien α und β (Fig. 7) zwei leuchtende Punkte in der Brennebene der Linse λ , deren erster Hauptpunkt h ist. Wie bekannt, treten alle von β ausgehenden Strahlen unter einander und parallel der Richtung βh aus; die von α kommenden dagegen parallel zur Richtung αh . Die beiden von λ

fortgehenden parallelen Strahlencomplexe bilden also den $\nless \delta = \nless ah\beta$ miteinander. Ist F der Brennpunkt der Linse, so gilt:

$$\alpha F = hF \cdot \operatorname{tg} \alpha h F, \quad \beta F = hF \cdot \operatorname{tg} \beta h F$$

und, wenn wir nur kleine Winkel zu betrachten haben, dürfen wir setzen:

$$\alpha F = hF \cdot \nless \alpha h F, \quad \beta F = hF \cdot \nless \beta h F,$$

sodass wird: $\alpha F + \beta F = hF (\nless \alpha h F + \nless \beta h F)$. Darin ist: $\alpha F + \beta F = \alpha\beta$; $\nless \alpha h F + \nless \beta h F = \nless \alpha h \beta = \delta$ und ferner hF die Brennweite von λ , welche wir mit φ bezeichnen wollen. Kennen wir φ , und können wir den Winkel δ messen, so ist der Abstand $\alpha\beta$ gegeben durch die Gleichung:

$$\alpha\beta = \varphi \cdot \delta.$$

Den Winkel δ messen wir aber einfach dadurch, dass wir vor die Linse λ ein auf unendlich eingestelltes, und um eine verticale Axe drehbares Fernrohr bringen, und nacheinander das Bild von α und β mit dem im Focus befindlichen Fadenzkreuzschnittpunkt coïncidiren lassen. Der Drehungswinkel ist der gesuchte Winkel δ .

In unserem Falle brauchen wir die Berechnung der absoluten Grösse $\alpha\beta$ gemäss der oben abgeleiteten Gleichung nun gar nicht auszuführen. Denn da wir es nur mit Relationen verschiedener Abstände $\alpha\beta$ in verschiedenen Fällen zu thun haben, so hebt sich bei Bildung dieser Relationen der constante Factor φ stets fort. Die verschiedenen Grössen $\alpha\beta$ verhalten sich demnach wie die zugehörigen Winkel δ , gemessen mit ganz derselben Linse λ , woraus folgt, dass alle für den Streifenabstand geltenden Resultate auch für den zum Streifenabstand gehörenden $\nless \delta$ Gültigkeit haben müssen. Bedeuten α und β zwei homologe Minima, so werde der zugehörige $\nless \delta$ der „Distanzwinkel“ dieser Minima genannt. In den auf p. 533 und 534 zusammengestellten Gesetzen kann dann „Distanzwinkel“ an Stelle von „Streifenabstand“ gesetzt werden.

Zur Messung der Distanzwinkel der Streifen hat man sich demnach ganz derselben Methode zu bedienen, wie bei Beobachtung der Erscheinung im reflectirtem Lichte. Am

besten verfährt man so: Man stellt das Fernrohr eines Spectrometers mittelst des Gauss'schen Oculars möglichst genau auf unendlich ein; setzt vor das Objectiv auf das Spectrometertischchen die achromatische Linse λ von grosser Brennweite und verschiebt nun das ganze Spectrometer in Richtung der von der Platte zurückkommenden Strahlen, bis man die Interferenzstreifen im Fernrohre mit dessen Fadengkreuz zugleich deutlich sieht. Wie schon damals erörtert, stehen dann die Streifen in der Brennebene von λ , und sind somit die Distanzwinkel durch Einstellen und Drehen des Fernrohres leicht zu bestimmen. Ehe ich irgend welche Resultate der Messung mittheile, sei noch folgende Bemerkung betreffs derjenigen Lichtquelle gemacht, die am geeignetsten ist, genaue Resultate zu liefern.

Wie das zweite Gesetz aussagt, ist der Streifenabstand proportional der Wellenlänge. Spricht schon die Färbung der Streifen dafür, so kann man sich von der Richtigkeit dieses Resultates noch leicht dadurch überzeugen, dass man vor die weisse Lichtquelle verschiedenfarbige Gläser hält. Bei rothem Glase ist der Abstand fast doppelt so gross, denn bei blauviolett gefärbtem.

Während so die ersten Minima noch dunkel, und nach der Mitte zu roth, nach aussen hin bläulich gefärbt erscheinen, wechseln, weiter von der Mitte entfernt, schliesslich nur noch blaue mit rothen Streifen ab. Von der Mitte nach aussen gerechnet, liegen die Minima dann beim Uebergang von roth zu blau. Da diese Grenze sehr scharf gezeichnet, so gibt sie ein Mittel an die Hand, selbst bei grosser Streifenbreite noch genau auf die Minima einzustellen. Bei Anwendung monochromatischen Lichtes ist diese Einstellung ungleich ungenauer, da schon bei geringem Streifenabstande die Minima verwaschen und breit sind. In der That erhielt ich bei Benutzung natürlichen Lichtes bedeutend übereinstimmendere Werthe für δ , als bei Anwendung homogenen oder Natriumlichtes. Da ferner im ersteren Falle die Erscheinung glanzvoller und die Mitte jederzeit erkenntlich, so wurden alle Messungen an den gefärbten Streifen ausgeführt.

Das zur Beobachtung benutzte Spectrometer erlaubte die Winkel bis auf 10'' genau abzulesen. Ein aus der Differenz zweier Ablesungen gefundener Distanzwinkel irgend zweier Minima wird daher im schlimmsten Falle mit einem Fehler von 20'' behaftet sein. Um die Aequidistanz der Streifen nachzuweisen, wird man daher nicht den Abstand je zweier benachbarter Streifen messen und diese miteinander vergleichen, sondern besser so verfahren: die Abstände je zweier homologer Minima messen, durch die zugehörige Ordnungszahl dividiren (wobei das erste Minimum der erste Streifen, das darauf folgende Maximum der zweite Streifen, das zweite Minimum der dritte Streifen etc.) und einander gleichsetzen. Denn, wenn mit δ_n der Distanzwinkel der n ten homologen hellen oder dunklen Streifen bezeichnet wird, so sagt das Gesetz der Aequidistanz nichts anderes aus, als dass $\delta_1 = \delta_3/3 = \delta_5/5 = \text{etc.}$ sein muss. Man sieht ein, dass $\delta n/n$ nur noch den n ten Theil des grösstmöglichen durch Ablesung entstehenden Fehlers enthält. Aus diesem Grunde wurde auch für die späteren Messungen nicht δ_1 , sondern stets $\delta_5/5$ dem Streifenabstande zu Grunde gelegt. In der folgenden Tabelle finden wir die für δ_1 , $\delta_3/3$ etc. bei rothem und weissem Lichte erhaltenen Werthe nebeneinander gestellt.

Tabelle I.

δ	rothes L	weisses L	δ	rothes L	weisses L
δ_1	4' 40''	4' 30''	$\delta_5/5$	4' 36''	4' 32''
$\delta_3/3$	4 40	4 30	$\delta_7/7$	4 33	4 30

Aehnliche bei verschiedenen Entfernungen des Spiegels gemachte Beobachtungen ergaben ebenso befriedigende Resultate. Wir gehen daher zur Prüfung des vierten Gesetzes über. Um alle die bei der Herleitung unserer Resultate gestellten Bedingungen möglichst genau zu erfüllen, auch wenn der Spiegel andere und andere Lagen im Raume einnimmt, wurde als Linse L eine in einem Fernrohr (r) (Fig. 8) festsitzende Objectivlinse benutzt und die Ocularlinse entfernt. Es war dann leicht, die optische Axe nahe in eine

Ebene mit derjenigen des Beobachtungsfernrohres zu bringen. Um den Spiegel (R) senkrecht zur optischen Axe von L oder was dasselbe, zur Axe des Rohres r [parallel] stellen und so parallel mit sich verschieben zu können, wurde er an das Auszugsrohr ρ des Rohres r geklebt. Nachdem mittelst der Gauss'schen Methode bewiesen, dass in der That der Spiegel senkrecht zur optischen Axe von L stand, und es beim Bewegen des Auszugsrohres auch blieb, wurde derselbe von letzterem wieder getrennt und auf einem selbständigen Stativ befestigt. Derselbe bestand aus einer Messingschiene m (Fig. 8), welche auf einem schweren eisernen Fusse festsass und längs ihrer Oberfläche eine Nuth hatte, in die eine entsprechend geformte Leiste des Metallstückes s passte. Letzteres sass glatt auf m auf und konnte leicht hin und her geschoben werden. An der dem Rohre ρ zugewendeten Fläche von s wurde der Spiegel R so befestigt, dass, wenn die Schiene m nahe die Richtung des Rohres r hatte, das Auszugsrohr ρ an allen Stellen seiner Peripherie mit dem Spiegel in Berührung stand. War dies der Fall, so stand der Spiegel senkrecht zur Axe von L und blieb es, wenn er längs der Schiene verschoben wurde. — Uebrigens hatte man eine Controle dafür, dass der Spiegel parallel zu sich bewegt werden konnte, indem dann die am Fadenkreuzschnittpunkt des Beobachtungsfernrohres befindliche Mitte der Erscheinung bei jeder Entfernung des Spiegels daselbst bleiben musste.

Der Beweis der Relation 4 und 5, erfordert eine Verschiebung des Spiegels vom Brennpunkt der Linse L nach derselben hin und von derselben fort. Bei der beschriebenen Anordnung des Versuchs ist nur letzteres möglich, insofern ja der Brennpunkt des Objectivs L des Rohres r immer am Ende von r liegt. Diesem Uebelstand kann aber sehr leicht abgeholfen werden dadurch, dass man vor L eine biconcave Linse l von grösserer Brennweite als L befestigt und beide mittelst Spiegelbilder centrirt. Denn ist f die Brennweite von L und $-q$ diejenige von l , so wird F , die Brennweite des Systems ($L + l$), ausgedrückt durch die Gleichung:

$$F = \frac{qf}{q - f}.$$

Ist, wie festgesetzt worden, $[\varphi] > [f]$, so die Brennweite des Systems reell und, wie folgendes Zahlenbeispiel lehrt, grösser als die von L allein. Für $f = 30$ cm und $[\varphi] = 70$ cm z. B. wird: $F = 52,5$ cm. Freilich wird durch Vorsetzen der Linse l vor L ein Linsensystem entstehen, dessen Achromasie geringer, und dessen Aberration grösser als diejenige der Linse L allein ist; bedenken wir aber, dass nur unendlich nahe der optischen Axe des Linsensystems verlaufende Strahlen zur Erscheinung beitragen, so dürfen wir diese schädlichen Einflüsse von λ ganz ruhig ausser Acht lassen. Wir können jetzt also den Brennpunkt der in r befindlichen zusammengesetzten Linse ($L + l$) durch geeignete Wahl von l beliebig weit von r entfernen, und somit sind wir im Stande, den Spiegel durch den Brennpunkt hindurch der Linse bald zu nähern, bald von ihr weiter wegzurücken. Um die Verschiebung des Spiegels messen zu können, wurde an der Seitenfläche von m eine Scala befestigt, über welcher der über m hervorragende Spiegel hinglitt. Der Spiegel berührte mit seiner unteren Fläche fast die Oberfläche der Schiene m , sodass man beim Visiren längs der spiegelnden Fläche des Spiegels stets auf denselben Theilstrich einstellte. Ist ferner die über m gleitende Fläche des Spiegels eben und geschliffen, so spiegelt sich in dem über m hervorspringenden Theile derselben die Scala, und die Einstellung der unteren Kante des Spiegels auf einen Theilstrich ist eine äusserst genaue.

Die scheinbar grösste Schwierigkeit bei Prüfung der Gesetze 4 und 5 liegt in dem Auffinden des Brennpunktes unseres Linsensystems ($L + l$) im Raume d. h. unseres Nullpunktes der Scala, von welchem aus die $+e$ und $-e$ gemessen werden. Diese Schwierigkeit ist aber nur scheinbar; sie ist sofort gehoben, wenn wir an das von uns abgeleitete Gesetz denken, welches aussagt, dass gar keine Streifen auftreten, sobald der Spiegel im Brennpunkte der Linse steht. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, oder nur nahezu. Gibt es auch eine Spiegelstellung, wo die Streifen sehr weit voneinander entfernt sind, und ihr Abstand ein Maximum erreicht hat, so verschwinden sie doch selten gänzlich aus

dem Gesichtsfelde. Nur bei einer sehr guten Einstellung aller zum Versuch nöthigen Apparate, wie dies der Fall bei der Senkrechtstellung des Fernrohrs auf eine Prismenfläche, verschwinden die Streifen bei gewisser Stellung des Spiegels ganz aus dem Gesichtsfelde und kehren erst wieder, nachdem der Spiegel eine endliche Strecke zurückgelegt hat. Es ist wohl kaum nöthig, hervorzuheben, dass für unsere Einstellung gerade der Umstand von grosser Wichtigkeit ist, dass bei jeder Stellung Streifen auftreten. Infolge dessen war bei meinen zu Messungen benutzten Versuchen diejenige Spiegeleinstellung, bei welcher das Sehfeld fast gleichmässig hell, eine äusserst empfindliche und sichere. Denn bei der leisesten Verschiebung des Spiegels aus dieser Nullstellung trat ein Zusammengehen der ersten Minima ein, deren innere rothe Säume auch dann sichtbar blieben, wenn $e = 0$ war.

Es fragt sich somit nur noch, ob denn das zur Bestimmung des Brennpunktes benutzte Gesetz richtig ist. Dass das der Fall, werden wir später direct beweisen. Hier wollen wir vorläufig annehmen, es sei der Brennpunkt gegeben durch die Stellung des Spiegels, bei welcher der Streifenabstand ein Maximum ist, darnach den Nullpunkt der Scala bestimmen und die Distanzwinkel für verschieden grosse $+e$ und $-e$ messen. Finden wir die Gesetze 4 und 5 bestätigt, so ist dann zugleich bewiesen, dass der Nullpunkt richtig. In der folgenden Tabelle sind die für gleichgrosse Entfernung des Spiegels vor und hinter dem Brennpunkte gemessenen Distanzwinkel des Streifenabstandes, also die Distanzwinkel zweier benachbarter Streifen nebeneinandergestellt. Dabei ist für $e = 1$ cm aus Mangel der Minima höherer Ordnung δ_3 , für alle übrigen e 's aber δ_5 beobachtet und auf δ reducirt worden. Diese Werthe δ_5 unterschieden sich bei verschiedenen Einstellungen des Spiegels auf denselben Scalentheil sowohl, als bei wiederholter Einstellung des Fadekreuzes auf dieselben Minima kaum um mehr als $10''$ bis $20''$. Es sind übrigens die Mittelwerthe aus je vier Beobachtungen angegeben, die an einer Platte von der Dicke $d = 4,012$ mm und dem Brechungsexponenten $n = 1,53$ ausgeführt worden sind.

Tabelle II.

e	Distanzwinkel δ		Differenz
	w. Sp. vor dem Focus	w. Sp. hinter dem Focus	
1 cm	16' 25,0''	15' 52,0''	+ 33,0''
2 "	8 14,0	8 8,4	+ 5,6
3 "	5 28,0	5 28,0	—
4 "	4 3,5	4 5,5	— 2,0
5 "	3 17,5	3 14,0	+ 3,5
6 "	2 43,3	2 42,0	+ 1,3
7 "	2 20,6	2 18,5	+ 2,1
8 "	2 1,3	2 1,3	—

Die in der letzten Verticalreihe stehenden Differenzen sind ausserordentlich klein und sprechen somit für die Richtigkeit des Gesetzes 4, als auch dafür, dass der Nullpunkt genau bestimmt, und dass überhaupt die Methode der Messung und Einstellung befriedigend streng gewesen sein musste.

Die in der zweiten oder dritten Verticalreihe stehenden Distanzwinkel erlauben nun zugleich, das Gesetz 5 zu prüfen, nach welchem sich δ umgekehrt verhalten soll wie die Entfernung ($+e$) des Spiegels vom Brennpunkte. Bezeichnen wir mit δ_{+e} den Distanzwinkel der Streifenbreite bei einer Entfernung von e cm des Spiegels vor dem Focus, und entsprechend mit δ_{-e} diesen Winkel, wenn der Spiegel um ebensoviel hinter dem Focus steht, dann können wir unsere Proportion 5 auch so ausdrücken:

Es müssen $e \cdot \delta_{+e}$ und $e \cdot \delta_{-e}$ für alle Werthe von $e = 1, 2 \dots$ cm constant und gemäss Proportion 4, einander gleich sein. Die so gebildeten Producte aus den in Tabelle III angegebenen Werthen finden wir in folgender Tabelle in den beiden ersten Verticalreihen nebeneinander gestellt. Da bei grossen Werthen von e in dem Producte $e \cdot \delta_{\pm e}$, in dem der e mal so grosse Beobachtungsfehler von $\delta_{\pm e}$ steckt, sich letzterer bemerkbar machen muss, so verfahren wir, um die in 5 ausgedrückte Proportion zu beweisen, besser so. Wir reduciren mittelst derselben alle für die verschiedenen e 's beobachteten Winkel δ auf den für $e = 5$ cm gemessenen Winkel, d. h. wir bilden $1 \cdot \delta_{\pm 1}/5$, $2 \cdot \delta_{\pm 2}/5$, $\frac{3}{5} \cdot \delta_{\pm 3}$ etc., welche Werthe alle einander gleich sein müssen, falls Gesetz 5 richtig, und zwar

gleich $(5 \cdot \delta_{\pm 5}/5) = \delta_{\pm 5}$. Wie leicht einzusehen, erhalten wir diese Werthe einfach dadurch, dass wir alle die schon gebildeten und in den beiden ersten Verticalreihen der nächsten Tabelle aufgeführten Producte: $e \cdot \delta_{\pm e}$ durch 5 dividiren. Wir finden diese Quotienten in derselben Tabelle unter $e \cdot \delta_{+e}/5$ und $e \cdot \delta_{-e}/5$ angegeben. In der letzten Horizontalreihe stehen die Mittelwerthe für den Distanzwinkel der Streifenbreite bei $e = 1$ cm und $e = 5$ cm, während die erste Verticalreihe die Grösse von e angibt.

Tabelle III.

e	$e \cdot \delta_{-e}$	$e \cdot \delta_{+e}$	$e \cdot \delta_{-e} : 5$	$e \cdot \delta_{+e} : 5$
1 cm	16' 25,0''	15' 52''	3' 17,0''	3' 10,4''
2 "	16 28,0	16 16,8	3 17,6	3 15,4
3 "	16 24,0	16 24,0	3 16,8	3 16,8
4 "	16 14,0	16 22,0	3 14,8	3 16,4
5 "	16 27,5	16 10,0	3 17,5	3 14,0
6 "	16 19,8	16 12,0	3 15,96	3 14,4
7 "	16 24,2	16 9,5	3 16,8	3 13,9
8 "	16 10,4	16 10,4	3 14,1	3 14,1
Mittel:	16' 21,61''	16' 12,1''	3' 16,32''	3' 14,40''

Darnach lässt die Uebereinstimmung zumal der auf $e = 5$ cm reducirten Distanzwinkel nichts zu wünschen übrig, sodass damit bewiesen, dass sich δ umgekehrt verhält wie die Entfernung e des Spiegels, gleichviel ob $e = +$ oder $-$ genommen wird. Gleichzeitig bestätigen die hingeschriebenen Mittelwerthe, die wir später noch brauchen werden, die Richtigkeit des vierten Gesetzes zum neuen in schönster Weise. Einestheils um diese wichtigen und interessanten Relationen 5 und 4 mehrfach zu prüfen, anderentheils um das Gesetz, betreffend die Abhängigkeit des Streifenabstandes von der Dicke der Platte zu bestätigen, wurden ganz dieselben Messungen noch mehrfach an anderen Platten ausgeführt. Es sei mir erlaubt, noch diejenigen mitzutheilen, welche an einer 4,43 mm dicken planparallelen Platte vom Brechungsexponenten $n = 1,53$ gemacht worden sind. Damit ausser der Dicke der Platte nicht auch φ geändert wurde, stellte ich vor der Vertauschung der Platte den Fadenkreuzschnittpunkt auf die Mitte des Centralstreifens ein und drehte

nach der Vertauschung die neue Platte so lange, bis die Einstellung des Fadenkreuzes dieselbe war wie vorher. Die dabei unterlaufenden Fehler können das Resultat nicht beeinflussen, da eine kleine Aenderung von φ [zumal wenn φ ungefähr $40 - 50^\circ$ beträgt] die Grösse $\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} / \sin 2\varphi$ fast gar nicht ändert. In der folgenden Tabelle haben die Zeichen dieselbe Bedeutung wie früher. Die Differenzen der vierten Columnne beziehen sich auf die in einer Horizontalreihe stehenden Werthe der zweiten und dritten Verticalreihe. Um das Gesetz 5 nachzuweisen, sind wiederum die für verschiedene Entfernungen des Spiegels beobachteten Distanzwinkel auf diejenige von 5 cm reducirt. Die dazu gebildeten Quotienten $e \cdot \delta_{-e}/5$ und $e \cdot \delta_{+e}/5$ stehen in den beiden letzten Columnnen.

Tabelle IV.

c	Distanzwinkel δ		Differenz	$e \cdot \delta_{-e} : 5$	$e \cdot \delta_{+e} : 5$
	w. Sp. vor	hint. d. Focus			
1 cm	15' 40"	15' 5"	+35"	3' 8,0"	3' 1,0"
2 "	7 32	7 23	+ 9	3 0,8	2 57,2
3 "	4 54	4 53	+ 1	2 56,4	2 56,0
4 "	3 41	3 41	0	2 56,8	2 56,8
5 "	2 55	2 55	0	2 55,0	2 55,0
6 "	2 24	2 25	- 1	2 52,8	2 54,0
7 "	2 5	2 5	0	2 55,0	2 55,0
8 "	— —	1 51	—	— —	2 57,6
9 "	— —	1 35	—	— —	2 51,0
10 "	— —	1 27	—	— —	2 54,0
Mittel:	— —	— —	—	2' 55,76"	2' 57,83"

Auch durch diese Beobachtungen sind die Gesetze 5 und 4 von Neuem bestätigt. Worauf es uns jetzt aber hauptsächlich ankommt, sind die in Tabelle III und IV berechneten Mittelwerthe für δ bei $e = \pm 5$ cm, mittelst deren wir die Relation 6 beweisen wollen. Dieselbe sagt aus, dass wenn δ' , resp. δ'' der Distanzwinkel der Streifenbreite bei einer Platte von der Dicke d' , resp. d'' mm bei sonst gleichen Verhältnissen ist, dann gelten muss:

$$\frac{d'}{d''} = \frac{\delta''}{\delta'}, \text{ woraus folgt: } d' = \frac{d'' \cdot \delta''}{\delta'};$$

Bei $e = +5$ cm war für $d' = 4,0125$ mm, $\delta' = 3' 14,4''$ und für $d'' = 4,43$ mm, $\delta'' = 2' 55,76''$. Darnach wird:

$$d' = 4,43 \cdot \frac{2,9293}{3,24} = 4,0052 \text{ mm.}$$

Während für $e = -5$ cm, wo $d' = 4,0125$ mm, $\delta' = 3' 16,32''$ und $d'' = 4,43$ mm, $\delta'' = 2' 57,83''$ waren, wird:

$$d' = 4,43 \cdot \frac{2,9638}{3,272} = 4,0127.$$

Der Fehler ist im ersten Falle $-0,0075$, im zweiten nur $+0,0002$ mm.

Hätten wir aus den in Tab. IV stehenden Werthen die Mittelwerthe aller Producte $e \cdot \delta_{\pm}$ gebildet und mittelst dieser und der in Tab. III berechneten Werthe $e \cdot \delta_{\pm}$ dieselben Proportionen: $d' = (d'' \cdot \delta'' / \delta')$ ausgerechnet, würden wir bezüglich erhalten haben: $d' = 4,004$ und $d' = 4,018$ mm, welche Werthe von dem beobachteten Werth $4,0125$ mm um $-0,0085$ und $+0,0055$ mm abweichen.

Beobachtungen behufs Nachweises der Abhängigkeit des Streifenabstandes vom Winkel φ , den die Platten normale mit der Linsenaxe einschliesst, sind nicht gemacht worden, wohl aber Messungen bei Linsen von verschiedener Brennweite.

Wie man die Brennweite der im Rohre r festsitzenden Objectivlinse L variirt, ist früher erörtert worden. Die verschiedenen vor L nacheinander befestigten Concavlinen (l) wollen wir mit l_1, l_2 etc. bezeichnen, wobei die Brennweite von l_1 grösser als die von l_2 , die von l_2 grösser als die von l_3 etc. sein soll. Um nachzuweisen, dass der Streifenabstand proportional dem Quadrate der Brennweite der Linse ist, müssen wir vor allem die Brennweiten der Linsen $L, (L+l_1), (L+l_2)$ etc. kennen.

Eine wenn auch nicht allzugenaue Methode, die Brennweite einer Linse zu bestimmen, ist folgende.

Von einem beleuchteten verticalen Millimetermaassstab wird mittelst der Linse ein reelles, vergrössertes Bild auf einem weissen Schirm entworfen. Ist dann g , resp. G und a , resp. A die Grösse und der Abstand des Objectes, resp. des Bildes, so berechnet sich f , die Brennweite der Linse, aus den Gleichungen:

$$f = A \frac{g}{g + G} = a \frac{G}{g + G}.$$

Auf diese Weise wurde die Brennweite der Linsen L , $(L + l_1)$ etc. bei den verschiedensten Werthen von g , G , a und A gesucht. Bezeichnen wir mit f die von L , mit f_1 die von $(L + l_1)$, mit f_2 die von $(L + l_2)$ etc., so war $f = 264,46$ mm; $f_1 = 343,2$ mm; $f_2 = 382,4$ mm und $f_3 = 413,7$ mm. Der für f angegebene Werth, auf welchen es, wie wir sehen werden, bei der Prüfung des siebenten Gesetzes hauptsächlich mit ankommt, ist das Mittel aus acht Bestimmungen; die übrigen Werthe f_2 etc. das Mittel aus drei bis vier Beobachtungen.

Ungefähr dieselben Werthe von f , f_1 , f_2 etc. ergab folgende Methode, die nur deswegen erwähnt sei, weil sie direct zu bestätigen im Stande ist, dass der Spiegel im Brennpunkte der Linse steht, wenn die Streifenbreite ein Maximum.

Wie schon mehrfach erwähnt und benutzt, kann man durch ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr, vor dessen Objectiv eine zweite Linse angebracht ist, nur solche in der Brennebene dieser Linse befindliche Gegenstände wahrnehmen. Erzeugen wir also mit einer Linse L durch Verschieben des Spiegels die breitesten Streifen, beleuchten jetzt von der Seite her die der Linse zugewandte Fläche des Spiegels, bringen an Stelle der Platte P ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr, dessen Axe mit der der Linse zusammenfalle, so müssen wir durch das Fernrohr deutlich die beleuchtete Fläche des Spiegels mit ihren Ritzen und Schrammen sehen, falls der Spiegel in der Brennebene der Linse steht. In der That brauchte der Spiegel selten und höchstens um einen Millimeter verschoben werden, damit dies der Fall, wodurch direct nachgewiesen, was wir beweisen wollten.

Merkt man sich die Stellung des Spiegels, wo derselbe deutlich durch das Fernrohr gesehen wird, vertauscht Fernrohr und Spiegel, während die Linse ihren Ort beibehält, und verschiebt nun den Spiegel so lange, bis man ihn wieder deutlich durch das Fernrohr erblickt, so gibt uns die Hälfte der Entfernung, gemessen zwischen der bevorzugten Stellung des Spiegels auf der einen und anderen Seite der Linse, die Brennweite der letzteren.

Nachdem so die Brennweiten der einzelnen Linsensysteme (L), ($L + l_1$) etc. festgestellt, wurden für jedes einzelne ganz dieselben Messungen ausgeführt, wie die in Tabelle 3 und 4 mitgetheilten. Es ist dann gemäss Resultat 7, wenn bei bestimmter Stellung des Spiegels δ_f , resp. δ_{f_1} der Distanzwinkel des Streifenabstandes bei der Linse mit der Brennweite f , resp. f_1 bedeutet:

$$f_1 = f \sqrt{\frac{\delta_{f_1}}{\delta_f}}.$$

Wir können also die Brennweite f_1 so oft berechnen, als wir δ_f und δ_{f_1} bei verschiedener Entfernung e des Spiegels von der Linse gemessen haben. In der folgenden Tabelle sind die für die Linsen mit der Brennweite $f = 264,46$ mm und $f_1 = 343,2$ mm beobachteten Distanzwinkel in der zweiten und dritten Columne nebeneinander gestellt, während die erste Verticalreihe angibt, bei welcher Entfernung e dieselben gemessen worden sind. Da bei Anwendung der Linse L ($f = 264,46$ mm) der Spiegel nur hinter dem Brennpunkt verschoben werden konnte, sind in allen folgenden Tabellen nur die für positive e gemessenen Distanzwinkel angegeben. Die aus den in einer horizontalen Reihe stehenden Werthen berechneten Brennweiten f_1 sind in der letzten Columne enthalten. Sie müssen alle einander, und zwar gleich dem beobachteten Werthe $f_1 = 343,2$ mm sein, falls die Relation 7 richtig ist. Der Mittelwerth aus allen berechneten Werthen f_1 weicht in der That nur um 1,1 mm von dem beobachteten ab, wie folgende Tabelle lehrt.

Tabelle V.

e	δ_f	δ_{f_1}	$f_1 = f \sqrt{\frac{\delta_{f_1}}{\delta_f}}$
1 cm	6' 55,0''	11' 36,66''	342,65 mm
2 "	3 26,0	5 40,0	339,75 "
3 "	2 14,6	3 46,0	342,68 "
4 "	1 40,0	2 50,0	344,87 "
5 "	1 21,0	2 10,0	341,15 "
6 "	1 6,0	1 52,0	344,45 "
7 "	— 59,0	1 36,5	338,40 "
8 "	— 50,0	1 24,0	342,85 "
Mittel:	— —	— —	342,1 mm

Aus dieser Tabelle folgt, dass auch die bei verschiedenen e berechneten Werthe von f_1 dem Mittelwerth ziemlich nahe kommen. Wo dies nicht der Fall, wie bei $e = 7$ cm, kann man mit grosser Sicherheit schliessen, dass δ_f oder δ_{f_1} für dieses e schlecht beobachtet ist. Wirklich ist $\delta_f = 59''$ ungenau, wie man leicht erkennt, wenn man die zwischen e und δ bestehende Relation benutzt und $e \cdot \delta_e$ bildet. Demnach muss auch in der nächsten Tabelle der Fehler bei $e = 7$ cm wiederkehren, in welcher die Werthe f_2 angegeben sind, welche mittelst der Brennweite f und den für die Linsen L und $(L + l_2)$ gemessenen Distanzwinkeln δ_f und δ_{f_2} nach der Formel: $f_2 = f \sqrt{\delta_{f_2} / \delta_f}$ berechnet sind.

Tabelle VI.

e	δ_f	δ_{f_2}	$f_2 = f \sqrt{\frac{\delta_{f_2}}{\delta_f}}$
1 cm	6' 55,0''	14' —''	376,06 mm
2 „	3 26,0	7 14	383,87 „
3 „	2 14,6	4 40	381,43 „
4 „	1 40,0	3 31	384,20 „
5 „	1 21,0	2 50	383,10 „
6 „	1 6,0	2 20	385,14 „
7 „	— 59,0	2 —	377,80 „
Mittel:	— —	— —	381,66 mm

Auch hier weicht der berechnete Mittelwerth nur um 0,74 mm von dem beobachteten Werth $f_2 = 382,4$ mm ab, und stimmen die einzelnen Werthe f_2 ziemlich gut miteinander überein. Abgesehen von f_2 für $e = 1$ cm ist nur f_2 für $e = 7$ cm sehr ungenau, wie zu erwarten war, falls δ_{f_2} für $e = 7$ cm nicht zufällig auch fehlerhaft sein sollte. Dies ist nicht der Fall, und können sich somit die in δ_{f_2} und δ_f gemachten Fehler auch nicht aufheben.

Ähnlich gute Werthe für f_2 liefert auch die Gleichung:

$$f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\delta_{f_2}}{\delta_{f_1}}}$$

sodass die Richtigkeit der Relation 7 zwischen dem Streifenabstände und der Brennweite der Linse ausser allen Zweifel gesetzt ist.

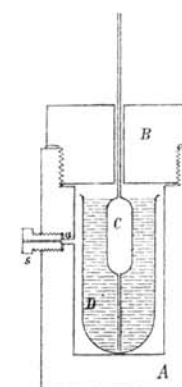
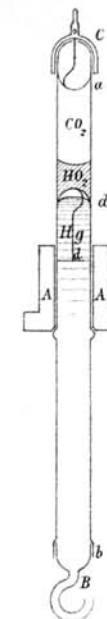
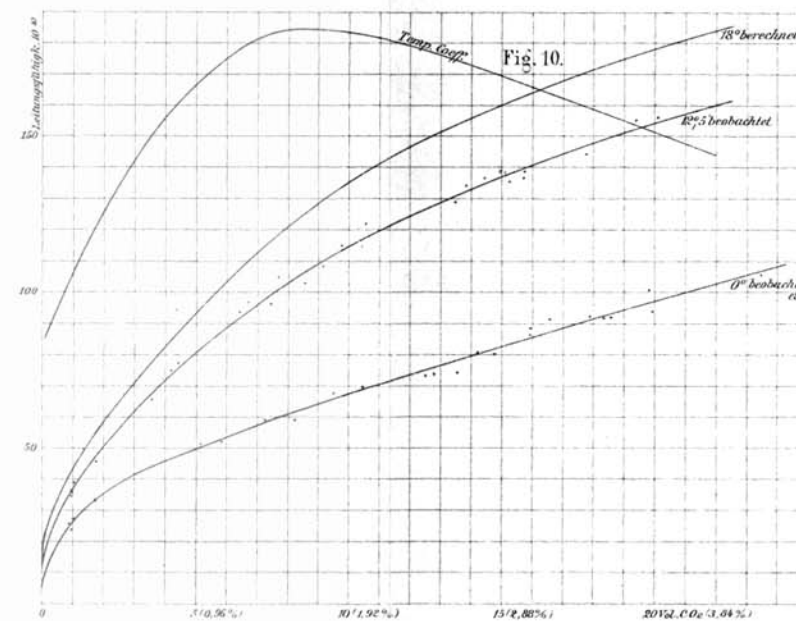
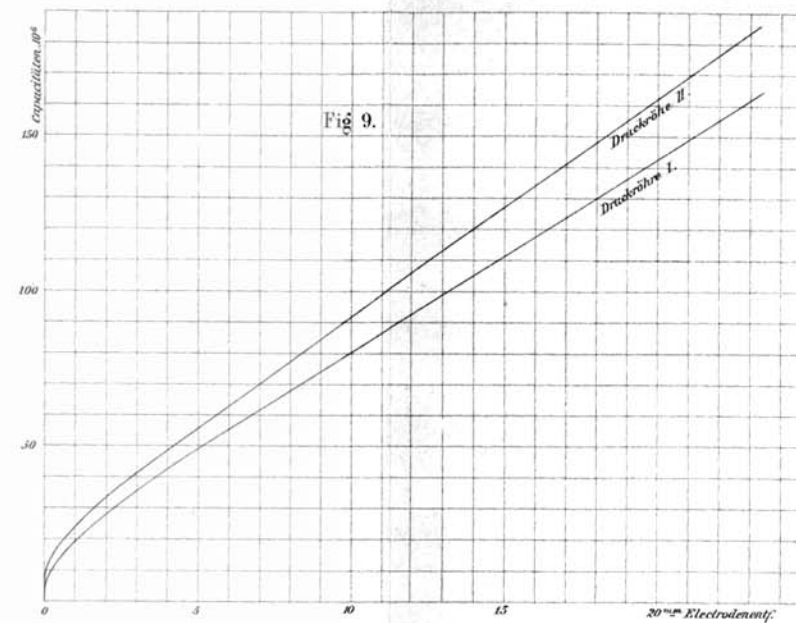
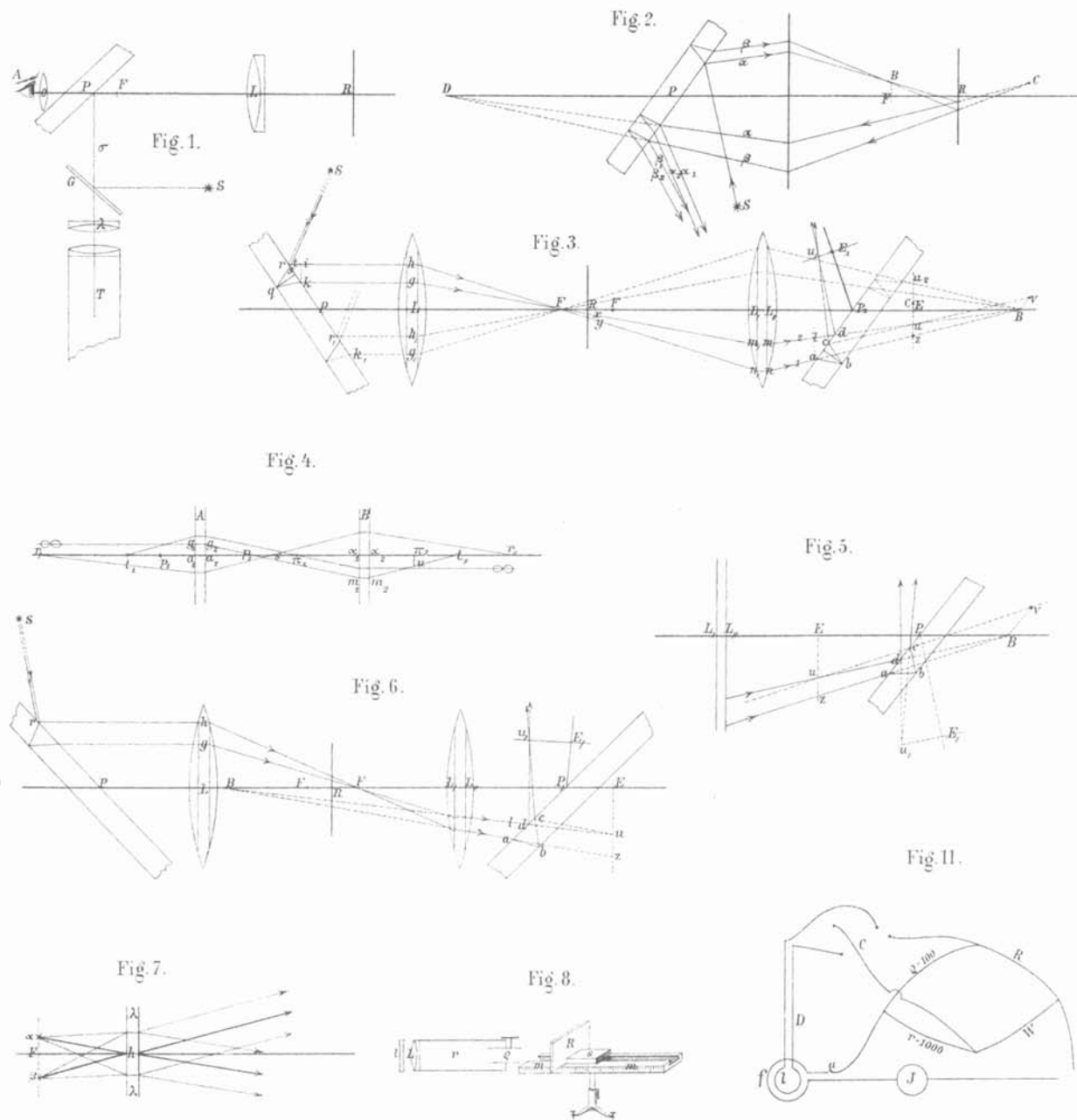
Dass alle mitgetheilten Messungen noch besser ausgefallen wären, wenn wir anstatt der combinirten Linsensysteme ($L + l_n$) Linsen von der entsprechenden Brennweite gehabt, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Immerhin sind bei der Schwierigkeit des Versuchs und der Messung die Beobachtungsergebnisse überraschend genau, woraus mit Recht geschlossen werden muss, dass alle von uns theoretisch unter mancherlei Annahmen und Vernachlässigungen abgeleiteten Gesetze der Wirklichkeit sehr nahe kommen müssen.

Berlin, Physikal. Institut, August 1884.

II. Ueber die *Diathermansie* von *Aesculinlösungen*; von *Karl Wesendonck*.

In der Einleitung zu seiner ausgedehnten Arbeit¹⁾ über die Fluorescenz von 36 verschiedenen Substanzen hebt Hr. Hagenbach die Nothwendigkeit solcher umfassender Untersuchungen für die Aufstellung einer erschöpfenden Theorie der Fluorescenz wohl mit Recht hervor. Er fand bekanntlich die enge Beziehung zwischen Absorption und Fluorescenz, welche bereits Stokes bemerkt, ebenso wie den nach diesem Physiker benannten Satz durchweg bestätigt. Hagenbach's Beobachtungen indessen, ebenso wie die anderen mir bekannt gewordenen Beobachtungen beziehen sich nur auf die direct sichtbaren und die ultravioletten Theile des Spectrums, das Ultraroth ist ganz ausser Acht gelassen worden. Nachdem es in neuerer Zeit gelungen, letzteres der Forschung bei weitem zugänglicher als bisher zu machen, lag es nahe, ähnliche Untersuchungen wie die eben genannten auch auf die Wärmestrahlen auszudehnen, und einen ersten, allerdings sehr bescheidenen Anfang hierzu möchte ich mir erlauben, in dem Vorliegenden in kürze mitzutheilen. Eine specielle Veranlassung hierzu boten theoretische Untersuchungen von Hrn. Lommel, denen gemäss in den ultrarother Theilen des Spectrums bei den sogenannten Körpern

1) Hagenbach, Pogg. Ann. 146. p. 65 u. f. 1872.



Lummer Fig. 1-8. Pfaff Fig. 9-13.