

# Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen.

## Erster Theil.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

---

In den vom Verfasser der vorliegenden Arbeit unter dem Titel: *Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung* veröffentlichten Vorlesungen des Herrn F. Klein\*) sind eine Reihe von neuen Gesichtspunkten aufgestellt worden. Sollte die Fruchtbarkeit derselben nach allen Seiten hin klargelegt werden, so war es nicht ausreichend zu entwickeln, welche Uebersichtlichkeit die allgemeine Theorie von ihnen aus gewinnt; es musste vielmehr auch gezeigt werden, wie man geleitet von diesen Gesichtspunkten bequemen Zugang zu Hilfsmitteln erreichen kann, welche die Durchführung specieller Probleme weiter zu fördern im Stande sind, als es die verbreitete — wesentlich mit dem Aufgebot einer möglichst grossen Anzahl von Thetarelationen arbeitende — Methode bisher vermocht hat. Das erstere darzuthun war das Ziel jener Vorlesungen; das letztere ist dort ausdrücklich anderen Arbeiten überlassen und soll in den Untersuchungen, deren erster Theil hier vorliegt, versucht werden. Dieselben haben ihren Ausgangspunkt ursprünglich von dem speciellen bereits mehrfach behandelten Problem der *Multiplicatorgleichung* genommen, das aus verschiedenen Rücksichten ein passendes Beispiel zu sein schien. Indessen trat bald zu Tage, dass eine Reihe anderer Fragen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen mit in den Bereich der Untersuchung gezogen werden mussten, wenn jenes Problem mit Erfolg in Angriff genommen werden sollte. Dass dann mit der Behandlung solcher Nebenfragen nicht gerade da abgebrochen wurde, wo die für die Multiplicatorgleichung erforderlichen Ergebnisse gewonnen waren, sondern dass dabei ein gewisser wenn auch nur vorläufiger Abschluss der Untersuchung erstrebt wurde, wird keiner Rechtfertigung bedürfen.

---

\*) Diese Ann. Bd. 35, p. 198ff. — im Folgenden kurz mit: „Grundz.“ citirt.

Die Auswahl der — an und für sich betrachtet ziemlich heterogenen — Dinge aber, welche zur Sprache kommen, bleibt dabei zunächst durch die Rücksicht auf die Multiplicatorgleichung bedingt. In der wirklichen Berechnung einer Reihe von Coefficienten einer Multiplicatorgleichung 40. Grades für Transformation dritter Ordnung findet dieser Theil der Untersuchungen seinen Abschluss; nicht als ob den Werthen dieser Coefficienten an und für sich ein besonderes Interesse zugeschrieben werden könnte, sondern weil es wünschenswerth schien zu prüfen, ob die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften dieser Coefficienten tief genug eingedrungen sei, um ihre wirkliche Berechnung mit verhältnissmässig geringem Rechnungsaufwand zu ermöglichen.

Die abweichende Methode der Behandlung brachte es mit sich, dass die vorhandene Literatur über hyperelliptische Modulfunctionen, nur an vereinzelten Stellen direct benutzt und citirt werden konnte. Dagegen verdankt der Verfasser, wie an dieser Stelle hervorgehoben sei, den einschlägigen Arbeiten namentlich der Herren Krause (s. dessen zusammenfassendes Werk: Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, Leipzig 1885) und Wiltheiss (s. bes. Crelle's J. Bd. 96, 1884) vielfache indirecte Belehrung. Für zahlreiche Einzelheiten der Behandlung hatten naturgemäss die Untersuchungen über analoge Fragen aus der Theorie der *elliptischen* Modulfunctionen als Vorbild zu dienen, wie sie in den Arbeiten der Herren F. Klein (Rendic. Istit. Lomb. v. Jan. 1879\*); Sitzber. d. Münch. Ak. v. Dec. 1879\*\*), Hurwitz (dieser Ann. Bd. 18, 1881) und Biedermann (Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen, Diss., Leipzig 1887) niedergelegt sind. Doch besitzt die Theorie der elliptischen Modulfunctionen in den „*Fundamentalebene der  $\tau$ -Ebene*“ ein Hilfsmittel anschaulicher Behandlungsweise, dem die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen bei dem gegenwärtigen Stande ihrer Ausbildung kein analoges an die Seite zu stellen hat; und auch sonst bietet die letztere Theorie manche ihr eigenthümliche Schwierigkeiten, zu deren Beseitigung besondere Hilfsmittel in den Dienst der Untersuchung gestellt werden mussten.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 21 der Göttinger Nachrichten v. J. 1889 u. d. T. „Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung“ erschienen.

---

\*) Abgedruckt in Bd. 15 dieser Ann.

\*\*) Bd. 17 dieser Ann. [Auch mit der inzwischen in Heft 1 dieses Bandes veröffentlichten Abhandlung des Herrn Klein „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“ besitzt vorliegende Arbeit Berührungspunkte, auf die an den betr. Stellen hinzuweisen sein wird].

## I.

## Beziehungen der Thetafunctionen zur Stufen-Eintheilung.

## § 1.

## Uebergang von den Sigma zu den Theta.

Wenn für die Behandlung specieller Probleme im Sinne der in den „Grundzügen“ niedergelegten allgemeinen Theorie das mächtige Hilfsmittel der Thetafunctionen herangezogen werden soll, so tritt die dort zur Seite geschobene Frage in den Vordergrund, wie sich diese Functionen zu der dort gegebenen Systematik stellen. Eine vollständig genügende Beantwortung dieser Frage scheint allerdings zur Zeit noch nicht möglich zu sein; für die hier zunächst verfolgten Zwecke müssen einige wenige Bemerkungen genügen.

Ist man einmal, durch welche Ueberlegungen es auch immer sein mag, von den hyperelliptischen Formen zweiter Stufe (Grundz. § 24) zu den Sigmafunctionen gelangt, so kommt man durch folgende dem Verfasser von Herrn F. Klein mitgetheilte Ueberlegungen von ihnen zu den Theta:

Die Sigmafunctionen verhalten sich linearen Periodentransformationen gegenüber sehr einfach, indem sie sich bei denselben nur unter sich permutiren. Auch bei Vermehrung der Argumente um ganze Perioden erleiden sie nur leicht angebbare Veränderungen, indem bestimmte bis auf das Vorzeichen für alle gleiche Exponentialfactoren zu ihnen treten. Werden die Argumente um *halbe* Perioden vermehrt, so tritt beides zugleich ein: jede Sigmafunction wird übergeführt in eine andere, zu der noch ein Exponentialfactor tritt; ausserdem aber erscheint noch als Factor eine Modulfunction. Den letztgenannten Factor nun kann man beseitigen, indem man jede Sigmafunction mit einer geeigneten Modulform multiplicirt und das so entstehende Product als neue Function in die Formeln einführt: die Formeln der beiden ersten Kategorien ändern sich dabei gar nicht, aus denjenigen der dritten Kategorie aber fällt die multiplicirende Modulfunction weg. Wählt man unter allen Factoren, welche dies leisten, die einfachsten,

so gelangt man dazu, die namentlich von Herrn Wiltheiss\*) schon mehrfach benutzten Functionen:

$$(1) \quad \text{Th}_{\varphi, \psi} = \sqrt[3]{\Delta_{\varphi} \Delta_{\psi}} \sigma_{\varphi, \psi}$$

als wesentliche Elemente in die Theorie einzuführen; unter  $\Delta_{\varphi}$ ,  $\Delta_{\psi}$  sind dabei die Discriminanten der Formen  $\varphi$ ,  $\psi$  verstanden. Diese Functionen oder besser gesagt Formen Th sind (im Unterschied von den  $\sigma$ ), auch wenn der Grad von  $\varphi$  von dem von  $\psi$  verschieden ist, „reine“ Covarianten (Grundz. § 11) nicht nur von  $\varphi$  und  $\psi$ , sondern auch von  $f$  selbst. — Um nun aus den Th- die  $\vartheta$ -Functionen zu gewinnen, hat man dieselben zunächst durch Multiplication mit der Quadratwurzel aus der Periodendeterminante  $p_{12}$  in *Functionen (Formen nullter Dimension)* auch der Coefficienten von  $f$  zu verwandeln. Hierauf sind sie mit gewissen Exponentialfactoren zu multipliciren, deren Zufügung bewirkt, dass die Periodicitätsfactoren an den beiden ersten Querschnitten eines kanonischen Querschnittsystems sich auf  $\pm 1$  reduciren. Wird dann noch mit einer geeigneten numerischen Constante multiplicirt, so sind die so entstehenden Functionen keine anderen als die Jacobi'schen Thetafunctionen, wie sie durch die unendlichen Reihen definirt sind:

$$\begin{aligned} & \vartheta \left| \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right| (v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \\ & = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \pi i \left\{ \left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right)^2 \tau_{11} + 2 \left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right) \left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right) \tau_{12} + \left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right)^2 \tau_{22} + 2 \left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right) \left(v_1 + \frac{h_1}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right) \left(v_2 + \frac{h_2}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

Die Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right|$ , welche der zu einer bestimmten Zerlegung  $f = \varphi \cdot \psi$  gehörenden Thetafunction für ein bestimmtes Querschnittsystem zukommt, bestimmt sich nach der von Herrn Klein (Math. Annalen Bd. 32, p. 358, 1888) mitgetheilten Regel; nach derselben Regel kann man in unserem Falle  $p = 2$  auch leicht die Zerlegung finden, zu welcher ein Theta mit gegebener Charakteristik für ein gegebenes Querschnittsystem gehört, wenn man nur beachtet, dass  $\varphi$  und  $\psi$  stets Formen von ungeradem Grade sind. Die Herren Königsberger\*\*) und Henoch\*\*\*) haben eine Tabelle mitgetheilt, welche diese Zuordnung der Charakteristiken zu den Zerspaltungen für die von Herrn Weierstrass seinen Untersuchungen zu Grunde gelegte Wahl eines kanonischen Periodensystems

\*) Math. Ann. Bd. 31, 33, (1888/89).

\*\*) Cr. J. Bd. 64, p. 22. (1865).

\*\*\*) De Abelianarum functionum periodis (Diss. Berol. 1867) p. 14.

giebt. Dieses Periodensystem wird durch das in nachstehender Figur enthaltene Querschnittssystem geliefert:

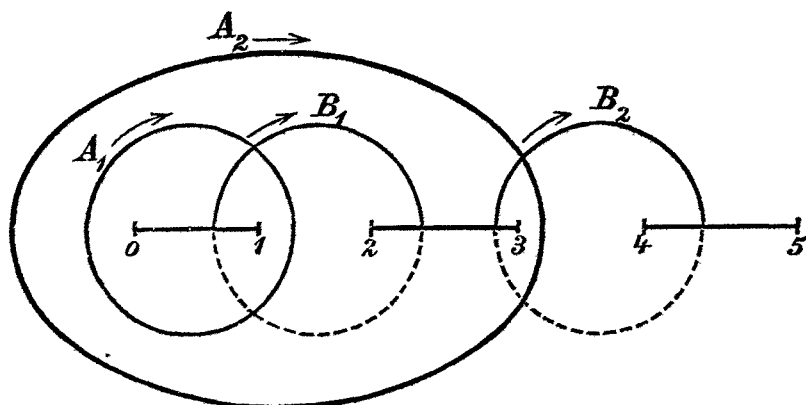


Fig. 1.

oder, was dasselbe ist:

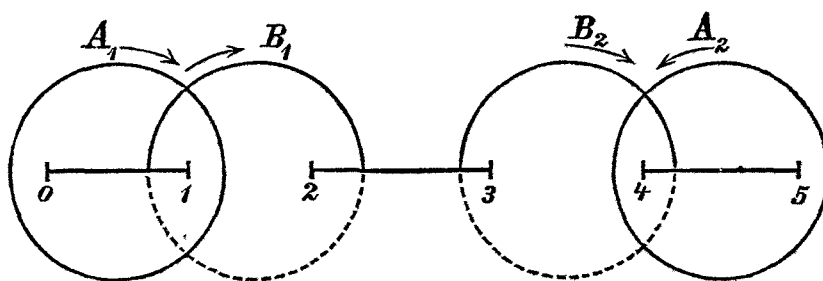


Fig. 2.

Wo in diesen Untersuchungen eine Beziehung auf ein specielles Querschnittssystem erforderlich ist, soll stets das vorstehende gewählt werden; von demselben weicht das Grundz. § 8 benutzte in der dort angegebenen Weise ab.

Die Bezeichnungen der  $\sigma$ , Th,  $\vartheta$  durch Angabe sei es der Charakteristiken, welche ihnen in Bezug auf ein bestimmtes Querschnittssystem zukommen, sei es der Zerlegungen  $f = \varphi \cdot \psi$  zu welchen sie gehören, sind für den gewöhnlichen Gebrauch zu schleppend; man hat daher mehrfach abgekürzte Bezeichnungen in Vorschlag gebracht. Die Abkürzung kann natürlich nur auf Kosten der Symmetrie erreicht werden; für die Behandlung specieller Probleme scheint es daher zweckmässig zu sein, bei der Auswahl unter den verschiedenen Bezeichnungsarten sich von dem Gesichtspunkt leiten zu lassen, dass die Bezeichnung *dieselbe* Art von Asymmetrie bekommen soll, wie das Problem, bei dessen Behandlung sie zu dienen bestimmt ist. Da nun im folgenden verschiedene Aufgaben behandelt werden sollen, in welchen eine von den zehn Zerlegungen:

$$(2) \quad f_6 = \varphi_3 \cdot \psi_3$$

— wir wollen stets annehmen, diejenige, für welche:

$$(3) \quad \varphi(x) = (\alpha_0 x)(\alpha_2 x)(\alpha_4 x), \quad \psi(x) = (\alpha_1 x)(\alpha_3 x)(\alpha_5 x) —$$

bevorzugt ist, so werden wir zweckmässiger Weise eine Bezeichnung wählen, in welcher ebenfalls diese Zerlegung ausgezeichnet erscheint. Das ist der Fall mit der von Herrn Staudé (Math. Ann. Bd. 24, 1884; vgl. Grundz. § 26) vorgeschlagenen Bezeichnung, welche auf folgendem Princip beruht: Jede andere der 16 Zerlegungen geht aus der ausgezeichneten (3) dadurch hervor, dass von einem bestimmten Paare der Linearfactoren  $(\alpha_i x)$  jeder aus derjenigen der Formen  $\varphi, \psi$ , welcher er in (3) angehört, herausgenommen und der andern zugefügt wird; den zu der Zerlegung gehörenden Functionen werden dann diejenigen beiden Zahlen als Indices gegeben, welche jene beiden Linearfactoren bezeichnen, während die zu der ausgezeichneten Zerlegung (3) gehörenden Functionen ohne Index bleiben. Von den letzteren abgesehen erhält dabei, wie leicht zu sehen, jede gerade Function einen geraden und einen ungeraden Index, jede ungerade entweder zwei gerade oder zwei ungerade Indices. *Von dieser Bezeichnung soll auch im folgenden Gebrauch gemacht werden.* — Die Bezeichnung, deren sich Herr Weierstrass bedient, bevorzugt neben der Zerlegung (3) auch noch eine Zerlegung  $f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5$ , diejenige nämlich, für welche:

$$(4) \quad \varphi(x) = (\alpha_5 x), \quad \psi(x) = (\alpha_0 x) (\alpha_1 x) (\alpha_2 x) (\alpha_3 x) (\alpha_4 x)$$

ist. Die des Herrn Staudé wird in sie übergeführt, indem man den Index 5 überall weglässt, wo er bei jener auftritt, dagegen den zu der Zerlegung (3) gehörenden Functionen diesen Index giebt\*).

## § 2.

### Einordnung bestimmter Verbindungen der Thetafunctionen in die Stufen-Eintheilung.

Die Thetafunctionen selbst gehören so wenig als die Sigmafunctionen (Grundz. § 27) in die Stufeneintheilung, indem sie zu Untergruppen nicht von endlichem, sondern von unendlich hohem Index gehören; sie sind gar keine hyperelliptischen Functionen im Sinne der Grundz. § 16 gegebenen Definition.

Anders verhält es sich mit den *Quotienten* je zweier Thetafunctionen: die Exponentialfactoren, welche bei den Operationen der Hauptgruppe (Grundz. § 15) zutreten, sind für alle Thetafunctionen dieselben und fallen daher bei der Quotientenbildung heraus, sodass die Thetaquotienten bei jenen Operationen nur eine *endliche* Anzahl verschiedener Werthe anzunehmen im Stande sind. In der That ist bekannt, dass die Thetaquotienten, wenn die  $v$  um Perioden vermehrt werden,

---

\*) Vgl. Staudé a. a. O. p. 300.\*

höchstens ihr Zeichen wechseln, wenn aber die Perioden linear transformirt werden, sich unter einander unter Zutritt *achter* Einheitswurzeln permutiren. Ferner folgt aus bekannten Formeln\*) (wenn gleich noch nicht ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht worden zu sein scheint), dass die Operationen der Principaluntergruppe II. Stufe die Thetaquotienten nur um *vierte* Einheitswurzeln ändern, und eine Reihe ähnlicher Resultate, die wir in der Terminologie der §§ 17, 18 der Grundzüge folgendermassen aussprechen:

*Die Thetaquotienten sind Functionen achter Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf vierte, bestimmten umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe aber in Bezug auf achte Einheitswurzeln adjungirt.*

*Ihre Quadrate sind Functionen vierter Stufe.*

*Ihre vierten Potenzen und ihre achten Potenzen sind Functionen zweiter Stufe; die ersteren ändern aber noch ihr Zeichen bei gewissen modulo 2 charakterisirten Operationen, bei welchen die letzteren ungeändert bleiben.*

Werden die Argumente  $v_1, v_2$  der geraden Thetafunctionen gleich Null gesetzt, so werden Modulfunctionen erhalten, welche man als *Thetamullwerthe* zu bezeichnen pflegt. Nach Abtrennung von  $\sqrt{p_{12}}$  gehen dieselben über in Modulformen, die Nullwerthe der Th-Functionen; von diesen gelten folgende Sätze:

*Die Th-Nullwerthe selbst gehören nur insofern in die Stufeneintheilung, als sie in dem weiteren Sinn des § 18 der Grundzüge der zweiten Stufe in Bezug auf achte Einheitswurzeln adjungirt sind.*

*Die Quadrate der Th-Nullwerthe sind Modulformen vierter Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf zweite, bestimmten umfassenderen Untergruppe zweiter Stufe aber in Bezug auf vierte Einheitswurzeln adjungirt.\*\*)*

*Die vierten Potenzen der Th-Nullwerthe sind Modulformen zweiter Stufe, dabei aber noch bestimmten umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe in Bezug auf zweite Einheitswurzeln adjungirt.*

*Die achten Potenzen der Th-Nullwerthe gehören zu diesen umfassenderen Untergruppen zweiter Stufe.*

Ausserdem existiren noch zahlreiche Combinationen verschiedener Th-Nullwerthe, welche der vierten, der zweiten, der ersten Stufe angehören. Es möge hier nur auf zwei Wege hingewiesen werden, auf welchen man solche Verbindungen in grosser Zahl erhalten kann.

Einmal nämlich kann man ausgehen von denjenigen Systemen von Thetafunctionen, welche als Göpel'sche, Rosenhain'sche u. s. w.

\*) Krause, § 24, Gl. (8).

\*\*) Vergl. Krause, § 24, insbes. Glchg. 15.

Quadrupel, Sextupel, Octupel bekannt sind, und aus den auf diese Systeme sich beziehenden Formeln Combinationen der verlangten Art herauszulesen versuchen.

Andererseits kann man von den algebraischen Ausdrücken der Modulformen I. und II. Stufe (Grundz. § 20, 22) ausgehen und fragen in welcher Weise sich dieselben durch Th-Nullwerthe ausdrücken. Für die Modulformen I. Stufe hat das Herr Bolza\*) durchgeführt; für gewisse Klassen von Modulformen II. Stufe soll es in Abschnitt IV dieser Untersuchungen geschehen.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch für die Nullwerthe der ersten Differentialquotienten der ungeraden Th-Functionen; nur ist zu beachten, dass diese nicht „reine“ Modulformen sind.

## II.

### Grenzfälle der hyperelliptischen Functionen\*\*).

#### § 3.

##### Einleitende Bemerkungen.

Die hyperelliptischen Functionen, mögen sie nun als Functionen der „algebraischen“ oder der „transcendenten“ Argumente aufgefasst werden, besitzen (vgl. Grundz. § 12) den Charakter rationaler, bzw. algebraischer Functionen ihrer Argumente an allen Stellen des a. a. O. definirten natürlichen Bereiches derselben. Was aus ihnen wird, wenn die Argumente an die Grenze dieses Bereiches heranrücken, ist eine Frage, die dort bei Seite gelassen ist. Da es jedoch für viele Untersuchungen nothwendig ist, wenigstens einige Kenntniss hievon zu besitzen, so sollen zwei solche Grenzfälle in diesem Abschnitt eine ausführlichere Behandlung finden.

Was die Methode dieser Behandlung betrifft, so bietet sich ein doppelter Weg für dieselbe dar, indem man entweder von den algebraischen oder von den transcendenten Argumenten ausgehen kann. Wenn hier auch hauptsächlich der erstere Weg eingeschlagen werden soll, so sei doch nicht verschwiegen, dass eine abschliessende Behandlung der Frage beide Methoden verbinden müsste.

Will man sich auf die Betrachtung von *Functionen* im engeren Sinne beschränken, so kann man einen grossen Theil der Resultate in sehr anschaulicher Weise erhalten, indem man die Riemann'sche Fläche sich stetig deformiren lässt und die Functionen durch die verschiedenen Stadien dieses Deformationsprocesses hindurch verfolgt.

\*) Dieser Ann. Bd. 30. (1887).

\*\*) Man vergleiche die entsprechenden Betrachtungen des Herrn Klein, p. 59 ff. dieses Bandes.



Dagegen bietet die Behandlung der *Formen* auf diesem Wege gewisse Schwierigkeiten dar, sodass man für diese doch auf die Vollziehung der Grenzübergänge an den analytischen Ausdrücken angewiesen ist.

Die Grenzfälle, um welche es sich hier handelt, sind im Gebiet der algebraischen Argumente dadurch definirt, dass die *Nullpunkte der Grundform  $f_6$  nicht mehr alle von einander verschieden sind*. Von diesen Fällen sollen im folgenden zwei discutirt werden: der Fall, dass zwei Nullpunkte zusammenrücken, und der Fall, dass drei in der Weise zusammenrücken, dass ihr Doppelverhältniss mit einem festen vierten Punkt constant bleibt. Zur Vermeidung von Wiederholungen sei dabei ein für alle mal hervorgehoben: *alle Nullpunkte von  $f_6$ , von welchen wir nicht ausdrücklich angeben, dass sie zusammenrücken, sollen stets von einander und von der Grenzlage der zusammenrückenden verschieden bleiben*.

Der Ausführung sind noch zwei Bemerkungen allgemeinerer Natur voranzuschicken.

*Erstens* ist zu beachten, dass die Sätze über die Aenderung des Querschnittsystems durch Monodromie der Verzweigungspunkte (Grundz. § 8) eine Vereinfachung der Untersuchung insofern ermöglichen, als wir die kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche und die zusammenrückenden Verzweigungspunkte in für den Grenzübergang möglichst geeigneter Weise auswählen können; der Uebergang zu andern Querschnittsystemen oder zu einer andern Wahl der zusammenrückenden Verzweigungspunkte geschieht dann einfach durch die Formeln der linearen Transformation.

Eine *zweite* Bemerkung bezieht sich darauf, dass es keineswegs gleichgiltig ist, in welcher Weise die zusammenrückenden Verzweigungspunkte sich einander nähern. Doch wird es stets ausreichen, einen der zusammenrückenden Punkte als fest zu behandeln: denn der allgemeine Fall lässt sich auf diesen durch eine lineare Transformation (mit veränderlichen Coefficienten) zurückführen, die auf unsere Functionen von bekanntem einfachen Einfluss ist. Dagegen ist wesentlich die Natur der Curve, auf welche ein Verzweigungspunkt — sagen wir etwa  $\alpha'$  — sich gegen den andern — sagen wir  $\alpha$  — hinbewegt. Umkreist nämlich  $\alpha'$  den Punkt  $\alpha$  ein- oder mehreremale, so werden unsere Functionen in bekannter Weise geändert; es wird also einen wesentlichen Unterschied bewirken, ob der Weg, welchen  $\alpha'$  beschreibt, den Punkt  $\alpha$  ein- oder mehreremale umwindet ehe er nach  $\alpha$  hinführt, oder ob dieser Weg direct — sagen wir geradezu geradlinig — in den Punkt  $\alpha$  hineinmündet. Diese zunächst etwas unbestimmte Vorstellung präcisiren wir, indem wir sagen: es wird zu unterscheiden sein, ob der Richtungswinkel der Verbindungslinie  $\alpha\alpha'$ , also der reelle Theil von  $\frac{1}{i} \log (\alpha' - \alpha)$  immer zwischen zwei festen um  $2\pi$  auseinanderliegenden

Grenzen bleibt — wenigstens von einer angebbaren Lage von  $\alpha'$  an, mit der wir dann erst den Grenzprocess beginnen — oder ob er diese Grenzen immer wieder überschreitet. Das letztere tritt übrigens nie ein, wenn die Curve, auf welcher sich  $\alpha'$  dem Punkte  $\alpha$  nähert, in diesem Punkte den Charakter einer algebraischen Curve besitzt. Wir werden unsere Untersuchung auf den ersteren Fall beschränken; in allen Fällen übrigens, in welchen wir unter dieser Beschränkung einen von der Art des Grenzübergangs unabhängigen bestimmten Grenzwert erhalten, wird derselbe allgemeine Gültigkeit besitzen müssen.

#### § 4.

##### Verhalten der Integrale erster Gattung und ihrer Perioden beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Frage, was aus den hyperelliptischen Functionen wird, wenn zwei Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche zusammenrücken. Bekanntlich geht die Fläche dadurch in eine elliptische über; zwei linear unabhängige Integrale I. Gattung können so ausgewählt werden, dass im Grenzfall das eine in das elliptische Integral I. Gattung auf dieser Grenzform der Fläche übergeht, das andere in ein elliptisches Integral III. Gattung, dessen beide logarithmischen Unstetigkeitspunkte die Grenzlage der zusammenrückenden Verzweigungspunkte in beiden Blättern repräsentiren. Von den Perioden des ersteren müssen also zwei, von denjenigen des letzteren eine durch den Grenzübergang beseitigt werden, und wir wollen an den analytischen Ausdrücken der Perioden durch bestimmte Integrale zwischen den Verzweigungspunkten prüfen, wie diese Beseitigung zu Stande kommt.

Um später die Ueberlegung nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir zunächst die Bestimmung der Grenzwerthe von drei bestimmten Integralen voraus, nämlich von:

$$(1) \quad S_1(\varepsilon) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)}};$$

$$(2) \quad S_2(\varepsilon) = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)}};$$

$$(3) \quad S_3(\varepsilon) = \int_a^0 \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}} dx$$

für

$$\lim \varepsilon = 0,$$

wobei unter  $a$  eine von 0 verschiedene Constante zu verstehen ist.

Welche Werthe dabei den Quadratwurzeln und den weiterhin auftretenden Logarithmen beizulegen sind, ist theils für die hier von uns verfolgten Zwecke gleichgültig, theils wird sich die Bestimmung an den Schlussresultaten durch einfache Ueberlegung ermöglichen. Die Integrationswege sind so gewählt gedacht, dass sie den Weg nicht kreuzen, auf welchem der Punkt  $\varepsilon$  dem Nullpunkt sich nähert.

Für das Integral (1) liefert elementare Rechnung den von  $\varepsilon$  unabhängigen Werth:

$$(4) \quad S_1(\varepsilon) = \pm \pi i.$$

Das Integral (2) wird für verschwindende  $\varepsilon$  unendlich gross; wir bedürfen eines asymptotischen Werthes desselben. Einen solchen finden wir auf folgende Weise. Durch Ausführung der unbestimmten Integration erhalten wir zunächst:

$$(5) \quad S_2(\varepsilon) = -\log \varepsilon + 2 \log (\sqrt{-a} + \sqrt{-a + \varepsilon}).$$

Der zweite Summand verhält sich für  $\varepsilon = 0$  regulär und kann nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt werden; führt man das aus und bricht mit dem ersten Gliede ab, so erhält man den gesuchten asymptotischen Ausdruck in der Form:

$$(6) \quad \lim_{\varepsilon=0} \{S_2(\varepsilon) + \log \varepsilon\} = \log(-a) + \log 4.$$

Für das dritte jener Integrale endlich erhält man zunächst:

$$(7) \quad S_3(\varepsilon) = \varepsilon \left\{ \frac{b}{-1+b^2} - \log \frac{b-1}{-b-1} \right\},$$

wo zur Abkürzung:

$$b = \sqrt{\frac{a}{a-\varepsilon}}$$

gesetzt ist. Für  $\lim \varepsilon = 0$  folgt:

$$b = 1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{a} + (\varepsilon)^2,$$

$$\log(b-1) = \left( \log \frac{\varepsilon}{2a} \right) \cdot (1 + (\varepsilon))$$

also:

$$(8) \quad S_3(\varepsilon) = \pm \left( a + \varepsilon \log \frac{\varepsilon}{4a} + (\varepsilon) \right),$$

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon=0} S_3(\varepsilon) = \pm a.$$

Wir kehren jetzt zur Untersuchung der Grenzwerte der Perioden unserer Integrale I. Gattung zurück. Wir nehmen das in § 1 angegebene Querschnittssystem und kommen dahin überein, dass  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die zusammenrückenden Verzweigungspunkte seien in der Weise, dass  $\alpha_1 = 0$  an seinem Platze bleibt,  $\alpha_2 = \varepsilon$  sich ihm nähert; in diesen Festsetzungen liegt den Erläuterungen des vorigen Paragraphen zufolge keine Beschränkung. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(10) \quad \chi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{f(x)}{x(x-\varepsilon)};$$

dann handelt es sich, wenn wir die Periodenwege auf doppelt durchlaufene Linien zwischen je zwei Verzweigungspunkten zusammenziehen, um die Bestimmung der Grenzwerte der Integrale:

$$w_1 = \int \frac{x dx}{Vx(x-\varepsilon)\chi(x)}, \quad w_2 = \int \frac{dx}{Vx(x-\varepsilon)\chi(x)},$$

genommen bezw. zwischen den Grenzen:

$$0 \text{ und } \varepsilon, \quad \alpha_3 \text{ und } \alpha_4, \quad \alpha_0 \text{ und } 0, \quad \alpha_4 \text{ und } \alpha_5.$$

Was das *erste* Integrationsintervall betrifft, so kann man bei hinreichend kleinen Werthen von  $\varepsilon$  für alle Punkte desselben:

$$\frac{1}{V\chi(x)} = \frac{1}{V\chi(0)} + (\delta)$$

setzen, wo  $(\delta)$  mit  $\varepsilon$  zugleich unendlich klein wird. In Folge dessen erhält man die Grenzwerte:

$$(11) \quad \lim_{\varepsilon=0} \omega_{11} = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \omega_{21} = -\frac{2\pi i}{V\chi(0)}.$$

Im *zweiten* und *vierten* Integrationsintervall bleiben die zu integrierenden Functionen auch für  $\varepsilon=0$  stetig, wenn man von den Endpunkten der Intervalle absieht; das Verhalten in diesen wird aber ebenfalls durch den Grenzübergang gar nicht beeinflusst. Daher darf derselbe unter dem Integralzeichen vollzogen werden, und man erhält einfach:

$$(12) \quad \lim \omega_{12} = \omega, \quad \lim \omega_{22} = 2 \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dx}{x V\chi(x)} = \Omega,$$

$$(13) \quad \lim \omega_{14} = \omega', \quad \lim \omega_{24} = 2 \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} \frac{dx}{x V\chi(x)} = \Omega';$$

dabei sind  $\omega, \omega'$  zwei primitive Perioden des elliptischen Integrals I. Gattung  $\bar{w}_1$ , auf welches sich  $w_1$  reducirt,  $\Omega$  und  $\Omega'$  die entsprechenden Perioden des elliptischen Integrals III. Gattung  $\bar{w}_2$ , in welches  $w_2$  übergeht.

Für das *dritte* Integrationsintervall endlich müssen wir die beiden Integrale getrennt behandeln. Den Integranden des ersten schreiben wir in zwei Factoren zerlegt:

$$(14) \quad \frac{1}{V\chi(x)} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}};$$

der erste dieser Factoren ist von  $\varepsilon$  unabhängig. Zerlegen wir nun das Integrationsintervall in zwei Theile; von  $\alpha_0$  bis  $\delta$  und von  $\delta$  bis 0, wo  $\delta$  beliebig klein angenommen werden kann, so bleibt im ersten dieser Theile (von der ersteren Grenze abgesehen) die Function unter

dem Integralzeichen stetig; im zweiten Theil des Integrationsintervalls darf man für den ersten der beiden Factoren (14) einen Mittelwerth setzen und erhält dann unter Benutzung der vorhin abgeleiteten Formel (9) dasselbe Resultat, wie wenn man unter dem Integralzeichen zur Grenze übergegangen wäre, nämlich:

$$(15) \quad \lim \omega_{13} = 2 (\bar{w}_1(0) - \bar{w}_1(\alpha_0)).$$

Das zweite Integral wird durch dieses Intervall erstreckt in der Grenze unendlich gross; um einen asymptotischen Werth für dasselbe zu erhalten, bilde man die Differenz:

$$(16) \quad \frac{1}{2} \omega_{23} - \frac{S_2(\varepsilon)}{V\chi(0)} = \int_{\alpha_0}^0 \left\{ \frac{1}{V\chi(x)} - \frac{1}{V\chi(0)} \right\} \frac{dx}{Vx(x-\varepsilon)}.$$

Indem wir die zu integrierende Function in die beiden Factoren:

$$\frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{V\chi(x)} - \frac{1}{V\chi(0)} \right\} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}}$$

zerlegen und wie oben verfahren, erhalten wir mit Rücksicht auf (6) und (9) das Resultat

$$(17) \quad \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \omega_{23} + \frac{2 \log \varepsilon}{V\chi(0)} \right\} = \frac{2 \log(-4\alpha_0)}{V\chi(0)} + 2 \{J(0) - J(\alpha_0)\};$$

darin bedeutet  $J$  das elliptische Integral:

$$\int \left\{ \frac{1}{V\chi(x)} - \frac{1}{V\chi(0)} \right\} \frac{dx}{x},$$

das in  $(0, -\sqrt{\chi(0)})^*$ , aber nicht in  $(0, \sqrt{\chi(0)})$  unendlich wird.

Die Resultate der Untersuchungen dieses Paragraphen fassen wir in folgendem Satze zusammen:

*Von unsern beiden hyperelliptischen Integralen I. Gattung reducirt sich in dem hier betrachteten Grenzfall das eine auf das elliptische Integral I. Gattung auf der Grenzfläche, indem seine Periode an  $A_1$  verschwindet, die Periode an  $B_1$  hingegen zwar einem endlichen Grenzwert sich nähert, aber aufhört Periode zu sein; das andere reducirt sich auf ein elliptisches Integral III. Gattung, indem seine Periode an  $A_1$  in die logarithmische Periode des letzteren übergeht, seine Periode an  $B_1$  aber unendlich gross wird.*

## § 5.

### Grenzwerthe der Thetamoduln beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Wir setzen die Untersuchung unseres Grenzfalles fort, indem wir zur Bildung der zweigliedrigen Periodendeterminanten übergehen. Berücksichtigen wir, dass die in den Formeln des vorigen Paragraphen weg-

\*) und ausserdem im Unendlichen auf beiden Blättern.

gelassenen Glieder mit verschwindendem  $\varepsilon$  mindestens wie  $\varepsilon \log \varepsilon$  unendlich klein werden, so erhalten wir zunächst für die *Periodendeterminanten* die folgenden Grenzwerte\*):

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} p_{12} &= \frac{2\pi i \cdot \omega}{V\chi(0)}; \\ \lim_{\varepsilon=0} p_{13} &= \frac{4\pi i}{V\chi(0)} (\bar{w}_1(0) - \bar{w}_1(\alpha_0)); \\ \lim_{\varepsilon=0} p_{14} &= \frac{2\pi i \cdot \omega'}{V\chi(0)}; \\ \lim_{\varepsilon=0} \left\{ p_{23} + \frac{2\omega \log \varepsilon}{V\chi(0)} \right\} &= \omega \left\{ \frac{2 \log(-4\alpha_0)}{V\chi(0)} + 2(J(0) - J(\alpha_0)) \right\} \\ &\quad - \Omega \{ 2\bar{w}_1(0) - 2\bar{w}_1(\alpha_0) \}; \\ \lim_{\varepsilon=0} p_{24} &= \omega \Omega' - \omega' \Omega; \\ \lim_{\varepsilon=0} \left\{ p_{34} - \frac{2\omega' \log \varepsilon}{V\chi(0)} \right\} &= -\omega' \left\{ \frac{2 \log(-4\alpha_0)}{V\chi(0)} + 2(J(0) - J(\alpha_0)) \right\} \\ &\quad + \Omega' \{ 2\bar{w}_1(0) - 2\bar{w}_1(\alpha_0) \}. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen ergeben sich folgende Grenzwerte der *Thetamoduln*:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \tau_{11} - \frac{1}{\pi i} \log \varepsilon \right\} &= -\frac{1}{\pi i} \log(-4\alpha_0) - \frac{J(0) - J(\alpha_0)}{\pi i} \cdot V\chi(0) \\ &\quad + \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{\Omega}{\omega} V\chi(0) \cdot (\bar{w}_1(0) - \bar{w}_1(\alpha_0)); \\ \lim_{\varepsilon=0} \tau_{12} &= \frac{2\bar{w}_1(0) - 2\bar{w}_1(\alpha_0)}{\omega} = \frac{\omega \Omega' - \omega' \Omega}{2\pi i \omega} V\chi(0); \\ \lim_{\varepsilon=0} \tau_{22} &= \frac{\omega'}{\omega} = \tau. \end{aligned} \right.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, wenn, wie üblich:

$$e^{\tau_{11}\pi i} = p$$

gesetzt wird, noch folgende Grenzbestimmung:

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon=0} p = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{p}{\varepsilon} = C;$$

darin bedeutet  $C$  eine sicher von Null verschiedene Constante.

Wir fassen wieder zusammen:

*In unserem Grenzfalle erleiden die Thetamoduln folgende Veränderungen:*

$\tau_{11}$  wird unendlich gross wie  $\log \varepsilon$ , und zwar so, dass  $e^{\pi i \tau_{11}}$  Null wird;

$\tau_{12}$  geht über in einen Werth des auf der Fläche  $(x, \sqrt{\chi(x)})$  zwischen den Stellen  $(0, -\sqrt{\chi(0)})$  und  $(0, \sqrt{\chi(0)})$  erstreckten elliptischen Normalintegrals erster Gattung;

\*) Wegen der Vorzeichen achte man auf die Festsetzungen betr. den Sinn der Ueberkreuzung der Periodenwege (vgl. dieser Ann. Bd. 32, p. 392).

$\tau_{22}$  geht über in die Periode  $\tau$  dieses elliptischen Normalintegrals.

Dabei verdienen zwei Umstände noch besondere Hervorhebung (der Beweis derselben ergibt sich aus der Theorie der elliptischen Functionen):

Einmal ist zu beachten, dass  $\tau_{22}$  dabei *nur* Werthe erhält, deren imaginärer Theil positiv ist, sodass die Bedingungen für die Convergenz der Thetareihen erfüllt bleiben.

Dann aber ist auch zu beachten, dass  $\tau_{22}$  noch *jeden* Werth annehmen kann, der dieser Bedingung genügt, und  $\tau_{12}$  überhaupt jeden endlichen Werth.

### § 6.

Die Grenzwerte der Thetafunctionen und ihrer Nullwerthe beim Zusammenrücken von zwei Verzweigungspunkten.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen stellen wir noch die Grenzwerte der Thetafunctionen zusammen, welche sich aus den bisher gewonnenen Resultaten sofort ergeben. Man findet nämlich für  $\lim \varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim \vartheta(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= \lim \vartheta_{12}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_3(v_2, \tau_{22}); \\ \lim \vartheta_{05}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= \lim \vartheta_{34}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_0(v_2, \tau_{22}); \\ (1) \quad \lim \vartheta_{03}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= \lim \vartheta_{45}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_2(v_2, \tau_{22}); \\ \lim \vartheta_{04}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= \lim \vartheta_{35}(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \vartheta_1(v_2, \tau_{22}); \end{aligned}$$

die 8 übrigen Thetafunctionen werden in der Grenze identisch Null. Wir können dies folgendermassen formuliren:

*Von den 16 Thetafunctionen werden bei unserem Grenzübergang diejenigen 8 identisch Null, welche zu Zerlegungen  $f = \varphi \cdot \psi$  gehören, bei welchen die Punkte  $\alpha_1, \alpha_2$  vereinigt bleiben; die 8 übrigen werden paarweise identisch, indem sie sich auf elliptische Thetafunctionen reduciren, welche nur von dem einen Argument  $v_2$  (und dem Modul  $\tau_{22}$ ) abhängen.*

Gehen wir von den Thetafunctionen weiter zu den *Th*-Functionen, so ist die erste Formel (18) zu beachten; man findet mit ihrer Hilfe, dass die den letztgenannten 8 Thetafunctionen entsprechenden *Th*-Functionen nicht in die zugehörigen elliptischen *Th*-Functionen selbst übergehen, sondern (von einer rein numerischen Constanten abgesehen) in die Producte derselben mit:

$$\sqrt[4]{\chi(0)} = c \cdot \sqrt[4]{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_5 - \alpha_1)}.$$

Die Grenzwerte der Thetanullwerthe sind, soweit sie nicht verschwinden, durch die Formeln (21) mit gegeben; für die 4 Nullwerthe

von geraden Functionen, welche verschwinden, beachte man, dass sie wie  $p^{\frac{1}{4}}$  oder, was dasselbe heisst, wie  $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$  unendlich klein werden (wie man auch aus den bekannten algebraischen Ausdrücken dieser Nullwerthe würde entnehmen können). Die Quotienten der Th-Functionen durch ihre Nullwerthe, d. h. also die Sigmafunctionen bleiben bekanntlich (vgl. Wiltheiss, dieser Ann. Bd. 31) auch im Grenzfalle endlich und von Null verschieden; in der That erhält man aus der Reihenentwicklung:

$$(2) \quad \lim p^{-\frac{1}{4}} \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} 1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{smallmatrix} \right|} (v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \\ = e^{\pi i \left( v_1 + \frac{1}{2} h_1 \right)} \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g_2 \\ h_2 \end{smallmatrix} \right|} (v_2; \tau_{22}) + e^{-\pi i \left( v_1 + \frac{1}{2} h_1 \right)} \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g_2 \\ h_2 \end{smallmatrix} \right|} (v_2; \tau_{22}).$$

Analoge Bemerkungen gelten natürlich auch für die 4 ungeraden verschwindenden Thetafunctionen.

## § 7.

### Verhalten der Integrale erster Gattung und ihrer Perioden beim Zusammenrücken von drei Verzweigungspunkten.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung des zweiten der Grenzfälle, deren Behandlung wir in Aussicht nahmen: wir lassen drei Verzweigungspunkte in der Weise zusammenrücken, dass ihr Doppelverhältniss mit einem festen vierten Punkt einer bestimmten, endlichen, von Null und Eins verschiedenen Grenze sich nähert. Wenn das in Bezug auf irgend einen vierten Punkt eintritt, so tritt es auch ein in Bezug auf jeden vierten Punkt, der der gemeinschaftlichen Grenzlage der drei ersten Punkte nicht unendlich nahe liegt; und zwar ist der Grenzwert von der Wahl dieses vierten Punktes unabhängig. Denn wenn sich  $\frac{x}{y}$  (das Doppelverhältniss von  $x, y, 0, \infty$ ) mit gegen Null convergirenden Werthen von  $x$  und  $y$  einer bestimmten Grenze nähert, so nähert sich  $\frac{x}{y} : \frac{a-x}{a-y}$  (das Doppelverhältniss von  $x, y, 0, a$ ) derselben Grenze. Wir werden übrigens im Folgenden stets annehmen, die Annäherung des Doppelverhältnisses an seinen Grenzwert geschehe so, dass wir diesen Grenzwert vor Beginn des Grenzübergangs statt des variablen Werthes in die Formeln einführen dürfen; in wie weit diese Voraussetzung wirklich eine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Untersuchung enthält, lassen wir hier unerörtert.

Dagegen enthält es den Entwicklungen von § 3 zufolge sicher keine Beschränkung, wenn wir folgende Annahmen machen: das



Querschnittsystem sei wieder das von § 1; der Punkt  $\alpha_4$  sei fest und zum Nullpunkt des Coordinatensystems gewählt;  $\alpha_3 = \varepsilon$ ,  $\alpha_5 = \lambda^2 \varepsilon$  sollen sich ihm nähern;  $\lambda^2$  sei übrigens nicht positiv reell, sodass wir nachher in der Integration auf geradem Wege nicht behindert sind. Es ist dann eben  $\lambda^2$  das Doppelverhältniss der vier Punkte  $(3, 4, 5, \infty)$ ; der getroffenen Vereinbarung zufolge behandeln wir dasselbe als von  $\varepsilon$  unabhängig.

Wir beginnen wieder mit der Untersuchung der Integrale I. Gattung; setzen wir zur Abkürzung:

$$\psi(x) = (\alpha_0 x) (\alpha_1 x) (\alpha_2 x),$$

so haben wir:

$$(1) \quad w_1 = \int \frac{\sqrt{x} dx}{V(x - \varepsilon)(x - \lambda^2 \varepsilon) \psi(x)}, \quad w_2 = \int \frac{dx}{Vx(x - \varepsilon)(x - \lambda^2 \varepsilon) \psi(x)}.$$

Bleibt der Integrationsweg dem Nullpunkt hinlänglich ferne, so können wir unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen und finden:

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon=0} u_1 = \int \frac{dx}{Vx\psi(x)}, \quad \lim_{\varepsilon=0} u_2 = \frac{dx}{xVx\psi(x)};$$

wir formuliren dieses Resultat folgendermassen:

*Von unseren beiden Integralen wird in der Grenze das eine ein elliptisches Integral I. Gattung, das andere ein solches II. Gattung mit Unstetigkeit in dem dreifachen Verzweigungspunkte. Die elliptische Riemann'sche Fläche, auf welche diese Integrale sich beziehen, hat die drei getrennt bleibenden Punkte  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  und die Grenzlage der drei zusammenrückenden Punkte  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  zu Verzweigungspunkten.*

Die Perioden dieser Integrale an den Querschnitten  $A_1, B_1$ , welche vom Nullpunkt entfernt verlaufen, können wir ebenfalls durch directen Grenzübergang bestimmen; indem wir mit  $\kappa^2$  das Doppelverhältniss  $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ , mit  $K, K'$  die Perioden des elliptischen Integrals I. Art, mit  $E, E'$  die des Integrals II. Art (2) bezeichnen, erhalten wir:

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{\kappa=0} \omega_{11} &= K(\kappa^2), & \lim_{\kappa=0} \omega_{21} &= E(\kappa^2), \\ \lim_{\kappa=0} \omega_{13} &= K'(\kappa^2), & \lim_{\kappa=0} \omega_{23} &= E'(\kappa^2). \end{aligned}$$

Die Grenzwerte der Perioden an den Querschnitten  $A_2, B_2$  bedürfen einer eingehenderen Untersuchung, die übrigens keine Schwierigkeiten bietet. In die Integrale, durch welche die Perioden an  $A_2$  dargestellt werden, führen wir eine neue Integrationsvariable  $y = \varepsilon x$  ein; dadurch erhalten wir:

$$\omega_{14} = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\psi(x)}} = 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\lambda^2)\psi(\varepsilon y)}};$$

$$\omega_{24} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-\varepsilon)(x-\lambda^2\varepsilon)\psi(x)}} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\lambda^2)\psi(\varepsilon y)}}.$$

Damit sind die Integrationsgrenzen constant geworden; wir dürfen unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen und erhalten unter Benutzung einer ähnlichen Bezeichnung wie oben:

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{\omega_{14}}{\sqrt{\varepsilon}} = E'(\lambda^2), \quad \lim_{\varepsilon=0} (\omega_{24}\sqrt{\varepsilon}) = K'(\lambda^2); \text{ und ganz ebenso:}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\omega_{12}}{\sqrt{\varepsilon}} = E(\lambda^2), \quad \lim_{\varepsilon=0} (\omega_{22}\sqrt{\varepsilon}) = K(\lambda^2).$$

Wir begleiten diese Formeln mit den Worten:

*Die Perioden von  $w_1$  am zweiten und vierten Querschnitt werden in der Grenze unendlich klein wie die Producte von  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  in elliptische Perioden II. Gattung des Moduls  $\lambda^2$ , die Perioden von  $w_2$  an denselben Querschnitten unendlich gross wie die Producte von  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  in elliptische Perioden I. Gattung desselben Moduls.*

### § 8.

Grenzwerthe der Thetamoduln und Thetafunctionen beim Zusammenrücken von drei Verzweigungspunkten.

Um nun die Grenzwerthe der Thetamoduln zu erhalten, bilden wir zuerst die der Periodendeterminanten. Wir erhalten ohne Weiteres:

$$(1) \quad \begin{aligned} \lim (p_{12}\sqrt{\varepsilon}) &= K(x^2) K(\lambda^2); \\ \lim p_{13} &= K(x^2) E'(x^2) - E(x^2) K'(x^2) = \frac{4\pi i}{\psi(0)}; \\ \lim (p_{14}\sqrt{\varepsilon}) &= K(x^2) K'(\lambda^2); \\ \lim (p_{23}\sqrt{\varepsilon}) &= -K(x^2) K'(\lambda^2); \\ \lim p_{24} &= -K(\lambda^2) E'(\lambda^2) + E(\lambda^2) K'(\lambda^2) = \frac{-4\pi i}{\psi(0)}; \\ \lim (p_{34}\sqrt{\varepsilon}) &= K(x^2) K'(\lambda^2) \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(2) \quad \begin{aligned} \lim \tau_{11} &= \tau(x^2), & \lim \tau_{22} &= \tau(\lambda^2), \\ \lim \frac{\tau_{12}}{\sqrt{\varepsilon}} &= \frac{4\pi i}{\psi(0) K(x^2) K(\lambda^2)}, & \lim \tau_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Von den Thetamoduln verschwindet also in unserem Falle  $\tau_{12}$  und zwar wie  $\sqrt{\varepsilon}$ ;  $\tau_{11}$  und  $\tau_{22}$  gehen über in die zu den Moduln  $\kappa^2$ , bezw.  $\lambda^2$  gehörigen elliptischen Periodenverhältnisse  $\tau(\kappa^2)$ ,  $\tau(\lambda^2)$ , können also noch beliebige Werthe mit positiv imaginären Bestandtheilen annehmen.

Nun ist längst bekannt, was unter dieser Voraussetzung  $\tau_{12} = 0$  aus den Thetafunctionen wird: neun von den geraden gehen über in Producte aus je zwei geraden elliptischen Thetafunctionen  $\vartheta(v_1, \tau_{11})$  und  $\vartheta(v_2, \tau_{22})$ , die sechs ungeraden gehen über in die drei Producte aus dem ungeraden  $\vartheta(v_1, \tau_{11})$  und je einem der drei geraden  $\vartheta(v_2, \tau_{22})$  und in die drei Producte aus dem ungeraden  $\vartheta(v_2, \tau_{22})$  und je einem der drei geraden  $\vartheta(v_1, \tau_{11})$ ; das zehnte gerade Theta (wie leicht zu sehen, dasjenige, welches zur Zerlegung 012, 345) gehört) geht über in das Product der beiden ungeraden elliptischen Thetafunctionen  $\vartheta_1(v_1, \tau_{11})$  und  $\vartheta_1(v_2, \tau_{22})$ . Der Nullwerth des letzteren verschwindet also, und zwar wie  $\tau_{12}$  oder  $\sqrt{\varepsilon}$ .\*)

Die *Th*-Functionen verschwinden bei diesem Grenzübergang sämmtlich identisch, die Sigmafunctionen bleiben endlich und von Null verschieden.

Insbesondere sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass von den 10 *Th*-Nullwerthen, wie die directe Betrachtung ihrer algebraischen Ausdrücke übereinstimmend mit der Verfolgung des Grenzübergangs durch die Thetafunctionen hindurch ergibt, neun je wie  $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ , der zehnte wie  $\varepsilon^{\frac{3}{4}}$  unendlich klein werden.

## § 9.

### Ein Hilfssatz.

Da für  $\tau_{12} = 0$  nur ein Thetanullwerth verschwindet, die übrigen neun von Null verschieden bleiben, so könnte man vermuthen wollen, jede ganze Function der Thetanullwerthe, welche für  $\tau_{12} = 0$  verschwindet, müsse durch jenen einen Thetanullwerth theilbar sein. Indessen zeigen einfache Beispiele\*\*), dass diese Vermuthung irrig sein würde. Dagegen gilt der folgende Satz, von welchem im III. Abschnitt Gebrauch zu machen sein wird:

*Eine ganze Function der Quadrate der zehn Thetanullwerthe, welche für  $\tau_{12} = 0$  verschwindet, lässt sich umformen in das Product*

\*) Uebrigens zeigen die bekannten Formeln für die Richelot'schen Moduln (vergl. etwa Krause p. 36), dass auch umgekehrt stets 3 Wurzeln von  $f_6$  in der hier betrachteten Weise einander gleich werden müssen, wenn ein und nur ein Thetanullwerth verschwinden, die übrigen neun endlich bleiben sollen.

\*\*) Wie  $\vartheta_{12}^3 \vartheta_{05} + \vartheta_{01}^3 \vartheta_{25} - \vartheta^3 \vartheta_{34}$ .

aus  $\vartheta_{14}^2$  und einer andern ganzen Function der Quadrate der Thetanullwerthe — erforderlichen Falls unter Benutzung der zwischen den Thetanullwerthen bestehenden Relationen.

Zum Beweis dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass  $\vartheta_{14}$  in der vorgelegten Function überhaupt nicht auftritt. Die neun übrigen gehen über in die neun Producte:

$$(1) \quad x_i y_k, \quad i, k = 0, 2, 3$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(2) \quad x_i = \Theta_i^2(\tau_{11}), \quad y_i = \Theta_i^2(\tau_{22})$$

unter  $\Theta_0, \Theta_2, \Theta_3$  die Nullwerthe der 3 geraden elliptischen Thetafunctionen verstanden. Wir führen den Beweis dann so, dass wir zunächst alle diejenigen Functionen der 9 Producte (29) aufzählen, welche verschwinden, wenn die  $x, y$  die in (30) angegebene Bedeutung haben; dann ersetzen wir in diesen Functionen die  $x_i x_k$  durch die entsprechenden Thetanullwerthquadrate und zeigen, dass die so entstehenden Functionen der letzteren vermöge der Thetarelationen theils verschwinden, auch wenn  $\tau_{12}$  nicht Null ist, theils durch  $\vartheta_{14}^4$  theilbar sind.

Die Ausführung gestaltet sich nun folgendermassen. Zwischen den elliptischen Thetanullwerthen besteht nur die eine Relation:

$$(3) \quad \Theta_0^4 + \Theta_2^4 = \Theta_3^4,$$

wir haben also, wenn wir uns geometrischer Redeweise bedienen, zunächst die Aufgabe vor uns:

*Man soll die allgemeinste ganze Function zweier Punkte  $x, y$  der Ebene angeben, welche verschwindet, sobald beide auf die Curve:*

$$(4) \quad F(x) \equiv x_0^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

*rücken.*

Da diese Curve vom Geschlechte Null ist, so erhält man leicht durch quadratische Transformation die Antwort:

*Die allgemeinste solche Function hat die Form:*

$$(5) \quad g\left(\begin{smallmatrix} n-2 \\ x \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} n \\ y \end{smallmatrix}\right) \cdot F(x) + h\left(\begin{smallmatrix} n \\ x \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} n-2 \\ y \end{smallmatrix}\right) F(y),$$

*unter  $g, h$  ganze homogene Functionen der angegebenen Grade in den  $x$ , bzw.  $y$  verstanden.*

Speciell folgt hieraus:

*Jede ganze Function  $n^{\text{ten}}$  Grades der 9 Producte (1), welche verschwindet, sobald man die  $x, y$  durch die unter (2) angegebenen Werthe ersetzt, lässt sich durch identische Umformung in die Gestalt setzen:*



abkürzungsweise durch:

$$\omega' = R_i(\omega);$$

Zusammensetzung solcher Substitutionen sei so bezeichnet, dass aus:

$$\omega'' = R(\omega'), \quad \omega' = S(\omega)$$

folgt:

$$\omega'' = R[S(\omega)]$$

oder einfacher geschrieben:

$$(2) \quad \omega'' = RS(\omega).$$

Die specielle Transformation  $n^{\text{ten}}$  Grades:

$$\bar{\omega}_1 = n\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = n\omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3, \quad \bar{\omega}_4 = \omega_4$$

sei durch:

$$\bar{\omega}_1 = N(\omega_1),$$

die allgemeinere:

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= n(\alpha_1^{(i)}\omega_1 + \alpha_2^{(i)}\omega_2 + \alpha_3^{(i)}\omega_3 + \alpha_4^{(i)}\omega_4), \\ \bar{\omega}_2 &= n(\beta_1^{(i)}\omega_1 + \beta_2^{(i)}\omega_2 + \beta_3^{(i)}\omega_3 + \beta_4^{(i)}\omega_4), \\ \bar{\omega}_3 &= \gamma_1^{(i)}\omega_1 + \gamma_2^{(i)}\omega_2 + \gamma_3^{(i)}\omega_3 + \gamma_4^{(i)}\omega_4, \\ \bar{\omega}_4 &= \delta_1^{(i)}\omega_1 + \delta_2^{(i)}\omega_2 + \delta_3^{(i)}\omega_3 + \delta_4^{(i)}\omega_4 \end{aligned}$$

sei dem entsprechend durch:

$$\bar{\omega} = NR_i(\omega)$$

oder kürzer durch:

$$\bar{\omega} = R_i^{(n)}(\omega)$$

bezeichnet. Die erwähnte Modification der Repräsentanten besteht dann in folgendem:

*Die Repräsentanten  $R_i^{(n)}$  sind so zu wählen, dass die ihnen zugeordneten linearen Transformationen  $R_i$  nach dem Modul  $s$  zur Identität congruent werden.*

Die Coefficientenschemata der so modificirten „neuen“ Repräsentanten (Grundz. § 50) nehmen dabei folgende Gestalt an:

I. Typus:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ k's & l's & 1 & 0 \\ l's & m's & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

II. Typus:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} n\alpha & -n\alpha l's & n\beta & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ \gamma & -\gamma l's & n\delta & 0 \\ 0 & k's & l's & 1 \end{pmatrix};$$

III. Typus:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\alpha & 0 & n\beta \\ k's & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & n\delta \end{pmatrix};$$

IV. Typus:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} n\alpha & 0 & n\beta & 0 \\ 0 & n\alpha & 0 & n\beta \\ \gamma & 0 & n\delta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & n\delta \end{pmatrix}.$$

Die verschiedenen Repräsentanten der drei ersten Typen werden erhalten, indem man die ganzen Zahlen  $k', l', m'$  unabhängig von einander je ein vollständiges Restsystem nach dem Modul  $n$  durchlaufen lässt. Die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  haben den Bedingungen zu genügen:

$$(8) \quad \alpha \equiv 1; \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad n\delta \equiv 1; \quad (\text{mod. } s), \\ n\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

welches der diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme man wählt, ist ganz gleichgültig.

Die Ueberführung der nicht modificirten neuen Repräsentanten in die modificirten neuen Repräsentanten möge beispielsweise am II. Typus erläutert werden; für die übrigen Typen gestaltet sie sich ganz analog. Seien mit  $\bar{\omega}'$  die zu ersteren, mit  $\omega'$  die zu letzteren gehörenden Perioden bezeichnet, so liefert die Vergleichung der Formeln:

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= n(\alpha\omega_1 - \alpha l's\omega_2 + \beta\omega_3), \\ \bar{\omega}_2' &= n\omega_2, \\ \bar{\omega}_3' &= \gamma\omega_1 - \gamma l's\omega_2 + n\delta\omega_3, \\ \bar{\omega}_4' &= k's\omega_2 + l's\omega_3 + \omega_4 \end{aligned}$$

mit dem auf die  $\bar{\omega}'$  bezüglichen\*) die nachstehenden Relationen zwischen den  $\omega'$  und den  $\bar{\omega}'$ :

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1' &= -\beta\bar{\omega}_1' + \alpha(l-l's)\bar{\omega}_2' + n\alpha\bar{\omega}_3', \\ \bar{\omega}_2' &= \bar{\omega}_2', \\ \bar{\omega}_3' &= -\delta\bar{\omega}_1' + \gamma \frac{l-l's}{n} \bar{\omega}_2' + \gamma\bar{\omega}_3', \\ \bar{\omega}_4' &= \frac{l-l's}{n} \bar{\omega}_1' + \frac{-k+k's}{n} \bar{\omega}_2' + \bar{\omega}_4'. \end{aligned}$$

Der durch die Zahlen  $k', l'$  charakterisirte modificirte neue Repräsentant des II. Typus ist also zu dem durch die Zahlen  $k, l$  charakte-

\*) Grundz. Gleichgen (167) und (183).

risirten nicht modificirten neuen Repräsentanten desselben Typus äquivalent, wenn  $k, l$  mit  $k', l'$  durch die Congruenzen verknüpft sind:

$$(11) \quad k \equiv k's, \quad l \equiv l's. \quad (\text{mod. } n).$$

Denn dann und nur dann stellen die Gleichungen (10) eine lineare Periodentransformation vor.

Die *modificirten Hermite'schen Repräsentanten*\*) werden folgende Coefficientenschemata besitzen:

I. Typus: wie oben;

II. Typus:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 1 & -l's & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & k's & l's & 1 \end{pmatrix};$$

III. Typus:

$$(13) \quad \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k's & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix};$$

IV. Typus:

$$(14) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Der Uebergang von den *modificirten neuen Repräsentanten* ( $\overline{\omega}'$ ) zu den *modificirten Hermite'schen* ( $\overline{\omega}$ ) geschieht durch die Substitutionen:

I. Typus:

$$(15) \quad \overline{\omega}_1' = \overline{\omega}_1, \quad \overline{\omega}_2' = \overline{\omega}_2, \quad \overline{\omega}_3' = \overline{\omega}_3, \quad \overline{\omega}_4' = \overline{\omega}_4;$$

II. Typus:

$$(16) \quad \begin{aligned} \overline{\omega}_1' &= n\alpha\overline{\omega}_1 + \beta\overline{\omega}_3, & \overline{\omega}_2' &= \overline{\omega}_2, \\ \overline{\omega}_3' &= \gamma\overline{\omega}_1 + \delta\overline{\omega}_3, & \overline{\omega}_4' &= \overline{\omega}_4; \end{aligned}$$

III. Typus:

$$(17) \quad \begin{aligned} \overline{\omega}_1' &= \overline{\omega}_1, & \overline{\omega}_2' &= n\alpha\overline{\omega}_2 + \beta\overline{\omega}_4, \\ \overline{\omega}_3' &= \overline{\omega}_3, & \overline{\omega}_4' &= \gamma\overline{\omega}_2 + \delta\overline{\omega}_4; \end{aligned}$$

IV. Typus:

$$(18) \quad \begin{aligned} \overline{\omega}_1' &= n\alpha\overline{\omega}_1 + \beta\overline{\omega}_3, & \overline{\omega}_2' &= n\alpha\overline{\omega}_2 + \beta\overline{\omega}_4, \\ \overline{\omega}_3' &= \gamma\overline{\omega}_1 + \delta\overline{\omega}_3, & \overline{\omega}_4' &= \gamma\overline{\omega}_2 + \delta\overline{\omega}_4. \end{aligned}$$

---

\*) Vgl. für den Fall  $s=8$  Königsberger, Cr. J. Bd. 67, (1867), p. 99.



Ausdrücklich sei dabei hervorgehoben, dass, wie aus den Congruenzen (8) hervorgeht, die Substitutionen (16), (17), (18) nur im Falle

$$n \equiv 1 \pmod{s}$$

modulo  $s$  zur Identität congruent sind.

## § 11.

### Anwendung dieser modificirten Repräsentanten.

Es sei  $t(\omega)$  der „ursprüngliche“ Werth einer zu transformirenden Modulform  $s^{\text{ter}}$  Stufe; irgend einer der „transformirten“ Werthe derselben wird dann mit:

$$t(NR_i \omega)$$

zu bezeichnen sein (vgl. pag. 392). Werden nun die *ursprünglichen* Perioden  $\omega$  irgend einer linearen Transformation:

$$(1) \quad \omega' = P(\omega)$$

unterworfen, so geht jener Werth über in:

$$t(NR_i P \omega).$$

Nun bilden aber nach Voraussetzung die  $NR_i$  ein vollständiges Repräsentantensystem; das mit  $NR_i P(\omega)$  bezeichnete Periodensystem wird daher äquivalent sein mit dem eines andern Repräsentanten  $NR_j$ , sodass eine Identität der Form besteht:

$$(2) \quad NR_i P = V_j NR_j,$$

in welcher  $V_j$  eine lineare Periodentransformation der transformirten Perioden bedeutet.

Nun behaupten wir:

*Sind die Repräsentanten so normirt, wie es im vorigen Paragraphen geschehen ist, so werden für jedes bestimmte  $P$  alle diese  $V_j$  zu einander congruent (mod.  $s$ ).*

In der That:  $V_j NR_j$  wird nur dann wieder auf die Form (3) des § 10 gebracht werden können, wie doch die Identität (20) verlangt, wenn  $V_j$  die Form hat:

$$(3) \quad V_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & n a_{j3} & n a_{j4} \\ b_{j1} & b_{j2} & n b_{j3} & n b_{j4} \\ c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} & c_{j4} \\ d_{j1} & d_{j2} & d_{j3} & d_{j4} \end{pmatrix}.$$

Dann aber wird es gleichgültig sein, ob man das Periodensystem  $R_j(\omega)$  zuerst der Operation  $N$  unterwirft und hierauf die lineare Transformation  $V_j$  anwendet, oder ob man jene Operation an zweiter Stelle ausführt, nachdem man vorher eine lineare Transformation



modulo  $s$  zur Identität congruent sind, so werden nach (7) auch alle  $U_j$  und in Folge dessen auch alle  $V_j$  modulo  $s$  zur Identität congruent. Daráus ergibt sich der weitere Satz:

*Bei den Operationen der Principaluntergruppe  $s^{\text{ter}}$  Stufe vertauschen sich die Formen jeder Colonne der Tabelle (8) nur unter sich; die Art der Vertauschung ist für alle Columnen dieselbe.*

Die erste Hälfte dieses Satzes besagt aber\*) nichts anderes als:

*Die Formen jeder Colonne der Tabelle (8) genügen einer algebraischen Gleichung — Multiplicatorgleichung — des Grades*

$$n^3 + n^2 + n + 1,$$

*deren Coefficienten Formen  $s^{\text{ter}}$  Stufe sind.*

Ein bemerkenswerther Umstand tritt noch ein, wenn die Form  $t$  der Stufe  $\delta$  (unter  $\delta$  einen Theiler von  $s$  verstanden) in Bezug auf Einheitswurzeln adjungirt und:

$$(9) \quad n \equiv 1 \pmod{\frac{s}{\delta}}$$

ist. Alsdann ist nämlich stets:

$$(10) \quad V_j \equiv U_j \pmod{s}$$

wenn  $U_j$  mod.  $\delta$  zur Identität congruent ist; denn z. B. aus  $n \equiv 1 \pmod{\frac{s}{\delta}}$  und  $a_{j3} \equiv 0 \pmod{\delta}$  folgt  $na_{j3} \equiv a_{j3} \pmod{s}$ .

Werden nun die ursprünglichen Perioden einer Transformation  $P$  unterworfen, welche mod.  $\delta$  zur Identität congruent ist, also den Zutritt einer bestimmten Einheitswurzel  $\varepsilon$  zu  $t(\omega)$  bewirkt, so wird (immer unter der Voraussetzung, dass die Repräsentanten mod.  $s$  wie oben modificirt sind) in Folge von (7) und (10):

$$V_j \equiv P \pmod{s};$$

es geht also jedes  $t(R_i^{(*)}\omega)$  über in  $\varepsilon t(R_j^{(*)}\omega)$ , wo  $\varepsilon$  dieselbe Einheitswurzel ist, welche vermöge  $P$  zu  $t(\omega)$  trat. Daraus folgt, dass die Werthe von:

$$(10) \quad \frac{t(\overline{\omega})}{t(\omega)}$$

bei diesen Operationen ohne Zutritt von Einheitswurzeln sich nur unter einander permutiren, m. a. W. es folgt der Satz:

*Auch wenn  $t(\omega)$  nicht selbst zur Stufe  $\delta$  gehört, sondern zur Stufe  $s$  (unter  $s$  ein Vielfaches von  $\delta$  verstanden), der Stufe  $\delta$  aber in Bezug auf Einheitswurzeln adjungirt ist, genügt  $t(\overline{\omega}):t(\omega)$  im Rationalitätsbereich der Stufe  $\delta$  einer Gleichung des Grades  $n^3 + n^2 + n + 1$ , vorausgesetzt, dass der Transformationsgrad  $n \equiv 1 \pmod{\frac{s}{\delta}}$  ist.*

\*) Vgl. Grundz. § 51.

## IV.

Darstellung der rationalen symmetrischen Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen durch die zugehörigen hyperelliptischen Thetanullwerthe.

## § 12.

Die rationalen symmetrischen Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen.

Unter den verschiedenen Rationalitätsbereichen II. Stufe ist Grundz. § 26, II derjenige erwähnt worden, welcher sich auf die Zerlegung der Grundform  $f_6$  in zwei cubische Factoren  $\varphi_3, \psi_3$  stützt, in dem Sinne, dass nicht diese Factoren selbst, sondern nur solche Functionen ihrer Coefficienten, welche bei Vertauschung der beiden Factoren sich nicht ändern, als rational bekannt gelten sollen. Wir knüpfen an diesen Rationalitätsbereich an, indem wir uns die Aufgabe stellen, das *volle System seiner „reinen“ Modulformen* zu finden. Dieselben sind nichts anderes als diejenigen rationalen ganzen Simultaninvarianten von  $\varphi$  und  $\psi$ , welche bei Vertauschung von  $\varphi$  mit  $\psi$  ihren Werth nicht ändern. Eine solche Invariante soll im folgenden kurz als *symmetrisch* bezeichnet und unter ihrem *Grad* ohne nähere Bezeichnung ihr Grad in den Coefficienten jeder einzelnen der beiden Formen  $\varphi, \psi$  verstanden werden.

Die Aufstellung des vollen Systems dieser symmetrischen Invarianten kann damit begonnen werden, dass man aus den Formen des bekannten vollen Systems der rationalen ganzen Simultaninvarianten solche Formen bildet, welche die verlangte Symmetrieeigenschaft besitzen. Jenes System nun besteht nach den Untersuchungen von Clebsch\*) aus folgenden sieben Formen:

a) den beiden Discriminanten\*\*):

$$(1) \quad R = \frac{1}{2} (\varphi \varphi')^2 (\varphi'' \varphi''')^2 (\varphi \varphi'') (\varphi' \varphi'''),$$

$$(2) \quad P = \frac{1}{2} (\psi \psi')^2 (\psi'' \psi''')^2 (\psi \psi'') (\psi' \psi'''),$$

---

\*) Binäre Formen p. 221 ff. — Die Zahlencoefficienten der einzelnen Formen sind im Texte (zum Theil abweichend von Clebsch) so normirt, dass die Invarianten und die Coefficienten der mit Binomialcoefficienten geschriebenen Co-varianten ganze *ganzzahlige* Functionen der Coefficienten der mit Binomialcoefficienten geschriebenen Formen selbst werden.

\*\*) Bei Cl. heissen diese Formen  $\frac{1}{2} R, \frac{1}{2} P$ .

b) der bilinearen Invariante:

$$(3) \quad J = (\varphi \psi)^3;$$

c) vier Formen, welche aus den zweiten Ueberschiebungen:

$$(4) \quad \Delta = (\varphi \varphi')^2 \varphi_x \varphi'_x, \quad \Theta = 2(\varphi \psi)^2 \varphi_x \psi_x^*, \quad \nabla = (\psi \psi')^2 \psi_x \psi'_x$$

erhalten werden, nämlich:

$$(5) \quad S = (\Theta \Delta)^2, \quad \Sigma = (\Theta \nabla)^2, \quad T = \frac{1}{2}(\Delta \nabla)^2 = \frac{1}{8}(\Theta \Theta)^2 + \frac{1}{4}J^2.$$

$$(6) \quad \Omega = \frac{1}{4}(\Theta \Delta)(\Theta \nabla)(\Delta \nabla)^{**}.$$

Diese sieben Formen sind durch zwei Syzygien verbunden, welche  $\Omega^2$  und  $\Omega J$  durch die übrigen Formen des Systems ausdrücken.

Für die hier zu machenden Anwendungen des Formensystems scheint übrigens die Form  $\Omega$  zweckmässigerweise durch die *Resultante*  $\Re$  von  $\varphi$  und  $\psi$  ersetzt zu werden, welche mit ihr durch die Relation verbunden ist\*\*\*):

$$(7) \quad \Re = J^3 - 27\Omega.$$

Von diesen Formen ist nun allein  $T$  eine symmetrische Invariante; sie wird daher zunächst beizubehalten sein. Die Formen  $\Im$  und  $\Re$  sind *alternirend*, d. h. sie ändern ihr Vorzeichen bei Vertauschung von  $\varphi$  mit  $\psi$ ; es werden also:

$$J^2, J\Re, \Re^2$$

symmetrisch sein.  $R$  und  $P$ ,  $S$  und  $\Sigma$  gehen bei Vertauschung von  $\varphi$  und  $\psi$  in einander über, also sind auch:

$$RP, S\Sigma, PS^2 + R\Sigma^2$$

symmetrisch und  $PS^2 - R\Sigma^2$  alternirend, also:

$$J(PS^2 - R\Sigma^2), \Re(PS^2 - R\Sigma^2)$$

symmetrisch.

Nun kann gezeigt werden, dass sich jede rationale ganze symmetrische Invariante von  $\varphi$  und  $\psi$  durch die neun gefundenen Invarianten rational und ganz ausdrücken lässt. Denn nach dem, was über das allgemeine Formensystem von  $\varphi$  und  $\psi$  bekannt ist, ist jede Simultaninvariante dieser Formen eine Summe von Gliedern folgender Gestalt

$$(8) \quad J^\alpha T^\beta \Re^\gamma R^\delta P^\epsilon S^\zeta \Sigma^\eta.$$

Soll die Invariante symmetrisch sein, so muss vor allem ihr Grad in den Coefficienten von  $\varphi$  ebenso gross sein als der in den Coefficienten von  $\psi$ ; es muss also:

\*) Bei Cl.  $2\Theta$ .

\*\*) Bei Cl.  $2S, 2\Sigma, 2T, \frac{1}{2}\Omega$ .

\*\*\*) Cl. p. 403.

$$\eta - \xi = 2(\delta - \varepsilon)$$

sein. Sei jetzt z. B.  $\varepsilon \leq \delta$  (der Fall  $\varepsilon \geq \delta$  erledigt sich ganz ebenso), so trenne man von (8) die Factoren:

$$J^\alpha, T^\beta, \Re^\gamma, (S\Sigma)^\xi, (RP)^\varepsilon$$

ab; dann bleibt:

$$R^{\delta-\varepsilon} \Sigma^{\eta-\xi} = (R\Sigma^2)^{\delta-\varepsilon}$$

zurück. Da nun alle abgetrennten Factoren symmetrisch oder alternirend sind, so muss, wenn die Invariante symmetrisch sein soll, das Product dieser andern Factoren auch mit

$$\pm (PS^2)^{\delta-\varepsilon}$$

multiplicirt in ihr als Summand vorkommen. Aber

$$(PS^2)^{\delta-\varepsilon} \pm (R\Sigma^2)^{\delta-\varepsilon},$$

ist ganze Function von:

$$RP \cdot S\Sigma \text{ und } PS^2 \pm R\Sigma^2.$$

Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Uebrigens lassen sich von den neun eingeführten Formen noch zwei ausscheiden, wie die oben erwähnten Syzygien lehren. Es scheint jedoch bequemer zu sein,  $\Re J$  und  $\Re^2$  beizubehalten und dafür etwa  $S\Sigma$  und  $R\Sigma^2 \pm PS^2$  fortzulassen. Thun wir das, so können wir das Resultat dieser Ueberlegungen folgendermassen aussprechen, indem wir zugleich eigene Zeichen für unsere Formen einführen:

*Das volle System der symmetrischen rationalen ganzen Invarianten von zwei binären cubischen Formen besteht aus folgenden sieben Bildungen:*

*zwei Formen zweiten Grades:*

$$(9) \quad A = J^2; \quad T;$$

*zwei Formen vierten Grades:*

$$(10) \quad D = RP; \quad E = \Re J;$$

*einer Form sechsten Grades:*

$$(11) \quad Z = \Re^2;$$

*einer Form siebenten Grades:*

$$(12) \quad K = J \cdot (PS^2 - R\Sigma^2);$$

*und einer Form neunten Grades:*

$$(13) \quad A = \Re \cdot (PS^2 - R\Sigma^2).$$

Diese sieben Formen sind durch vier Syzygien verbunden nämlich:

$$AZ = E^2,$$

$$(14) \quad K^2 = A(G_6^2 - 4DG_4^2),$$

$$KA = E(G_6^2 - 4DG_4^2),$$

$$A^2 = Z(G_6^2 - 4DG_4^2);$$

dabei bedeutet  $G_4$  eine ganze Function von  $A, T, D, E$ ,  $G_6$  eine solche

von  $A, T, D, E, Z$ ; die Indices 4, 6 bezeichnen den Grad dieser Functionen in den Coefficienten jeder der beiden Grundformen.

Von diesen vier Relationen ist eine und nur eine eine Folge der andern, sodass, wie es sein muss, vier von einander algebraisch unabhängige Invarianten bleiben und weitere Relationen zwischen den Formen unseres Systems nicht existiren können.

### § 13.

#### Ausdrücke der Invarianten durch die Thetanullwerthe.

Für manche Zwecke ist es wünschenswerth, die Ausdrücke dieser Invarianten durch die Theta- oder die Th-Nullwerthe des zugehörigen hyperelliptischen Gebildes zu besitzen. Dieselben können nach der von Herrn Bolza\*) zunächst für die Invarianten I. Stufe entwickelten Methode auf folgendem Wege erhalten werden:

Sei etwa, um an eine bestimmte Zerlegung anzuknüpfen:

$$(1) \quad \varphi_x^3 = (\alpha^{(0)}x) (\alpha^{(2)}x) (\alpha^{(4)}x), \quad \psi_x^3 = (\alpha^{(1)}x) (\alpha^{(3)}x) (\alpha^{(5)}x).$$

Man bringe zunächst durch eine lineare Substitution die beiden Formen auf die Normalformen:

$$(2) \quad \varphi_x^3 = C \prod_{i=0,2,4} (\vartheta_i^{(1)}y_1 + \vartheta_i^{(2)}y_2), \quad \psi_x^3 = C^{-1} \prod_{i=1,3,5} (\vartheta_i^{(1)}y_1 + \vartheta_i^{(2)}y_2),$$

in welchen  $y_1, y_2$  die neuen Variabeln,  $\vartheta_i^{(1)}, \vartheta_i^{(2)}$  die Nullwerthe der nach  $v_1, v_2$  genommenen ersten Differentialquotienten der sechs ungeraden Thetafunctionen\*\*),  $C$  eine Constante bedeutet, die aus allen Functionen herausfällt, welche die Coefficienten von  $\varphi$  und von  $\psi$  in gleichem Grade enthalten. Alsdann drücke man in bekannter Weise die Simultaninvarianten dieser Normalformen aus durch die Determinanten ihrer Linearfactoren, also durch die Determinanten:

$$(3) \quad \vartheta_i^{(1)} \vartheta_k^{(2)} - \vartheta_k^{(1)} \vartheta_i^{(2)}.$$

Die *Rosenhain'schen Differentialformeln* gestatten dann, diese Determinanten durch Nullwerthe gerader Thetafunctionen auszudrücken; damit ist für die Invarianten der Normalformen (2) die verlangte Darstellung in der That gewonnen, abgesehen von einer Potenz von  $C$ , die nur bei solchen Invarianten nicht auftritt, welche in den Coefficienten von  $\varphi$  und  $\psi$  von gleichem Grade sind. Um diese Darstellung auch für die allgemeinen Formen (1) zu erreichen, hat man

\*) Math. Ann. Bd. 30, p. 478, (1887).

\*\*) Die hier für den Augenblick benutzte abkürzende Bezeichnung der ungeraden Thetafunctionen wird in die des Herrn Staude dadurch übergeführt, dass man jeden geraden Index durch die beiden andern geraden, jeden ungeraden durch die beiden andern ungeraden ersetzt.

nur noch mit einer geeigneten Potenz der Determinante derjenigen Substitution zu multipliciren, welche die allgemeinen Formen (1) in die Normalformen (2) überführt. Diese Determinante ist aber:

$$(3) \quad \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{4} p_{12} \prod_{\alpha=1}^{10} \vartheta_{\alpha}},$$

das Product erstreckt über alle 10 geraden Thetafunctionen.

Führt man hier statt der  $\vartheta$  die Th ein, so fallen die Periodendeterminante und  $\pi$  weg und man kann das Resultat folgendermassen aussprechen:

*Jede ganze Invariante  $g^{\text{ten}}$  Grades von  $f$ , welche in den Coefficienten der Linearfactoren von  $f$  rational ist, lässt sich durch die Nullwerthe der 10 geraden Th-Functionen in Gestalt eines Bruches darstellen. Der Zähler dieses Bruches ist eine ganze rationale Function  $(12g)^{\text{ten}}$  Grades dieser Th-Nullwerthe, der Nenner die  $g^{\text{te}}$  Potenz ihres Productes.*

Wir knüpfen hieran sogleich die umgekehrte Frage: *welche ganze Functionen der Th-Nullwerthe lassen sich rational durch die Determinanten  $(\alpha^{(i)} \alpha^{(k)})$  ausdrücken?* Das wird nur dann der Fall sein können, wenn jedes der einzelnen Producte, aus welchen eine solche Function sich additiv zusammensetzt, dieselbe Eigenschaft hat. Soll aber\*):

$$(4) \quad \Delta^{\alpha} \Delta_{45}^{\beta} \Delta_{41}^{\gamma} \Delta_{43}^{\delta} \Delta_{05}^{\varepsilon} \Delta_{01}^{\zeta} \Delta_{03}^{\eta} \Delta_{25}^{\kappa} \Delta_{21}^{\lambda} \Delta_{23}^{\mu}$$

die Determinante (02) (d. i.  $\alpha^{(0)} \alpha^{(2)}$ ) nur rational enthalten, so muss  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  durch 4 theilbar sein; und machen wir denselben Schluss für die übrigen Determinanten, so erhalten wir 15 Congruenzen, von welchen die folgenden 6 hier angegeben seien:

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} (02) \dots \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0, \\ (24) \dots \alpha + \varepsilon + \zeta + \eta \equiv 0, \\ (13) \dots \alpha + \beta + \varepsilon + \kappa \equiv 0, \\ (35) \dots \alpha + \gamma + \zeta + \lambda \equiv 0, \\ (51) \dots \alpha + \delta + \eta + \mu \equiv 0, \\ (45) \dots \gamma + \delta + \varepsilon + \kappa \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{4}.$$

Aus den mit (02), (13) und (45) bezeichneten Congruenzen folgt zunächst:

$$\alpha + \beta \equiv 0, \quad \gamma + \delta \equiv 0, \quad \varepsilon + \kappa \equiv 0 \pmod{2}$$

und in gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Summe je zweier unserer Exponenten gerade sein muss. Wir haben demnach als erstes Resultat:

*Ein Product der Form (4) kann nur dann eine rationale Function*

\*)  $\Delta$  sei der Kürze halber als Bezeichnung des Th-Nullwerths gebraucht.



der  $(\alpha^{(i)} \alpha^{(k)})$  sein, wenn die Exponenten entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind.

In der That ist das Product aller 10 Th-Nullwerthe rational in den  $(\alpha^{(i)} \alpha^{(k)})$ , nämlich gleich dem Product von ihnen allen; heben wir es, wo es vorkommt, heraus, so haben wir nur noch mit solchen Producten der Form (4) zu thun, in welchen alle Exponenten gerade sind. Da ferner die vierten Potenzen der einzelnen Th-Nullwerthe rational in den  $(\alpha^{(i)} \alpha^{(k)})$  sind, so brauchen wir nur noch die Frage zu beantworten, wie unsere Congruenzen durch Werthe befriedigt werden können, welche theils 0, theils 2 sind. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

I. In *keiner* der Congruenzen seien alle 4 Exponenten gleich zwei. Da die Paare von Th-Functionen alle gleichberechtigt sind, können wir uns auf die Untersuchung des Falls:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \kappa = 0$$

beschränken. Dann ist wegen (24):

entweder  $\xi = 2, \eta = 0$  und dann wegen (51) auch  $\mu = 2$ ;

oder  $\xi = 0, \eta = 2$  und dann wegen (35) auch  $\lambda = 2$ .

Sowohl

$$\Delta, \Delta_{01}, \Delta_{23}, \Delta_{45}, \text{ als } \Delta, \Delta_{03}, \Delta_{21}, \Delta_{45}$$

bilden je ein Göpel'sches Quadrupel.

II. In *einer* der Congruenzen, etwa der ersten, sei jeder der vier Exponenten gleich zwei. Dann muss wegen (24):

entweder  $\varepsilon = 2$  und dann wegen (13) auch  $\kappa = 2$ ,

oder  $\xi = 2$  und dann wegen (35) auch  $\lambda = 2$ ,

oder  $\eta = 2$  und dann wegen (51) auch  $\mu = 2$

sein. Jedes der drei Sextupel:

$$\Delta \Delta_{45} \Delta_{43} \Delta_{41} \Delta_{05} \Delta_{25},$$

$$\Delta \Delta_{45} \Delta_{43} \Delta_{41} \Delta_{03} \Delta_{23},$$

$$\Delta \Delta_{45} \Delta_{43} \Delta_{41} \Delta_{01} \Delta_{21}$$

wird durch ein Göpel'sches Quadrupel zu der Gesamtheit aller zehn  $\Delta$  ergänzt.

III. Sobald ausser den sechs Exponenten des vorigen Falles noch ein siebenter gleich zwei ist, müssen alle zehn den Werth zwei haben.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und wir können das Resultat folgendermassen aussprechen:

*Alle rationalen ganzen Functionen der Th-Nullwerthe  $\Delta$ , welche zugleich rationale Functionen der Verzweigungspunkte sind, lassen sich rational und ganz zusammensetzen aus folgenden 41 Formen:*

dem Product aller zehn  $\Delta$ ;  
 den 15 Producten aus den vier  $\Delta$ -Quadraten je eines Göpel'schen  
 Quadrupels;  
 den 15 Producten von je sechs solchen  $\Delta$ -Quadraten, die nach Weg-  
 lassung eines Göpel'schen Quadrupels übrig bleiben;  
 den 10 vierten Potenzen der einzelnen  $\Delta$ .

Auf die zwischen diesen Formen bestehenden Relationen brauchen wir hier nicht einzugehen.

## § 14.

Eigenschaften derjenigen Invarianten, welche sich als ganze Functionen der Th-Nullwerthe darstellen lassen.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, wie sich die Invarianten von  $f$  durch die Th-Nullwerthe in Gestalt von Brüchen darstellen lassen. Von einem gewissen Interesse ist nun die Frage, wann es gelingen mag, den Nenner eines solchen Bruches wegzuheben, sei es sofort, sei es nach geeigneter Umformung des Zählers mit Hilfe der Thetarelationen; m. a. W. die Frage, welche (in den Verzweigungswerthen rationalen) Invarianten von  $f$  als ganze Functionen der Th-Nullwerthe dargestellt werden können. Im Falle der elliptischen Functionen kann dies bekanntlich mit jeder solchen Invariante geschehen. Für den hyperelliptischen Fall hat Herr Bolza (a. a. O.) Beispiele des Gegentheils gegeben und auch bereits darauf aufmerksam gemacht, dass gerade diejenigen beiden rationalen Invarianten 4. und 6. Grades der  $f_6$  eine solche Darstellung zulassen, welche verschwinden, wenn  $f_6$  einen dreifachen Linearfactor besitzt.

In der That ist sofort die Richtigkeit des allgemeinen Satzes einzusehen:

*Für die Darstellbarkeit einer Invariante von  $f$  als ganze Function der Th-Nullwerthe ist eine nothwendige Bedingung, dass sie verschwindet, sobald  $f = 0$  eine dreifache Wurzel bekommt.*

Denn in diesem Fall verschwinden sämmtliche Th-Nullwerthe.

Zu einer noch engeren Bedingung gelangen wir, wenn wir wieder (wie in den §§ 7, 8) die Differenzen der zusammenrückenden Wurzeln als unendlich kleine Grössen derselben und zwar der ersten Ordnung betrachten. Beachten wir dabei, dass die Th-Nullwerthe vom Grade  $\frac{1}{2}$  in den Coefficienten von  $f$  sind und unter der gemachten Voraussetzung mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{4}$  unendlich klein werden, so erhalten wir folgende Formulirung:

*Soll eine Invariante  $g^{\text{ten}}$  Grades von  $f$  sich als ganze Function der Th-Nullwerthe darstellen lassen, so muss sie mindestens von der Ordnung*

$\frac{1}{2}g$  unendlich klein werden, wenn drei Nullstellen von  $f$  in der angegebenen Weise zusammenrücken.

Zum Beweise nun, dass für in den Nullstellen rationale\*) Invarianten von  $f$  diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist, verhilft uns der in § 9 abgeleitete Hilfssatz im Verein mit den Resultaten des vorigen Paragraphen.

Sei nämlich  $J_g$  eine in den Nullstellen rationale ganze Invariante von  $f$  vom Grade  $g$ , so kann dieselbe auf die Form gebracht werden:

$$(1) \quad J_g = \frac{G_{12g}(\text{Th})}{(\Pi \text{Th})^g} = \frac{G_{12g}(\vartheta)}{p_{12}^g (\Pi \vartheta)^g}$$

(in leicht verständlicher abkürzender Schreibweise). Angenommen nun  $J_g$  werde mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{2}g$  unendlich klein, wenn die 3 Verzweigungspunkte  $\alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}, \alpha^{(5)}$  in der angegebenen Weise zusammenrücken; dann wird dort

$$(2) \quad G_{12g}(\vartheta) = J_g \cdot (\Pi \vartheta)^g \cdot p_{12}^g$$

unendlich klein von der Ordnung:

$$\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}g.$$

Nun sind zwei Fälle möglich: entweder  $G_{12g}(\vartheta)$  enthält einen Theta-nullwerth zu einer ungeraden Potenz erhoben, dann muss es nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen durch das Product von ihnen allen theilbar sein; oder es enthält alle Thetanullwerthe nur in geraden Potenzen, dann sind die Bedingungen des Hilfssatzes von § 9 erfüllt. In beiden Fällen schliesst man, dass  $G_{12g}(\vartheta)$  auf die Form gebracht werden kann:

$$(3) \quad G_{12g}(\vartheta) = \vartheta_{14} \cdot G_{12g-1}(\vartheta)$$

unter  $G_{12g-1}$  eine ganze Function  $(12g-1)^{\text{ten}}$  Grades der Thetanullwerthe verstanden, welche für  $\tau_{12} = 0$  noch mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{2}(g-1)$  unendlich klein wird. Wiederholte Anwendung desselben Schlusses führt zu dem Resultat:

$$G_{12g}(\vartheta) = (\Pi \vartheta)^g G_{2g}(\vartheta),$$

aus welchem sich sofort ergibt:

$$(4) \quad J_g = p_{12}^{-g} G_{2g}(\vartheta) = G_{2g}(\text{Th}).$$

Damit ist die Umkehrung des Hauptsatzes bewiesen; wir sprechen sie noch einmal in ausdrücklicher Formulierung aus:

*Jede in den Nullstellen von  $f$  rationale ganze Invariante  $g^{\text{ten}}$  Grades von  $f$ , welche mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{2}g$  unendlich klein wird,*

\*) Vgl. Grundz. § 23.

wenn drei Wurzeln von  $f$  in der angegebenen Weise zusammenrücken, lässt sich als ganze Function  $(2g)^{\text{ten}}$  Grades der Th-Nullwerthe darstellen.

Wir fügen noch zwei analoge Sätze für die rationalen ganzen Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  zu:

Eine rationale ganze Invariante  $g^{\text{ten}}$  Grades von  $\varphi$  und  $\psi$ , welche mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{2}g$  unendlich klein wird, wenn die drei Wurzeln von  $\varphi$  oder die drei von  $\psi$  in der angegebenen Weise zusammenrücken, ist gleich einer gebrochenen rationalen Function der Thetanullwerthe, deren Nenner eine Potenz des Products der neun von  $\text{Th}_{\varphi\psi}$  verschiedenen Thetanullwerthe ist.

Eine rationale ganze Invariante von  $\varphi$  und  $\psi$ , welche in den Coefficienten jeder von beiden Formen vom Grade  $g$  ist und mindestens von der Ordnung  $\frac{1}{2}g$  unendlich klein wird, wenn irgend zwei Wurzeln von  $\varphi$  mit einer von  $\psi$  oder zwei von  $\psi$  mit einer von  $\varphi$  in der angegebenen Weise zusammenrücken, ist gleich einer gebrochenen rationalen Function der Thetanullwerthe, deren Nenner eine Potenz von  $\text{Th}_{\varphi\psi}$  ist.

## § 15.

Ganze Functionen der Thetanullwerthe, welche zugleich rationale symmetrische Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  sind.

Wir gehen nun dazu über aus den Formen von § 2 solche Combinationen zusammenzustellen, welche dem engeren Rationalitätsbereiche II. Stufe angehören, der durch eine bestimmte Zerlegung  $f = \varphi\psi$  gegeben ist. Die Aufstellung eines „vollen Systems“ solcher Formen würde zwar nicht ohne Interesse sein, ist aber für unsere Zwecke keineswegs erforderlich. Wir begnügen uns daher mit der Aufzählung der Formen der niedrigsten Grade; an solchen haben wir:

*zwei\*) Formen vom Grade 8 in den  $\Delta$ :*

$$(1) \quad \Delta^8$$

und:

---

\*) Eine dritte,  $\Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{21}^2 \Delta_{23}^2$ , ist durch die beiden im Text genannten homogen und linear ausdrückbar, nämlich gleich:

$$\frac{3}{4} \Delta^8 - \frac{1}{4} \Sigma \Delta_{01}^8.$$

Von den Formen  $16^{\text{ten}}$  Grades sei:

$$\Delta^4 \Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{25}^2 \Delta_{45}^2 \Delta_{41}^2$$

angeführt.

$$(2) \quad \Gamma = \sum_{(9)} \Delta_{01}^8;$$

eine Form vom Grade 12 in den  $\Delta$ :

$$(3) \quad 3BD = \Delta^6 \sum_{(6)} \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{45}^2.$$

Die Summationen sind dabei jedesmal zu erstrecken über alle Permutationen einerseits der Indices 0, 2, 4 unter sich, andererseits der Indices 1, 3, 5 unter sich, welche den betreffenden Summanden ändern; die hiernach sich ergebende Gliederanzahl ist jedesmal unter dem Summenzeichen in Klammern beigesetzt.

Was die den einzelnen Gliedern beigesetzten Vorzeichen betrifft, so ist darüber folgendes zu bemerken. Die hier mit  $\Delta$  bezeichneten Grössen sind als Functionen der Wurzeln von  $\varphi$  und  $\psi$  zunächst nur bis auf vierte Einheitswurzeln definirt; man wird daher diese Einheitswurzeln so fixiren können, dass in allen Gliedern dasselbe Zeichen zu setzen ist. Das wird jedoch nicht diejenige Fixirung der Einheitswurzeln ergeben, welche aus der Definition der  $\Delta$  durch die Thetanullwerthe folgt. Wie man im letzteren Fall die Zeichen der einzelnen Glieder zu wählen hat, davon wird in § 18 noch die Rede sein.

## § 16.

Beziehungen zwischen den in § 12 und den in § 15 erhaltenen Invarianten.

Um die durch Th-Nullwerthe ausgedrückten Invarianten des vorigen Paragraphen auf die Fundamentalinvarianten des § 12 zurückzuführen, wird man wohl am besten beide Arten durch die Wurzeln von  $\varphi$  und  $\psi$  ausdrücken. Man erhält zunächst, wenn man als Symbole der Linearfactoren ihre Ordnungszahlen benutzt:

$$6 \varphi_x \varphi_y \varphi_z = \sum_{0,2,4} 0_x 2_y 4_z,$$

$$(\varphi \psi)^3 = (\varphi 1) (\varphi 3) (\varphi 5)$$

also:

$$(1) \quad 6(\varphi \psi)^3 = \sum_{0,2,4} (01) (23) (45);$$

ferner:

$$3(\varphi \varphi')^2 \varphi_x \varphi'_x = \sum_{0,2,4} (0 \varphi') (2 \varphi') 4_x \varphi'_x$$

und wenn man auch für das Symbol  $\varphi'$  Symbole der Wurzeln einführt:

$$18 \Delta_x^2 = - \sum (02)^2 4_x^2 + 2 \sum (02) (24) 0_x 4_x$$

oder (wegen:

$$(02) (24) 0_x 4_x + (24) (40) 2_x 0_x = - (24)^2 0_x^2):$$

$$(2) \quad 9\Delta_x^2 = - \sum_{0,2,4} (02)^2 4_x^2.$$

Ganz ebenso wird erhalten:

$$(3) \quad 9\nabla_x^2 = - \sum_{1,3,5} (13)^2 5_x^2.$$

und aus (2) und (3) folgt:

$$(4) \quad 162T = \sum_{(9)} (02)^2 (13)^2 (45)^2.$$

Endlich ist (vergl. Gordan-Kerschensteiner, Invariantentheorie, Bd. II, p. 101):

$$(5) \quad R = \frac{1}{27} (02)^2 (24)^2 (40)^2;$$

$$(6) \quad P = \frac{1}{27} (13)^2 (35)^2 (51)^2.$$

Andererseits werden die Invarianten von § 14:

$$(7) \quad \Delta^8 = (02)^2 (24)^2 (40)^2 (13)^2 (35)^2 (51)^2;$$

$$(8) \quad \Gamma = \Sigma \Delta_{01}^8 = \Sigma (01)^2 (12)^2 (20)^2 (34)^2 (45)^2 (51)^2;$$

$$(9) \quad 3BD = \Delta^6 \Sigma \pm \Delta_{03}^2 \Delta_{14}^2 \Delta_{25}^2 \\ = (02)^2 (24)^2 (40)^2 \cdot (13)^2 (35)^2 (51)^2 \cdot \Sigma (03) (05) (21) (25) (41) (43);$$

$$(10) \quad \Delta^4 \Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{25}^2 \Delta_{45}^2 \Delta_{41}^2 \\ = (02)^2 (24)^2 (40)^2 \cdot (13)^2 (35)^2 (51)^2 \cdot (01) (03) (05) (21) (23) (25) \cdot (41) (43) (45) \\ \Sigma (01) (23) (45).$$

Die Vergleichung beider Reihen von Formeln giebt dann die gesuchten Beziehungen in folgender Gestalt:

aus (5), (6) und (7):

$$(11) \quad \Delta^8 = 729D;$$

aus (10) und (1):

$$(12) \quad \Delta^4 \Sigma \pm \Delta_{01}^2 \Delta_{03}^2 \Delta_{23}^2 \Delta_{25}^2 \Delta_{45}^2 \Delta_{41}^2 = 6D \cdot \Re \cdot J = 6DE;$$

ferner müssen, unter  $\alpha, \beta \dots$  Zahlencoefficienten verstanden, Beziehungen folgender Gestalt bestehen:

$$(13) \quad B = \alpha A + \beta T;$$

$$(14) \quad \Gamma = \gamma A^2 + \delta AT + \xi T^2 + \eta D + \varkappa E.$$

Die Coefficienten  $\alpha, \beta$  in (13) bestimmt man leicht, indem man  $\varphi$  und  $\psi$  einmal als vollständige Cuben, das andere mal als identisch annimmt; man erhält:

$$(15) \quad B = 2A - 9T.$$

Die Coefficienten von (14) werden wir im nächsten Paragraphen auf bequemere Weise finden, als es hier möglich wäre; doch sei der Vollständigkeit halber das Resultat beigefügt:

$$(15) \quad \Gamma = 9B^2 + 1458D - 36E.$$

## § 17.

### Reihenentwicklungen der Invarianten.

Die in den letzten Paragraphen abgeleiteten Formeln benutzen wir nun, um für unsere Invarianten Reihenentwicklungen nach Potenzen von:

$$p = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad r = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad s = q + q^{-1} = e^{\pi i \tau_{12}} + e^{-\pi i \tau_{12}}$$

zu erhalten. Zu diesem Zwecke müssen wir sie zunächst mit den nun schon mehrfach erwähnten transcendenten Zusatzfactoren multipliciren, welche erforderlich sind, damit wir auf der andern Seite statt der Th- die  $\vartheta$ -Nullwerthe schreiben können; wir wollen der Kürze halber diese Factoren überall weglassen, was zu Verwechslungen keinen Anlass geben wird. Wir haben nur noch anzugeben (vgl. § 15 a. E.), wie die Vorzeichen der einzelnen Glieder zu bestimmen sind, wenn man die Thetanullwerthe einführt. Es geschieht diese Bestimmung wohl am bequemsten dadurch, dass man in den Ausdrücken der Invarianten durch die Wurzeln rückwärts die einzelnen Wurzel-determinanten vermöge der Rosenhain'schen Differentialformeln (vgl. p. 401), in welchen das Vorzeichen sich aus den Anfangstermen der Entwicklungen ergibt, durch Nullwerthe gerader Thetafunctionen ersetzt. Man erhält so z. B.

$$(1) \quad B = \vartheta^{-2} \{ \vartheta_{01}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{45}^2 - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{25}^2 \vartheta_{41}^2 - \vartheta_{05}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{41}^2 - \vartheta_{01}^2 \vartheta_{25}^2 \vartheta_{43}^2 \\ - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{21}^2 \vartheta_{45}^2 + \vartheta_{05}^2 \vartheta_{21}^2 \vartheta_{43}^2 \}.$$

Die Entwicklungen der einzelnen Glieder des Aggregats sind bis zu Gliedern 4. O. incl.:

$$\begin{aligned} \vartheta_{05}^2 \vartheta_{21}^2 \vartheta_{43}^2 &= 1 - 4(p+r) - 4(p^2+r^2) + 32pr + 32(p^3+r^3) \\ &\quad - 80(p^2r+pr^2) - 4(p^4+r^4) + 272p^2r^2 \\ &\quad - 4prs^2 + \dots; \\ -\vartheta_{01}^2 \vartheta_{25}^2 \vartheta_{43}^2 - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{21}^2 \vartheta_{45}^2 &= -16(p+r) - 64(p^2+r^2) + 128pr - 128(p^3+r^3) \\ &\quad - 64(p^2r+pr^2) - 256(p^4+r^4) + 512p^2r^2 + \dots; \\ -\vartheta_{05}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{41}^2 &= 64pr - 256(p^2r+pr^2) - 16prs^2 + \dots; \\ -\vartheta_{03}^2 \vartheta_{25}^2 \vartheta_{41}^2 &= 128pr - 64prs - 256(p^2rs+pr^2s) + \dots; \\ +\vartheta_{01}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{45}^2 &= 128pr + 64prs + 256(p^2rs+pr^2s) + \dots. \end{aligned}$$

Daraus erhält man für  $B$  folgende Entwicklung:

$$(2) \quad 3B = 1 - 24(p+r) + 24(p^2+r^2) + 672pr - 96(p^3+r^3) \\ - 3072(p^2r+pr^2) + 24(p^4+r^4) + 9600(p^3r+pr^3) \\ + 24384p^2r^2 - 24prs^2 + \dots$$

Ganz ebenso wird erhalten:

$$(3) \quad 729D = 1 + 16(p+r) + 112(p^2+r^2) + 192pr + 448(p^3+r^3) \\ + 896(p^2r+pr^2) + 1136(p^4+r^4) + 1792(p^3r+pr^3) \\ + 1792p^2r^2 + 16prs^2 + \dots;$$

$$(4) \quad \Gamma = 3 - 16(p+r) + 848(p^2+r^2) - 192pr - 448(p^3+r^3) \\ - 896(p^2r+pr^2) + 7504(p^4+r^4) - 1792(p^3r+pr^3) \\ + 13568p^2r^2 - 16prs^2 + \dots$$

Solche Reihenentwicklungen können übrigens auch für solche Invarianten erhalten werden, deren Ausdruck durch die Thetanullwerthe eine Potenz von  $\Delta$  (ohne Index) im Nenner hat; dieselben werden aber nicht für alle Werthe convergiren, für welche die bekannten Bedingungen (Grundz. (11)) erfüllt sind, sondern nur innerhalb eines engeren Bereichs. Als Beispiel führen wir neben  $B$  an:

$$(5) \quad 6E = 512pr \{1 - 12(p+r) + 68(p^2+r^2) + 256pr + \dots\};$$

die Vergleichung der Reihenentwicklungen giebt die Identität (15) des § 16.

## V.

### Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische durch Transformation dritten Grades.

#### § 18.

#### Die Entwicklungen von Goursat.

In diesem Abschnitt soll die *Bedingung* discutirt werden, welche die *Moduln* eines hyperelliptischen Gebildes ( $p=2$ ) erfüllen müssen, wenn eines der zu demselben gehörigen Integrale I. Gattung durch Transformation dritten Grades auf ein elliptisches soll zurückgeführt werden können. In transscendenter Form lautet diese Bedingung nach den Herren Weierstrass\*) und Picard\*\*) folgendermassen:

\*) Man vergl. die Mittheilungen von Herrn Königsberger, Cr. J. Bd. 67, p. 72, (1867) und von Frau v. Kowalevski Acta math. Bd. 4, p. 394, (1884).

\*\*) Bull. de la soc. math. de France Bd. 11, p. 25 (1883).



*Es muss zu dem hyperelliptischen Gebilde ein System von Theta-moduln gehören, in welchem:*

$$\tau_{12} = \frac{1}{3}$$

ist.

Alsdann führt nämlich Transformation dritter Ordnung auf  $\tau_{12} = 1$  und hierauf lineare Transformation auf  $\tau_{12} = 0$ , also auf den §§ 7, 8 behandelten Fall.

In *algebraischer* Form hat Herr Goursat\*) das Problem behandelt; es sei gestattet seinen Gedankengang hier in einer solchen Form zu reproduciren, dass die invariante Natur der Ueberlegungen hervortritt.

Herr Goursat kehrt die Fragestellung um, indem er von dem elliptischen Integral:

$$(1) \quad \int \frac{(x dx)}{\sqrt{(\lambda' x) (\lambda'' x) (\lambda''' x) (\lambda^{IV} x)}}$$

ausgeht, das durch die Transformation:

$$(2) \quad x_1 : x_2 = \varphi^3 : \chi^3$$

in ein hyperelliptisches Integral I. Ordnung verwandelt werden soll. Er untersucht, wie zu einer gegebenen Transformation (2) die Werthe der  $\lambda$  in (1) so bestimmt werden können, dass das eintritt, und in welcher Weise das entstehende hyperelliptische Integral specialisirt ist.

Wird die Substitution (2) an der Wurzelgrösse in (1) vorgenommen, so wird dieselbe zunächst übergeführt in die Quadratwurzel aus einer Form 12<sup>ten</sup> Grades in  $t_1, t_2$ :

$$(3) \quad (\lambda_1' \chi - \lambda_2' \varphi) (\lambda_1'' \chi - \lambda_2'' \varphi) (\lambda_1''' \chi - \lambda_2''' \varphi) (\lambda_1^{IV} \chi - \lambda_2^{IV} \varphi).$$

Soll von dieser nur ein Factor sechsten Grades unter dem Wurzelzeichen stehen bleiben; so kann — unter Voraussetzung allgemeiner  $\varphi, \chi$  — ganz wie in art. 4. der Fundamenta Nova geschlossen werden, dass drei von den vier Klammerfactoren in (3) Doppelwurzeln besitzen müssen. In dem Büschel von cubischen Formen  $\lambda_1 \chi - \lambda_2 \varphi$  sind aber überhaupt nur 4 Formen mit Doppelwurzeln enthalten; man findet ihre Parameter, indem man die Discriminante des Büschels  $R_{\lambda_1 \chi - \lambda_2 \varphi}$  gleich Null setzt. Die Doppelwurzeln selbst sind dann zugleich einfache Wurzeln der Functionaldeterminante

$$(4) \quad \Theta_x^4 = (\varphi \chi) \varphi_x^2 \chi_x^2;$$

die ausserdem noch vorhandenen einfachen Wurzeln derselben vier Formen sind Wurzeln einer andern Combinante des Büschels, die wir mit  $K_x^4$  bezeichnen wollen. Um dieselbe durch die fundamentalen

---

\*) Bull. soc. math. Bd. 13, p. 155, (1885).

Covarianten auszudrücken, gehen wir aus von der Covariante des Herrn Cayley:

$$(5) \quad \frac{\varphi_x^3 \chi_y^3 - \varphi_y^3 \chi_x^3}{(xy)} = 3\Theta_x^2 \Theta_y^2 + \frac{1}{2} J \cdot (xy)^2,$$

deren Verschwinden aussagt, dass  $x$  und  $y$  Wurzeln einer und derselben Form des Büschels sind. Ist nun  $x$  eine Wurzel von  $K_x^4$ , so hat die Form (5) zwei gleiche Wurzeln  $y$ ; unsere Combinante  $K_x^4$  ist also nichts anderes als die Discriminante der als quadratische Form in  $y_1, y_2$  betrachteten Form (5). So findet man:

$$(6) \quad K_x^4 = 9(\Theta\Theta')^2 \Theta_x^2 \Theta_x'^2 + 3J\Theta_x^4.$$

Die drei Factoren mit Doppelwurzeln in (3) liefern also unter das neue Wurzelzeichen einen cubischen Factor  $\psi_i^3$  der Combinante (6), während der vierte Factor von (3), also irgend eine Form des Büschels, noch ausserdem darunter steht. Das Resultat des Herrn Goursat kann also folgendermassen ausgesprochen werden:

*Wird durch die Substitution (2) ein elliptisches Integral in ein hyperelliptisches ( $p=2$ ) verwandelt, so erscheint die dem letzteren zu Grunde liegende Form 6<sup>ten</sup> Grades als Product aus zwei cubischen Factoren, nämlich irgend einer Form des Büschels  $\lambda_1 \chi - \lambda_2 \varphi$  und einem cubischen Factor  $\psi$  der Combinante (6) desselben.*

Ist also von den beiden cubischen Factoren  $\varphi_3, \psi_3$  der  $f_6$  der eine  $\varphi$  gegeben, so kann der andere  $\psi$  noch auf zweifach unendlich viele Weisen so bestimmt werden, dass die Form  $f_6$  eine Form der verlangten Art ist, entsprechend den zweifach unendlich vielen Büscheln  $\lambda_1 \chi - \lambda_2 \varphi$ , welchen  $\varphi$  angehört.

Wollte man von diesem Ansatz aus zu der Invariantenrelation gelangen, welche erfüllt sein muss, wenn zwei Formen  $\varphi, \psi$  in der angegebenen Beziehung zu einander stehen sollen, so würde man folgendermassen zu verfahren haben. Man müsste zunächst die Relation aufsuchen, welche die Combinante  $K$  mit irgend einer Form  $\varphi$  des Büschels verknüpft; dieselbe wird darin bestehen, dass eine Covariante von  $K$  und  $\varphi$  identisch verschwindet. Hierauf müsste man  $K$  ersetzen durch das Product aus  $\psi_x^3$  und einer linearen Hilfsform  $a_x$ , und endlich müsste man die Coefficienten der letzteren eliminiren.

Die Frage erweist sich demnach als nahe verwandt mit der von Herrn C. Stephanos\*) behandelten nach den Beziehungen zwischen den Formen eines Büschels und der Functionaldeterminante desselben. Indessen würde hier die Durchführung doch grösseren Rechnungsaufwand erfordern, und es soll daher von derselben abgesehen werden.

\*) Sur les faisceaux des formes binaires ayant même Jacobienne, (mém. sav. étr. t. 27, No. 7) p. 27, p. 40.

Herr Goursat gewinnt die gesuchte Relation in einfacher Gestalt durch Einführung eines irrationalen kanonischen Coordinatensystems. Er verlegt zunächst den Coordinatengrundpunkt  $t_2 = 0$  in den Doppelpunkt der vierten (nicht benutzten) Form des Büschels, welche einen solchen besitzt, und wählt dann den Coordinatengrundpunkt  $t_1 = 0$  so, dass in\*):

$$(7) \quad \varphi = t_1^3 + 3at_1t_2^2 + b_2t^3$$

kein Glied mit  $t_1^2t_2$  auftritt, also:

$$(8) \quad \varphi_1^2\varphi_2 = 0$$

wird. Wird dann derjenige Linearfactor, dessen Product mit  $t_2^2$  eine Form des Büschels ist,

$$t_1 - pt_2$$

genannt, so wird die Combinante  $K_4$ :

$$(t_1 - pt_2)(t_1^3 + 3pt_1^2t_2 + (4b + 12ap)t_2^3),$$

sodass wir erhalten:

$$(9) \quad \psi_i^3 = t_1^3 + 3pt_1^2t_2 + (4b + 12ap)t_2^3.$$

Es tritt demnach in  $\psi$  kein Glied mit  $t_1t_2^2$  auf; diese Eigenschaft — die durch:

$$(10) \quad \psi_1\psi_2^2 = 0$$

sich ausdrückt — kann nun dazu dienen, in Verbindung mit (18) das benutzte Coordinatensystem in von  $\chi$  unabhängiger Weise zu definiren. So gelangt Herr Goursat zu dem Resultat:

*Wird:*

$$(11) \quad q = 4b + 12ap,$$

wenn die beiden cubischen Formen auf die kanonischen Formen:

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi = t_1^3 & + 3at_1t_2^2 + b_2t_2^3 \\ \psi = t_1^3 + 3pt_1^2t_2 & + qt_2^3 \end{cases}$$

gebracht werden, so gehört das Product  $\varphi\psi = f_6$  zu einem hyperelliptischen Gebilde der verlangten Eigenschaft;

und umgekehrt:

wenn letzteres der Fall sein soll, so muss es möglich sein, die beiden Formen so in die kanonischen Formen (12) zu bringen, dass die Bedingung (11) erfüllt ist.

---

\*) Abweichend von Goursat schreiben wir die Formen mit Binomialcoefficienten.

## § 19.

## Ausdruck der Goursat'schen Bedingung durch die Fundamentalinvarianten.

Da zwei cubische Formen auf *fünf* verschiedene Weisen auf die Normalformen (12) des § 18 gebracht werden können, so ist die nach Herrn Goursat entwickelte Gestalt der gesuchten Bedingung eine *irrationale*. Für die hier ins Auge gefassten Anwendungen derselben erscheint es aber als durchaus wünschenswerth, sie auch in *rationaler* Form zu besitzen. Um diese rationale Form zu erhalten, beginnen wir damit, dass wir für die Grundpunkte jenes irrationalen kanonischen Coordinatensystems die Zeichen  $z, u$  einführen; dann lautet das Resultat des § 18:

Um die gesuchte Bedingung zu erhalten, bestimme man (vergl. § 18, (8), (10))  $z, u$  aus den beiden Gleichungen\*):

$$(1) \quad \varphi_z^2 \varphi_u = 0,$$

$$(2) \quad \psi_z \psi_u^2 = 0$$

und führe (vgl. § 18, 11) die erhaltenen Werthe ein in die Gleichung:

$$(3) \quad -\varphi_z^3 \cdot \psi_u^3 + 4\varphi_u^3 \cdot \psi_z^3 + 12\varphi_z \varphi_u^2 \cdot \psi_z^2 \psi_u = 0.$$

Das heisst aber nichts anderes als:

*Unsere Bedingung ist zugleich die Bedingung dafür, dass die drei Gleichungen (1), (2), (3) gleichzeitig bestehen können.*

(Diese Formulirung zeigt übrigens, dass *die gesuchte Bedingung*, trotz der Bevorzugung von  $\varphi$  beim ersten Ansatz, *Vertauschung von  $\varphi$  und  $\psi$  zulassen muss\*\**); denn werden gleichzeitig  $\varphi$  mit  $\psi$ ,  $z$  mit  $u$  vertauscht, so geht (1) in (2), (2) in (1) über, während (3) ungeändert bleibt).

Die gesuchte Invariante, welche gleich Null gesetzt unsere Bedingung liefert, muss sonach als Factor in dem Resultat der Elimination von  $u$  und  $z$  aus den Gleichungen (1), (2), (3) enthalten sein. In demselben wird jedoch noch ein anderer Factor auftreten: die Gleichungen werden nämlich, sobald  $\varphi, \psi$  einen Linearfactor ( $\alpha t$ ) gemein haben, dadurch befriedigt, dass man:

$$u = z = \alpha$$

setzt. Jenes Eliminationsresultat wird daher eine Potenz der *Résultante* von  $\varphi$  und  $\psi$  zum Factor haben; dieser Factor aber ist unserer

---

\*) Da aus (1) und (2) durch Elimination von  $u$  folgt:

$$(\varphi \psi) (\varphi' \psi) \varphi_z^2 \varphi_z'^2 \psi_z = 0,$$

so erhält man in der That fünf Lösungen, wie oben behauptet wurde.

\*\*) Vgl. Goursat a. a. O.

Aufgabe fremd, welche ein eigentliches hyperelliptisches Gebilde zur Voraussetzung hat.

Man kann aber aus den zunächst vorliegenden Gleichungen andere ableiten, deren Resultante diesen fremden Factor nicht mehr besitzt, indem man zunächst Gleichungen herstellt, deren linke Seiten die Determinante  $(uz)$  zum Factor haben, und dann von diesem Factor absieht. Dies gelingt auf folgende Weise. Man multiplicire (1) mit  $\psi_u^3$ , (2) mit  $(\varphi_z \varphi_u^2)$ ; die Differenz der linken Seiten wird dann, nach Umformung vermöge der bekannten Fundamentalidentität der symbolischen Rechnung, durch  $(uz)$  theilbar, und man erhält:

$$(4) \quad (\varphi \psi) \varphi_z \varphi_u \psi_u^2 = 0.$$

Wird ferner von der linken Seite von (3) das 15-fache Product der linken Seiten von (1) und (2) subtrahirt, so erhält man nach Beseitigung von  $(uz)$ :

$$(5) \quad (\varphi \psi) \varphi_z^2 \psi_u^2 + 4(\varphi \psi) \varphi_u^2 \psi_z^2 + 16(\varphi \psi) \varphi_z \varphi_u \psi_z \psi_u = 0.$$

Endlich kann man  $(uz)$  noch einmal beseitigen, wenn man unter Einführung eines Hilfspunkts  $v$  die linke Seite von (4) mit  $21(vz)$ , die von (5) mit  $(uz)$  multiplicirt und die Differenz bildet; man erhält so:

$$(6) \quad (\varphi \psi) \varphi_z \psi_u^2 \varphi_v + 20(\varphi \psi) \varphi_z \varphi_u \psi_u \psi_v + 4(\varphi \psi)^2 \varphi_u \psi_z \cdot (uv) = 0,$$

und zwar für beliebige Werthe des  $v$ .

Wird hier  $z$  mit Hilfe von (2) eliminirt, so gelangt man zu dem Resultat:

*Die gesuchte Invariante ist auch als Factor in dem Resultat der Elimination von  $u$  aus den beiden Gleichungen:*

$$(7) \quad \begin{aligned} &(\varphi \psi)(\varphi \psi') \varphi_v \psi_u^2 \psi_u'^2 + 20(\varphi \psi) \varphi_u \psi_u \psi_u'^2 \psi_v \\ &\quad + 4(\varphi \psi)^2 (\psi \psi') \varphi_u \psi_u'^2 \cdot (uv) = 0, \\ &(\varphi \psi)(\varphi \psi') \varphi_w \psi_u^2 \psi_u'^2 + 20(\varphi \psi) \varphi_u \psi_u \psi_u'^2 \psi_w \\ &\quad + 4(\varphi \psi)^2 (\psi \psi') \varphi_u \psi_u'^2 \cdot (uw) = 0 \end{aligned}$$

*enthalten, in welchen  $v, w$  zwei beliebige Hilfspunkte bedeuten.*

Wird  $v = w$ , so werden alle Wurzeln der beiden Gleichungen (7) paarweise gleich, das Eliminationsresultat wird also  $(vw)^4$  als Factor enthalten, während der andere Factor von  $v$  und  $w$  unabhängig ist. Dieser letztere Factor aber muss seinerseits noch einen unserer Aufgabe fremden Factor enthalten, wie das eintritt, wenn, wie hier geschehen, die Elimination von zwei Unbekannten aus drei Gleichungen in der Weise ausgeführt wird, dass man zuerst die eine und dann die andere eliminirt. Welches dieser fremde Factor sein wird, zeigt hier folgende einfache Ueberlegung: Die Resultante der beiden Gleichungen (7) wird vom 8. Grad in den Coefficienten von  $\varphi$ , vom 16. in denjenigen

von  $\psi$ . Mit Rücksicht auf die Symmetrie unserer Bedingung folgt hieraus, dass ein Factor 8. Grades in den Coefficienten von  $\psi$  sich abspalten muss. Andererseits aber sind zur Ableitung der Gleichungen (7) nur *rationale invariante* Operationen benutzt worden; jener Factor muss also ebenfalls eine rationale Invariante von  $\varphi$  sein. Da nun jede rationale Invariante von  $\psi$  eine Potenz der Discriminante dieser Form ist, so folgt:

*Die Resultante der beiden Gleichungen (7) enthält als unserer Aufgabe fremden Factor das Quadrat der Discriminante von  $\psi^*$ .*

Man könnte nun den Ausdruck der gesuchten Invariante durch die Fundamentalinvarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  dadurch erzwingen, dass man die Resultante der beiden biquadratischen Formen (7) berechnet und durch geeignete Umformung die fremden Factoren zum expliciten Auftreten brächte, sodass man sie beseitigen könnte. Man kann aber auch — und das wollen wir ausführen — für irgend eine geeignete Normalform der beiden Formen  $\varphi, \psi$  die Gleichungen (7) aufstellen und ihre Resultante etwa nach der Methode von Bézout als explicite Function der Coefficienten berechnen. Andererseits lässt sich jede symmetrische Simultaninvariante 8. Grades homogen und linear zusammensetzen aus einer Anzahl von Producten der Fundamentalinvarianten (§ 12); die numerischen Coefficienten dieses Ausdrucks werden sich für unsere Invariante bestimmen lassen, wenn man nur eine (verhältnissmässig kleine) Anzahl Glieder derselben kennt.

## § 20.

### Ausführung der Berechnung.

Zur wirklichen Ausführung der Berechnung scheint die von Herrn Goursat benutzte Normalform (vgl. § 18) ganz geeignet. Es werde also wieder — wir kehren zu unhomogener Schreibweise zurück:

$$\varphi = t^3 + 3at + b,$$

$$\psi = t^3 + 3pt^2 + q$$

gesetzt; dann treten an Stelle von § 19, (4) und (5) die Gleichungen:

$$(1) \quad pzu^3 - azu^2 - au^3 + (-2ap + q)zu + (-ap - b)u^2 - 2bpu + aq = 0;$$

$$(2) \quad -21pz^2u^2 + 24az^2u + 18azu^2 + (-q + 4b + 12ap)z^2 + (36ap + 16b - 16q)zu + (15ap - 4q + b)u^2 + 24bpz + 18bpu - 21aq = 0.$$

Nun werde von den beiden Hilfspunkten  $v, w$  der eine nach 0, der andere nach  $\infty$  verlegt; dann treten an Stelle von § 19, (7) die folgenden beiden Gleichungen:

\*) Dass weiter kein fremder Factor mehr auftritt, wird sich p. 419 ergeben.

$$\begin{aligned}
 & (21a + 21p^2)u^4 + (24ap + 20b + 4q)u^3 + (60bp + 30pq)u^2 \\
 & + (48b^2p - 24aq)u + (-12apq - 4bq + q^2) = 0, \\
 (3) \quad & (b - 4q + 18ap)u^4 + (24bp + 12pq)u^3 + (-18aq + 36b^2p)u^2 \\
 & + (20q^2 + 4bq - 72apq)u = 0.
 \end{aligned}$$

Die Resultante dieser beiden Gleichungen enthält nach Entfernung des Quadrats der Discriminante von  $\psi$  und nach Division mit 21 an Gliedern, welche keine höhere Potenz von  $a$  oder  $p$  als die zweite enthalten, die folgenden:

$$\begin{aligned}
 & -256b^8 - 2560b^7q - 2848b^6q^2 + 38528b^5q^3 + 111419b^4q^4 + 38528b^3q^5 \\
 & - 2848b^2q^6 - 2560bq^7 - 256q^8 \\
 & + ap\{6144b^7 + 62976b^6q + 104832b^5q^2 - 245280b^4q^3 - 2112b^3q^4 \\
 & - 14112b^2q^5 + 70656bq^6 + 16896q^7\} \\
 & + a^2p^2\{-41472b^6 - 456192b^5q - 277344b^4q^2 + 388800b^3q^3 \\
 & + 1692576b^2q^4 - 912384bq^5 - 393984q^6\};
 \end{aligned}$$

sie enthält keine Glieder, welche keine höhere Potenz von  $b$  oder  $q$  als die erste enthalten.

Andererseits existiren (vgl. p. 399) *fünfzehn* linear-unabhängige symmetrische Invarianten 8. Grades; wird zur Vereinfachung

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(D - T^2)$$

statt  $T^2$  benutzt, so erhält man für dieselben an Gliedern der erst-erwähnten Art die folgenden:

1.  $J^8 = (b - q)^8 - 24ap(b - q)^7 + 252a^2p^2(b - q)^6;$
2.  $J^6T = -(b - q)^6bq$   
 $+ ap\{20b^6q - 102b^5q^2 + 210b^4q^3 - 220b^3q^4 + 120b^2q^5$   
 $- 30bq^6 + 2q^7\}$   
 $+ a^2p^2\{2b^6 - 183b^5q + 750b^4q^2 - 1210b^3q^3 + 930b^2q^4$   
 $- 327bq^5 + 38q^6\};$
3.  $J^5\Omega = ap\{b^6q - 6b^5q^2 + 15b^4q^3 - 20b^3q^4 + 15b^2q^5 - 6bq^6 + q^7\}$   
 $+ a^2p^2\{b^6 - 18b^5q + 75b^4q^2 - 140b^3q^3 + 135b^2q^4$   
 $- 66bq^5 + 13q^6\};$
4.  $J^4D = b^6q^2 - 4b^5q^3 + 6b^4q^4 - 4b^3q^5 + b^2q^6$   
 $+ ap\{-12b^5q^2 + 36b^4q^3 - 36b^3q^4 + 12b^2q^5\}$   
 $+ a^2p^2\{54b^4q^2 - 108b^3q^3 + 54b^2q^4\};$
5.  $J^4\varepsilon = ap\{b^5q^2 - 4b^4q^3 + 6b^3q^4 - 4b^2q^5 + bq^6\}$   
 $+ a^2p^2\{b^5q - 17b^4q^2 + 46b^3q^3 - 46b^2q^4 + 17bq^5 - q^6\};$

6.  $J^3 \Omega T = ap \{-b^5 q^2 + 4b^4 q^3 - 6b^3 q^4 + 4b^2 q^5 - bq^6\}$   
 $+ a^2 p^2 \{-b^5 q + 12b^4 q^2 - 32b^3 q^3 + 34b^2 q^4 - 15b q^5 + 2q^6\};$
7.  $J^2 T D = -b^5 q^3 + 2b^4 q^4 - b^3 q^5$   
 $+ ap \{8b^4 q^3 - 10b^3 q^4 + 2b^2 q^5\}$   
 $+ a^2 p^2 \{2b^4 q^2 - 25b^3 q^3 + 14b^2 q^4\};$
8.  $J^2 T \varepsilon = ap \{-b^4 q^3 + 2b^3 q^4 - b^2 q^5\}$   
 $+ a^2 p^2 \{-b^4 q^2 + 11b^3 q^3 - 13b^2 q^4 + 3b q^5\};$
9.  $J^2 \Omega^2 = a^2 p^2 \{b^4 q^2 - 4b^3 q^3 + 6b^2 q^4 - 4b q^5 + q^6\};$
10.  $J \Omega D = ap \{b^4 q^3 - 2b^3 q^4 + b^2 q^5\}$   
 $+ a^2 p^2 \{b^4 q^2 - 2b^3 q^3 + b^2 q^4\};$
11.  $J \Omega \varepsilon = a^2 p^2 \{b^3 q^3 - 2b^2 q^4 + b q^5\};$
12.  $\Omega^2 T = a^2 p^2 \{-b^3 q^2 + 2b^2 q^4 - b q^5\};$
13.  $D^2 = b^4 q^4;$
14.  $D \varepsilon = ap \cdot b^3 q^4 + a^2 p^2 (b^3 q^3 - b^2 q^4);$
15.  $\varepsilon^2 = a^2 p^2 b^2 q^4.$

Es enthält also  $J \Omega \varepsilon + \Omega^2 T$  nur Glieder, welche mindestens den Cubus von  $a$  oder den von  $p$  zum Factor haben; ausserdem aber hat keine lineare Combination der 15 Invarianten diese Eigenschaft. Man kann also durch Coefficientenvergleichung aus den angegebenen Gliedern allein schon schliessen, dass die gesuchte Invariante sich nur um ein Vielfaches von  $J \Omega \varepsilon + \Omega^2 T$  von der folgenden unterscheidet:

$$(4) \quad \begin{aligned} & - 256 J^8 + 4608 J^6 T + 13824 J^5 \Omega - 23328 J^4 D - 248832 J^3 \Omega T \\ & - 186624 J^2 \Omega^2 - 209952 J \Omega D + 839808 J \Omega T^2 + 177147 D^2. \end{aligned}$$

Um jenes Vielfache zu bestimmen, berücksichtige man, dass in dem Eliminationsresultat keine Glieder vorkommen, welche in  $b$  und  $q$  von der 0<sup>ten</sup> oder 1<sup>ten</sup> Dimension sind, während an solchen Gliedern in den in (4) vorkommenden Invarianten auftreten:

$$\begin{aligned} J^8 &= 6561 a^8 p^8 + 17496 a^7 p^7 (-b + q); \\ J^6 T &= 1458 a^8 p^8 + a^7 p^7 (-2916b + 4374q); \\ J^5 \Omega &= 243 a^8 p^8 + a^7 p^7 (-648b - 81q) - 243 a^8 p^5 q; \\ J^4 D &= a^7 p^7 (1296q); \\ J^3 \Omega T &= 54 a^8 p^8 + a^7 p^7 (-108b) - 54 a^8 p^5 q; \\ J \Omega D &= a^7 p^7 (48q); \\ J \Omega T^2 &= 12 a^8 p^8 + a^7 p^7 (-16b + 4q) - 12 a^8 p^5 q; \\ D^2 &= 0. \end{aligned}$$



Die Invariante (4) enthält somit an solchen Gliedern:

$$3359232 a^8 p^8 + 0 \cdot a^7 p^7 b - 16796160 a^7 p^7 q + 3359232 a^8 p^5 q, \\ J\Omega\varepsilon + \Omega^2 T \text{ enthält dagegen:}$$

$$- a^8 p^8 + 0 \cdot a^7 p^7 b + 5 a^7 p^7 q - a^8 p^5 q;$$

also hat man zu (23) noch:

$$3359232(J\Omega\varepsilon + \Omega^2 T)$$

hinzuzufügen, um unsere Invariante zu erhalten. Thut man das und führt vermöge Gleichg. (7) des § 12 statt  $\Omega$  die Resultante  $\Re$  ein, so gelangt man zu folgendem endgültigen Ausdruck unserer Invariante:

$$(5) \quad G_8 = 3^{11} D^2 + 2^5 3^6 D E - 2^8 E^2 + 2^9 3^2 Z T.$$

In der That, da zwischen  $D, E, Z, T$  keine Relation besteht, so kann dieser Ausdruck  $G_8$  nicht in Factoren zerlegt werden, welche ebenfalls rationale ganze Invarianten von  $\varphi, \psi$  wären. Wir können also sicher sein, dass wir alle fremden Factoren entfernt haben, und haben damit das Resultat:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein zu dem hyperelliptischen Gebilde  $(x, \sqrt{f(x)})$  gehörendes Integral durch eine Transformation III. Grades, welche zu der Zerlegung  $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$  in ausgezeichnete Beziehung steht, auf ein elliptisches reducirt werden könne, ist die, dass die Simultaninvarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  die Relation  $G_8 = 0$  befriedigen.*

## VI.

Allgemeine Theorie der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$ .

### § 21.

Einleitende Bemerkungen, insbesondere über die Wahl der Unbekannten.

In § 48 der Grundzüge ist als eine der Gestalten, in welchen das specielle Transformationsproblem seinen algebraischen Ausdruck finden kann, die der *Multiplicatorgleichung* genannt: einer Gleichung, deren Wurzel der transformirte Werth einer Modulform ist. Auch ist dort § 28 auseinandergesetzt, weshalb es vortheilhaft scheint, für die wirkliche Aufstellung solcher Gleichungen an Formen *zweiter* Stufe anzuknüpfen. Welche Form zweiter Stufe man aber als Wurzel der Multiplicatorgleichung wählt, das ist, vom principiellen Standpunkt aus betrachtet, ganz gleichgiltig; man ist daher berechtigt, ausschliesslich Rücksichten auf möglichst leichte Ausführbarkeit der Rechnungen für diese Wahl ausschlaggebend sein zu lassen. Diese Rücksichten bedingen aber, dass wir schon in der Wahl der Wurzel möglichst engen Anschluss an die *Thetafunctionen* suchen. Dadurch sind wir darauf hingewiesen, als Wurzel der Multiplicatorgleichung,

welche wir discutiren wollen, *eine Potenz des Th-Nullwerthes*, also der achten Wurzel aus dem Discriminantenproduct  $\Delta_\varphi \Delta_\psi$ , zu Grunde zu legen. Für die wirkliche Durchführung der Rechnungen wird man dann vom Th-Nullwerth zum Thetanullwerth übergehen, indem man mit der Quadratwurzel aus der ersten Periodendeterminante und mit einem numerischen Factor multiplicirt; für die allgemeine Untersuchung der Eigenschaften der Gleichung aber wird es durchaus zweckmässig sein, von diesem Zusatzfactor zunächst abzusehen und bei dem algebraischen Bestandtheil des Thetanullwerthes, also dem Th-Nullwerth, stehen zu bleiben.

Ist das nun entschieden, so wird man weiter festsetzen müssen, welche Potenz dieser Grösse man wählen will. Der Th-Nullwerth selbst, also die achte Wurzel aus dem Discriminantenproduct, ist keine eindeutige Form der Perioden und aus diesem Grunde unzweckmässig. Greift man andererseits zu höheren Potenzen, so nehmen auch die Grade der Coefficienten in entsprechendem Masse zu, was man gleichfalls wird vermeiden wollen. Schon diese vorläufige Ueberlegung führt somit dazu, *die vierte Wurzel aus dem Discriminantenproduct, also das Quadrat des Th-Nullwerthes, in's Auge zu fassen*; eine Wahl, deren Zweckmässigkeit sich im Folgenden noch weiter bestätigen wird\*).

Für die Untersuchung der Eigenschaften dieser Gleichung ist es nun zweckmässig, derselben noch einige andere Formen zu ertheilen und die Fragen, welche in dieser Richtung gestellt werden können, je nach ihrer Natur theils an dieser, theils an jener Form zur Entscheidung zu bringen. Es sollen daher, wenn mit  $D$  das ursprüngliche, mit  $\bar{D}$  das transformirte Discriminantenproduct bezeichnet wird, im Folgenden neben einander die Gleichungen betrachtet werden, welchen:

$$\sqrt[n]{\bar{D}}; \sqrt[n]{\frac{\bar{D}}{D}}; \sqrt[n]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$$

genügen, unter  $n$  den Transformationsgrad verstanden\*). Wie man von einer dieser Gleichungen zu den andern übergeht, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung.

Wir beschränken uns übrigens hier wie schon in Abschnitt III auf den Fall, dass  $n$  *eine ungerade Primzahl* ist.

## § 22.

### Rationalitätsbereich der Coefficienten unserer Gleichung.

Die Form  $\sqrt[n]{\bar{D}}$  ist (vergl. § 2) von der vierten Stufe und der Principaluntergruppe zweiter Stufe in Bezug auf zweite Einheits-

\*) Es entspricht dies auch dem ursprünglichen Ansatz von Jacobi für die elliptische Multiplicatorgleichung.

wurzeln adjungirt. Sie erfüllt also die Bedingungen des Satzes von § 11 für  $s = 4$ ,  $\delta = 2$ ,  $\frac{s}{\delta} = 2$  (da wir  $n$  wie gesagt als ungerade voraussetzen), und wir haben daher zunächst das Resultat\*):

*Die  $(n + 1)(n^2 + 1)$  Werthe von  $\sqrt[4]{\frac{D}{D}}$  genügen einer Gleichung des Grades  $(n + 1)(n^2 + 1)$ , deren Coefficienten der zweiten Stufe angehören.*

Da  $\sqrt[4]{D^{n-1}}$  eine Modulform II. Stufe ist, folgt weiter:

*Dasselbe gilt für:  $\sqrt[4]{\frac{D}{D^n}}$ .*

Aber  $\sqrt[4]{D}$  bleibt auch ungeändert bei gewissen mod. 4 definirten, aber nicht mod. 4 zur Identität congruenten Operationen und ändert sich bei gewissen mod. 2 definirten, aber nicht mod. 2 zur Identität congruenten Operationen nur um vierte Einheitswurzeln. Hieran anknüpfend werden wir den Rationalitätsbereich, welchem die Coefficienten unserer Gleichung angehören müssen, noch weiter einschränken können. Wir gehen dabei aus von der Bemerkung, dass die Untergruppe II. Stufe, zu welcher  $D$  gehört und  $\sqrt[4]{D}$  adjungirt ist, dadurch erzeugt werden kann, dass man zu der Principaluntergruppe II. Stufe noch drei weitere Operationen hinzunimmt. Die Gruppe von  $D$  ist nämlich mit der Gruppe derjenigen Vertauschungen der Verzweigungspunkte von  $f$ , welche die Zerlegung  $f = \varphi_3 \psi_3$  ungeändert lassen, in der Weise meroedrisch isomorph, dass der Principaluntergruppe II. Stufe in jener die Identität in dieser zugeordnet ist. Diese Permutationsgruppe aber kann ihrerseits aus drei Operationen erzeugt werden, nämlich aus zwei geeigneten Umsetzungen der Verzweigungspunkte von  $\varphi$  unter sich und aus der Vertauschung von  $\varphi$  mit  $\psi$ . Also kann auch die Gruppe von  $D$  erzeugt werden aus der Principaluntergruppe II. Stufe und aus irgend drei Operationen, welche die drei erwähnten Umsetzungen der Verzweigungspunkte mit sich bringen. Wenn wir also das Verhalten der Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung bei drei bestimmten solchen Periodentransformationen kennen, so reicht das in Verbindung mit dem zu Beginn des Paragraphen bereits ausgesprochenen Resultat hin, um das Verhalten unserer Coefficienten bei irgend einer Operation der Untergruppe, zu welcher  $D$  gehört, angeben zu können.

Solche drei Operationen aber sind bereits Grundz. § 8 zu finden; nämlich (wenn wir die durch die Verschiedenheit des zu Grunde ge-

---

\*) Dasselbe findet sich p. 199 des in der Einleitung citirten Werkes von Krause; in nicht so bestimmter Form vorher in der ebendasselbst erwähnten Abhandlung von Wiltheiss p. 34.

legten Querschnittssystems (vgl. § 1) bedingten Abänderungen vornehmen): \*)

- (1)  $B$ : (02) , d.i.  $\omega_1' = -\omega_3$ ,  $\omega_2' = \omega_2$ ,  $\omega_3' = \omega_1$ ,  $\omega_4' = \omega_4$ ;  
 (2)  $C$ : (01)(25)(43), d.i.  $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_2' = \omega_2$ ,  $\omega_3' = \omega_3$ ,  $\omega_4' = \omega_4 - \omega_3$ ;  
 (3)  $D$ : (05)(23)(41), d.i.  $\omega_1' = \omega_2$ ,  $\omega_2' = \omega_1$ ,  $\omega_3' = \omega_4$ ,  $\omega_4' = \omega_3$ .

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass diese drei Vertauschungen der Verzweigungspunkte zur Erzeugung der erwähnten Gruppe ausreichen; man erhält z. B. sofort:

$$E = DCBCD = (04);$$

und aus  $B, C, E$  entsteht die Permutationsgruppe nach ihrer Definition.

Für unsern Zweck dürfen übrigens die Periodentransformationen  $B, C, D$  durch irgend welche andere ersetzt werden, welche mod. 2 zu ihnen congruent sind. Wir wollen sie ersetzen durch die folgenden drei, welche mod.  $n$  zur Identität congruent sind:

- (4)  $B' : \omega_1' = (1 + n) \omega_1 + n \omega_3$ ,  $\omega_2' = \omega_2$ ,  
 $\omega_3' = -n \omega_1 + (1 - n) \omega_3$ ,  $\omega_4' = \omega_4$ ;  
 (5)  $C' : \omega_1' = \omega_1 + n \omega_2$ ,  $\omega_3' = \omega_3$ ,  
 $\omega_2' = \omega_2$ ,  $\omega_4' = \omega_4 - n \omega_3$ ,  
 (6)  $D' : \omega_1' = (1 + n) \omega_1 + n \omega_2$ ,  $\omega_3' = (1 - n) \omega_3 + n \omega_4$ ,  
 $\omega_2' = -n \omega_1 + (1 - n) \omega_2$ ,  $\omega_4' = -n \omega_3 + (1 + n) \omega_4$ .

Jeder von ihnen entsprechen Substitutionen der transformirten Perioden  $\bar{\omega}$ , welche zufolge § 11, Glchg. (7) alle unter sich mod. 2 congruent sind, und von welchen es daher genügt, je eine zu betrachten, etwa diejenigen, welche sich auf den durch  $k = l = m = 0$  charakterisirten Repräsentanten des I. Typus beziehen. Von denselben wird:

$$(7) \quad \bar{B} : \bar{\omega}_1' = (1 + n) \bar{\omega}_1 + n^2 \bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2,$$

$$\bar{\omega}_3' = -\bar{\omega}_1 + (1 - n) \bar{\omega}_3, \quad \bar{\omega}_4' = \bar{\omega}_4,$$

während  $\bar{C}$  und  $\bar{D}$  sich bezw. von  $C'$  und  $D'$  nur durch die Bezeichnung der Perioden unterscheiden.

Um nun den Einfluss dieser Operationen auf  $\sqrt[4]{D}$  und  $\sqrt[4]{\bar{D}}$  zu untersuchen, bedienen wir uns am bequemsten der Thetareihen. Am einfachsten gestaltet sich die Sache für  $C'$  und  $\bar{C}$ ; man hat für  $C'$ :  $p'_{12} = p_{12}$ ,  $\tau'_{11} = \tau_{11}$ ,  $\tau'_{12} = \tau_{12} - n \tau_{11}$ ,  $\tau'_{22} = \tau_{22} - 2n \tau_{22} + n^2 \tau_{11}$ , also:

\*) Wir geben die Substitutionen, welche die Verzweigungspunkte erfahren, durch ihre Cyklen an. —

$$\begin{aligned}
 \vartheta(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}) &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i (m_1^2 \tau'_{11} + 2 m_1 m_2 \tau'_{12} + m_2^2 \tau'_{22})} \\
 (8) \qquad &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i ((m_1 - n m_2)^2 \tau_{11} + 2 (m_1 - n m_2) m_2 \tau_{12} + m_2^2 \tau_{22})}.
 \end{aligned}$$

Da nun die Gesammtheit der Zahlenpaare  $(m_1 - n m_2, m_2)$  mit der Gesammtheit der Zahlenpaare  $(m_1, m_2)$  identisch ist und die Thetareihe unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, so folgt:

$$\vartheta(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}) = \vartheta(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

hieraus wegen  $p'_{12} = p_{12}$ :

$$(9) \qquad \sqrt[4]{D'} = \sqrt[4]{D},$$

und ebenso für  $\overline{C}$ :

$$(10) \qquad \sqrt[4]{\overline{D'}} = \sqrt[4]{\overline{D}}$$

d. h. bei der Operation  $C'$  bleiben die Wurzeln, also auch die Coefficienten unserer drei Multiplicatorgleichungen (für  $\sqrt[4]{D}$ ,  $\sqrt[4]{\frac{D}{D}}$ ,  $\sqrt[4]{\frac{D}{D^n}}$ ) ungeändert.

In ganz analoger Weise wird für  $D'$  erhalten:

$$\begin{aligned}
 p'_{12} &= p_{12}, \quad \tau'_{11} = (1 - n)^2 \tau_{11} + 2n(1 - n) \tau_{12} + n^2 \tau_{22}, \\
 \tau'_{12} &= -n(1 - n) \tau_{11} + (1 - 2n^2) \tau_{12} + n(1 + n) \tau_{22}, \\
 \tau'_{22} &= n^2 \tau_{11} - 2n(1 + n) \tau_{12} + (1 + n)^2 \tau_{22},
 \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
 (11) \qquad &(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}) (m_1, m_2)^2 \\
 &= (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) (m_1(1 - n) - m_2 n, m_1 n + m_2(1 + n))^2,
 \end{aligned}$$

sodass man auch hier zu demselben Resultat kommt.

Die Behandlung von  $B$  und  $B'$  erfordert ein anderes Hilfsmittel. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned}
 (12) \qquad \tau'_{11} &= \frac{-n + (1 - n) \tau_{11}}{1 + n + n \tau_{11}}, \quad \tau'_{12} = \frac{\tau_{12}}{1 + n + n \tau_{11}}, \\
 \tau'_{22} &= \tau_{22} - \frac{n \tau_{12}^2}{1 + n + n \tau_{11}}.
 \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass für  $\tau_{12} = 0$  nicht nur  $\tau'_{12} = 0$ , sondern auch  $\tau'_{22} = \tau_{22}$  wird. Nun zerfällt der hyperelliptische Thetanullwerth  $\vartheta(\tau_{11}, 0, \tau_{22})$  (vgl. § 8) in das Product der beiden elliptischen  $\vartheta_3(\tau_{11})$  und  $\vartheta_3(\tau_{22})$  und ganz ebenso  $\vartheta(\tau'_{11}, 0, \tau'_{22})$  in  $\vartheta_3(\tau'_{11}) \cdot \vartheta_3(\tau'_{22})$ . Der Factor  $M_{B'}$  in der Gleichung

$$(13) \qquad \vartheta(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}) = M_{B'} \vartheta(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

reducirt sich also für  $\tau'_{12} = 0$  auf den Factor  $M$  in der Gleichung:

$$(14) \quad \vartheta_3(\tau') = M \vartheta_3(\tau)$$

für:

$$(15) \quad \tau' = \frac{-n + (1-n)\tau}{1 + n + n\tau}.$$

Den letzteren aber können wir ohne Schwierigkeit auf Grund der Transformationstheorie der elliptischen Functionen bestimmen; wir erhalten so für die Transformation  $B'$  das Resultat:

$$(16) \quad \sqrt[4]{D'} = i^{-n} \sqrt[4]{D}$$

und ganz ebenso für die Transformation  $\bar{B}$ :

$$(17) \quad \sqrt[4]{\bar{D}'} = i^{-1} \sqrt[4]{\bar{D}}.$$

Aus den beiden Gleichungen (16) und (17) aber folgt mit Rücksicht darauf, dass für ungerade  $n$  stets:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, das Resultat:

$$(18) \quad \sqrt[4]{\frac{D'}{D^n}} = \sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}},$$

d. h. auch wenn die Substitution  $B'$  mit den ursprünglichen Perioden vorgenommen wird, bleiben die Wurzeln, also auch die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$  ungeändert, (nicht aber die der Gleichung für  $\sqrt[4]{D'}$ , und die der Gleichung für  $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D}}$  nur, wenn  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist).

Nunmehr haben wir alle drei Substitutionen  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  erledigt und können auf Grund der erhaltenen Resultate dem zu Anfang des Paragraphen ausgesprochenen Satze folgende bestimmtere Fassung ertheilen:

*Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$  bleiben ungeändert bei allen Operationen einer Untergruppe II. Stufe, nämlich bei denjenigen, welche die zugehörige Zerlegung  $f = \varphi_3 \cdot \psi_3$  an ihrer Stelle lassen; daraus folgt,\* dass sie rationale symmetrische Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  sind\*).*

---

\*) Dem entspricht bei der gewöhnlichen Darstellung der *elliptischen* Multiplicatorgleichung der Satz, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von  $k^2 \cdot k'^2$  sind, vgl. z. B. Königsberger, Vorlesungen Bd. II, p. 179 (1874) oder Joubert, sur les équations qui se rencontrent d. l. théorie d. l. transf. p. 73 (1876)

## § 23.

**Einführung der Hermite'schen Repräsentanten.**

Unsere bisherigen Entwicklungen knüpfen durchweg an die „neuen“ Repräsentanten (Grundz. § 50) der Systeme transformirter Perioden an; für die noch folgenden erweist es sich als zweckmässig, zu den Hermite'schen zurückzukehren. Die Formeln für diesen Uebergang sind bereits in § 10 gegeben; hier ist nur noch auf einen für unsere jetzigen Zwecke wesentlichen Punkt aufmerksam zu machen. Die Wurzeln unserer Multiplicatorgleichung (für  $\sqrt[4]{D}$ ) waren, in den neuen Repräsentanten geschrieben:

$$(1) \quad \frac{\vartheta^2(\widetilde{\tau}'_{11}, \widetilde{\tau}'_{12}, \widetilde{\tau}'_{22})}{\widetilde{p}_{12}},$$

in den Hermite'schen Repräsentanten werden sie also:

$$(2) \quad i^2 \frac{\vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22})}{p_{12}},$$

und wir haben noch für die Repräsentanten des II., III. und IV. Typus den Exponenten  $\lambda$  zu bestimmen (für den I. Typus sind beide Arten von Repräsentanten identisch). Dabei müssen wir die Fälle  $n \equiv 1$  und  $n \equiv 3 \pmod{4}$  unterscheiden.

Im ersteren Falle werden die Substitutionen, welche die  $\varpi'$  in die  $\varpi$  überführen (§ 10, Gl. (15)–(18)) alle mod. 4 zur Identität congruent; in diesem Falle ist also  $\lambda$  überall  $= 0$  zu setzen.

Der zweite Fall dagegen bedarf einer längeren Ueberlegung, die wir wieder für den II. Typus durchführen wollen. Ganz wie es im vorigen Paragraphen für die Transformation  $B'$  geschah, kann gezeigt werden, dass die Bestimmung von  $\lambda$  zurückkommt auf die gleiche Bestimmung für die elliptische Thetafunction  $\vartheta_3$  und eine Transformation:

$$(3) \quad \omega_1' = n\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

deren Coefficienten (§ 10, Glchg. (8)) den Bedingungen:

$$(4) \quad n\alpha \equiv -1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv -1 \pmod{4}$$

genügen. Für eine solche Transformation findet man aber:

$$(5) \quad \frac{\vartheta_3^2(\tau')}{\omega_1'} = - \frac{\vartheta_3^2(\tau)}{\omega_1},$$

und daher erhalten wir auch:

$$(6) \quad \frac{\vartheta^2(\widetilde{\tau}'_{11}, \widetilde{\tau}'_{12}, \widetilde{\tau}'_{22})}{\widetilde{p}'_{12}} = - \frac{\vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22})}{\widetilde{p}_{12}}.$$

Der III. und IV. Typus lässt sich ganz in derselben Weise behandeln. Indem wir noch statt der  $\widetilde{p}_{12}$  die ursprüngliche Periodendeterminante  $p_{12}$  einführen und in der Formulirung des Resultats die beiden vorher unterschiedenen Fälle  $n \equiv 1$  und  $n \equiv 3 \pmod{4}$  zusammenfassen, gelangen wir zu folgendem Satz: \*)

Will man die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[n]{D}$  durch Thetafunctionen der modificirten Hermite'schen Repräsentanten ausdrücken, so hat man zu setzen:

für die Repräsentanten des I. Typus:

$$\frac{1}{n^2 p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22});$$

für die Repräsentanten des II. und III. Typus:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22});$$

für den Repräsentanten des IV. Typus:

$$\frac{1}{p_{12}} \vartheta^2(\widetilde{\tau}_{11}, \widetilde{\tau}_{12}, \widetilde{\tau}_{22}).$$

Wir fügen die Reihenentwicklungen der hier auftretenden Theta-nullwerthe bei. Setzen wir wieder:

$$(7) \quad p = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad q = e^{\pi i \tau_{12}}, \quad r = e^{\pi i \tau_{22}},$$

sowie:

$$\varepsilon = \frac{2\pi i}{n},$$

so erhalten wir:

für den I. Typus:

$$\vartheta = \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{4k\mu_1^2 + 8l\mu_1\mu_2 + 4m\mu_2^2} p^{\frac{1}{n}\mu_1^2} q^{\frac{2}{n}\mu_1\mu_2} r^{\frac{1}{n}\mu_2^2};$$

für den II. Typus:

$$\vartheta = \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{4k\mu_1^2} p^{\frac{1}{n}(n\mu_1 + 4l\mu_2)^2} q^{\frac{2}{n}(n\mu_1 + 4l\mu_2)\mu_2} r^{\frac{1}{n}\mu_2^2};$$

(8)

für den III. Typus:

$$\vartheta = \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{4k\mu_1^2} p^{\frac{1}{n}\mu_1^2} q^{\frac{2}{n}\mu_1\mu_2} r^{\frac{1}{n}\mu_2^2};$$

für den IV. Typus:

$$\vartheta = \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} p^{n\mu_1^2} q^{2n\mu_1\mu_2} r^{n\mu_2^2}.$$

\*) Dasselbe Resultat hat auf anderem Wege Herr Wiltheiss erhalten, Cr. J. Bd. 96, vgl. insbes. p. 26 u. 34.



Wir fügen auch die entsprechenden Entwicklungen für  $\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  bei, unterlassen aber für diese die Bestimmung der beim Uebergang von den neuen zu den Hermite'schen Repräsentanten zutretenden Einheitswurzeln, da wir sie nicht brauchen werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 & \text{I. } \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu_1+\mu_2+1} \varepsilon^{k(2\mu_1+1)^2+2l(2\mu_1+1)(2\mu_2+1)+m(2\mu_2+1)^2} \\
 & \quad \cdot p^{\frac{1}{n} \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{\frac{1}{n} \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right) \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{\frac{1}{n} \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2}; \\
 & \text{II. } \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu_1+\mu_2+1} \varepsilon^{k(2\mu_2+1)^2} p^{\frac{1}{n} \left(n \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right) + 4l \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \\
 (9) \quad & \quad \cdot q^{\frac{1}{n} \left(n \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right) + 4l \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)\right) \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{\frac{1}{n} \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2}; \\
 & \text{III. } \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu_1+\mu_2+1} \varepsilon^{k(2\mu_1+1)^2} p^{\frac{1}{n} \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2 \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right) \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{n \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2}; \\
 & \text{IV. } \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu_1+\mu_2+1} p^{n \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)^2} q^{2n \left(\mu_1+\frac{1}{2}\right) \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)} r^{n \left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

## § 24.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[n]{D}$  sind ganze Functionen der Coefficienten von  $\varphi$  und  $\psi$ .

Wir fragen jetzt, ob die Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung irgendwo unendlich gross werden. An die Spitze dieser Untersuchung stellen wir folgenden bekannten Satz:

*Wenn die gegebenen Thetamoduln den zur Convergenz der Theta-reihen erforderlichen Bedingungen genügen, so genügen ihnen auch die transformirten Thetamoduln.*

Aus diesem Satze folgt nun zunächst:

*Solange die Verzweigungspunkte des vorgelegten hyperelliptischen Gebildes alle von einander verschieden sind, bleiben die Wurzeln und also auch die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[n]{D}$  endlich.*

Wir untersuchen weiter, wie sie sich verhalten, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken; dabei stützen wir uns auf das im II. Abschnitte erhaltene Resultat, dass, für  $\lim (\alpha_2 - \alpha_1) = 0$ ,  $\lim p_{12}$  endlich und  $\lim p = 0$  ist. Es bleiben aber für  $p = 0$  und endliches  $p_{12}$  alle transformirten Th-Nullwerthe endlich für jede Charakteristik: durch lineare Transformation folgt, dass dasselbe für Zusammenrücken

von zwei beliebigen Verzweigungspunkten gilt. Also können wir schliessen:

*Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  bleiben auch dann endlich, wenn zwei Verzweigungspunkte des gegebenen hyperelliptischen Gebildes zusammenrücken, während die übrigen von einander und von der gemeinschaftlichen Grenzlage dieser beiden verschieden bleiben,*

Nunmehr können wir folgendermassen\*) weiter schliessen: Die Stellen, an welchen *mehr als ein Paar* Verzweigungspunkte zusammenrücken, bilden im Gebiete der Coefficienten von  $f$  eine Mannigfaltigkeit von zu geringer Dimension, als dass eine algebraische Function dieser Coefficienten an jenen Stellen allein unendlich oder unbestimmt werden könnte. Es folgt also, ohne dass wir das Verhalten unserer Functionen an jenen Stellen zu untersuchen brauchten:

*Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  sind ganze algebraische Functionen der Coefficienten von  $f$ .*

Diesen Satz halten wir nun zusammen mit dem Resultat des § 22, indem wir wieder die beiden Fälle  $n \equiv 1$  und  $n \equiv 3 \pmod{4}$  unterscheiden. Setzen wir voraus, dass *der Coefficient der höchsten Potenz von  $\sqrt[4]{D}$  zu 1 gemacht sei*, so können wir das Resultat folgendermassen formuliren:

*Ist der Transformationsgrad  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , so sind die Coefficienten gerader Potenzen von  $\sqrt[4]{D}$  in der Multiplicatorgleichung für diese Grösse ganze rationale symmetrische Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$ , die Coefficienten ungerader Potenzen Producte solcher Invarianten in  $\sqrt[4]{D}$ .*

*Ist aber der Transformationsgrad  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , so ist allgemein der Coefficient von  $\sqrt[4]{D}^\lambda$  das Product einer solchen Invariante in  $\sqrt[4]{D}^{[\lambda]}$ , unter  $[\lambda]$  den kleinsten positiven Rest von  $\lambda$  nach dem Modul 4 verstanden (0, wenn  $\lambda$  ein Vielfaches von 4).*

## § 25.

Jeder Coefficient ist durch eine bestimmte Potenz von  $D$  theilbar.

Wir haben eben hervorgehoben, dass die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  endlich bleiben, wenn zwei Wurzeln von  $f$  zusammenfallen; wir wollen aber jetzt ihr Verhalten in diesem Falle noch näher untersuchen.

Seien  $\alpha_2 - \alpha_1 = \varepsilon$  und also auch  $e^{\pi i \varepsilon} = p$  unendlich kleine Grössen erster Ordnung,  $p_{12}$  endlich und von Null verschieden, so zeigen die Reihenentwicklungen von § 23, dass die transformirten Werthe von  $\vartheta \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$  nicht nur endlich, sondern auch von Null verschieden bleiben,

\*) Vgl. dieselbe Schlussweise bei Herrn Klein, p. 69 dieses Bandes.

dass dagegen die transformirten Werthe von  $\vartheta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  unendlich klein werden, und zwar:

die  $n^3$  des Typus I von der Ordnung  $\frac{1}{4n}$ ;

diejenigen  $n$  des Typus II, für welche  $l = 0$ , von der Ordnung  $\frac{n}{4}$ ;

diejenigen  $n^2 - n$  des Typus II, für welche  $l \geq 0$ , von der Ordnung  $\frac{1}{4n}$  \*);

die  $n$  des Typus III ebenfalls von der Ordnung  $\frac{1}{4n}$ ;

endlich der des Typus IV von der Ordnung  $\frac{n}{4}$ .

Nun gehört bei der hier zu Grunde gelegten Wahl des Querschnittsystems (§ 1)  $\vartheta \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$  zu einer solchen Zerlegung  $\begin{pmatrix} 024 \\ 135 \end{pmatrix}$  der Form  $f$ , bei welcher die Punkte 1 und 2 getrennt werden,  $\vartheta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  zu einer solchen  $\begin{pmatrix} 012 \\ 345 \end{pmatrix}$ , bei welcher sie vereinigt bleiben. Andererseits aber können wir einer gegebenen Form  $\sqrt[4]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$  durch Aenderung des Querschnittsystems jede beliebige gerade Charakteristik verschaffen. Was also von  $D_{012}^{345}$  beim Zusammenrücken von 1 mit 2 gilt, das muss auch von  $D_{024}^{135}$  beim Zusammenrücken von 2 mit 4 gelten. Berücksichtigen wir noch, dass die Coefficienten unserer Multiplicatorgleichung abgesehen von Potenzen von  $\sqrt[4]{D}$  rationale symmetrische Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$  sind, so können wir aus diesen Ueberlegungen folgenden Schluss ziehen:

*Verschwindet die Resultante von  $\varphi$  und  $\psi$ , so bleiben die  $(n^2+1)(n+1)$  Werthe von  $\sqrt[4]{D}$  endlich und von Null verschieden; wird aber die Discriminante von  $\varphi$  oder die von  $\psi$  unendlich klein (von der Ordnung 2), so werden  $n^2(n+1)$  von jenen Werthen unendlich klein je von der Ordnung  $\frac{1}{2n}$ , die übrigen  $n+1$  je von der Ordnung  $\frac{n}{2}$ .*

Jeder Coefficient der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  muss also durch eine bestimmte Potenz von  $D^{\frac{1}{2n}}$  theilbar sein. Das Absolutglied z. B. wird das Product von  $D^{\frac{1}{2}n(n+1)}$  in eine Invariante des Grades  $(n-1)^2(n+1)$ ; das Verschwinden der letzteren sagt, wie leicht zu sehen, aus, dass

---

\*) Glieder dieser Ordnung kommen stets wirklich vor, da die diophantische Gleichung  $n\mu_1 + 4l\mu_2 = -\frac{1}{2}(n-1) - 2l$  stets ganzzahlige Lösungen  $\mu_1, \mu_2$  besitzt.

ein zu dem gegebenen Gebilde gehöriges Integral in einer die Zerlegung  $f = \varphi \cdot \psi$  auszeichnenden Weise durch Transformation  $n^{\text{ter}}$  Ordnung auf ein elliptisches reducirt werden kann (vgl. Abschn. II u. V).

## § 26.

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[n]{D}$  sind ganze Functionen der ursprünglichen Th-Nullwerthe

Wir wollen auch noch untersuchen, was aus den Wurzeln unserer Multiplicatorgleichung wird, wenn drei Verzweigungspunkte des gegebenen hyperelliptischen Gebildes zusammenrücken; dabei knüpfen wir an die Resultate von Abschnitt II an\*). Wir sahen dort, dass unter dieser Voraussetzung die Grenzwerte  $\lim (\varepsilon^{\frac{1}{2}} p_{12})$  und  $\lim (\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tau_{12})$  endlich und von 0 verschieden bleiben, es bleibt also auch:

$$\lim \frac{e^{\mu \pi i \tau_{12}} - e^{-\mu \pi i \tau_{12}}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

für jeden von Null verschiedenen Exponenten  $\mu$  endlich und von Null verschieden. Nun lassen sich in denjenigen  $(n+1)^2$  der Entwicklungen (9) in § 23, in welchen  $l = 0$  ist, die Glieder stets in Paare der Form:

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma - p^\alpha q^{-\beta} r^\gamma$$

zusammenfassen; alle diese Reihen werden also für  $\varepsilon = 0$  unendlich klein wie  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , während die  $n^3 - n$  übrigen Reihen von Null verschieden bleiben. Nach Division mit  $p_{12}$  erhalten wir hieraus das Resultat:

*Werden die gegenseitigen Entfernungen der drei Wurzeln von  $\varphi$  (oder der drei Wurzeln von  $\psi$ ) von der ersten Ordnung unendlich klein, so werden von den Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[n]{D}$   $(n+1)^2$  unendlich klein von der Ordnung  $\frac{3}{2}$ , die übrigen  $n^3 - n$  von der Ordnung  $\frac{1}{2}$ .*

Die Entwicklungen (26) dagegen bleiben für  $\tau_{12} = 0$  endlich und von Null verschieden; daher folgt:

*Werden die gegenseitigen Entfernungen zweier Wurzeln von  $\varphi$  und einer von  $\psi$  (oder zweier von  $\psi$  und einer von  $\varphi$ ) von der ersten Ord-*

---

\*) Die dort hinzugefügte Einschränkung „das Doppelverhältniss der drei zusammenrückenden Punkte mit irgend einem festen vierten Punkt soll einen bestimmten, von 0, 1,  $\infty$  verschiedenen Werth behalten“ können wir hier weglassen, da wir bereits wissen, dass wir es mit ganzen algebraischen Functionen zu thun haben, deren Grenzwerte von der Art der Annäherung unabhängig sein müssen.

nung unendlich klein, so werden die Wurzeln der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  alle unendlich klein von der Ordnung  $\frac{1}{2}$ .

Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung werden also in beiden Fällen unendlich klein von einer Ordnung, welche halb so hoch ist, als ihr Grad in den Coefficienten von  $\varphi$  und  $\psi$ ; daraus folgt (IV, § 3):

*Die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für  $\sqrt[4]{D}$  sind ganze Functionen der ursprünglichen Th-Nullwerthe.*

## VII.

Berechnung einiger Coefficienten der Multiplicatorgleichung für Transformation dritten Grades.

### § 27.

#### Allgemeiner Ansatz.

Es sollen nun für den speciellen Fall  $n = 3$  einige Coefficienten der Multiplicatorgleichung für:

$$x = \sqrt[4]{D}$$

wirklich berechnet werden. Zu diesem Zwecke werde zunächst zusammengestellt, was über die Form dieser Coefficienten aus den allgemeinen Entwicklungen des vorigen Abschnitts sich ergibt. Zunächst:

*Der Grad der Gleichung wird:*

$$3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40.$$

Aus VI, § 5 folgt: Wird  $\sqrt[4]{D}$  von der ersten Ordnung unendlich klein, so werden von den 40 Werthen unseres  $x$  36 unendlich klein von der Ordnung  $\frac{1}{3}$ , die übrigen von der Ordnung 3. Die Summe der Producte der Wurzeln zu je  $\lambda$  wird also unendlich klein mindestens von der Ordnung  $\frac{\lambda}{3}$ , wenn  $\lambda \leq 36$  ist, dagegen mindestens von der Ordnung:

$$\frac{1}{3} 36 + 3 \cdot (\lambda - 36) = 3\lambda - 96,$$

wenn  $\lambda \geq 36$  ist; daraus folgt:

*Der Coefficient von  $x^{40-\lambda}$  in unserer Gleichung hat zum Factor eine Potenz von  $D$ , deren Exponent:*

$$\text{mindestens gleich } \frac{1}{12} \lambda \text{ für } \lambda \leq 36,$$

$$\text{mindestens gleich } \frac{3}{4} \lambda - 24 \text{ für } \lambda \geq 36$$

ist.

Das Product sämmtlicher Wurzeln wird dabei genau von der Ordnung 24 unendlich klein; *das absolute Glied unserer Gleichung hat also genau die Potenz  $D^6$  zum Factor.*

Andererseits folgt aus dem Schlusssatze von § 24 dass *der Exponent von  $\sqrt[4]{D}$  im Exponenten von  $x^{40-\lambda}$  eine ganze Zahl und  $\equiv -\lambda \pmod{4}$  sein muss.*

Halten wir alle diese Bemerkungen zusammen, so ergibt sich für unsere Gleichung folgende Form:

$$\begin{aligned}
 & x^{40} + 0 \cdot x^{39} + g_0 D^{\frac{1}{2}} x^{38} + g_2 D^{\frac{1}{4}} x^{37} + g_0' D x^{36} + g_2' D^{\frac{3}{4}} x^{35} \\
 & + g_4 D^{\frac{1}{2}} x^{34} + g_2'' D^{\frac{5}{4}} x^{33} + g_4' D x^{32} + g_6 D^{\frac{3}{4}} x^{31} + g_4'' D^{\frac{3}{2}} x^{30} \\
 & + g_6' D^{\frac{5}{4}} x^{29} + g_8 D x^{28} + g_6'' D^{\frac{7}{4}} x^{27} + g_8' D^{\frac{3}{2}} x^{26} + g_{10} D^{\frac{5}{4}} x^{25} \\
 & + g_8'' D^2 x^{24} + g_{10}' D^{\frac{7}{4}} x^{23} + g_{12} D^{\frac{3}{2}} x^{22} + g_{10}'' D^{\frac{9}{4}} x^{21} + g_{12}' D^2 x^{20} \\
 & + g_{14} D^{\frac{7}{4}} x^{19} + g_{12}'' D^{\frac{5}{2}} x^{18} + g_{14}' D^{\frac{9}{4}} x^{17} + g_{16} D^2 x^{16} + g_{14}'' D^{\frac{11}{4}} x^{15} \\
 & + g_{16}' D^{\frac{5}{2}} x^{14} + g_{18} D^{\frac{9}{4}} x^{13} + g_{16}'' D^3 x^{12} + g_{18}' D^{\frac{11}{4}} x^{11} + g_{20} D^{\frac{5}{2}} x^{10} \\
 & + g_{18}'' D^{\frac{13}{4}} x^9 + g_{20}' D^3 x^8 + g_{22} D^{\frac{11}{4}} x^7 + g_{20}'' D^{\frac{7}{2}} x^6 + g_{22}' D^{\frac{13}{4}} x^5 \\
 & + g_{24} D^3 x^4 + g_{22}'' D^{\frac{15}{4}} x^3 + g_{20}''' D^{\frac{9}{2}} x^2 + g_{18}''' D^{\frac{21}{4}} x + g_{16}''' D^6 = 0.
 \end{aligned}$$

Die  $g, g', g'', g'''$  bedeuten darin *ganze rationale symmetrische Invarianten von  $\varphi$  und  $\psi$* , deren Grad in den Coefficienten jeder von beiden Formen durch die ihnen beigefügten unteren Indices bezeichnet ist.

Der Coefficient von  $x^{39}$  muss Null sein, da er eine ganze Function ersten Grades der Coefficienten von  $\varphi$  und  $\psi$  und doch durch  $D^{\frac{3}{4}}$  theilbar sein soll.

## § 28.

### Berechnung der ersten Coefficienten.

Für die Berechnung der Coefficienten der Multiplicatorgleichung wird es sich im allgemeinen empfehlen, den Weg durch die Potenzsummen der Wurzeln hindurch zu wählen, welche für  $\lambda \leq 36$  die angegebenen Eigenschaften mit den Coefficienten von gleichem Grade theilen. (Nur die 3 letzten Coefficienten haben höhere Potenzen von  $\sqrt[4]{D}$  zu Factoren, als die entsprechenden Potenzsummen). Diese Potenzsummen lassen sich nach Multiplication mit dem bekannten transscen-

denen Zusatzfactor darstellen durch Reihen, welche nach Potenzen von  $p, r, s$  fortschreiten und deren Anfangsglieder aus den Entwicklungen (8) des § 23 leicht erhalten werden können. Dabei kann man die Rechnung dadurch sehr vereinfachen, dass man von Anfang an alle Glieder unberücksichtigt lässt, welche wegen der zwischen den Einheitswurzeln bestehenden Relationen später doch herausfallen.

Andererseits folgt aus den angegebenen Eigenschaften der Coefficienten und aus den Entwicklungen des IV. Abschnitts für jeden derselben ein Ausdruck als Summe einer gewissen Anzahl von Invariantenproducten, mit unbekannten numerischen Coefficienten. Indem man hier für die Invarianten ihre Entwicklungen aus § 17 einsetzt, gelangt man durch Reihenvergleichung zur Berechnung dieser Zahlenfactor und damit zur vollständigen Bestimmung der Coefficienten unserer Gleichung.

Auf diesem Wege überzeugt man sich zunächst davon, dass in der That:

$$s_1 = \sum x = 0$$

ist. Ferner zeigt sich, dass für  $s_2, s_3, s_4, s_5$  immer nur je eine Invariante existirt, welche allen Bedingungen genügt, sodass nur je ein Zahlenfactor zu bestimmen bleibt, man findet\*):

$$\begin{aligned} s_2 = \sum x^2 &= 8 + 64(p+r) + 192(p^2+r^2) + 256pr + 256(p^3+r^3) \\ &\quad + 0(p^2r+pr^2) + 192(p^4+r^4) - 1024(p^3r+pr^3) \\ &\quad - 1536p^2r^2 + 64prs^2 + \dots \\ &= 216\sqrt[3]{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 = \sum x^3 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \{ 16 - 320(p+r) - 1088(p^2+r^2) + 7680pr \\ &\quad - 1536(p^3+r^3) - 6400(p^2r+pr^2) - 4160(p^4+r^4) \\ &\quad + 0(p^3r+pr^3) + 12544p^2r^2 - 320prs^2 + \dots \} \\ &= 16B\sqrt[4]{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 = \sum x^4 &= \frac{1}{27} \{ 280 + 4480(p+r) + 31360(p^2+r^2) + 53760pr \\ &\quad + 125440(p^3+r^3) + 250880(p^2r+pr^2) \\ &\quad + 318080(p^4+r^4) + 501760(p^3r+pr^3) \\ &\quad + 501760(p^2r+pr^2) + 4480prs^2 + \dots \} \\ &= 7560D; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_5 = \sum x^5 &= \frac{1}{81\sqrt[3]{3}} \{ 2080 - 24960(p+r) - 424320(p^2+r^2) + \dots \} \\ &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13B\sqrt[4]{D^3}. \end{aligned}$$

\*) Es sind jedesmal so viele Entwicklungsglieder verglichen, als angegeben sind.

Mit Hilfe der Newton'schen Formeln ergeben sich hieraus die Anfangsglieder der Multiplicatorgleichung wie folgt:

$$x^{40} + * - 108 D^{\frac{1}{2}} x^{38} - 16 B D^{\frac{1}{4}} x^{37} + 3942 D x^{36} + 480 B D^{\frac{3}{4}} x^{35} + \dots = 0.$$

## § 29.

### Das Absolutglied der Multiplicatorgleichung.

Das letzte Glied unserer Multiplicatorgleichung enthält, wie oben (§ 27) erwähnt,  $D^6$  — und zwar keine höhere Potenz von  $D$  — zum Factor. Ist aber  $D \geq 0$ , so kann nach den Resultaten des V. Abschnitts (vgl. auch § 25 a. E.)  $\bar{D}$  nur verschwinden, wenn die Invariante 8<sup>ten</sup> Grades:

$$G_8 = 3^{11} D^2 - 2^5 3^6 D E - 2^8 E^2 + 2^9 3^2 Z T$$

verschwindet. Der nach Abtrennung von  $D^6$  noch übrig bleibende Factor 16. Grades muss also bis auf einen Zahlenfactor mit  $G_8^2$  identisch sein; durch das Anfangsglied der Reihenentwickelungen findet man:

*Das letzte Glied unserer Multiplicatorgleichung ist:*

$$\frac{1}{3^8} G_8^2 D^6.$$

Hiermit ist das in der Einleitung in Aussicht gestellte nächste Ziel dieser Untersuchungen erreicht: wir haben eine Reihe von Eigenschaften unserer Gleichung kennen gelernt, die es uns ermöglicht haben zu vollständiger Ausrechnung wenigstens einiger ihrer Coefficienten vorzudringen. Eine Eigenschaft unserer Gleichung aber ist dabei noch nicht zur Geltung gekommen; es sei darüber vorläufig nur folgendes bemerkt: Die Quadratwurzeln aus den  $n + 1$  Wurzeln der *elliptischen* Multiplicatorgleichung für Transformation vom Primzahlgrade  $n$  lassen sich bekanntlich durch  $\frac{n+1}{2}$  Grössen linear ausdrücken.

Analoge Ausdrücke für die Wurzeln der *hyperelliptischen* Multiplicatorgleichung hat Herr Wiltheiss\*) aufgestellt; und diese in der That fundamentale Eigenschaft unserer Gleichung ist es, welche in diesem I. Theil unserer Untersuchungen bei Seite gelassen wurde, um so mehr aber im weiteren Verlauf derselben in den Vordergrund treten soll.

Göttingen, November 1889.

---

\*) Crelle's Journal Bd. 96, (1884). Dort ist p. 27 mitgetheilt, dass Herr Kronecker schon früher im Besitz der betr. Relationen war.