

Die Störungen der Planeten in der neuen Theorie.

Von *Aug. Weiler.*

I.

Es handelt sich um die Bewegungen, welche durch die gegenseitige Anziehung dreier Massenpunkte bewirkt sind. Man soll den analytischen Ausdruck dieser Bewegungen durch die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung bestimmen. Insofern diese Bewegungen aus bekannten Bewegungen und aus kleinen Abweichungen davon, welche Störungen genannt werden, zusammengesetzt sind, ist man veranlasst, die Differentialgleichungen der Bewegung in Störungsgleichungen umzuwandeln. Die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe liegt in der Forderung, die geeigneten Störungsgleichungen aufzustellen.

In der neuen Theorie wird die Bahn des gestörten Planeten als eine Ellipse angenommen, deren Parameter und Perihel veränderlich sind. In dem Aufsatz in Nr. 2620-21 habe ich einen Weg angegeben, auf welchem man zu den analytischen Ausdrücken des veränderlichen Parameters und des veränderlichen Perihels gelangen kann. Ich habe später für zwei bestimmte Aufgaben die Rechnung durchgeführt: für die Störungen der Erdbahn durch den Jupiter in Nr. 2626-27, und für die Störungen des Uranus durch den Jupiter in Nr. 2632. Die Rechnung lässt sich aber noch weiter vereinfachen, auf Grund einiger Eigenschaften der gestörten Elemente, welche dem Verfasser der erwähnten Aufsätze nicht zur Verfügung standen. Die Vereinfachungen sind von solcher Art, dass es nun nicht mehr der Auswahl besonderer Störungsaufgaben bedarf, um eine einfache Lösung zu erhalten. Die Rechnung ist nun in der allgemeinen Aufgabe, welche alle Planetenstörungen umfasst, leicht durchzuführen. In dem vorliegenden Aufsatz soll das gezeigt werden.

In dem Aufsatz in Nr. 2620-21 bin ich ferner zu dem Resultat gekommen, dass die analytischen Ausdrücke des veränderlichen Parameters und des veränderlichen Perihels in einer Form aufgestellt werden können, welche für den Zeitraum einer vollen Umdrehung der Apsidenlinie und der Knotenlinie, und demzufolge auch für einen noch längeren Zeitraum brauchbar ist. Dieses Resultat folgt aus einigen Sätzen, welche in den §§ 3 und 4 des erwähnten Aufsatzes, wenn auch allerdings zum Theil nur als Behauptung hingestellt sind. Es sind nun die Mittel vorhanden, den Beweis dieser Sätze zu vervollständigen, oder also den vollständigen Beweis zu führen, dass die analytischen Ausdrücke des veränderlichen Parameters und des veränderlichen Perihels in ein und derselben Form für den unbegrenzten Zeitraum gültig sind. Auch diese Aufgabe findet in dem vorliegenden Aufsatz ihre Erledigung.

Bd. 122.

Die neuen Resultate ergeben sich aus der Anwendung jener Integrationsmethode in Nr. 2863, derzufolge die Störungen als Functionen der beiden wahren Anomalien dargestellt werden. Zum Verständniss des vorliegenden Aufsatzes bedarf es der Kenntniss der in Nr. 2863 bewiesenen Sätze.

§ 1.

Ueber die Störungsgleichungen und deren Integration.

2.

Will man die Störungen der Planeten bestimmen, so wird in der neuen Theorie der gemeinsame Schwerpunkt der Sonne und des der Sonne näher stehenden Planeten als Nullpunkt der Coordinaten angenommen. Bezeichnet man die Masse des der Sonne näher stehenden Planeten mit m , die des fernerstehenden mit m_1 , so hat man zur Bestimmung der Leitstrahlen r und r_1 die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$(2) \quad r r'' = \frac{n^2}{r^2} + \frac{r}{m} \frac{dV}{dr}, \quad r_1 r_1'' = \frac{n_1^2}{r_1^2} + \frac{r_1}{m_0} \frac{dV}{dr_1},$$

worin zur Abkürzung geschrieben ist: $m_0 = \frac{m_1}{1 + m + m_1}$.

In diesen Gleichungen ist n die Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls r , und n_1 die Flächengeschwindigkeit des Leitstrahls r_1 in der Ebene der Bahn. Die Kräftefunction V ist eine gegebene Function der Veränderlichen r und r_1 , von welchen die letztere den Cosinus des von den Leitstrahlen gebildeten Winkels ausdrückt. Unter den Grössen $\frac{dV}{dr}$ und $\frac{dV}{dr_1}$ sind die partiellen Derivirten von V nach r und r_1 zu verstehen.

Der erwähnten Anordnung zufolge, den Ort des Nullpunkts der Coordinaten betreffend, schreitet die Gerade, in welcher sich die Ebenen der beiden Bahnen schneiden, in einer unveränderlichen Ebene fort. Wird die unveränderliche Ebene als Coordinatenebene angenommen, so versteht es sich, dass die Knotenlinie der einen und der andern Bahn jederzeit eine gemeinsame ist. Man findet ferner, dass die Differenz der aufsteigenden Knoten gleich 180° ist. Die Winkel, welche die Leitstrahlen r und r_1 mit der gemeinsamen Knotenlinie bilden, bezeichnen wir mit u und u_1 , und jeder der beiden Winkel ist von dem aufsteigenden Knoten an in der Richtung der Bewegung des Leitstrahls gerechnet. Die Veränderliche s ist eine gegebene Function von u und u_1 . Man findet:

$$-s = \cos^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos(u - u_1) + \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \cos(u + u_1),$$

wenn \mathcal{F} der Winkel ist, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden.

Die Differentialgleichungen, durch welche sich die Veränderlichen u und u_1 bestimmen, sind:

$$(1) (1') \quad mn' = \frac{dV}{du}, \quad m_0 n_1' = \frac{dV}{du_1}.$$

Unter den Grössen $\frac{dV}{du}$ und $\frac{dV}{du_1}$ sind die partiellen Derivirten von V nach u und nach u_1 zu verstehen, zu welchen man gelangt, nachdem man den angegebenen Werth von s in die Kräftefunction eingesetzt hat.

Zur Bestimmung der Veränderlichen u und u_1 aber hat man die folgenden Gleichungen:

$$(3) (3') \quad u' + \cos i \vartheta' = \frac{n}{r^2}, \quad u_1' + \cos i_1 \vartheta' = \frac{n_1}{r_1^2},$$

in welchen ϑ' die Derivirte des Knotens ist, ferner i und i_1 die Winkel sind, welche die Ebenen der Bahnen mit der unveränderlichen Ebene bilden.

Diese Aufzeichnungen sind dem Aufsatz »Ueber die Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper« in Nr. 2291–92 entnommen, im Anschluss an die Bemerkungen in Nr. 2510 unter 2.

Sollen die Störungsgleichungen aufgestellt werden, so wird in der neuen Theorie gesetzt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos v_1}.$$

In diesen Werthen von r und von r_1 sind die Parameter p und p_1 als gestörte Elemente, die Excentricitäten e und e_1 dagegen als beständige Grössen angenommen. Es wird

ferner angenommen, dass die Veränderlichen v und v_1 gleichbedeutend seien mit den wahren Anomalien in zwei Kepler'schen Ellipsen, deren Excentricitäten gleichfalls e und e_1 sind. Ich nenne die Ellipse eine Kepler'sche, wenn deren Axen unveränderlich sind, und wenn die Bewegung des Leitstrahls das bekannte Gesetz der Flächen befolgt. Es sollen also die Veränderlichen v und v_1 bestimmt sein durch die Gleichungen:

$$v' = l(1 + e \cos v)^2, \quad v_1' = l_1(1 + e_1 \cos v_1)^2,$$

in welchen die Coefficienten l und l_1 ebenso wie die Parameter der den gestörten Ellipsen zugeordneten Kepler'schen Ellipsen als unbestimmte Beständige vorausgesetzt sind. Es versteht sich, dass der Leitstrahl der gestörten Masse das Kepler'sche Gesetz der Flächen nicht befolgt. Doch hat die Umlaufszeit in der gestörten Ellipse einen unveränderlichen Werth, und ist gleich der Umlaufszeit in der zugeordneten Kepler'schen Ellipse.

An die Stelle der wahren Zeit habe ich eine reducirte Zeit gesetzt, indem ich anstatt des Productes lt den Buchstaben t setze. Die vorliegenden Gleichungen schreiben sich dann etwas einfacher.

$$v' = \frac{p^2}{r^2}, \quad v_1' = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2},$$

worin $\lambda = l_1 : l$ gesetzt ist. Auch in den Differentialgleichungen der Bewegung schreibe ich t anstatt lt . Ich setze ferner an die Stelle der Quotienten $n : l$ und $n_1 : l$ die Buchstaben n und n_1 , und an die Stelle des Quotienten $V : l^2$ den Buchstaben V . Es zeigt sich, dass die so transformirten Differentialgleichungen der Bewegung identisch sind mit den ursprünglichen Differentialgleichungen. Die Kräftefunction aber ist:

$$V = \frac{\kappa m}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r s + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2m r_1 r s + m^2 r^2}},$$

wo zur Abkürzung $\kappa = K : l^2$ gesetzt ist, und K die Beschleunigung der Schwere ausdrückt, welche durch die als die Einheit der Masse angenommene Masse des Centralkörpers in der Einheit des Abstandes bewirkt ist.

Schreibt man die Kräftefunction in der Form:

$$V = \frac{\kappa m}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + \frac{\kappa m_1}{r_1} + \mathcal{Q},$$

so ist \mathcal{Q} die Störungfunction, welche letztere ebensowohl für den Fall $m = 0$ als auch für den Fall $m_1 = 0$ verschwindet. Dass die Grösse \mathcal{Q} das Product $m m_1$ der Massen als Factor enthält, ist leicht zu ersehen aus der Gleichung:

$$\mathcal{Q} = \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r s + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2m r_1 r s + m^2 r^2}} - \frac{\kappa m_1}{r_1},$$

wenn die rechte Seite nach den Potenzen des Quotienten $\frac{r}{r_1}$ entwickelt wird.

Für den Fall, dass die störende Masse verschwindet, geht die gestörte Ellipse über in die ihr zugeordnete Kepler'sche Ellipse. Nimmt man an, es sei für den Fall $m_1 = 0$ der Parameter $p = p_0$, so ist für diesen Fall auch der Coefficient l gegeben. Denn es besteht dann die Gleichung:

$$\frac{\kappa}{(1+m)^2} = p_0^3,$$

aus welcher sich der Werth von l bestimmt. Aus dieser Gleichung folgt auch, dass man in der allgemeinen Aufgabe die Gleichung:

$$\frac{\kappa}{(1+m)^2} = p_0^3 + f \frac{p_0}{m}$$

aufstellen kann, in welcher f eine mit dem Producte $m m_1$ der Massen multiplicirte Beständige ist.

Wird ferner angenommen, es sei für den Fall $m = 0$ der Parameter $p_1 = p_{01}$, so ist für diesen Fall auch der Coefficient l_1 gegeben. Denn es besteht dann die Gleichung:

$$\frac{\kappa m_1}{m_0} = \kappa (1 + m + m_1) = \lambda^2 p_{01}^3,$$

aus welcher sich der Werth von l_1 bestimmt. Es folgt aus dieser Gleichung auch, dass in der allgemeinen Aufgabe die Gleichung:

$$\frac{\kappa m_1}{m_0} = \lambda^2 p_{01}^3 + f_1 \frac{p_{01}}{m_0}$$

besteht, in welcher f_1 eine unbestimmte mit dem Producte $m m_1$ der Massen multiplicirte Beständige ist.

Es wird noch darauf hingewiesen, dass alle Glieder der Störungsfunction, nachdem man dieselbe nach den positiven Potenzen des Quotienten $\frac{r}{r_1}$ entwickelt hat, den gemeinsamen Factor $\frac{\kappa m_1}{p_{01}^3}$ haben. Eliminirt man diesen Factor mittelst der Gleichung:

$$\frac{\kappa m_1}{p_{01}^3} = m_0 \lambda^2 + \frac{f_1}{p_{01}^2},$$

so führt das zu einer nicht unerheblichen Vereinfachung der Analysis, insofern als nun in allen Differentialgleichungen der Bewegung die beiden Beständigen l und l_1 durch die einzige $\lambda = l_1 : l$ ersetzt sind. Es werden in Folge dessen auch alle Störungsausdrücke unabhängig von den Beständigen l und l_1 als Functionen von λ aufgestellt.

Es versteht sich, dass die Gleichung:

$$(2) \quad r r'' = \frac{n^2}{r^2} + \frac{r}{m} \frac{dV}{dr}$$

erst dann integrirt werden kann, nachdem man den Werth der Veränderlichen n in dieselbe eingesetzt hat, zu deren Bestimmung die Gleichung (1) gegeben ist. Ich habe aber an die Stelle von n die Veränderliche:

$$q = m \left[r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2\kappa}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + p_0^2 (1-e^2) \right]$$

und zur Bestimmung des Parameters p die Gleichung:

$$(5) \quad m p_0^2 \left(\frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho \right) = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right).$$

Die Integration dieser Gleichung liefert den Werth:

$$\rho = k \cos v + h \sin v,$$

in welchem die Veränderlichen k und h zu bestimmen sind aus den Störungsgleichungen:

$$(6) \quad -m p_0^2 k' = \frac{r}{p} \sin v \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right)$$

$$(7) \quad m p_0^2 h' = \frac{r}{p} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right).$$

in die Gleichung (2) eingeführt, und demzufolge die Gleichung (1) durch die folgende ersetzt:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dr} r' + \frac{d\Omega}{dv} \frac{n}{r^2}.$$

Wird die Veränderliche q an die Stelle von n gesetzt, ferner die Kräftefunction durch die Störungsfunction ausgedrückt, alsdann die Beständige κ eliminirt mittelst der Gleichung:

$$\frac{\kappa}{(1+m)^2} = p_0^3 + f \frac{p_0}{m},$$

so geht die Gleichung (2) über in:

$$m \left[\frac{1}{2} (r')^2 - \frac{p_0^3}{r} + p_0^2 (1-e^2) \right] = f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr}.$$

Man erhält nun leicht auch diejenige Gleichung, aus welcher sich der veränderliche Parameter p bestimmt. Setzt man nämlich $\frac{r^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right) = 2\zeta$, so findet man die Gleichung:

$$m p_0^2 \left(\zeta'' + \frac{p^3}{r^3} \zeta \right) = f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P,$$

in welcher die Veränderliche P das Quadrat von

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2\eta$$

als Factor enthält. Es ist:

$$\frac{P}{m p_0^2} = \frac{p}{r} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{63}{8} \eta^5 + \dots \right).$$

Die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche zur Bestimmung von p vorliegt, schreibt sich übrigens vortheilhafter, wenn man an die Stelle der Zeit t die wahre Anomalie v als unabhängige Veränderliche einführt, und zugleich $\frac{p}{r} \zeta = \rho$ setzt. Denn es ist zunächst:

$$\zeta'' = \frac{d^2 \zeta}{dv^2} \frac{p^4}{r^4} - 2 \frac{d\zeta}{dv} \frac{p^3}{r^3} e \sin v.$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\left(\zeta'' + \frac{p^3}{r^3} \zeta \right) \frac{r^3}{p^3} = \frac{d^2 \zeta}{dv^2} \frac{p}{r} - 2 \frac{d\zeta}{dv} e \sin v + \zeta = \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho,$$

Wir haben $\rho = \zeta \frac{p}{r} = \frac{1}{2} \frac{r}{p} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right)$ gesetzt, und erhalten, nachdem man die Werthe von k und von h bestimmt hat, den Parameter p aus der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v).$$

Um den Parameter für die äussere Bahn zu bestimmen, führe ich in die Gleichung:

$$(2)' \quad r_1 r_1'' = \frac{n_1^2}{r_1^2} + \frac{r_1}{m_0} \frac{dV}{dr_1}$$

an die Stelle von n_1 die neue Veränderliche

$$q_1 = m_0 \left[r_1'^2 + \frac{n_1^2}{r_1^2} - \frac{2\kappa m_1}{m_0 r_1} + \lambda^2 p_{01}^2 (1 - e_1^2) \right] \quad (4)' \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega}{dn_1} \frac{n_1}{r_1^2}$$

ein, zu deren Bestimmung die Störungsgleichung: vorliegt. Die Gleichung (2) geht über in:

$$m_0 \left[\frac{1}{2} (r_1')^2 - \frac{\lambda^2 p_{01}^3}{r_1} + \lambda^2 p_{01}^2 (1 - e_1^2) \right] = f_1 \frac{p_{01}}{r_1^2} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1}.$$

Setzt man alsdann $q_1 = \frac{1}{2} \frac{r_1}{p_1} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 \right)$, so wird die vorliegende Gleichung übergeführt in die folgende:

$$(5)' \quad \lambda^2 m_0 p_{01}^2 \left(\frac{d^2 q_1}{dv_1^2} + q_1 \right) = \frac{r_1^3}{p_1^3} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right).$$

Setzt man ferner $\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2\eta_1$, so ist

$$\frac{P_1}{m_0 p_{01}^2} = \lambda^2 \frac{p_1}{r_1} \left(\frac{3}{2} \eta_1^2 - \frac{5}{2} \eta_1^3 + \frac{35}{8} \eta_1^4 - \frac{63}{8} \eta_1^5 + \dots \right)$$

Man findet nun:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1),$$

und zur Bestimmung von k_1 und von h_1 die Störungsgleichungen:

$$(6)' \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right)$$

$$(7)' \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right).$$

Um das Perihel der inneren Bahn zu bestimmen, geht man von der Gleichung:

$$(3) \quad u' + \cos i \vartheta' = \frac{n}{r^2}$$

aus. Wenn ϖ der Winkel ist, welchen die Apsidenlinie mit der Knotenlinie bildet, so ist $u = \varpi + v$, und die Gleichung (3) geht über in:

$$\varpi' + \cos i \vartheta' = \frac{p^2}{r^2} \left(\frac{n}{p^2} - 1 \right).$$

Eliminiert man hier die Veränderliche n mittelst der Gleichung:

$$q + 2f \frac{p_0}{r} = m \left[r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2p_0^3}{r} + p_0^2 (1 - e^2) \right],$$

so erhält man die transformierte Gleichung:

$$\varpi' + \cos i \vartheta' + \frac{p^2}{r^2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 - e k \right) = \frac{\frac{1}{2} q + f \frac{p_0}{r} + P - N}{m p_0^2},$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{2N}{m p_0^2} = -\frac{p^2}{r^2} \left(\frac{p}{p_0} - \frac{p_0}{p} \right)^2 + \frac{r^2 p'^2}{p^2 p_0^2} + \frac{p_0^2}{r^2} (\xi^2 - \xi^3 + \dots),$$

$$2\xi = \frac{p^2}{p_0^2} \left[2ek + \frac{r^2}{p^2} \cdot \frac{q + 2f \frac{p_0}{r} + 2P}{m p_0^2} - \left(\frac{p}{p_0} - \frac{p_0}{p} \right)^2 - \frac{r^4 p'^2}{p^4 p_0^2} \right].$$

Ich habe ferner die Veränderliche ϖ eliminiert mittelst der Gleichung:

$$\varpi + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega,$$

und erhalte zur Bestimmung von ω die Störungsgleichung:

$$(8) \quad -m p_0^2 (\varpi' + \cos i \vartheta') = f \frac{p_0}{r} + \frac{3}{2} q + 2r \frac{d\Omega}{dr} + P + N.$$

Für die äussere Bahn bestimmt sich das Perihel durch die Gleichung:

$$(3)' \quad u_1' + \cos i_1 \vartheta' = \frac{n_1}{r_1^2}.$$

Man setze $u_1 = \varpi_1 + v_1$, ferner die Veränderliche q_1 an die Stelle von n_1 . Die Gleichung (3)' geht über in:

$$\varpi_1' + \cos i_1 \vartheta' + \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 - e_1 k_1 \right) = \frac{1/2 q_1 + f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + P_1 - N_1}{\lambda m_0 p_{01}^2}.$$

Eliminirt man die Veränderliche ϖ_1 mittelst der Gleichung:

$$\varpi_1 + \left(\frac{p_1}{r_1} + 1 \right) (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) - h_1 e_1 = \varpi_1,$$

so hat man zur Bestimmung von ϖ_1 die Störungsgleichung:

$$(8)' \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\varpi_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + 1/2 q_1 + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 + N_1,$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{2N_1}{m_0 p_{01}^2} = -\lambda^2 \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{p_1}{p_{01}} - \frac{p_{01}}{p_1} \right)^2 + \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{p_1'^2}{p_{01}^2} + \lambda^2 \frac{p_{01}^2}{r_1^2} (\xi_1^2 - \xi_1^3 + \dots),$$

$$2\xi_1 = \frac{p_1^2}{p_{01}^2} \left[2e_1 k_1 + \frac{r_1^2}{p_1^2} \cdot \frac{q_1 + 2f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + 2P_1}{\lambda^2 m_0 p_{01}^2} - \left(\frac{p_1}{p_{01}} - \frac{p_{01}}{p_1} \right)^2 - \frac{r_1^4}{p_1^4} \frac{p_1'^2}{\lambda^2 p_{01}^2} \right].$$

Diese weiteren Aufzeichnungen betreffend verweise ich auf Nr. 2510 und auf die §§ 1 und 2 des Aufsatzes in Nr. 2620-21. Mit denselben ist der Ausgangspunkt für den vorliegenden Aufsatz gegeben.

3.

Setzt man an die Stelle von n und n_1 die neuen Veränderlichen q und q_1 , so nimmt das Integral der lebendigen Kraft die einfache Gestalt an:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b,$$

wo $2b$ die Integrationsbeständige ist, vergl. Nr. 2311 S. 109-110. Die Einführung der Veränderlichen q und q_1 in die Störungsgleichungen ist auf die Voraussicht gegründet, dass durch diese Transformationen auch die Integration der Störungsgleichungen sich vereinfache.

Man unterscheidet bekanntlich Störungsglieder der ersten, zweiten u. s. w. Ordnung. Bisher hat man alle diejenigen Störungsglieder als solche der ersten Ordnung bezeichnet, welche mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind. In der neuen Störungstheorie ist diese Auffassung nicht zulässig. Denn die Integration der Störungsgleichungen führt zu zweifachen Quadraturen. Für den Fall, dass die erste Quadratur säculare Störungen giebt, erstreckt sich die zweite Quadratur über Glieder, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind; und doch müssen diese mit der störenden Masse nicht multiplicirten Glieder zu den Störungsgliedern der ersten Ordnung gerechnet werden. In der neuen Theorie werden diejenigen Glieder der Störungsgleichungen als Störungsglieder der ersten Ordnung aufgefasst, welche sich als gegebene Functionen von v und v_1 darstellen, und daher unmittelbar integrirt werden können.

Man erhält die Störungsglieder der ersten Ordnung, indem man anstatt der Veränderlichen k, h, p, k_1, h_1, p_1 diejenigen Werthe in die Störungsgleichungen einsetzt,

welche entstehen, wenn die störende Masse verschwindet, also die Werthe $k = 0, h = 0, p = p_0, k_1 = 0, h_1 = 0, p_1 = p_{01}$. Die Veränderlichen ϖ und ϖ_1 betreffend muss man eine etwas weitergehende Substitution machen. Man muss sich vergegenwärtigen, dass die Absicht vorliegt, die Integrale der Störungsgleichungen in einer Form zu geben, welche für den unbegrenzten Zeitraum gültig ist. Es versteht sich, dass die der Zeit proportionalen Glieder βt und $\beta_1 t$ der Veränderlichen ϖ und ϖ_1 , obwohl die Coefficienten β und β_1 mit der störenden Masse multiplicirt sind, ebenso wie die Winkel v und v_1 unbegrenzt gross sein können, während die periodischen und auch die säcularen Störungen von ϖ und ϖ_1 jederzeit durch kleine Bruchwerthe ausgedrückt sind. Sollen die Störungsglieder der ersten Ordnung aufgestellt werden, so ist man genöthigt, die Werthe

$$\varpi = \varpi_0 + \beta t, \quad \varpi_1 = \varpi_{01} + \beta_1 t$$

in die Störungsgleichungen einzusetzen. Es erweist sich übrigens als förderlich, die Veränderliche t durch die wahre Anomalie v_1 zu ersetzen, also $\varpi = \varpi_0 + \beta v_1$ und $\varpi_1 = \varpi_{01} + \beta_1 v_1$ zu schreiben. Durch diese Anordnung ist die oben aufgestellte Definition der Störungsglieder erster Ordnung nicht umgestossen. Die Coefficienten β und β_1 sind zwar als unbekannte Grössen zu betrachten; da sie aber beständig sind, so unterliegt es keinem Zweifel, dass diejenigen Störungsglieder, welche durch die Substitution der obigen Werthe von ϖ und von ϖ_1 entstehen, unmittelbar integrirt werden können. Es ist noch des Falles Erwähnung zu thun, dass in der zu integrierenden Störungsgleichung gestörte Elemente vorhanden sind, welche durch die Integration der vorausgehenden Störungsgleichungen schon bestimmt sind. Es versteht sich, dass in diesem Falle nicht die genannten Substitutionen zu machen sind, sondern die Störungen der ersten Ordnung der betreffenden Elemente eingesetzt werden sollen.

Die Erwartung, dass sich die Störungsrechnungen durch die Einführung der Veränderlichen q und q_1 in die

Differentialgleichungen der Bewegung vereinfachen, ist nicht eine getäuschte. Die Veränderlichen q und q_1 bestimmen sich durch einfache Quadraturen aus den Störungsgleichungen (4) und (4)'. Es ist hervorzuheben, dass alle säcularen Störungen von q und von q_1 mit der störenden Masse multiplicirt sind, dass also alle Glieder der Werthe von q und von q_1 , ebenso wie die Glieder der Störungsfuction, mit dem Producte $m m_1$ der Massen multiplicirt sind. Dem ist entgegenzuhalten, dass die Veränderlichen n und n_1 , an deren Stelle die Veränderlichen q und q_1 gesetzt worden sind, diese Eigenschaft nicht besitzen, weil dieselben säculare Störungen haben, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind. Nachdem man die Werthe von q und von q_1 in jene Störungsgleichungen, welche zur Bestimmung der Veränderlichen k h k_1 h_1 ω ω_1 gegeben sind, eingesetzt hat, haben alle Störungsglieder der ersten Ordnung die störende Masse zum Factor. Aus dieser Form der Störungsglieder ist ohne Weiteres ersichtlich, dass sich alle Störungen der Veränderlichen k h k_1 h_1 ω ω_1 als kleine Bruchwerthe darstellen.

Indem man die Veränderliche q an die Stelle von n in die Gleichung (2) einsetzt, ist man durch die Form der transformirten Gleichung veranlasst, zur Bestimmung des Parameters p eine Differentialgleichung aufzustellen, in welcher die zweite Potenz von p als die abhängige Veränderliche angenommen ist. Die Integration dieser Gleichung hat zu dem folgenden Werthe geführt:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v),$$

und es lässt sich in Betreff der Störungsgleichungen, welche zur Bestimmung der Veränderlichen k und h gegeben sind, nachweisen, dass die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung eine beträchtliche Annäherung an den genauen Werth der Störung giebt, dass also die Vernachlässigung derjenigen Störungsglieder, welche als nicht gegebene Functionen von v und v_1 vorliegen, durch eine Correction ausgeglichen wird, welche einen kleinen Bruchtheil des durch die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung erhaltenen Werthes darstellt. Wenn man, wie Hansen gethan hat, zur Bestimmung des Parameters eine Differentialgleichung aufstellt, in welcher die erste Potenz des Parameters als die abhängige Veränderliche angenommen ist, dann gelingt es nicht, durch die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung eine Annäherung an den genauen Werth der Störung zu erhalten. Diejenigen Störungsglieder, welche als unbekannte Grössen vorliegen, geben dann eine Correction, welche nahezu gleichwerthig ist mit dem durch die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung erhaltenen Resultat.

Für die Störungstheorie ist es von grosser Bedeutung, dass die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung eine Annäherung an den genauen Werth der Störung giebt. Wenn die Störungsgleichung diese Eigenschaft nicht besitzt, dann ist das durch die Quadratur der Störungsglieder erster Ordnung erhaltene Resultat werthlos. In diesem Falle ist die Störungsgleichung nichts weiter als eine Differentialgleichung, deren Integration vorerst unerledigt ist.

4.

Einen allgemein gültigen Beweis des Satzes, dass die Werthe der Veränderlichen q und q_1 mit dem Producte $m m_1$ der Massen multiplicirt sind, habe ich in dem Aufsatz über säculare Störungen in Nr. 2515-16 S. 295-97 gegeben. Ein anderer Beweis ist in Nr. 2611 S. 300-301 geführt. Der letztere Beweis ist wohl leichter verständlich als der erstere, weil er unmittelbar aus dem Integrationsverfahren hervorgeht, welches die Werthe von q und von q_1 liefert. Doch ist derselbe insofern unvollständig, als er von der Voraussetzung ausgeht, dass die störende Masse eine ungestörte Ellipse beschreibe. In Nr. 2611 werden die Störungen als Functionen der beiden Anomalien ε und v_1 vorausgesetzt. Da dieselben in diesem Aufsatz als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt werden, so soll hier der Beweis des erwähnten Satzes in dem Sinne der nun geänderten Voraussetzung geführt werden.

Handelt es sich um die Störungen der inneren Bahn, so bestimme man die Veränderliche q aus dem Integral der lebendigen Kraft:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b.$$

Die Veränderliche q_1 bestimmt sich dann aus der Störungsgleichung:

$$(4)' \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2}.$$

Der Beweis des Satzes, dass alle säcularen Störungen von q_1 die störende Masse m_1 als Factor enthalten, geht von der Annahme aus, dass die von der störenden Masse beschriebene Bahn eine ungestörte Ellipse, dass also in der Gleichung (4)' der Parameter p_1 eine Beständige sei, und die Flächengeschwindigkeit $n_1 = \lambda p_1^2$ gesetzt werden könne. Unter dieser Annahme ist r_1 eine gegebene Function von v_1 . Aus der Gleichung $\frac{p_1}{r_1} = 1 + e_1 \cos v_1$ folgt

$$r_1' = \frac{dr_1}{dv_1} v_1'. \quad \text{Ferner ist } \frac{n_1}{r_1^2} = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2} = v_1'. \quad \text{Die Gleichung (4)' geht über in:}$$

$$\frac{1}{2} q_1' = \left(\frac{d\Omega}{dr_1} \frac{dr_1}{dv_1} + \frac{d\Omega}{du_1} \right) v_1'.$$

Aus der Gleichung $u_1 = \varpi_1 + v_1$ ergibt sich die partielle Derivirte $\frac{du_1}{dv_1} = 1$. Die Gleichung (4)' hat nun die folgende Gestalt:

$$\frac{1}{2} q_1' = \left(\frac{d\Omega}{dr_1} \frac{dr_1}{dv_1} + \frac{d\Omega}{du_1} \frac{du_1}{dv_1} \right) v_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1',$$

in welcher die partielle Derivirte von Ω nach v_1 so zu verstehen ist, dass in der Function Ω die Veränderlichen r u ϖ_1 als unabhängig von v_1 angesehen werden.

Die Veränderliche q_1 soll als eine Function der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt werden. Die Gleichung (4)' ist daher in der folgenden Form zu schreiben:

$$\frac{1}{2} q_1' = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{d\Omega}{dv_1} v'.$$

Man denke sich die Störungsfunction in eine Reihe Glieder von der Form:

$$C \frac{p^2}{r^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1)$$

entwickelt. In denselben sind die Coefficienten A B C als beständige Grössen zu betrachten, von welchen die beiden letzteren die störende Masse m_1 als Factor enthalten; dagegen sind c und c_1 positive oder negative ganze Zahlen. Es ist darauf zu achten, dass bei der partiellen Differentiation von Ω nach v_1 das Glied Bv_1 des Arguments als unabhängig von v_1 angesehen werde. Das Product $\frac{r^2}{p^2} \frac{d\Omega}{dv_1}$ ist daher gleich einer Reihe Sinus-Glieder, in welchen der ganzzahlige Coefficient c_1 nicht gleich Null sein kann. Es ist bekannt, dass die säcularen Störungen, welche sich aus den vorliegenden Störungsgliedern ergeben, nur in dem Falle mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, wenn gleichzeitig $c = 0$ und $c_1 = 0$ ist. Hier aber verschwindet in keinem Falle der Coefficient c_1 . Es folgt daraus, dass alle säcularen Störungen von q_1 die störende Masse m_1 als Factor enthalten.

Handelt es sich um die Störungen der äusseren Bahn, so kann man ebenso wie vorhin beweisen, dass die Veränderlichen q und q_1 mit dem Producte mm_1 der Massen multiplicirt sind. Man denke sich die Veränderliche q_1 aus dem Integral der lebendigen Kraft bestimmt:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b.$$

Es ist dann die Veränderliche q durch die Störungsgleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dr} r' + \frac{d\Omega}{du} \frac{n}{r^2}$$

gegeben. Bei der Integration dieser Gleichung betrachte man die innere Bahn als eine ungestörte Ellipse. Es ist daher der Parameter p eine Beständige, und $r' = \frac{dr}{dv} v'$. Ferner ist $n = p^2$, und $\frac{n}{r^2} = v'$. Setzt man noch

$$u = \varpi + v, \quad \text{so ist} \quad \frac{du}{dv} = 1,$$

und die Störungsgleichung (4) geht über in:

$$\frac{1}{2} q' = \left(\frac{d\Omega}{dr} \frac{dr}{dv} + \frac{d\Omega}{du} \frac{du}{dv} \right) v' = \frac{d\Omega}{dv} v',$$

in welcher die partielle Derivirte $\frac{d\Omega}{dv}$ so zu verstehen ist, dass die Veränderlichen r_1 u_1 \mathcal{F} ϖ als unabhängig von v angesehen werden.

Um nun die Veränderliche q als eine Function der beiden Anomalien v und v_1 darzustellen, denkt man sich die Störungsfunction diesmal in eine Reihe Glieder von der Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1)$$

entwickelt. Es ist offenbar, dass alle Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{d\Omega}{dv}$ als Sinus-Glieder gegeben sind; dass aber kein

Sinus-Glied vorhanden ist, in welchem der ganzzahlige Coefficient c verschwindet. Man weiss, dass die säcularen Störungen, welche sich aus den vorliegenden Störungsgliedern ergeben, nur in dem Falle mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, wenn gleichzeitig $c = 0$ und $c_1 = 0$ ist. Da hier in keinem Falle $c = 0$ ist, so sieht man, dass alle säcularen Störungen von q mit der störenden Masse m multiplicirt sind.

5.

Ich habe den Vorschlag gemacht, die Störungen als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 darzustellen. Die Integrationsmethode, durch welche das erreicht wird, führt zu weiteren Eigenschaften der Veränderlichen q und q_1 , deren Kenntniss bei der Bestimmung der säcularen Störungen von Werth ist. Zur Bestimmung von q_1 schreibe ich die Störungsgleichung:

$$(4)' \quad \frac{1}{2} q_1' = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{r^2}{p^2} \frac{d\Omega}{dv_1} v'.$$

Entwickelt man das Product $\frac{r^2}{p^2} \frac{d\Omega}{dv_1}$ in eine Reihe Sinus der Vielfachen von v und v_1 , so verschwindet in keinem Falle der ganzzahlige Coefficient in dem mit v_1 multiplicirten Gliede des Arguments. Es folgt hieraus, dass jede Störung der Veränderlichen q_1 , welche durch die erste partielle Integration der Gleichung (4)' entsteht, einen Cosinus zum Factor hat, in dessen Argument der ganzzahlige Coefficient von v_1 nicht gleich Null sein kann.

In der Derivirten der Correction des partiellen Integrals dagegen giebt es Glieder, in deren Argument der ganzzahlige Coefficient von v_1 verschwindet. Man weiss, dass diese Glieder ohne Ausnahme mit dem Quadrat der störenden Masse m_1 multiplicirt sind. Verschwindet in dem Argumente zugleich der ganzzahlige Coefficient von v , so erhält man durch die Integration dieser Glieder säculare Störungen von q_1 , welche die erste Potenz der störenden Masse zum Factor haben. Sind aber die erwähnten Glieder Functionen von v , so haben die durch deren Integration erhaltenen Störungen von q_1 das Quadrat der störenden Masse zum Factor. Wir gelangen hiermit zu dem Satze, dass sämtliche Störungen von q_1 , welche sich als Functionen von v darstellen, in deren Argument aber der ganzzahlige Coefficient von v_1 verschwindet, mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt sind. Diese Störungen von q_1 haben die Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv),$$

in welcher der Coefficient B nicht gleich Null sein kann, weil unter der Annahme $B = 0$ zugleich $C = 0$ ist.

Wir schreiben in der Absicht, die Veränderlichen k und h als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 darzustellen, die Störungsgleichungen:

$$(6) (7) \quad -k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v',$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) : m p_0^2.$$

Den Werth der Veränderlichen q entnehmen wir dem Integral der lebendigen Kraft:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b,$$

und schreiben dementsprechend:

$$Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} - q_1 - 2b + 2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) : m p_0^2.$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir in eine Reihe Glieder von der Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1),$$

in welcher die Bedeutung der Buchstaben $A B C c c_1$ unter 4. angegeben ist.

Man weiss, dass alle säcularen Störungen von k und von h , welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, aus denjenigen Gliedern der Entwicklung von Q hervorgehen, welche die Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 \pm v)$$

haben. Führt man diese Glieder über in die beiden folgenden:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos v \cos(A + Bv_1), \quad C \frac{p_1^2}{r_1^2} \sin v \sin(A + Bv_1),$$

so ergeben sich aus dem ersten Gliede säculare Störungen der Veränderlichen h , aus dem zweiten Gliede säculare Störungen der Veränderlichen k .

Wenn es sich in's Besondere um diejenigen säcularen Störungen von k und von h handelt, welche aus der Anwesenheit der Veränderlichen q_1 in den Störungsgleichungen (6) und (7) folgen, so findet man für die Veränderliche k wenigstens, dass diese säcularen Störungen sämmtlich die störende Masse m_1 als Factor enthalten. Um den betreffenden Ausdruck:

$$\frac{r^3}{p^3} \sin v q_1 v'$$

integriren zu können, hat man den Factor $\frac{r^3}{p^3}$ nach den Cosinus der Vielfachen von v zu entwickeln. Es ist bekanntlich:

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^3}{p^3} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - 3e \cos v + 3e^2 \cos 2v - \dots$$

Das Produkt $\frac{r^3}{p^3} \sin v$ aber ist durch eine Reihe Sinus der Vielfachen von v ausgedrückt. Es können offenbar nur solche Störungen von q_1 , welche die Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv)$$

haben, zu säcularen Störungen von k führen. Vorhin ist gezeigt worden, dass die so beschaffenen Störungen von q_1 ohne Ausnahme mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt sind. Hieraus folgt, dass alle säcularen Störungen von k , welche aus dem mit q_1 multiplicirten Gliede der Gleichung (6) entstehen, mit der ersten Potenz der

störenden Masse m_1 multiplicirt sind. Die Vereinfachung der Rechnung, welche sich aus der oben bewiesenen Eigenschaft der Veränderlichen q_1 ergibt, besteht darin, dass man bei der Bestimmung derjenigen säcularen Störungen von k , welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, in der Störungsgleichung (6) ohne Weiteres $q_1 = 0$ setzen darf.

Die säcularen Störungen der Veränderlichen h betreffend gelangt man zu einem andern Resultat. Die Anwesenheit der Veränderlichen q_1 in der Gleichung (7) hat in der That säculare Störungen von h zur Folge, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind. Dieselben entstehen durch die Integration des Ausdrucks:

$$-\frac{r^3}{p^3} \cos v q_1 v'.$$

Entwickelt man das Product $\frac{r^3}{p^3} \cos v$ in eine Reihe Cosinus der Vielfachen von v , so führen auf Grund der oben bewiesenen Eigenschaft von q_1 diejenigen Glieder der Entwicklung, in deren Argument der Coefficient von v eine ganze Zahl ist, zu säcularen Störungen, welche sämmtlich mit der störenden Masse m_1 multiplicirt sind. Dasjenige Glied der Entwicklung aber, welches sich als eine beständige Grösse darstellt, führt zu säcularen Störungen von h , welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind. Ich setze das mit q_1 multiplicirte Glied der Gleichung (7):

$$-\frac{r^3}{p^3} \cos v q_1 v' = \left(a \frac{r^2}{p^2} - T \right) q_1 v',$$

und bestimme die Beständige a in solcher Art, dass in der nach den Cosinus der Vielfachen von v entwickelten Grösse:

$$T = a \frac{r^2}{p^2} + \frac{r^3}{p^3} \cos v$$

das beständige Glied verschwindet. Vermittelst der Gleichungen:

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^2}{p^2} = 1 - 2e \cos v + \dots$$

$$(1 - e^2)^{3/2} \frac{r^3}{p^3} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - 3e \cos v + 3e^2 \cos 2v - \dots$$

findet man leicht den Werth $a = \frac{3}{2} \frac{e}{1 - e^2}$. Ich schreibe alsdann:

$$-\frac{r^3}{p^3} \cos v q_1 v' = a \frac{r^2}{p^2} q_1 v' = \frac{3}{2\lambda} \frac{e}{1 - e^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} q_1 v_1'.$$

Sollen nun diejenigen säcularen Störungen von h bestimmt werden, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, so darf man das mit q_1 multiplicirte Glied der Störungsgleichung (7) der vorliegenden Gleichung entsprechend umgestalten, und es kommen in demselben nicht bloß alle säcularen, sondern auch solche periodische Störungen von q_1 in Betracht, welche als Functionen von v_1 allein gegeben sind.

6.

Zur Bestimmung der Veränderlichen q ist die Störungsgleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'$$

gegeben. Entwickelt man das Product $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} \frac{d\Omega}{dv}$ in eine Reihe Sinus der Vielfachen von v und v_1 , so verschwindet in keinem der Argumente der ganzzahlige Coefficient von v . Es folgt hieraus, dass alle diejenigen Störungen der Veränderlichen q , welche durch die erste partielle Integration der Gleichung (4) entstehen, die Form:

$$C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1)$$

haben, in welcher wohl der Coefficient c_1 , nicht aber der Coefficient c gleich Null sein kann.

Wenn die Derivirte der Correction des partiellen Integrals ein Glied enthält, in dessen Argument der Coefficient c_1 gleich Null ist, so hat dieses Glied das Quadrat der störenden Masse m zum Factor. Ist in dem Argument zugleich der Coefficient c gleich Null, so erhält man durch

$$Q_1 = \frac{r^2}{\rho^2} \frac{r_1}{\rho_1} \left(f_1 \frac{\rho_{01}}{r_1} - q - 2b + 2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right) : \lambda m_0 \rho_{01}^2.$$

Sollen nun diejenigen säcularen Störungen von k_1 und von h_1 bestimmt werden, welche aus der Anwesenheit der Veränderlichen q in den Gleichungen (6)' und (7)' folgen, so schreibe ich die letzteren in der folgenden Form:

$$(6)' \quad -k_1' = \frac{1}{\lambda} \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \frac{\rho^2}{r^2} \sin v_1 Q_1 v_1',$$

$$(7)' \quad h_1' = \frac{1}{\lambda} \frac{r_1^2}{\rho_1^2} \frac{\rho^2}{r^2} \cos v_1 Q_1 v_1'.$$

Die Veränderliche k_1 betreffend ist zu erwähnen, dass sich der Factor $\frac{r_1^3}{\rho_1^3} \sin v_1 = S$ in eine Reihe Sinus der Vielfachen von v_1 entwickelt. Das Integral des mit q multiplicirten Gliedes der Gleichung (6)' darf daher vermittelt der partiellen Integration hergestellt werden, welche aus der folgenden Gleichung hervorgeht:

$$q S v_1' = (q \int S dv_1)' - q' \int S dv_1.$$

Das Integral des ersten Theils zur Rechten ist mit der störenden Masse m multiplicirt, weil alle Störungen von q von dieser Beschaffenheit sind. In Betreff des zweiten Theils zur Rechten verweise ich auf die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v',$$

der zufolge jedes Glied von q' multiplicirt ist mit dem Sinus eines Vielfachen von v , in dessen Argument der Coefficient

die Integration des Gliedes eine säculare Störung von q , welche mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt ist. Ist das Glied aber eine Function von v , so hat die durch dessen Integration entstehende Störung von q das Quadrat der störenden Masse m zum Factor, und hat die Form:

$$C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv),$$

in welcher der Coefficient B nicht gleich Null sein kann.

Die Veränderlichen k_1 und h_1 bestimmen sich aus den Störungsgleichungen:

$$(6)' (7)' \quad -k_1' = \sin v_1 Q_1 v', \quad h_1' = \cos v_1 Q_1 v',$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$Q_1 = \frac{r^2}{\rho^2} \frac{r_1}{\rho_1} \left(f_1 \frac{\rho_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right) : \lambda m_0 \rho_{01}^2.$$

An die Stelle von q_1 ist der Werth zu setzen, welcher sich aus dem Integral der lebendigen Kraft:

$$q + q_1 = 2\Omega - 2b$$

ergiebt. Es ist also:

von v nicht gleich Null sein kann. Von der gleichen Beschaffenheit sind auch alle Glieder des Productes $q' \int S dv_1$, weil in demselben der Factor von q' eine Function von v_1 allein ist. Diejenigen säcularen Störungen, welche durch die Integration des zweiten Theils entstehen, sind daher gleichfalls mit der störenden Masse m multiplicirt. Es folgt hieraus, dass man alle diejenigen säcularen Störungen von k_1 erhält, welche mit der störenden Masse m nicht multiplicirt sind, indem man in der Störungsgleichung (6)' ohne Weiteres $q = 0$ setzt.

In der Gleichung (7)' hat die Anwesenheit der Veränderlichen q säculare Störungen von h_1 zur Folge, welche mit der störenden Masse m nicht multiplicirt sind. Um zu denselben zu gelangen, schreibe ich in dem mit q multiplicirten Gliede der Gleichung (7)':

$$-\frac{r_1^3}{\rho_1^3} \cos v_1 q v_1' = \left(a \frac{r_1^2}{\rho_1^2} - T \right) q v_1',$$

und bestimme die Beständige a in solcher Art, dass in der nach den Cosinus der Vielfachen von v_1 entwickelten Grösse:

$$T = a \frac{r_1^2}{\rho_1^2} + \frac{r_1^3}{\rho_1^3} \cos v_1$$

das beständige Glied verschwindet. Man findet

$$a = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2}.$$

Man kann daher die folgende Gleichung schreiben:

$$-\frac{r_1^3}{\rho_1^3} \cos v_1 q v_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1 - e_1^2} \frac{r_1^2}{\rho_1^2} q v_1' - (q \int T dv_1)' + q' \int T dv_1.$$

Offenbar sind alle säcularen Störungen von h_1 , welche durch die Integration des zweiten und des dritten Theils zur Rechten entstehen, mit der störenden Masse m multiplicirt. Sollen diejenigen säcularen Störungen von h_1 bestimmt werden, welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, so darf man das mit q multiplicirte Glied der Gleichung (7)' folgender Gleichung entsprechend umformen:

$$-\frac{r_1^3}{\rho_1^3} \cos v_1 q v_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1-e_1^2} \frac{r_1^2}{\rho_1^2} q v_1'.$$

Es kommen in demselben alle säcularen Störungen von q in Betracht, und auch solche periodischen Störungen von q , welche als Functionen von v_1 allein gegeben sind. Es sind aber auch periodische Störungen von q zu berücksichtigen, welche als Functionen von v gegeben sind. Man hat sich in diesem Falle zum Behuf einer Umformung des Störungsgliedes der folgenden Gleichung zu bedienen:

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{r_1^3}{\rho_1^2} \cos v_1 q v_1' = \frac{3}{2} \frac{e_1}{1-e_1^2} \frac{r^2}{\rho^2} q v'.$$

Es ist aus dieser Gleichung ersichtlich, dass unter den von v abhängenden Störungen von q nur diejenigen in Betracht kommen, welche die Form:

$$C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv)$$

$$-k' = \sin v \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos \psi v' = \frac{1}{2} \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} [\sin(v+\psi) + \sin(v-\psi)] v'.$$

$$h' = \cos v \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos \psi v' = \frac{1}{2} \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} [\cos(v+\psi) + \cos(v-\psi)] v'.$$

Bedient man sich der weiteren Abkürzungen:

$$\lambda(1-e^2)^{-3/2}(1+\frac{1}{2}e_1^2) = v_1 \quad c + (B - c_1)v_1 = a,$$

so ergeben sich durch die erste partielle Integration die Werthe:

$$2k = \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\cos(v+\psi)}{1+a} + \frac{\cos(v-\psi)}{1-a} \right) \quad 2h = \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\sin(v+\psi)}{1+a} + \frac{\sin(v-\psi)}{1-a} \right).$$

Man setze dieselben in die Gleichung:

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1 = 2 \frac{\rho}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

ein, wodurch die letztere übergeht in:

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1 = \frac{\rho}{r} \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\cos \psi}{1+a} + \frac{\cos \psi}{1-a} \right) = 2 \frac{\rho}{r} \sum C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \frac{\cos \psi}{1-a^2}.$$

Demzufolge kann man, nachdem man das Product $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} Q$ in eine Reihe Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt hat, aus irgend einem Gliede des Ausdrucks Q das entsprechende Glied der Veränderlichen:

$$\frac{r}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - 1 \right) = 2\rho$$

herleiten, indem man das erstere mit einem beständigen

haben, vorausgesetzt, dass dieselben durch die erste partielle Integration der Gleichung (4) entstanden sind. Denn es ist bekannt, dass alle übrigen Störungen von q , wenn dieselben die angegebene Form haben, mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt sind.

7.

Die Störungen werden als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt, was durch eine Reihe partieller Integrationen zu Stande gebracht wird. In dem Werthe des Parameters führt die erste partielle Integration zu einer bemerkenswerthen Reduction. Die Störungsgleichungen, aus welchen sich die Veränderlichen k und h bestimmen, sind:

$$(6) (7) \quad -k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v'.$$

Wir haben den Ausdruck:

$$Q = \frac{r^3}{\rho^3} \left(f \frac{\rho_0}{r} - q_1 - 2b + 2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) : m \rho_0^2$$

in eine Reihe Glieder entwickelt von der Form:

$$C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1) = C \frac{\rho_1^2}{r_1^2} \cos \psi.$$

Die Gleichungen (6) und (7) können daher umgeschrieben werden in:

Factor verbindet. Könnte man die beständigen Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} Q$ fortschaffen, so würden hiermit auch in dem Werthe des Productes $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} Q$ die beständigen Glieder verschwinden.

Uebrigens erleidet das obige Resultat, zu welchem die erste partielle Integration der Störungsglieder geführt hat, eine Umgestaltung für die beiden Fälle $c = \pm 1$. Für den Fall $c = 1$ erhält man den folgenden Werth:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = \frac{p}{r} \sum C \left(\frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{\cos \psi}{1+a} - \frac{1}{v} \frac{\cos \psi}{B-c_1} \right).$$

Für den Fall $c = -1$ erhält man:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = \frac{p}{r} \sum C \left(\frac{1}{v} \frac{\cos \psi}{B-c_1} + \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{\cos \psi}{1-a} \right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist $v = \frac{\lambda}{(1-e^2)^{3/2}}$. Der oben ausgesprochene Satz, die Herleitung eines Gliedes der Veränderlichen q aus einem Gliede von Q betreffend, hat daher

nur in dem Falle Geltung, dass die diesem Gliede von Q entsprechenden Glieder der Gleichungen (6) und (7) als Functionen der Veränderlichen v vorliegen. Finden sich unter diesen Gliedern Functionen der Veränderlichen v_1 allein, so kann man von dem Satze keinen Gebrauch machen.

In dem Parameter p_1 führt die erste partielle Integration zu einer ähnlichen Reduction wie in dem Parameter p . Man hat zur Bestimmung der Veränderlichen k_1 und h_1 die Störungsgleichungen:

$$(6)' (7)' - k_1' = \sin v_1 Q_1 v', \quad h_1' = \cos v_1 Q_1 v'.$$

Nachdem man den Ausdruck:

$$Q_1 = \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} - q - 2b + 2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right) : \lambda m_0 p_{01}^2$$

in eine Reihe Glieder entwickelt hat von der Form:

$$C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos(A + Bv_1 + cv - c_1 v_1) = C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos \psi,$$

schreiben sich die vorliegenden Störungsgleichungen um in:

$$\begin{aligned} -k_1' &= \sin v_1 \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos \psi v' = \frac{1}{2} \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[\sin(\psi + v_1) - \sin(\psi - v_1) \right] v' \\ h_1' &= \cos v_1 \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos \psi v' = \frac{1}{2} \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[\cos(\psi + v_1) + \cos(\psi - v_1) \right] v'. \end{aligned}$$

Bedient man sich wieder der Abkürzungen:

$$\lambda (1-e^2)^{-3/2} (1 + \frac{1}{2} e_1^2) = v_1, \quad c + (B - c_1) v_1 = a,$$

so ergeben sich durch die erste partielle Integration die Werthe:

$$2k_1 = \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\cos(\psi + v_1)}{a + v_1} - \frac{\cos(\psi - v_1)}{a - v_1} \right) \quad 2h_1 = \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\sin(\psi + v_1)}{a + v_1} + \frac{\sin(\psi - v_1)}{a - v_1} \right).$$

Man hat dieselben in die Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1)$$

einzusetzen, und führt die letztere hiermit über in:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = \frac{p_1}{r_1} \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{\cos \psi}{a + v_1} - \frac{\cos \psi}{a - v_1} \right) = -2 \frac{p_1}{r_1} \sum C \frac{p_1^2}{r_1^2} \frac{v_1 \cos \psi}{a^2 - v_1^2}.$$

Irgend einem Gliede der Entwicklung von Q_1 entspricht demzufolge ein Glied der Veränderlichen:

$$\frac{r_1}{p_1} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 \right) = 2q_1,$$

welches sich von dem ersteren nur durch einen beständigen Factor unterscheidet. Doch hat das vorliegende Resultat für den Fall $c = 0$ eine geänderte Gestalt. Man findet für diesen Fall:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = -\frac{2}{v} \frac{p_1}{r_1} \sum C \frac{\cos \psi}{(B - c_1)^2 - 1}.$$

§ 2. Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen.

8.

Die neue Störungstheorie stellt die Forderung, dass in den Coordinatenwerthen der gestörten Massen die mit der Zeit multiplicirten Glieder der Integrale immer nur als Argumente trigonometrischer Functionen vorkommen. Demgemäss ist in dem Werthe des Perihels ein der Zeit proportionales Glied zulässig. Der Werth des Parameters aber soll ein derartiges Glied nicht enthalten. Man findet, dass diese Forderung immer in Erfüllung gebracht werden kann.

Der Parameter p ist gegeben, nachdem man die Werthe der Veränderlichen q k h bestimmt hat. Man kann aber zeigen, dass diese Werthe frei sind von den mit der Zeit multiplicirten Gliedern, sobald die überzähligen Integrationsbeständigen, welche in die Integrale der Störungsgleichungen hereingehen, die geeignete Verwendung erhalten.

Wir haben unter 3. diejenigen Glieder der Störungsgleichungen, welche als gegebene Functionen der Zeit vorliegen, Störungsglieder der ersten Ordnung genannt. Durch deren Integration ergeben sich die Störungen der ersten Ordnung. Doch ist die Summe dieser Störungen nur das erste Glied der unendlichen Reihe, zu welcher man durch die vollständige Integration der Störungsgleichung gelangt. Mit Recht wird verlangt, es müsse die Convergenz dieser Reihe nachgewiesen sein, bevor man die Störungen der ersten Ordnung als eine Annäherung an den genauen Werth der Störungen betrachten könne. Es muss insbesondere nachgewiesen sein, dass sich die Störung der zweiten Ordnung als einen kleinen Bruchtheil der grössten unter den Störungen erster Ordnung darstelle, die Störung der dritten Ordnung als einen kleinen Bruchtheil der grössten unter den Störungen zweiter Ordnung u. s. f. Wenn dann der kleine Bruchwerth, durch welchen das Verhältniss der grössten unter den Störungen irgend einer Ordnung zu der grössten unter den Störungen der zunächst vorausgehenden Ordnung ausgedrückt werden kann, in jedem Falle der nämliche ist, so kann die Convergenz der unendlichen Reihe ebenso wenig in Zweifel gezogen werden, als die einer geometrischen Reihe, deren Quotient kleiner als die Einheit ist. Einen andern Weg, die Convergenz der unendlichen Reihe nachzuweisen, möchte es wohl nicht geben.

Man erhält die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man die Störungen der ersten Ordnung an die Stelle der gestörten Elemente in die Störungsgleichung einsetzt. Für den Fall, dass in einer Störungsgleichung Elemente vorhanden sind, für welche die Störungen der zweiten Ordnung durch die Integration der vorausgehenden Störungsgleichungen bestimmt sind, versteht es sich, dass diese Störungen der zweiten Ordnung eingesetzt werden sollen. Durch die Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung ergeben sich die Störungen zweiter Ordnung. Unter den Störungen der ersten Ordnung werden die säcularen und die periodischen unterschieden. Die letzteren enthalten die störende Masse als Factor, die ersteren sind frei von diesem Factor. Zwar haben auch die säcularen Störungen einen kleineren Factor; doch ist derselbe in der Regel numerisch beträchtlich grösser als die störende Masse. Werden unter den Störungen der ersten Ordnung solche der ersten und der zweiten Classe unterschieden, je nachdem dieselben säcular oder periodisch sind, so ist man genöthigt, die Störungsglieder der zweiten Ordnung in drei verschiedene Classen einzutheilen. In die erste Classe werden diejenigen Störungsglieder eingereiht, welche die störende Masse als Factor nicht enthalten. Die Störungsglieder der zweiten Classe haben die erste Potenz der störenden Masse zum Factor. Die Störungsglieder der dritten Classe sind mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt. In gleicher Weise ist es zweckmässig, unter den Störungen zweiter Ordnung solche der ersten, zweiten, dritten Classe zu unter-

scheiden, je nachdem dieselben mit der nullten, ersten, zweiten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind. Wenn nun verlangt wird, dass die Störung der zweiten Ordnung ein kleiner Bruchtheil der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung sein soll, so wird in dieser Forderung noch vorausgesetzt, dass nur solche Störungen mit einander verglichen werden, welche in ein und dieselbe Classe gehören.

Für den Fall, dass die Störungsglieder der zweiten Ordnung die störende Masse als Factor nicht enthalten, sind dieselben, wie bekannt ist, als quadratische Formen der säcularen Störungen erster Ordnung gegeben. Es folgt hieraus, dass sich diese Störungsglieder zweiter Ordnung, ebenso wie die in die zweite und in die dritte Classe gehörigen, als kleine Bruchtheile der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung darstellen. Wenn es sich herausstellt, dass alle Störungen der zweiten Ordnung nicht erheblich grösser sind als die in dieselbe Classe gehörigen Störungsglieder der zweiten Ordnung, so versteht es sich, dass auch die Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung vorliegen. Ist die Störung der zweiten Ordnung periodisch, so ist es von vornherein ersichtlich, dass dieselbe einen kleinen Bruchtheil der grössten unter den Störungen erster Ordnung ausmacht. Denn der Integrationsnenner einer periodischen Störung kann zwar kleiner als die Einheit sein; ist aber in der grossen Mehrzahl der Störungsaufgaben immer noch so beträchtlich, dass die periodische Störung nicht erheblich grösser ist als das entsprechende Störungsglied der zweiten Ordnung. Diejenigen Störungsaufgaben, in welchen das nicht zutrifft, bedürfen allerdings einer besonderen Behandlung, auf welche aber der vorliegende Aufsatz nicht eingeht. Die Convergenz der Reihe, zu welcher man durch die Integration der Störungsgleichung gelangt, kann nur da in Frage kommen, wo die Störung der zweiten Ordnung säcular ist, weil hier der Integrationsnenner die störende Masse zum Factor hat, und die Anwesenheit dieses Integrationsnenners den Fall herbeiführen kann, dass die Störung der zweiten Ordnung nicht ein kleines Bruchtheil der grössten unter den Störungen erster Ordnung ist.

Unter 2. sind die Störungsgleichungen angegeben, aus welchen sich der Parameter und das Perihel der gestörten Ellipse bestimmen. Man kann zeigen, dass die Störungen der ersten Ordnung, zu welchen man durch die Integration dieser Störungsgleichungen gelangt, für einen sehr ausgedehnten Zeitraum eine Annäherung an den genauen Werth der Störungen geben, sobald die überzähligen Integrationsbeständigen, welche in die Störungen der ersten Ordnung hereingehen, in der geeigneten Weise bestimmt sind. Die erwähnten Störungsgleichungen bilden, soweit in denselben die Veränderlichkeit von Knoten und Neigung der Bahn nicht in Betracht kommt, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der vierten Ordnung. Nach den Principien der Integralrechnung sind vier Integrationsbeständige notwendig und auch hinreichend, um die Integrale des Systems der vierten Ordnung zu einem Anschluss an die Forderungen der Aufgabe zu bringen. In die Integrale der Störungsgleichungen, aus welchen sich der Parameter und das

Perihel bestimmen, werden als Integrationsbeständige eingeführt: Die Grössen p_0 und ϖ_0 , ferner die Excentricität der gestörten Ellipse, und die Epoche. Es sind aber weitere unbestimmte Beständige in einer nicht unbeträchtlichen Zahl in den Integralen dieser Störungsgleichungen vorhanden. Man kann denselben eine solche Verwendung geben, dass sich der Anschluss der Integrale an die Erscheinung über einen sehr ausgedehnten Zeitraum erstreckt.

9.

Soll nun, wie unter 8. verlangt wird, gezeigt werden, dass in der gestörten Ellipse der Werth des Parameters p keine Glieder enthält, welche der Zeit proportional sind, so verweise ich auf eine bekannte Eigenschaft der Störungsgleichungen. Kommen die Störungsglieder der ersten Ordnung allein in Betracht, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass diejenigen Störungsgleichungen, aus welchen sich die Veränderlichen q und k bestimmen, nur Sinus-Glieder, und diejenigen Störungsgleichungen, aus welchen sich die Veränderlichen h und ω bestimmen, nur Cosinus-Glieder enthalten. Das Argument eines solchen Sinus- oder Cosinus-Gliedes ist eine lineare Function der vier Kreisbögen v v_1 u u_1 , durch welche für die beiden Leitstrahlen r und r_1 die Bewegung in der Ellipse, und die Bewegung in der Ebene der Bahn ausgedrückt ist. Das Argument hat also die Form:

$$cv + c_1 v_1 + bu + b_1 u_1,$$

in welcher die Coefficienten c c_1 b b_1 positive oder negative ganze Zahlen sind. Die neue Störungstheorie geht von der Voraussetzung aus, dass die mittleren Bewegungen der Leitstrahlen in der Ellipse: γt und $\gamma_1 t$; ferner die mittleren Bewegungen der Apsidenlinien in der Ebene der Bahn: βt und $\beta_1 t$ incommensurabele Grössen sind, dass also die lineare Function:

$$c\gamma + c_1\gamma_1 + b\beta + b_1\beta_1$$

nur dann verschwindet, wenn jeder der vier Coefficienten c c_1 b b_1 gleich Null ist, oder wenn auch das Argument verschwindet. Aus dieser Voraussetzung folgt, dass in jenen Sinus- und Cosinus-Gliedern das Argument nicht gleich einer beständigen Grösse sein kann. Es folgt weiter, dass die Störungen der ersten Ordnung von q und von k keine Glieder enthalten, welche der Zeit proportional sind. Wohl aber finden sich solche Glieder in den Störungen der ersten Ordnung von h und von ω , vergl. § 1 des Aufsatzes in Nr. 2515-16.

Es fragt sich, ob auch die Störungsglieder der zweiten und der höheren Ordnungen in den Störungsgleichungen, welche zur Bestimmung von q und von k gegeben sind, nur solche Sinus-Glieder, und in den zur Bestimmung von h und ω gegebenen Störungsgleichungen nur solche Cosinus-Glieder enthalten, deren Argumente die angegebene Form haben. In der That kann das nicht ohne Weiteres vorausgesetzt werden; es erweist sich erst dann als zutreffend, nachdem man die Integrationsbeständige h_0 , welche den veränderlichen Gliedern des Werthes von h beigefügt ist, gleich Null gesetzt hat, vergl. S. 293-94 des Aufsatzes in Nr. 2515-16. Aus der Annahme $h_0 = 0$ folgt, dass auch

die Störungen der zweiten und der höheren Ordnungen von q und von k frei sind von den mit der Zeit multiplicirten Gliedern.

Die Forderung, dass der Werth des Parameters p keine der Zeit proportionalen Glieder enthalte, kann sich nur dann erfüllen, wenn die der Zeit proportionalen Glieder der Veränderlichen h zum Verschwinden gebracht werden. Man kann aber die Integrationsbeständige q_0 , welche zu den überzähligen gehört, so bestimmen, dass die der Zeit proportionalen Glieder der Veränderlichen h in der That verschwinden. Dies ist schon in der Pbl. XII der A.G. S. 34 ausgeführt worden, vermittelt der S. 31 vorgenommenen Transformation. Die Rechnung, welche zu diesem Erfolg führt, hat sich im § 2 des Aufsatzes in Nr. 2620-21 wesentlich vereinfacht; soll aber in diesem § noch eingehender verfolgt werden.

In gleicher Weise kann man zeigen, dass in der äusseren Bahn der Werth des Parameters p_1 keine der Zeit proportionalen Glieder enthält. In den Störungen der ersten Ordnung von q_1 und k_1 finden sich von vornherein keine derartigen Glieder. Dass auch die Störungen der zweiten und der höheren Ordnungen dieser beiden Veränderlichen keine der Zeit proportionalen Glieder enthalten, wird damit erreicht, dass man die Integrationsbeständige h_{01} , welche den veränderlichen Gliedern des Werthes von h_1 beigefügt ist, gleich Null setzt. Durch die Integration der Störungsgleichung (7)' ergeben sich in dem Werthe von h_1 Glieder, welche der Zeit proportional sind. Diese Glieder verschwinden, sobald die Integrationsbeständige q_{01} die geeignete Verwendung erhält. Sind die Werthe von q_1 k_1 h_1 frei von den mit der Zeit multiplicirten Gliedern, so besitzt auch der Parameter p_1 diese Eigenschaft.

10.

Es wird unter 9. darauf hingewiesen, dass durch die geeignete Verwendung der Integrationsbeständigen q_0 und q_{01} die der Zeit proportionalen Störungen der Veränderlichen h und h_1 zum Verschwinden gebracht werden können. Dass das geschehe, ist eine Forderung, welche an die Integrale der Störungsgleichungen (7) und (7)' gestellt ist. Nachweislich kann man, nachdem die der Zeit proportionalen Glieder in den Werthen von h und von h_1 weggebracht sind, die überzähligen Integrationsbeständigen f und f_1 so bestimmen, dass sich alle Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der grössten unten den Störungen erster Ordnung darstellen. Es erfüllt sich hiermit die zweite der Forderungen, welche unter 8. an die Integrale der Störungsgleichungen gestellt sind. Dieselbe wäre unerfüllbar, wollte man den überzähligen Integrationsbeständigen f und f_1 eine beliebige Verwendung geben.

Wir haben in den Störungsgleichungen die Veränderliche u durch die neue Veränderliche:

$$q = m \left[r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2\kappa}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + p_0^2 (1 - e^2) \right]$$

ersetzt, und es ist bekanntlich:

$$r'^2 + \frac{n^2}{r^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit des gestörten Massenpunktes in der Ebene der Bahn. Der Störungsgleichung:

$$(7) \quad h' = \frac{r}{p} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) : m p_0^2$$

zufolge enthält der Werth der Derivirten h' ein beständiges Glied, welches den Factor $q_0 : m p_0^2$ hat. Dieser Factor kann als eine Correction des Quadrats der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ebene der Bahn angesehen werden. Wird dies berücksichtigt, so kann den unter 9. gegebenen Erörterungen zufolge die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Leitstrahlen in der Ebene der Bahn so eingerichtet werden, dass die der Zeit proportionalen Glieder der Veränderlichen h und h_1 zum Verschwinden kommen.

Aus der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{(1+m)^2} = p_0^3 + f \frac{p_0}{m},$$

in welcher $\alpha = K : l^2$ gesetzt ist, bestimmt sich die Grösse l , und in Folge dessen auch die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls r in der Ellipse. Die überzählige Integrationsbeständige f kann daher als eine Correction der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse angesehen werden. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ebene der Bahn ist gleich der Summe der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse und der mittleren Winkelgeschwindigkeit der Apsidenlinie. Wenn diese Summe eine gegebene ist, so kann man über die eine der beiden letzteren Winkelgeschwindigkeiten noch verfügen. Es ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ebene der Bahn so eingerichtet worden, dass die der Zeit proportionalen Glieder der Ver-

änderlichen h und h_1 verschwinden. Auf Grund des oben ausgesprochenen Satzes, die Verwendung der überzähligen Integrationsbeständigen f und f_1 betreffend, kann man also vermittelt dieser Beständigen die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse so einrichten, dass sich alle Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der grössten unter den Störungen erster Ordnung darstellen.

II.

Die Analysis, welche zu einer derartigen Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen führt, hat eine einfache Gestalt. Zur Bestimmung der Veränderlichen h hat man die Störungsgleichung:

$$(7) \quad h' = \cos v Q v',$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) : m p_0^2.$$

Um die Störungen der ersten Ordnung von h bestimmen zu können, muss das Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ in eine Reihe Cosinus-Glieder entwickelt werden, deren Argumente die Vielfachen von u u_1 v v_1 sind. Die Veränderliche q soll aus dem Integral der lebendigen Kraft bestimmt werden, welches hier in der folgenden Form geschrieben wird:

$$q - q_0 + q_1 - q_{01} = 2\Omega - 2b.$$

Man denkt sich die Veränderlichen Ω q q_1 nach den Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 entwickelt, und es wird angenommen, dass die beständigen Glieder dieser Entwicklungen beziehungsweise durch die Grössen b q_0 q_{01} ausgedrückt seien. Es ist nun:

$$Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2\Omega - 2b + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2.$$

Lässt man in dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ alle diejenigen Cosinus-Glieder fort, deren Argumente Functionen von u und u_1 sind, ferner auch diejenigen Cosinus-Glieder, deren Argumente unabhängig von u und u_1 als Functionen von v_1 gegeben sind, so enthalten die noch übrigen Cosinus-Glieder

die Veränderliche v allein. Die letzteren führen zu den beiden Gleichungen, aus welchen die überzähligen Integrationsbeständigen q_0 und f bestimmt werden.

Lässt man diejenigen Glieder der Störungsfunktion ausser Acht, welche Functionen von u und u_1 sind, so findet man den Werth:

$$\Omega = \alpha m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left(\frac{1}{4} + \frac{3^2}{8^2} \frac{r^2}{r_1^2} + \frac{5^2}{16^2} \frac{r^4}{r_1^4} + \frac{35^2}{128^2} \frac{r^6}{r_1^6} + \frac{63^2}{256^2} \frac{r^8}{r_1^8} + \dots \right).$$

Wir schreiben aber zur Abkürzung:

$$\Omega : m p_0^2 = \frac{\alpha m_1}{r_1^3} \frac{r^2}{p_0^2} \left(D + D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right),$$

wo die den Potenzen von $\frac{r^2}{r_1^2}$ beigefügten Coefficienten gegebene positive Zahlenwerthe sind. Aus diesem Werthe von Ω folgt:

$$\left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2 = \frac{\alpha m_1}{r_1^3} \frac{r^2}{p_0^2} \left(4D + 6D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 8D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right).$$

Wird dies oben eingesetzt, so erhält man den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} - 2b + q_0 - q_1 + q_{01} \right) : m p_0^2 + \frac{\kappa m_1}{r_1 p_1^2} \frac{r^2}{p_0^2} \frac{r^3}{p^3} \left(4D + 6D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 8D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right),$$

wo noch $p = p_0$ zu setzen ist. Dieser Ausdruck soll nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt, und es sollen alsdann die von v_1 abhängigen Glieder der Entwicklung gestrichen werden. Man erhält eine Reihe Cosinus-Glieder, deren Argumente die Vielfachen von v allein sind; aber es bedarf, um die überzähligen Integrationsbeständigen bestimmen zu können, nur derjenigen Glieder der Reihe, welche entweder als beständige Grössen vorliegen, oder die

Form $C \cos v$ haben. Lässt man vorläufig die mit den Quadraten von e und von e_1 multiplicirten Glieder ausser Acht, so findet man, dass der Ausdruck:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} (q_1 - q_{01})$$

gleich Null zu setzen ist. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q &= f(1 - 2e \cos v) : m p_0^2 - (2b - q_0)(1 - 3e \cos v) : m p_0^2 \\ &+ \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[4D(1 - 5e \cos v) + 6D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} (1 - 7e \cos v) + 8D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} (1 - 9e \cos v) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Man lässt diesen Ausdruck verschwinden, und findet die Werthe:

$$\begin{aligned} (2b - q_0) : m p_0^2 &= \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left(3.4D + 5.6D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7.8D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) \\ f : m p_0^2 &= \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left(2.4D + 4.6D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 6.8D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Sollen die mit e_1^2 multiplicirten Glieder in die gesuchten Werthe aufgenommen werden, so denken wir uns

die Potenz $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ nach den Cosinus der Vielfachen von v_1

entwickelt, und bezeichnen das beständige Glied dieser Entwicklung mit β_n . Es ist also β_n eine Function von e_1^2 , welche für den Fall $e_1 = 0$ zur Einheit wird. Insbesondere ist β_1 jedenfalls gleich 1. Wir berücksichtigen auch die mit der ersten Potenz von e^2 multiplicirten Glieder.

Es kommt in dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nun auch der Ausdruck

$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} (q_1 - q_{01})$ in Betracht. Es kommt zunächst darauf

an, die beständigen Glieder des Productes:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} (q_1 - q_{01})$$

anzugeben. Zur Bestimmung der Veränderlichen $q_1 - q_{01}$ hat man die Störungsgleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1'.$$

Es bedarf in der genannten Absicht nur derjenigen Glieder des Werthes von $q_1 - q_{01}$, welche die Form $C \cos v_1$ haben. Unter Hinweglassung der von u und u_1 abhängigen Glieder ist:

$$\Omega = \kappa m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left(D + D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right).$$

Man findet daher:

$$\frac{1}{2} (q_1 - q_{01}) = \kappa m m_1 \frac{p_0^2}{p_1^3} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} - 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1 \cos v_1.$$

Hieraus ergeben sich die beständigen Glieder des Productes:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} (q_1 - q_{01}) = -2\kappa m m_1 \frac{p_0^2}{p_1^3} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1^2.$$

Neben den beständigen sollen auch die mit der ersten Potenz von $\cos v$ multiplicirten Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ bestimmt werden. Wir haben daher den folgenden Werth:

$$\frac{r^3}{p^3} \frac{r_1^2}{p_1^2} (q_1 - q_{01}) = -2\kappa m m_1 \frac{p_0^2}{p_1^3} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1^2 (1 - 3e \cos v).$$

Zur Bestimmung von q_0 und f hat man nun die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q = & f \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(1 - 2e \cos v \right) \beta_{-2} : m p_0^2 - \left(2b - q_0 \right) \left(1 + \frac{5}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} e^2 - 3e \cos v \right) \beta_{-2} : m p_0^2 \\ & + \frac{2\kappa m_1}{p_1^3} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1^2 \left(1 - 3e \cos v \right) \\ & + \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left\{ 4D \left[1 + \frac{15}{2} e^2 - 5e \cos v \left(1 + \frac{21}{4} e^2 \right) \right] + 6D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left[1 + 14e^2 - 7e \cos v \left(1 + 9e^2 \right) \right] \beta_3 \right. \\ & \left. + 8D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left[1 + \frac{45}{2} e^2 - 9e \cos v \left(1 + \frac{55}{4} e^2 \right) \right] \beta_5 + 10D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left[1 + 33e^2 - 11e \cos v \left(1 + \frac{39}{2} e^2 \right) \right] \beta_7 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $e \cos v = 1/2$, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \left(2b - q_0 \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 - \frac{2\kappa m_1}{p_1^2} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1^2 \\ & = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[3.4 D \left(1 + \frac{3.5}{4} e^2 \right) + 5.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{4.7}{4} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ & \quad \left. + 7.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{5.9}{4} e^2 \right) \beta_5 + 9.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{6.11}{4} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Setzt man $e \cos v = 1/3 + 1/6 e^2$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 = & \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[2.4 D \left(1 + \frac{5.5}{8} e^2 \right) + 4.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{7.7}{8} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ & \left. + 6.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{9.9}{8} e^2 \right) \beta_5 + 8.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{11.11}{8} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Es ist offenbar, dass der Werth der Veränderlichen h keine der Zeit proportionalen Glieder enthält, sobald die mit $\cos v$ multiplicirten Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ verschwinden. Dass sich alle Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der grössten unter den Störungen erster Ordnung darstellen, wenn nicht bloss die mit $\cos v$ multiplicirten Glieder, sondern auch die beständigen Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ verschwinden, dies wird in dem folgenden Paragraphen bewiesen.

12.

Wir haben unter II. die Beständigen q_0 und f bestimmt. Ebenso einfach ist die Rechnung, durch welche man die Werthe der Beständigen q_{01} und f_1 erhält. Zur Bestimmung der Veränderlichen h_1 ist die Störungsgleichung:

$$(7') \quad h_1' = \cos v_1 Q_1 v'$$

gegeben, in welcher zur Abkürzung gesetzt ist:

$$Q_1 = \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right) : \lambda m_0 p_{01}^2.$$

Will man die Störungen der ersten Ordnung von h_1 bestimmen, so ist das Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ in einer Reihe Cosinus-Glieder zu entwickeln, deren Argumente die Vielfachen von u u_1 v v_1 sind. Zur Bestimmung von q_1 hat man sich des Integrals der lebendigen Kraft zu bedienen, welches in der folgenden Form geschrieben werden soll:

$$q_1 - q_{01} + q - q_0 = 2\Omega - 2b.$$

Wir haben mit b q_0 q_{01} die beständigen Glieder in den Entwicklungen von Ω q q_1 bezeichnet. Es ist nun:

$$Q_1 = \frac{\kappa^2}{p^2} \frac{r_1}{p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_{01} - q + q_0 + 2\Omega - 2b + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right) : \lambda m_0 p_{01}^2.$$

Lässt man in dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ alle diejenigen Cosinus-Glieder fort, deren Argumente Functionen von u und u_1 sind, ferner auch diejenigen Cosinus-Glieder, deren Argumente unabhängig von u und u_1 als Functionen von v gegeben sind, so bleiben diejenigen Cosinus-Glieder übrig, welche Functionen der Veränderlichen v_1 allein sind. Aus den letzteren ergeben sich die beiden Gleichungen, aus welchen die überzähligen Integrationsbeständigen q_{01} und f_1 bestimmt werden sollen.

Unter Hinweglassung der von u und u_1 abhängigen Glieder haben wir unter II. der Störungsfunktion die folgende Form gegeben:

$$\Omega = \kappa m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left(D + D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right),$$

in welcher die Coefficienten D D_1 D_2 \dots gegebene positive Zahlenwerthe sind. Aus derselben folgt:

$$2\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} = -\kappa m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left(D + 3D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 5D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right),$$

und man erhält den Werth:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = \frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} - 2b + q_{01} - q + q_0 \right) - \kappa m m_1 \frac{r^2}{p_1^3} \frac{r^2}{p^2} \left(D + 3D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 5D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right),$$

worin noch $p_1 = p_{01}$ zu setzen ist. Dieser Ausdruck soll nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt werden, und es sind die von v abhängigen Glieder dieser Entwicklung zu streichen. Man erhält eine Reihe Cosinus-Glieder, deren Argumente die Vielfachen der Veränderlichen v_1 allein sind; aber es bedarf, um die überzähligen Integrationsbeständigen q_{01} und f_1 zu bestimmen, nur derjenigen

Glieder der Reihe, welche entweder beständige Grössen sind, oder die Form $C \cos v_1$ haben. Lässt man in den Werthen von q_{01} und f_1 vorläufig die mit den Quadraten e^2 und e_1^2 multiplicirten Glieder ausser Acht, so findet man, dass der Ausdruck $\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0)$ gleich Null zu setzen ist. Man hat dann die Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 &= f_1 (1 - 2e_1 \cos v_1) - (2b - q_{01}) (1 - 3e_1 \cos v_1) \\ &\quad - \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left[D + 3D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} (1 + 2e_1 \cos v_1) + 5D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} (1 + 4e_1 \cos v_1) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Der vorliegende Ausdruck muss verschwinden. Es ergeben sich daher die Werthe:

$$\begin{aligned} 2b - q_{01} &= \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(1.2 D + 3.4 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 5.6 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) \\ f_1 &= \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(1.3 D + 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 5.7 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Sollen die mit e^2 multiplicirten Glieder in den Werthen von q_{01} und f_1 berücksichtigt werden, so denken wir uns die Potenz $\frac{r^2}{p^2}$ nach den Cosinus der Vielfachen von v entwickelt, und bezeichnen das beständige Glied dieser Entwicklung mit α_n . Wir berücksichtigen auch die mit der ersten Potenz von e_1^2 multiplicirten Glieder. Es kommt in dem Producte $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ nun auch der Ausdruck:

$$\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0)$$

in Betracht. Zunächst kommt es darauf an, das beständige

Glied des Productes $\frac{r^2}{p^2} (q - q_0)$ zu bestimmen. Zur Bestimmung von $q - q_0$ hat man die Störungsgleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'.$$

Es bedarf aber nur derjenigen Glieder des Werthes von $q - q_0$, welche die Form $C \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos v$ haben. Unter Hingewlassung der von u und u_1 abhängigen Glieder ist:

$$\Omega = \kappa m m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \left(D + D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right).$$

Daraus ergibt sich der verlangte Werth:

$$\frac{1}{2} (q - q_0) = -\kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(2D + 4D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 6D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) \frac{p_1^2}{r_1^2} \cos v.$$

Ferner sind die beständigen Glieder des Productes:

$$\frac{r^2}{p^2} (q - q_0) = 4\kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(D + 2D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 3D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) e^2.$$

Addirt man hierzu die mit der ersten Potenz von $\cos v_1$ multiplicirten Glieder, so hat man den folgenden Werth:

$$\frac{r^2}{p^2} \frac{r_1^3}{p_1^3} (q - q_0) = 4\kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(D + 2D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 3D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) e^2 (1 - 3e_1 \cos v_1).$$

Zur Bestimmung der Beständigen q_{01} und f_1 besteht nun die Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = & f_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \left(1 - 2e_1 \cos v_1 \right) \alpha_2 - \left(2b - q_{01} \right) \left(1 + \frac{5}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 - 3e_1 \cos v_1 \right) \alpha_2 \\ & - 4 \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(D + 2D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 3D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) e^2 \left(1 - 3e_1 \cos v_1 \right) \\ & - \kappa m m_1 \frac{p^3}{p_{01}^3} \left\{ D \alpha_4 + 3D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 + 2e_1 \cos v_1 \right) \alpha_6 + 5D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left[1 + 3e_1^2 + 4e_1 \cos v_1 \left(1 + \frac{3}{4} e_1^2 \right) \right] \alpha_8 \right. \\ & \left. + 7D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left[1 + \frac{15}{2} e_1^2 + 6e_1 \cos v_1 \left(1 + \frac{5}{2} e_1^2 \right) \right] \alpha_{10} + 9D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left[1 + 14e_1^2 + 8e_1 \cos v_1 \left(1 + \frac{21}{4} e_1^2 \right) \right] \alpha_{12} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $e_1 \cos v_1 = 1/2$, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \left(2b - q_{01} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 + 4 \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(D + 2D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 3D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) e^2 \\ & = \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left[1.2 D \alpha_4 + 3.4 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1.1}{4} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5.6 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(1 + \frac{2.3}{4} e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ & \quad \left. + 7.8 D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{3.5}{4} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9.10 D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left(1 + \frac{4.7}{4} e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Setzt man $e_1 \cos v_1 = 1/3 + 1/6 e_1^2$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_1 \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 = & \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left[1.3 D \alpha_4 + 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1.1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5.7 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(1 + \frac{2.2}{2} e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ & \left. + 7.9 D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{3.3}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9.11 D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left(1 + \frac{4.4}{2} e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

13.

Die überzähligen Integrationsbeständigen sind nun so bestimmt, dass die Reihenentwicklung, zu welcher die Integration der Störungsgleichung führt, für den unbegrenzten Zeitraum convergent ist. Es sind alle überzähligen Integrationsbeständigen zur Verwendung gekommen, ausgenommen die beiden k_0 und k_{01} , welchen man eine beliebige Verwendung geben dürfte. Es ist übrigens zu beachten, dass der Werth:

$$q = k \cos v + h \sin v$$

für den Fall $k_0 = 0$ in Folge der den Beständigen q_0 und f gegebenen Verwendung weder beständige Glieder enthält, noch auch solche Glieder, welche die Form $C \cos v$ haben. Will man dem Werthe von q die einfachst mögliche Gestalt geben, so empfiehlt es sich, die Annahme $k_0 = 0$ zu machen. Irgend eine andere den Werth von k_0 betreffende Annahme würde bewirken, dass in dem Werthe von q ein Glied von der Form $C \cos v$ auftritt. Aus dem gleichen Grunde ist auch die überzählige Integrationsbeständige $k_{01} = 0$ zu setzen.

An die Stelle der wahren Zeit habe ich eine reducirte Zeit gesetzt, indem ich anstatt des Productes lt den Buchstaben t in die Differentialgleichungen der Bewegung einführe. Die Gleichungen, aus welchen sich die wahren Anomalien v und v_1 bestimmen, sind:

$$v' = \frac{p^2}{r^2}, \quad v_1' = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2},$$

worin $\lambda = l_1 : l$ gesetzt ist. Wir haben die Störungen als Functionen der beiden Anomalien v und v_1 dargestellt. Die Veränderliche t ist daher in ihrem Vorkommen auf jene beiden Gleichungen beschränkt, aus welchen sich die excentrischen Anomalien ε und ε_1 als Functionen der Zeit ergeben. Wird in diese Gleichungen die wahre Zeit wieder eingeführt, so versteht es sich, dass in denselben die Beständige λ durch die Beständigen l und l_1 ersetzt ist. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \varepsilon - e \sin \varepsilon &= l (1 - e^2)^{3/2} (t - t_0) \\ \varepsilon_1 - e_1 \sin \varepsilon_1 &= l_1 (1 - e_1^2)^{3/2} (t - t_{01}), \end{aligned}$$

und es sollen nun in diesen Gleichungen die Coefficienten der Zeit durch die Integrationsbeständigen ausgedrückt werden.

Zur Bestimmung von l ist unter 2. die Gleichung gegeben:

$$\frac{\kappa}{(1 + m)^2} = p_{01}^3 + f \frac{p_0}{m},$$

in welche der unter II. erhaltene Werth von f einzusetzen ist. Wird in der Gleichung:

$$\begin{aligned} f \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 = & \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[2.4 D \left(1 + \frac{5.5}{8} e^2 \right) + 4.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{7.7}{8} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ & \left. + 6.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{9.9}{8} e^2 \right) \beta_5 + 8.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{11.11}{8} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right] \end{aligned}$$

auf der rechten Seite der gemeinsame Factor $1 + \frac{25}{8}e^2$ ausgeschieden, und zugleich $p_0 = a_0(1 - e^2)$ gesetzt, so geht dieselbe über in:

$$f\beta_{-2} : m p_0^2 = \frac{\alpha m_1}{p_1^3} \left(1 + \frac{21}{8}e^2 \right) \left[2.4 D + 4.6 D_1 \frac{a_0^2}{p_1^2} (1 + e^2) \beta_3 + 6.8 D_2 \frac{a_0^4}{p_1^4} (1 + 3e^2) \beta_5 \right. \\ \left. + 8.10 D_3 \frac{a_0^6}{p_1^6} (1 + 6e^2) \beta_7 + 10.12 D_4 \frac{a_0^8}{p_1^8} (1 + 10e^2) \beta_9 + \dots \right].$$

In Betreff der in den Klammern stehenden Entwicklung, welche zur Abkürzung mit F bezeichnet werden soll, ist zu bemerken, dass die Differenzen je zweier auf einander folgenden Coefficienten von e^2 durch die Zahlenreihe 1 2 3 4 . . . ausgedrückt sind. Es ist nun:

$$f : m p_0^2 = \frac{\alpha m_1}{p_1^3} \frac{1 + \frac{21}{8}e^2}{\beta_{-2}} F.$$

Theilt man die zur Bestimmung von l gegebene Gleichung durch p_0^3 , und eliminirt die Grösse f , so wird die Gleichung übergeführt in:

$$\frac{\alpha}{p_0^3(1+m)^2} = 1 + \frac{\alpha m_1}{p_1^3} \frac{1 + \frac{21}{8}e^2}{\beta_{-2}} F,$$

wo $\alpha = K:l^2$ ist. Man erhält daher den verlangten Coefficienten:

$$F_1 = \frac{p^2}{p_{01}^2} \left[1.3 D \alpha_4 + 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1.1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5.7 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(1 + \frac{2.2}{2} e^2 \right) \alpha_8 + \dots \right]$$

schreibt man den unter 12. erhaltenen Werth von

$$f_1 (1 + \frac{1}{2} e_1^2) \alpha_2 = - \frac{\alpha m m_1}{p_{01}} F_1.$$

Man theile die obige Gleichung durch p_{01}^3 . Durch die Elimination von f_1 erhält man alsdann:

$$- \frac{\alpha m_1}{m_0 p_{01}^3} = \lambda^2 + \frac{\alpha m m_1}{m_0 p_{01}^3} \frac{1 - \frac{1}{2} e_1^2}{\alpha_2} F_1.$$

Zur Bestimmung des verlangten Coefficienten aber besteht die Gleichung

$$l^2 (1 - e_1^2)^3 = \frac{K m_1}{m_0 a_{01}^3} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{2} e_1^2}{\alpha_2} m F_1 \right).$$

Für den Fall $m = 0$ geht die gestörte Ellipse über in eine Kepler'sche, deren Brennpunkt mit dem Ort des Centralkörpers zusammenfällt. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in dieser Kepler'schen Ellipse ist gleich

$$\sqrt{\frac{K(1+m_1)}{a_{01}^3}}.$$

$$(8) \quad - m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = f \frac{p_0}{r} + \frac{3}{2} q + 2r \frac{d\Omega}{dr} + P + N,$$

in welcher der Werth der Veränderlichen q aus dem Integral der lebendigen Kraft zu entnehmen ist:

$$q - q_0 + q_1 - q_{01} = 2\Omega - 2b.$$

$$l^2 (1 - e^2)^3 = \frac{K}{a_0^3 (1+m)^2} - \frac{K m_1}{p_1^3} \frac{1 - \frac{3}{8} e^2}{\beta_{-2}} F$$

Für den Fall $m_1 = 0$ geht die gestörte Ellipse über in eine Kepler'sche, deren Brennpunkt mit dem gemeinsamen Schwerpunkt des Centralkörpers und der Masse m zusammenfällt. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Leitstrahls in der Kepler'schen Ellipse ist dann gleich:

$$\sqrt{\frac{K}{a_0^3 (1+m)^2}}.$$

Zur Bestimmung von l_1 hat man die Gleichung:

$$\frac{\alpha m_1}{m_0} = \lambda^2 p_{01}^3 + f_1 \frac{p_{01}}{m_0}.$$

Vermittelt der Abkürzung:

Es ist unter 2. erwähnt worden, die Störungsfunction habe den Factor $\frac{\alpha m_1}{p_{01}^3}$, welcher vermittelt der Gleichung

$$\frac{\alpha m_1}{p_{01}^3} = m_0 \lambda^2 + \frac{f_1}{p_{01}^2}$$

zu eliminiren sei. Zum Behuf dieser Elimination kann man nun die vorliegende Gleichung in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\alpha m_1}{p_{01}^3} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{2} e_1^2}{\alpha_2} m F_1 \right) = m_0 \lambda^2.$$

Diese Elimination ist ebensowohl für die Störungen der inneren, als für die Störungen der äusseren Bahn auszuführen. Es versteht sich, dass man aus diesem Grunde in dem Werthe von F_1 die Grösse p^2 gegen p_0^2 zu vertauschen hat.

14.

Man hat zur Bestimmung der Veränderlichen ω die Störungsgleichung:

Bezeichnet man den Coefficienten des mit v_1 multiplicirten Gliedes der Veränderlichen $\omega + \int \cos i \vartheta' dt$ mit B , so kann man leicht auch den Werth der Beständigen B angeben. Es kommt darauf an, den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \left(f \frac{r}{p} + \frac{3}{2} (q_0 - 2b - q_1 + q_{01}) \frac{r^2}{p^2} \right) + \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^2}{p^2} \left(3\Omega + 2r \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 zu entwickeln. Theilt man das beständige Glied dieser Entwicklung durch $-v m p_0^2$, so ist der erhaltene Quotient gleich der Beständigen B .

Wir haben, um die Beständigen q_0 und f zu bestimmen, unter II. den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \left(f \frac{r^2}{p^2} + (q_0 - 2b - q_1 + q_{01}) \frac{r^3}{p^3} \right) + \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 entwickelt, alsdann die beständigen, und die mit der ersten Potenz von $\cos v$ multiplicirten Glieder der Entwicklung zum Verschwinden gebracht. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$, so verschwinden in der Entwicklung

des einfacheren Ausdrucks bedienen, welcher durch die Elimination von f entsteht:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{1}{2} (q_0 - 2b - q_1 + q_{01}) + \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right).$$

des Productes die beständigen Glieder. Anstatt des obigen kann man sich daher zur Bestimmung der Beständigen B

Bleiben diejenigen Glieder von Ω ausser Acht, welche Functionen von u und u_1 sind, so ist:

$$\Omega : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{r_1^3} \frac{r^2}{p_0^2} \left(D + D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + D_3 \frac{r^6}{r_1^6} + \dots \right)$$

Es folgt hieraus:

$$\left(\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{r_1^3} \frac{r^2}{p_0^2} \left(3D + 5D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 7D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + 9D_3 \frac{r^6}{r_1^6} + \dots \right).$$

Man erhält daher das beständige Glied von:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^2}{p^2} \left(\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[3D \left(1 + 5e^2 \right) + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{21}{2} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ \left. + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + 18e^2 \right) \beta_5 + 9D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{55}{2} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right].$$

Unter II. ist ferner gezeigt worden, dass das beständige Glied des Ausdrucks:

$$\frac{1}{2} \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^2}{p^2} (2b - q_0 + q_1 - q_{01}) : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[3 \cdot 2 D \left(1 + \frac{3 \cdot 5}{4} e^2 \right) + 5 \cdot 3 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{4 \cdot 7}{4} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ \left. + 7 \cdot 4 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{5 \cdot 9}{4} e^2 \right) \beta_5 + 9 \cdot 5 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{6 \cdot 11}{4} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right]$$

Zieht man diese Gleichung von der vorausgehenden ab, so entsteht auf der rechten Seite die Entwicklung:

$$- \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[1 \cdot 3 D \left(1 + \frac{2 \cdot 5}{4} e^2 \right) + 2 \cdot 5 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{3 \cdot 7}{4} e^2 \right) \beta_3 \right. \\ \left. + 3 \cdot 7 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{4 \cdot 9}{4} e^2 \right) \beta_5 + 4 \cdot 9 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{5 \cdot 11}{4} e^2 \right) \beta_7 + \dots \right].$$

Man scheide den gemeinsamen Factor $1 + \frac{5}{2} e^2$ aus, und setze $p_0 = a_0 (1 - e^2)$; man setze ferner $\frac{\kappa m_1}{p_1^3} = \lambda^2 m_0 = \nu (1 - e^2)^{3/2} \lambda m_0$. Man erhält hiermit den verlangten Coefficienten:

$$B = \lambda m_0 \left(1 + e^2 \right) \left[1 \cdot 3 D + 2 \cdot 5 D_1 \frac{a_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{1 \cdot 3}{4} e^2 \right) \beta_3 + 3 \cdot 7 D_2 \frac{a_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{2 \cdot 5}{4} e^2 \right) \beta_5 \right. \\ \left. + 4 \cdot 9 D_3 \frac{a_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{3 \cdot 7}{4} e^2 \right) \beta_7 + 5 \cdot 11 D_4 \frac{a_0^8}{p_1^8} \left(1 + \frac{4 \cdot 9}{4} e^2 \right) \beta_9 + \dots \right]$$

Zur Bestimmung der Veränderlichen ω_1 hat man die Störungsgleichung:

$$(8)' \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \frac{3}{2} q_1 + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 + N_1.$$

Die Veränderliche q_1 soll mittelst des Integrals der lebendigen Kraft bestimmt werden. Die Gleichung (8)' ist daher überzuführen in:

$$-\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \frac{3}{2} (q_{01} - q + q_0 + 2\Omega - 2b) + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 + N_1.$$

Bezeichnet man mit B_1 den Coefficienten des mit v_1 multiplicirten Gliedes der Veränderlichen $\omega_1 + \int \cos i_1 \vartheta' dt$, so kann man leicht auch diesen Coefficienten bestimmen. Es kommt darauf an, den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \left(f_1 \frac{r_1}{p_1} + \frac{3}{2} (q_{01} - 2b - q + q_0) \frac{r_1^2}{p_1^2} \right) + \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} \left(3\Omega + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 zu entwickeln. Theilt man das beständige Glied dieser Entwicklung durch $-\nu \lambda m_0 p_{01}^2$, so ist der erhaltene Quotient gleich dem Coefficienten B_1 .

Mit Rücksicht auf die Gleichungen, aus welchen unter 12. die Beständigen q_{01} und f_1 bestimmt worden sind, kann

man zum Behuf der Bestimmung von B_1 den vorliegenden Ausdruck durch den folgenden einfacheren ersetzen:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} \left(\frac{1}{2} (q_{01} - 2b - q + q_0) + \Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right).$$

Aus der Gleichung:

$$\Omega = \kappa m m_1 \frac{r_1^2}{r_1^3} \left(D + D_1 \frac{r_1^2}{r_1^2} + D_2 \frac{r_1^4}{r_1^4} + D_3 \frac{r_1^6}{r_1^6} + \dots \right)$$

erhält man:

$$\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} = -\kappa m m_1 \frac{r_1^2}{r_1^3} \left(2D + 4D_1 \frac{r_1^2}{r_1^2} + 6D_2 \frac{r_1^4}{r_1^4} + 8D_3 \frac{r_1^6}{r_1^6} + \dots \right).$$

Entwickelt man dies nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 , behält aber nur das beständige Glied der Entwicklung, so ist:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} \left(\Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right) = -\kappa m m_1 \frac{p_1^2}{p_{01}^3} \left[2D\alpha_4 + 4D_1 \frac{p_1^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 6D_2 \frac{p_1^4}{p_{01}^4} \left(1 + 5e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ \left. + 8D_3 \frac{p_1^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{21}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 10D_4 \frac{p_1^8}{p_{01}^8} \left(1 + 18e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right].$$

Unter 12. ist gezeigt worden, dass das beständige Glied des Ausdrucks:

$$\frac{1}{2} \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r_1^2}{p_1^2} (2b - q_{01} + q - q_0) = \kappa m m_1 \frac{p_1^2}{p_{01}^3} \left[D\alpha_4 + 3.2 D_1 \frac{p_1^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1}{4} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5.3 D_2 \frac{p_1^4}{p_{01}^4} \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ \left. + 7.4 D_3 \frac{p_1^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{15}{4} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9.5 D_4 \frac{p_1^8}{p_{01}^8} \left(1 + 7e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]$$

ist. Zieht man diese Gleichung von der vorausgehenden ab, und setzt auf der rechten Seite der neuen Gleichung den gemeinsamen Factor $\frac{\kappa m_1}{p_{01}^3} = \lambda^2 m_0 = \nu (1 - e^2)^{3/2} \lambda m_0$, so hat man jenen Ausdruck, welcher durch $-\nu \lambda m_0 p_{01}^2$ getheilt werden soll. Man erhält hiermit den verlangten Coefficienten:

$$B_1 = m \frac{p_1^2}{p_{01}^2} (1 - e^2)^{3/2} \left[1.3 D\alpha_4 + 2.5 D_1 \frac{p_1^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1.3}{4} e_1^2 \right) \alpha_6 + 3.7 D_2 \frac{p_1^4}{p_{01}^4} \left(1 + \frac{2.5}{4} e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ \left. + 4.9 D_3 \frac{p_1^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{3.7}{4} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 5.11 D_4 \frac{p_1^8}{p_{01}^8} \left(1 + \frac{4.9}{4} e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right].$$

Für den Fall, dass in der Störungsfunktion $\cos \mathcal{F} = 1$ gesetzt werden kann, dass also $-s = \cos(u - u_1)$ ist, hat man auch $\cos i = \cos i_1 = 1$ zu setzen. Der Coefficient des mit v_1 multiplicirten Gliedes der Veränderlichen $\omega - \omega_1$ ist dann gleich $B - B_1$. Wird die Bahn der

störenden Masse als eine ungestörte Ellipse angenommen, so ist der erwähnte Coefficient für die Störungen der inneren Bahn gleich B , für die Störungen der äusseren Bahn gleich $-B_1$.

§ 3. Ueber die Störungen der zweiten Ordnung.

15.

Durch die Integration der Störungsglieder erster Ordnung erhält man die Störungen der ersten Ordnung. Es soll hiermit aber nicht gesagt sein, dass durch die Integration der Störungsglieder erster Ordnung nicht auch solche Störungen entstehen, welche nach ihrer numerischen Bedeutung als Störungen der zweiten Ordnung anzusehen sind. Durch die Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung erhält man diejenigen Störungen, welche mit Rücksicht auf ihre Entstehungsart als solche der zweiten Ordnung bezeichnet werden. Selbstverständlich lässt sich ein Urtheil darüber, wie weit sich die Integration über die Störungsglieder der ersten Ordnung zu erstrecken habe, damit man alle Störungen der ersten Ordnung erhalte, erst dann bilden,

$$(8) \quad -m\dot{p}_0^2(\omega' + \cos i \vartheta') = f \frac{\dot{p}_0}{r} + \frac{3}{2}(q_0 - 2b - q_1 + q_{01}) + 3\Omega + 2r \frac{d\Omega}{dr} + P + N$$

gegeben. Man erhält hier die Störungsglieder erster Ordnung, indem man die Störungen der ersten Ordnung von q_1 k h einsetzt. Es ist aber zu beachten, dass alle diejenigen Störungsglieder, welche durch die Substitution der Störungen erster Ordnung von k und von h entstehen, zu Störungen der zweiten Ordnung von ω führen, dass ferner diejenigen Störungsglieder, welche durch die Substitution der Störungen erster Ordnung von q_1 in den Werth von N entstehen, gleichfalls zu Störungen der zweiten Ordnung von ω führen.

Um die innere Bahn zu bestimmen, haben wir die Veränderliche q durch q_1 ersetzt, zu dessen Bestimmung die Störungsgleichung:

$$(4') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1'$$

gegeben ist. Man erhält hier die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man an die Stelle von p und ω die Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen einsetzt, vermittelt der Gleichungen:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) \\ \varpi + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega.$$

Es ist schon unter 4. darauf hingewiesen, dass die partielle Derivirte $\frac{d\Omega}{dv_1}$ durch eine Reihe Glieder von der Form:

$$C \frac{p^2}{r^2} \sin(A + Bv_1 + cv - cv_1)$$

ausgedrückt ist, in welchen der ganzzahlige Coefficient c_1 nicht gleich Null sein kann. Berücksichtigt man in den Werthen von p und von ϖ bei der Substitution vorerst nur diejenigen Glieder, welche aus den säcularen Störungen von k und von h hervorgehen, so können diese Werthe als Functionen der Veränderlichen v allein angesehen werden.

nachdem man die numerische Bedeutung derjenigen Störungen der zweiten Ordnung festgestellt hat, welche durch die Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung entstehen.

Zur Erläuterung des Gesagten erwähne ich, dass sich durch die Integration der Störungsglieder erster Ordnung säculare Störungen der Veränderlichen k und h ergeben, welche die Excentricität e_1 zum Factor haben. Diese Störungen sind als solche der ersten Ordnung zu betrachten. Ferner ergeben sich durch die Integration der Störungsglieder erster Ordnung säculare Störungen der Veränderlichen q_1 und ω , welche das Product $e e_1$ der Excentricitäten zum Factor haben. Man findet, dass diese Störungen als solche der zweiten Ordnung betrachtet werden müssen.

Zur Bestimmung der Veränderlichen ω ist die Störungsgleichung:

Es sind daher in dem Producte $\frac{r^2}{p^2} \frac{d\Omega}{dv_1}$ alle diejenigen Störungsglieder der zweiten Ordnung, welche mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind, als Sinus-Glieder gegeben, in welchen der ganzzahlige Coefficient c_1 nicht gleich Null sein kann. Hieraus folgt, dass die unter 4. und 5. den Störungen der ersten Ordnung von q_1 zuerkannten Eigenschaften für die Störungen der zweiten Ordnung von q_1 fortbestehen. Ferner folgt, dass die unter 5. nachgewiesene Vereinfachung in der Bestimmung derjenigen säcularen Störungen von k und von h , welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, auch für die Störungen der zweiten Ordnung dieser Veränderlichen gültig sind.

Um die äussere Bahn zu bestimmen, haben wir die Veränderliche q_1 durch q ersetzt, zu dessen Bestimmung die Störungsgleichung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'$$

vorliegt. Man findet, dass die unter 4. und 6. den Störungen der ersten Ordnung von q zuerkannten Eigenschaften auch für die Störungen der zweiten Ordnung von q bestehen. Ferner findet man, dass die unter 6. nachgewiesenen Vereinfachungen in der Bestimmung derjenigen säcularen Störungen von k_1 und von h_1 , welche mit der störenden Masse nicht multiplicirt sind, auch dann bestehen, wenn es sich um die Störungen der zweiten Ordnung von k_1 und von h_1 handelt.

16.

Wir haben unter 8. sowohl Störungsglieder als auch Störungen der ersten, zweiten, dritten Classe unterschieden, je nachdem dieselben mit der nullten, ersten, zweiten Potenz der störenden Masse multiplicirt sind. Ist eine Störung periodisch, so gehört sie in die Classe desjenigen Störungsgliedes, durch dessen Integration sie entstanden ist. Dagegen ist die Classe, in welche eine säculare Störung gehört, um die Einheit niedriger, als die Classe desjenigen Störungsgliedes, durch dessen Integration sie entstanden ist. Handelt

es sich um die Störungen zweiter Ordnung, so giebt es nur unter den periodischen auch solche, welche in die dritte Classe gehören. Die säcularen Störungen der zweiten Ordnung gehören immer in die zweite oder in die erste Classe. Wären alle Störungen der zweiten Ordnung in die dritte Classe einzureihen, dann würde die Convergenz des Integrals einer Störungsgleichung nicht in Frage kommen, weil dann das Verhältniss einer Störung der zweiten Ordnung zu der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung in allen Fällen die störende Masse als Factor enthielte. Da es aber unter den Störungen der zweiten Ordnung auch solche giebt, welche in die zweite oder in die erste Classe gehören, so ist der numerische Werth des erwähnten Verhältnisses ein fraglicher.

Ist eine Störung der zweiten Ordnung, welche in die zweite Classe gehört, säcular, so ist sie durch die Integration eines Störungsgliedes entstanden, welches in die dritte Classe gehört. Die säcularen Störungen von k und von h , welche aus einem solchen Störungsgliede hervorgehen, haben neben der ersten Potenz der störenden Masse den Factor e_1 . Die säcularen Störungen von q_1 und ω , welche aus einem in die dritte Classe gehörigen Störungsgliede entstanden sind, haben neben der ersten Potenz der störenden Masse das Product ee_1 der Excentricitäten zum Factor. Es folgt hieraus, dass das Verhältniss einer Störung der zweiten Ordnung von k oder von h , welche säcular ist und in die zweite Classe gehört, zu der Störung der ersten Ordnung durch die Excentricität e_1 ausgedrückt ist; dass dagegen das Verhältniss einer Störung der zweiten Ordnung von q_1 oder von ω , welche säcular ist und in die zweite Classe gehört, zu der Störung der ersten Ordnung dem Producte ee_1 der Excentricitäten gleichgesetzt werden darf.

Aus der bekannten Beschaffenheit der Störungsgleichungen ist zu ersehen, dass irgend ein Störungsglied der zweiten Ordnung, welches in die zweite Classe gehört, entweder eine säculare Störung von k oder von h , oder auch eine säculare Störung von q_1 zum Factor hat. Die säcularen Störungen von k und von h haben den Factor e_1 ; die säculare Störung von q_1 hat den Factor ee_1 . Wenn nun durch die Integration des erwähnten Störungsgliedes eine periodische Störung entsteht, so gehört dieselbe gleichfalls in die zweite Classe, und hat neben der störenden Masse die Excentricität e_1 oder auch das Product ee_1 der Excentricitäten zum Factor. Es folgt hieraus, dass das Verhältniss einer Störung der zweiten Ordnung, welche periodisch ist, und in die zweite Classe gehört, zu der Störung der ersten Ordnung in dem ersten der erwähnten Fälle der Excentricität e_1 , in dem zweiten Falle dem Producte ee_1 gleichgesetzt werden darf.

17.

Verwickelter ist die Bestimmung der Störungen zweiter Ordnung, wenn dieselben in die erste Classe gehören. Wir betrachten zunächst in den Störungsgleichungen (6) und (7) die mit P multiplicirten Grössen, weil dieselben alle diejenigen Störungsglieder dieser Gleichungen enthalten, welche in die erste Classe gehören. Es ist bekanntlich:

$$P : m p_0^2 = \frac{p}{r} \left(\frac{3}{2} \eta^2 - \frac{5}{2} \eta^3 + \dots \right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right) = \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v).$$

Will man die Störungen der zweiten Ordnung aufstellen, so kommt in dem Werthe von P nur das mit η^2 multiplicirte Glied in Betracht. Man setze die säcularen Störungen von k und von h in den Werth von η^2 ein, und es ergeben sich hiermit diejenigen Störungsglieder der Gleichungen (6) und (7), welche in die erste Classe gehören. Dieselben haben das Quadrat derjenigen Störungen von η zum Factor, welche gleichfalls in die erste Classe gehören. Dass es unter diesen Störungsgliedern keine säcularen giebt, ist im § 3 des Aufsatzes in Nr. 2515-16 gezeigt worden. Durch deren Integration erhält man daher ausschliesslich periodische Störungen. Diese periodischen Störungen gehören in die erste Classe und haben das Quadrat von e_1 zum Factor.

Wir betrachten ferner in der Störungsgleichung (8) die Grösse $P + N$. Es sind in der letzteren alle diejenigen Störungsglieder der Gleichung (8) enthalten, welche in die erste Classe gehören. Geht man auf die analytische Bedeutung der Grösse $P + N$ ein, so findet man, dass diese Störungsglieder das Quadrat einer säcularen oder auch das Product zweier säcularen Störungen von k und von h zum Factor haben. Im § 4 des Aufsatzes in Nr. 2515-16 ist gezeigt worden, dass unter diesen Störungsgliedern säculare nicht vorhanden sind. Durch deren Integration erhält man daher ausschliesslich periodische Störungen. Diese periodischen Störungen gehören in die erste Classe, und haben das Quadrat von e_1 zum Factor.

Ausser den bis dahin erwähnten giebt es keine weiteren Störungen der zweiten Ordnung, welche periodisch sind, und in die erste Classe gehören. Die Störungen der ersten Ordnung haben den Factor e_1 , wenn sie in die erste Classe gehören. Es folgt hieraus, dass das Verhältniss einer Störung der zweiten Ordnung, welche periodisch ist, und in die erste Classe gehört, zu einer Störung der ersten Ordnung in allen Fällen durch die Excentricität e_1 ausgedrückt werden kann.

Wir haben nun alle Störungsglieder der zweiten Ordnung betrachtet, welche in die erste Classe gehören. Die in die zweite Classe gehörigen Störungsglieder der zweiten Ordnung sind unter 16. in dem Falle in Betracht gekommen, dass die entsprechenden Störungen periodisch sind. Die in dem Bisherigen noch nicht berücksichtigten in die zweite Classe gehörigen Störungsglieder der zweiten Ordnung führen zu säcularen Störungen, welche in die erste Classe gehören.

In dem Werthe der Veränderlichen q_1 giebt es bekanntlich keine säcularen Störungen, welche in die erste Classe gehören. Sollen diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h bestimmt werden, welche in die erste Classe gehören, so kommen in den Gleichungen (6) und (7) abermals die mit P multiplicirten Grössen in Betracht. Insbesondere handelt es sich hier um diejenigen Störungsglieder, welche durch die Multiplication einer Störung der ersten Classe von η mit einer Störung der zweiten Classe von η entstehen. Kommen in solchen Producten diejenigen Störungen der zweiten Classe von η in Betracht,

welche aus den von den Veränderlichen u und u_1 abhängigen Störungsgliedern der ersten Ordnung hervorgegangen sind, so findet man, dass die diesen Producten entsprechenden säcularen Störungen mit einem der Factoren ee_1^2 und e_1^3 verbunden sind. Sind aber in solchen Producten die Störungen der zweiten Classe von η durch die Integration der von den Veränderlichen u und u_1 unabhängigen Störungsglieder der ersten Ordnung entstanden, so ergeben sich säculare Störungen von k und von h in dem Falle, dass diese Störungen der zweiten Classe von η entweder als beständige Grössen oder in der Form $C \cos zv$ vorliegen. Es ist unter 7. gezeigt worden, dass in dem Werthe von η die beständigen Glieder verschwinden, sobald die unter II. erhaltenen Werthe von q_0 und f in die Störungsgleichungen (6) und (7) eingesetzt werden. Fielen diese beständigen Glieder nicht weg, so würden dieselben neben der störenden Masse nicht noch einen andern Factor enthalten, welcher sich als einen kleinen Bruchwerth darstellt. Man würde dann auf diesem Wege zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h gelangen, welche numerisch gleichstehen mit den säcularen Störungen der ersten Ordnung von k und von h . Dass die so beschaffenen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h verschwinden, ist also durch die den Beständigen q_0 und f gegebene Verwendung bewirkt. In jenem andern Gliede der Störung zweiter Classe von η , welches die Form $C \cos zv$ hat, enthält der Coefficient C neben der ersten Potenz der störenden Masse den Factor e^2 . Es folgt hieraus, dass die demselben entsprechenden säcularen Störungen von k und von h den Factor ee_1^2 haben.

Es giebt noch andere säculare Störungen der zweiten

Ordnung von k und von h , welche in die erste Classe gehören. Man erhält Störungsglieder der zweiten Ordnung, welche in die zweite Classe gehören, indem man an die Stelle von p und ϖ die in die erste Classe gehörigen Störungen dieser Veränderlichen in die Gleichungen (6) und (7) eingesetzt. Wenn diese Substitution solche Glieder der Gleichungen (6) und (7) betrifft, welche als Functionen der Veränderlichen u und u_1 vorliegen, so findet man, dass die den Störungsgliedern der zweiten Ordnung entsprechenden säcularen Störungen von k und von h mit einem der Factoren ee_1^2 und e_1^3 verbunden sind. Kommen aber diejenigen Glieder der Gleichungen (6) und (7) in Betracht, welche unabhängig von den Veränderlichen u und u_1 sind, so können durch die Substitution der Störungen erster Ordnung von p säculare Störungen von k und von h nur in dem Falle entstehen, dass die Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ entweder beständige Grössen sind, oder die Form $C \cos zv$ haben. In den letzteren Gliedern hat der Coefficient C neben der störenden Masse den Factor e^2 , und es haben daher die denselben entsprechenden säcularen Störungen von k und von h den Factor ee_1^2 . Die zuerst erwähnten Glieder des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ erfordern eine eingehendere Betrachtung.

Es wird vorausgesetzt, das Product $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ sei in eine

Reihe Cosinus-Glieder entwickelt, deren Argumente die Vielfachen von u u_1 v v_1 sind. Unter Fortlassung derjenigen Cosinus-Glieder, deren Argumente sich als Functionen von u und u_1 darstellen, ist unter II. die folgende Gleichung aufgestellt worden:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = \frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} - 2b + q_0 - q_1 + q_{01} \right) : m p_0^2 + \frac{\kappa m_1}{r_1 p_1^2} \frac{r^2}{p_0^2} \frac{r^3}{p^3} \left(4D + 6D_1 \frac{r^2}{r_1^3} + 8D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe cosinus der Vielfachen von v und v_1 , lässt aber nur die beständigen Glieder der Entwicklung stehen, so hat man die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q = & f \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 - \left(2b - q_0 \right) \left(1 + 3e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 + \frac{2\kappa m_1}{p_1^3} \left(3D + 5D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} + 7D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} + \dots \right) e_1^2 \\ & + \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \frac{p^2}{p_0^2} \left[4D \left(1 + \frac{15}{2} e^2 \right) + 6D_1 \frac{p^2}{p_1^2} \left(1 + 14e^2 \right) \beta_3 + 8D_2 \frac{p^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{45}{2} e^2 \right) \beta_5 + 10D_3 \frac{p^6}{p_1^6} \left(1 + 33e^2 \right) \beta_7 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Wird hier $p = p_0$ gesetzt, so verschwindet der Ausdruck mit Rücksicht auf die unter II. erhaltenen Werthe von q_0 und von f . Man kann die Gleichung daher in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{p_1^2} Q = & f \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \beta_{-2} : m p_0^2 + \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[4D \left(\frac{p^2}{p_0^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{15}{2} e^2 \right) + 6D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(\frac{p^4}{p_0^4} - 1 \right) \left(1 + 14e^2 \right) \beta_3 \right. \\ & \left. + 8D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(\frac{p^6}{p_0^6} - 1 \right) \left(1 + \frac{45}{2} e^2 \right) \beta_5 + 10D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(\frac{p^8}{p_0^8} - 1 \right) \left(1 + 33e^2 \right) \beta_7 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Es ist bekanntlich:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v) = 2\eta.$$

Durch Potenziren erhält man:

$$\frac{p^i}{p_0^i} = (1 + 2\eta)^{1/2i} = 1 + i\eta + \dots$$

bleiben die mit der zweiten Potenz von η multiplicirten Glieder unbeachtet, so wird die obige Gleichung durch die Substitution von $\frac{p^i}{p_0^i}$ übergeführt in:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q + f \eta \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \beta_{-2} : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \eta \left[2.4 D \left(1 + \frac{15}{2} e^2\right) + 4.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + 14 e^2\right) \beta_3 \right. \\ \left. + 6.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{45}{2} e^2\right) \beta_5 + 8.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + 33 e^2\right) \beta_7 + \dots \right].$$

Es besteht ferner die Gleichung:

$$f \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \beta_{-2} : m p_0^2 = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \left[2.4 D \left(1 + \frac{25}{8} e^2\right) + 4.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{49}{8} e^2\right) \beta_3 \right. \\ \left. + 6.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} \left(1 + \frac{81}{8} e^2\right) \beta_5 + 8.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{121}{8} e^2\right) \beta_7 + \dots \right].$$

Durch die Elimination von f erhält man:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} Q = \frac{\kappa m_1}{p_1^3} \frac{1}{8} e^2 \eta \left(2.4 D \cdot 3.9 + 4.6 D_1 \frac{p_0^2}{p_1^2} 5.11 \beta_3 + 6.8 D_2 \frac{p_0^4}{p_1^4} 7.13 \beta_5 + 8.10 D_3 \frac{p_0^6}{p_1^6} 9.15 \beta_7 + \dots \right).$$

Man erhält also einen Ausdruck, welcher den gemeinsamen Factor $\frac{1}{8} e^2 \eta$ hat. Es folgt hieraus, dass die dem Ausdruck entsprechenden säcularen Störungen von k und von h den Factor $e^2 e_1$ haben. Auf diesen Satz habe ich mich im § 4 des Aufsatzes in Nr. 2620-21 berufen.

In den Gleichungen (6) und (7) sind hier noch diejenigen Störungsglieder der zweiten Ordnung zu berücksichtigen, welche durch die Substitution der säcularen Störungen von q_1 entstehen, weil dieselben gleichfalls in die zweite Classe gehören. Säculare Störungen der ersten Classe, welche aus diesen Störungsgliedern hervorgehen, sind, wie unter 5. und 15. gezeigt worden ist, in der Veränderlichen k nicht vorhanden; in der Veränderlichen h haben die hierher gehörigen säcularen Störungen den Factor $e^2 e_1$.

Wir haben nun alle diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h betrachtet, welche in die erste Classe gehören. Es kommt darauf an, den numerischen Werth des Quotienten zu bestimmen, welcher entsteht, wenn die Störung der zweiten Ordnung durch die grösste der in dieselbe Classe gehörigen Störungen der ersten Ordnung getheilt wird. Aus den erhaltenen Resultaten ist zu ersehen, dass das Verhältniss einer säcularen Störung der zweiten Ordnung von k oder von h , welche in die erste Classe gehört, zu einer säcularen Störung der ersten Ordnung in allen Fällen eine quadratische Form der Excentricitäten e und e_1 ist.

Es bleibt noch übrig, diejenigen säcularen Störungen der Veränderlichen ω zu betrachten, welche in die erste Classe gehören. Setzt man die in die erste Classe gehörigen Störungen der ersten Ordnung von k h ω in die Störungsgleichung (8) ein, ferner auch die säcularen Störungen von q_1 , so ergeben sich alle diejenigen Störungsglieder der zweiten Ordnung, welche in die zweite Classe gehören. Die säcularen Störungen von ω , welche aus diesen Störungsgliedern hervorgehen, gehören in die erste Classe, und sind sämmtlich mit dem Product $e e_1$ der Excentricitäten multiplicirt. Da es aber in der Veränderlichen ω keine Störungen der ersten Ordnung giebt, welche in die erste Classe gehören, so ist die Forderung gestellt, dass das Verhältniss

dieser säcularen Störungen der zweiten Ordnung von ω zu den säcularen Störungen der ersten Ordnung von h einen kleinen Bruchwerth ausdrücke. Auch diese Forderung darf als erfüllt angesehen werden. Das fragliche Verhältniss hat den Factor e , ist also mit der Excentricität derjenigen Ellipse multiplicirt, in welcher sich die gestörte Masse bewegt.

18.

In dem Bisherigen habe ich die Störungen der zweiten Ordnung untersucht, welche die innere Bahn erleidet. Die äussere Bahn betreffend darf ich mich kürzer fassen. Ich betrachte diejenigen säcularen Störungen von k_1 und von h_1 , welche aus den mit P_1 multiplicirten Gliedern der Störungsgleichungen (6)' und (7)' hervorgehen. Es ist bekanntlich:

$$P_1 : \lambda^2 m_0 p_{01}^2 = \frac{p_1}{r_1} \left(\frac{3}{2} \eta_1^2 - \frac{5}{2} \eta_1^3 + \dots \right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 \right) = \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1).$$

Es ist ferner zu erwähnen, dass durch die Verwendung, welche den überzähligen Integrationsbeständigen q_{01} und f_1 gegeben ist, in dem Werthe von η_1 die beständigen Glieder zum Verschwinden gebracht sind. Es verschwinden aus diesem Grunde auch diejenigen Glieder des Ausdrucks P_1 , in welchen eine Störung der ersten Ordnung von η_1 mit einem beständigen Factor verbunden ist. Die derartigen Gliedern von P_1 entsprechenden säcularen Störungen von k_1 und von h_1 sind hiermit in Wegfall gebracht.

In den Gleichungen (6)' und (7)' sind noch andere Störungsglieder der zweiten Ordnung zu erwähnen. Dieselben entstehen, wenn in einem Gliede des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1$ der Parameter p_1 einen beständigen Factor erhält. Wir haben dieses Product in eine Reihe Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 entwickelt, und unter 12. die Summe

derjenigen Glieder, deren Argumente unabhängig von den allein gegeben sind, durch die folgende Gleichung aus-Veränderlichen u und u_1 als Functionen von v und v_1 gedrückt:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = \frac{r_1^3}{p_1^3} \frac{r^2}{p^2} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} - 2b + q_{01} - q + q_0 \right) - \kappa m m_1 \frac{r^2}{p_1^3} \frac{r^2}{p^2} \left(D + 3D_1 \frac{r^2}{r_1^2} + 5D_2 \frac{r^4}{r_1^4} + \dots \right).$$

Man denke sich die rechte Seite dieser Gleichung in eine Reihe Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt, schreibe aber nur die von den Veränderlichen v und v_1 unabhängigen Glieder der Entwicklung. Man erhält dann die Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = & f_1 \frac{p_{01}}{p_1} \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 - (2b - q_{01}) \left(1 + 3e_1^2 \right) \alpha_2 - \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left(D + 2D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} + 3D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} + \dots \right) e^2 \\ & - \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_1^3} \left[D \alpha_4 + 3D_1 \frac{p^2}{p_1^2} \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5D_2 \frac{p^4}{p_1^4} \left(1 + 3e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ & \left. + 7D_3 \frac{p^6}{p_1^6} \left(1 + \frac{15}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9D_4 \frac{p^8}{p_1^8} \left(1 + 14e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die unter 12. erhaltenen Werthe von q_{01} und f_1 verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, sobald $p_1 = p_{01}$ gesetzt wird. Man kann die Gleichung daher in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = & f_1 \left(\frac{p_{01}}{p_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 \\ & - \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left[D \left(\frac{p_{01}^3}{p_1^3} - 1 \right) \alpha_4 + 3D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(\frac{p_{01}^5}{p_1^5} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(\frac{p_{01}^7}{p_1^7} - 1 \right) \left(1 + 3e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ & \left. + 7D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left(\frac{p_{01}^9}{p_1^9} - 1 \right) \left(1 + \frac{15}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left(\frac{p_{01}^{11}}{p_1^{11}} - 1 \right) \left(1 + 14e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1) = 2\eta_1.$$

$$\frac{p_{01}^i}{p_1^i} = (1 + 2\eta_1)^{-1/2 i} = 1 - i\eta_1 + \dots$$

Es folgt hieraus:

Lässt man die mit η_1^2 multiplicirten Glieder dieser Gleichung ausser Acht, so wird die obige Gleichung übergeführt in:

$$\begin{aligned} \lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = & -f_1 \eta_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 + \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \eta_1 \left[3D \alpha_4 + 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 \right. \\ & \left. + 5.7 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(1 + 3e_1^2 \right) \alpha_8 + 7.9 D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{15}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9.11 D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left(1 + 14e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Unter 12. ist der Werth von f_1 gegeben. Es ist:

$$\begin{aligned} f_1 \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_2 = & \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} \left[3D \alpha_4 + 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) \alpha_6 + 5.7 D_2 \frac{p^4}{p_{01}^4} \left(1 + 2e_1^2 \right) \alpha_8 \right. \\ & \left. + 7.9 D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} \left(1 + \frac{9}{2} e_1^2 \right) \alpha_{10} + 9.11 D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} \left(1 + 8e_1^2 \right) \alpha_{12} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Man setze diesen Werth von f_1 in die vorige Gleichung ein, und findet:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = \kappa m m_1 \frac{p^2}{p_{01}^3} e_1^2 \eta_1 \left(-1.3 D \alpha_4 - 3.5 D_1 \frac{p^2}{p_{01}^2} \alpha_6 + 7.9 D_3 \frac{p^6}{p_{01}^6} 2\alpha_{10} + 9.11 D_4 \frac{p^8}{p_{01}^8} 5\alpha_{12} + \dots \right).$$

Betrachtet man die Differenzen je zweier auf einander folgenden Coefficienten von α_n , so findet man, dass dieselben durch die Zahlenreihe 0 1 2 3 . . . dargestellt sind. Der vorliegende Ausdruck hat den gemeinsamen Factor $e_1^2 \eta_1$. Durch die Substitution der Störungen erster Ordnung von η_1 ergeben sich weitere säculare Störungen der Veränderlichen k_1 und h_1 . Diese säcularen Störungen der zweiten Ordnung haben den Factor $e e_1^2$.

Unter Berücksichtigung der hier mitgetheilten Resultate kann man behaupten, dass die säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k_1 und von h_1 , insofern dieselben in die erste Classe gehören, in allen Fällen einen der Factoren $e^3 e^2 e_1$ $e e_1^2$ haben.

19.

Die neue Störungstheorie ist auf die Hypothese gegründet, dass die Bahn der gestörten Masse eine Ellipse sei, deren Parameter und Perihel nicht beständige Grössen sind, sondern Variationen erleiden, welche man Störungen der Ellipse nennt. Alle Störungen werden durch die Quadratur gegebener Functionen der unabhängigen Veränderlichen bestimmt. Ich habe in dem Vorausgehenden gezeigt, dass das Verhältniss einer Störung zweiter Ordnung zu der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung in allen Fällen durch einen kleinen Bruchwerth ausgedrückt ist. Das Integral der Störungsgleichung hat die Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder die Störungen der aufsteigenden Ordnungen sind. Aus der Vergleichung dieser Störungen ist zu ersehen, dass diese Reihenentwicklung convergent ist.

Man kann allerdings auch Störungsaufgaben stellen, welche in der neuen Theorie nicht gelöst werden können. Denn es ist in den vorliegenden Untersuchungen, welche den Planetenstörungen gewidmet sind, nachgewiesen, dass die Convergenz der Integrale nur dann besteht, wenn die Excentricitäten der beiden Ellipsen, in welchen sich die gestörte und die störende Masse bewegen, als kleine Bruchwerthe gegeben sind. Das Problem der Störungen ist auch durch die Voraussetzung beschränkt, dass die mittleren Bewegungen der beiden Leitstrahlen in den Ellipsen, ebenso die mittleren Bewegungen der beiden Apsidenlinien in den Ebenen der Bahnen als incommensurable Grössen gegeben seien. Die Begründung dieser Forderung ist unter 9. nachgewiesen.

Es ist aber unter den Aufgaben über Planetenstörungen kein Fall bekannt, in welchem eine der beiden genannten Forderungen unerfüllt ist. Die neue Störungstheorie erhebt nicht den Anspruch darauf, dass sie die allgemeine Lösung des Problems der drei Körper gebe; aber sie giebt, auf Grund der erwähnten Hypothese, die allgemeine oder doch eine für einen sehr ausgedehnten Zeitraum gültige Lösung aller derjenigen Aufgaben, in welchen es sich um die Bestimmung von Planetenstörungen handelt. In dem vorliegenden Aufsatz habe ich gezeigt, wie man zu der allgemeinen Lösung dieser Aufgaben gelangen kann, unter der Voraussetzung, dass auch eine angenäherte Commensurabilität der mittleren Bewegungen der beiden Leitstrahlen nicht besteht.

$$m \left[\frac{1}{2} (r^2)'' - \frac{p_0^3}{r} + p_0^2 (1 - e^2) \right] = f \frac{p_0}{r} + q_0 + \frac{\pi m_1}{p_1^3} \frac{r^2}{p_0^2} \left(4D + 6D_1 \frac{r^2}{p_1^2} + 8D_2 \frac{r^4}{p_1^4} + \dots \right),$$

wo die Coefficienten D, D_1, D_2, \dots gegebene Zahlenwerthe sind. Wenn nun die Ellipse als intermediäre Bahn angenommen wird, wenn ferner die Beständigen q_0 und f in solcher Weise bestimmt werden, dass gewisse Glieder der vorliegenden Gleichung wegfallen, so verschwinden in dem Werthe des Leitstrahls die der Zeit proportionalen Glieder; es sind auch alle Störungen der zweiten Ordnung als kleine Bruchtheile der grössten unter den Störungen der ersten Ordnung gegeben. Dies ist in dem Vorausgehenden nachgewiesen.

$$m \left[\frac{1}{8} \left(\frac{r^2}{p_0} \right)'' - p_0 r + \frac{1}{2} (1 - e^2) r^2 \right] = c + f \frac{r}{p_0} + \frac{1}{2} q_0 \frac{r^2}{p_0^2} + \frac{\pi m_1}{p_1^3} \frac{r^4}{p_0^4} \left(D + D_1 \frac{r^2}{p_1^2} + D_2 \frac{r^4}{p_1^4} + \dots \right),$$

In seinen neuen Untersuchungen über die Bewegung der Himmelskörper ist Herr Gylden nicht zu demselben Resultat gekommen, zu welchem die neue Störungstheorie geführt hat. Ich erwähne, dass Herr O. Backlund in der Zeitschrift: »Copernicus« Heft Nr. 23 über diese Untersuchungen berichtet hat. Auch Herr Gylden giebt in seinem Aufsatz: »Ueber die Theorie der Bewegung der Himmelskörper« Nr. 2383 der A. N. eine Mittheilung darüber. Mit diesen Untersuchungen hat Herr Gylden den Begriff der intermediären Bahn in die Theorie der Störungen eingeführt. Man hat sich unter derselben eine bestimmte Curve zu denken, deren Elemente variirt werden müssen, damit sie mit der Bahn der gestörten Masse zusammenfalle. Als intermediäre Bahn könne die Ellipse nicht angenommen werden, weil unter dieser Annahme die Integrale der Störungsgleichungen divergent seien. Um dies zu beweisen, hat Herr Gylden in dem 16. Jahrgang der Vierteljahresschrift S. 296–304 einen Aufsatz veröffentlicht. Ich muss aber annehmen, dass diese Beweisführung des Herrn Gylden auf einem Irrthum beruht. Es ist zu vermuthen, dass die zu untersuchenden, einer etwaigen Lösung des Problems dienlichen Möglichkeiten in dieser Beweisführung nicht erschöpfend berücksichtigt sind. Es möge mir erlaubt sein, die Gleichungen des vorliegenden Aufsatzes zum Ausgangspunkt zu nehmen, indem ich beabsichtige, den Weg zu verfolgen, auf welchem Herr Gylden zu der von ihm vorgeschlagenen intermediären Bahn gelangt ist.

Es ist unter 2. gezeigt worden, dass der Leitstrahl der in der inneren Bahn sich bewegenden Masse aus der Gleichung:

$$m \left[\frac{1}{2} (r^2)'' - \frac{p_0^3}{r} + p_0^2 (1 - e^2) \right] = f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr}$$

bestimmt werden soll. Wir denken uns die Störungsfunktion in eine Reihe Cosinus der Vielfachen von u und u_1 entwickelt. Wir denken uns auf der rechten Seite der vorliegenden Gleichung diejenigen Glieder ausschliesslich in

Betracht gezogen, welche, nachdem man $\frac{p_1}{r_1} = 1 + e_1 \cos v_1$ gesetzt hat, von den Veränderlichen u, u_1, v_1 unabhängig als Functionen der Veränderlichen r allein gegeben sind. Wir können dann die Gleichung umschreiben in:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{p_0} \right)' = \frac{r r'}{p_0^2},$$

so ergibt sich deren erstes Integral:

in welchem c die Integrationsbeständige ist. Durch die zweite Integration erhält man den Leitstrahl r der intermediären Bahn nicht als eine trigonometrische Function der Zeit, wie es aus der Annahme folgt, dass die Ellipse intermediäre Bahn sei; es ist nun r eine hyperelliptische Function der Zeit. Aus dieser Form der intermediären Bahn folgt aber nicht, dass das Integral der ursprünglichen zur Bestimmung des Leitstrahls der gestörten Bahn gegebenen Differentialgleichung eine stärkere Convergenz habe, als diejenige ist, welche sich in der neuen Störungstheorie aus der Annahme, dass die Ellipse intermediäre Bahn sei, ergeben hat. Es scheint also, dass Herr Gylden nicht beachtet hat, wie sich die Störungen der zweiten Ordnung gestalten, wenn für den Fall, dass die Ellipse intermediäre Bahn ist, die überzähligen Integrationsbeständigen die geeignete Verwendung erhalten. Denn es ist verständlich, was neben den Störungen der zweiten Ordnung der Convergenz der Integrale im Wege stehen könnte.

Die Schwierigkeit der vorgeschlagenen Lösung ist von Herrn Gylden allerdings damit ermässigt worden, dass in der Gleichung der intermediären Bahn die Coefficienten $D_1 D_2 \dots$ unbeachtet bleiben. An die Stelle der hyperel-

liptischen Function ist hiermit eine elliptische Function der Zeit gesetzt. Doch ist man berechtigt anzunehmen, dass diese Vereinfachung der intermediären Bahn mit einer Schwächung der Convergenz erkauft werden muss.

Es scheint auch, dass die vorgetragene Betrachtungsweise der Aufgabe die Meinung des Herrn Gylden hervorgerufen hat, es sei mittelst trigonometrischer Functionen eine Lösung des Problems der Störungen überhaupt nicht ausführbar. Sehr bestimmt hat das Herr Gylden behauptet in dem bekannten Aufsatz: »Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper«. Acta mathematica I S. 80 heisst es: »Suchen wir eine einfache Lösung mittelst uns jetzt bekannter Functionsformen, so stellen wir uns jedenfalls eine widersinnige Aufgabe; wir müssen vielmehr unsern Geist dahin zu entwickeln suchen, dass die Lösung, die uns einst erreichbar wird, einfach erscheint. Dieser Evolutionsprozess heisst, mathematisch gesprochen, das Anschauliche werden neuer Functionsformen. — Nicht durch einen Zauberschlag oder durch eine unmittelbare Erkenntniss werden wir die Lösung des Problems der drei Körper erlangen, sondern auf einem Pfade, auf dem jeder Schritt nur mit Ueberwindung bedeutender Schwierigkeiten gethan werden kann«.

Karlsruhe im Februar 1889.

Aug. Weiler.

Elemente und Ephemeride des Cometen 1889... (Barnard Juni 23).

Elemente von Hrn. *A. O. Leuschner*,
Lick Observatory, nach Science Obser-
ver International Circular Nr. 29.

$$\begin{aligned} T &= 1889 \text{ Juni } 20.19 \text{ M. Z. Berl.} \\ \omega &= 59^\circ 21' \\ \Omega &= 271 \quad 4 \\ i &= 31 \quad 15 \\ \log q &= 0.04234 \end{aligned} \quad 1889.0$$

Elemente von Dr. *J. Bauschinger*,
berechnet aus Lick Observatory Juni 23,
München Juni 25 und 26.

$$\begin{aligned} T &= 1889 \text{ Juni } 24.4867 \text{ M. Z. B.} \\ \omega &= 66^\circ 5'7'' \\ \Omega &= 274 \quad 40.5 \\ i &= 32 \quad 8.6 \\ \log q &= 0.0703 \end{aligned} \quad 1889 \text{ Juni } 24$$

Elemente von Dr. *R. Spitaler*, be-
rechnet aus Lick Observatory Juni 23,
Wien Juni 28 und Juli 5.

$$\begin{aligned} T &= 1889 \text{ Juni } 20.93547 \text{ M. Z. B.} \\ \omega &= 61^\circ 8' 35''.0 \\ \Omega &= 271 \quad 55 \quad 19.3 \\ i &= 31 \quad 29 \quad 22.5 \\ \log q &= 0.050824 \end{aligned} \quad 1889.0$$

Ephemeride für 12^h M. Z. Berlin, berechnet von Dr. *R. Spitaler* aus seinen Elementen.

$$x = [9.930906] r \cdot \sin(v + 63^\circ 23' 48''.1), \quad y = [9.970667] r \cdot \sin(v + 319^\circ 56' 10''.2), \quad z = [9.800428] r \cdot \sin(v + 22^\circ 6' 22''.0)$$

1889	α	δ	$\log A$	H
Juli 15	3 ^h 0 ^m 46 ^s	+47° 30'.1	0.1078	0.70
16	5 11	47 43.8		
17	9 34	47 56.7		
18	13 55	48 8.8		
19	18 13	48 20.0	0.1171	0.64
20	22 28	48 30.5		
21	26 41	48 40.4		
22	30 52	48 49.7		
23	35 0	48 58.6	0.1259	0.59
24	39 5	49 6.7		
25	43 7	49 14.2		
26	47 5	49 21.1		
27	51 1	49 27.4	0.1341	0.55
28	54 54	49 33.3		
29	3 58 44	49 38.6		
30	4 2 30	49 43.3		
31	6 14	49 47.6	0.1416	0.50
Aug. 1	9 54	49 51.4		
2	4 13 31	+49 54.8		

1889	α	δ	$\log A$	H
Aug. 3	4 ^h 17 ^m 4 ^s	+49° 57'.8		
4	20 35	50 0.3	0.1486	0.46
5	24 3	50 2.6		
6	27 26	50 4.5		
7	30 45	50 6.0		
8	34 0	50 7.0	0.1549	0.43
9	37 12	50 8.0		
10	40 21	50 8.6		
11	43 27	50 8.8		
12	46 29	50 8.5	0.1606	0.40
13	49 28	50 8.2		
14	52 23	50 7.7		
15	55 14	50 7.0		
16	4 58 1	50 6.0	0.1656	0.37
17	5 0 46	50 4.9		
18	3 27	50 3.6		
19	6 4	50 2.1		
20	5 8 37	+50 0.5	0.1699	0.34

Inhalt zu Nr. 2908-09. *A. Weiler*. Die Störungen der Planeten in der neuen Theorie. 49. — Elemente und Ephemeride des Cometen 1889... (Barnard Juni 23). 103.

Geschlossen 1889 Juli 9. Herausgeber: A. Krueger. Druck von C. Schaidt, C. F. Mohr Nachf. Expedition Sternwarte in Kiel.