Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden.

Von

J. Nielsen im Felde.

Für diejenigen unendlichen, diskontinuierlichen Gruppen, welche definiert werden durch eine endliche Anzahl von erzeugenden Operationen, zwischen denen keine Relation besteht, sind die ersten beiden der von M. Dehn gekennzeichneten „Fundamentalprobleme"*), nämlich das Identitäts- und das Transformationsproblem trivial. Das dritte, das Isomorphieproblem hat bei ihnen die Bedeutung: Zu entscheiden, ob die Zuordnung der n Erzeugenden zu n vorgegebenen Elementen der Gruppe eine isomorphe Zuordnung ist oder nicht.

Im folgenden wird dieses Problem für die allgemeine, unendliche Gruppe $G(a, b)$ mit zwei Erzeugenden a und b gelöst, einige Eigenschaften der isomorphen Zuordnungen entwickelt und die Anwendung gemacht auf ein topologisches Problem, die Abbildungsgruppe der einfach berandeten Fläche vom Geschlecht 1.

I.

Zwei Elemente α und β der Gruppe $G(a, b)$ heißen zusammengehörige, primitive Elemente, wenn aus ihnen die gesamte Gruppe erzeugt werden kann. Das ist der Fall, wenn die ursprünglichen Erzeugenden a und b durch α und β ausgedrückt werden können. Die Substitution $S = (\alpha, \beta)$, bei welcher a durch α und b durch β ersetzt wird, definiert allgemein einen Isomorphismus von $G(a, b)$. Wir suchen zunächst eine Methode, um in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob eine vorgegebene Substitution S einen Isomorphismus definiert oder nicht. α und β sind allgemein von der Form

*) „Über unendliche diskontinuierliche Gruppen". Math. Ann. 71.

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = a^{m_1} \cdot b^{n_1} \cdots a^{m_p} b^{n_p} = \prod\limits_{i=1}^{i=p} (a^{m_i} b^{n_i}), \\ \beta = a^{m_1'} \cdot b^{n_1'} \cdots a^{m_q'} b^{n_q'} = \prod\limits_{i=1}^{i=q} (a^{m_i'} b^{n_i'}), \end{cases}$$

wobei alle Exponenten und die Indizes p und q als endlich vorausgesetzt sind, und sind zusammengehörige primitive Elemente, wenn für ebenfalls endliche Exponenten und Indizes zwei Gleichungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{cases} a = \alpha^{\mu_1} \beta^{\nu_1} \cdots \alpha^{\mu_\pi} \beta^{\nu_\pi} = \prod\limits_{i=1}^{i=\pi} (\alpha^{\mu_i} \beta^{\nu_i}), \\ b = \alpha^{\mu_1'} \beta^{\nu_1'} \cdots \alpha^{\mu_\psi'} \beta^{\nu_\psi'} = \prod\limits_{i=1}^{i=\psi} (\alpha^{\mu_i'} \beta^{\nu_i'}). \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingungsgleichungen:

$$(3)\quad \Sigma\mu \cdot \Sigma m + \Sigma\nu \cdot \Sigma m' = 1, \qquad \Sigma\mu' \cdot \Sigma m + \Sigma\nu' \cdot \Sigma m' = 0, \quad (5)$$

$$(4)\quad \Sigma\mu \cdot \Sigma n + \Sigma\nu \cdot \Sigma n' = 0, \qquad \Sigma\mu' \cdot \Sigma n + \Sigma\nu' \cdot \Sigma n' = 1. \quad (6)$$

Es muß mindestens ein Quadrupel endlicher Werte $\Sigma\mu$, $\Sigma\nu$, $\Sigma\mu'$, $\Sigma\nu'$ geben, das diesen vier Gleichungen genügt. Daraus folgt:

Wegen (3) ist nicht gleichzeitig Σm und $\Sigma m'$ gleich 0,
" (6) " " " Σn " $\Sigma n'$ " 0,

und daraus weiter:

Wegen (3) und (4) " " " Σm " Σn " 0,
" (5) " (6) " " " $\Sigma m'$ " $\Sigma n'$ " 0.

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma m & \Sigma n \\ \Sigma m' & \Sigma n' \end{vmatrix}$$

kann also nur verschwinden, indem alle Glieder von 0 verschieden und die Kolonnen einander proportional sind. Dann ergibt sich aus (3) und (4) ein Widerspruch, ebenso aus (5) und (6). Also ist $\Delta \neq 0$ und

$$(7)\qquad \begin{cases} \Sigma\mu = \dfrac{\Sigma n'}{\Delta}, & \Sigma\nu = \dfrac{-\Sigma n}{\Delta}, \\ \Sigma\mu' = \dfrac{-\Sigma m'}{\Delta}, & \Sigma\nu' = \dfrac{\Sigma m}{\Delta}. \end{cases}$$

Da die links stehenden Summen ganzzahlig werden sollen, müssen die rechts stehenden Zähler alle den Faktor Δ enthalten. Also ist Δ selber durch Δ^2 teilbar und es folgt: $\Delta = \pm 1$.

Im folgenden ist die Anzahl der Erzeugenden eines Aggregats A mit $N(\mathsf{A})$ bezeichnet. Es ist daher vorausgesetzt, daß in A wie auch in den vorgegebenen, durch (1) definierten, zusammengehörigen primitiven Elementen α und β kein Bestandteil der Form $\mathsf{B}\mathsf{B}^{-1}$ vorkommt. (α, β) läßt dann folgende Eigenschaften erkennen:

1. Auch die Elemente $\begin{cases} \bar{\alpha} = \mathsf{A}\alpha\mathsf{A}^{-1}, \\ \bar{\beta} = \mathsf{A}\beta\mathsf{A}^{-1} \end{cases}$

bilden ein primitives Paar. Denn bilden wir für sie die den Auflösungsgleichungen (2) entsprechenden Ausdrücke, so ergibt sich:

$$\prod_{i=1}^{i=\pi}(\bar{\alpha}^{\mu_i}\bar{\beta}^{\nu_i}) = \mathsf{A}\,a\,\mathsf{A}^{-1}, \qquad \prod_{i=1}^{i=\psi}(\bar{\alpha}^{\mu_i'}\bar{\beta}^{\nu_i'}) = \mathsf{A}\,b\,\mathsf{A}^{-1}.$$

Besteht nun das Aggregat A nur aus einer Erzeugenden, z. B. a, so ist der erste Produktausdruck unmittelbar $= a$, und wir erhalten weiter:

$$\left[\prod_{i=1}^{i=\pi}(\bar{\alpha}^{\mu_i}\bar{\beta}^{\nu_i})\right]^{-1}\prod_{i=1}^{i=\psi}(\bar{\alpha}^{\mu_i'}\bar{\beta}^{\nu_i'})\prod_{i=1}^{i=\pi}(\bar{\alpha}^{\mu_i}\bar{\beta}^{\nu_i}) = b.$$

Da jede Transformation durch eine Reihe von Transformationen mit je einer Erzeugenden ersetzt werden kann, so gilt der Satz allgemein für jede Form des Aggregats A.

2. Hat ein Element des Paares, z. B. α, die Eigenschaft, daß α und α^{-1} mit der gleichen Erzeugenden beginnen, so muß, damit überhaupt in (2) die Zahl der Erzeugenden sich durch Absorption verkleinern kann, β *oder* β^{-1} mit derselben Erzeugenden anfangen. Also ist das Paar von der Form:

$$\begin{cases} \alpha = c\mathsf{A}c^{-1} \\ \beta = c\mathsf{B} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \alpha = c\mathsf{A}c^{-1} \\ \beta = \mathsf{B}c^{-1}. \end{cases}$$

Dann wird durch Transformation mit c die Zahl $N(\alpha)$ erniedrigt und die Zahl $N(\beta)$ nicht erhöht. Ist auf diese Weise durch Transformation erreicht, daß weder α noch β von der Form $c\mathsf{A}c^{-1}$ sind, so soll der so erhaltene Ausdruck von (α, β) eine „reduzierte Form“ unter allen ineinander transformierbaren Formen des Paares heißen. Im folgenden ist (α, β) reduziert angenommen.

3. Ist $N(\alpha) = N(\beta) = 1$, so kann das Paar (α, β) offenbar nur eine der acht Formen haben:

$$(a, b), \quad (a, b^{-1}), \quad (a^{-1}, b), \quad (a^{-1}, b^{-1}),$$
$$(b, a), \quad (b, a^{-1}), \quad (b^{-1}, a), \quad (b^{-1}, a^{-1}).$$

4. Ist, was im folgenden vorausgesetzt bleibt, nicht gleichzeitig $N(\alpha)$ und $N(\beta) = 1$, so muß (2) ausgeführt von der Form sein

$$\begin{cases} a = \Gamma_1 a \Gamma_2, \\ b = \Gamma_3 b \Gamma_4. \end{cases}$$

Hierbei sind die einzelnen $\Gamma_i = 1$, und mindestens eins von ihnen umfaßt mehr als 0 Erzeugende. Jedes Γ_i, für welches $N(\Gamma_i) > 0$ ist, muß mehr als ein vollständiges Element α oder β enthalten. Denn es ist nicht ein Element oder ein Teil eines solchen für sich $= 1$. In jedem solchen Aggregat Γ gibt es mindestens ein Element, das von seinen Nachbarelementen (dem vorausgehenden und dem nachfolgenden oder beiden zugleich, aber nicht mehr als diesen beiden) absorbiert wird, ohne daß an anderer Stelle im Aggregat Γ Absorption stattzufinden braucht. Denn bliebe nach dem Auslöschen von Bestandteilen $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}$ an allen Stellen im Aggregat Γ, wo sich zwei Elemente berühren, in jedem Element ein Rest nach, so bestände Γ aus lauter solchen Resten, zwischen denen keine Absorption mehr stattfindet, wäre also nicht gleich 1.

5. Das in einem Aggregat Γ von seinen beiden Nachbarelementen absorbierte Element sei ein α.

Fall I: Dies α stehe zwischen einem α und einem β. Da Bestandteile $\alpha\alpha^{-1}$ in (2) also auch in Γ nicht vorkommen und α reduziert ist, so muß α von dem benachbarten β-Element allein absorbiert werden. Also ist α oder α^{-1} ein Bestandteil am Anfang oder Ende von β.

Fall II: Dies α stehe zwischen zwei β-Elementen. Es habe die Form $\alpha = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$, und A_1 werde durch das vorhergehende, A_2 durch das nachfolgende β ausgelöscht. Dann bestehen vier Möglichkeiten: Die Reihenfolge der Elemente ist $\cdots\beta\alpha\beta\cdots$ oder $\cdots\beta^{-1}\alpha\beta\cdots$ oder $\cdots\beta\alpha\beta^{-1}\cdots$ oder $\cdots\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}\cdots$. Im zweiten und dritten Fall muß α, da es reduziert ist, von einem der Nachbarelemente allein ausgelöscht werden, fällt also unter Fall I. Im ersten (und analog im vierten) Fall müßte β von der Form sein, einmal

$$\beta = \mathsf{B}_1\mathsf{A}_1^{-1},$$

gleichzeitig aber

$$\beta = \mathsf{A}_2^{-1}\mathsf{B}_2,$$

so daß die Erzeugenden von B_1 der Reihe nach mit denen von A_2^{-1} übereinstimmen. Transformieren wir nun das Paar (α, β) mit A_1, wodurch an seinem reduzierten Charakter nichts geändert wird, so wird

$$\bar{\alpha} = \mathsf{A}_1^{-1}\alpha\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2\mathsf{A}_1,$$

$$\bar{\beta} = \mathsf{A}_1^{-1}\beta\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_1^{-1}\mathsf{B}_1.$$

Ist nun $N(\alpha) > N(\beta)$, so ist $N(\mathsf{A}_2) > N(\mathsf{B}_1)$. Dann ist $\bar{\beta}^{-1}$ Endbestandteil von $\bar{\alpha}$.

Ist $N(\alpha) < N(\beta)$, so ist $N(\mathsf{A}_2) < N(\mathsf{B}_1)$. Dann ist $\bar{\alpha}^{-1}$ Anfangsbestandteil von $\bar{\beta}$.

Ist endlich $N(\alpha) = N(\beta)$, also $N(\mathsf{A}_2) = N(\mathsf{B}_1)$, so müßte sein $\bar{\alpha} = \bar{\beta}^{-1}$ Dieser Fall ist also unmöglich bei der Voraussetzung, daß nicht gleichzeitig $N(\alpha)$ und $N(\beta) = 1$ sind.

Zusammenfassend haben wir also den Satz:

In jedem primitiven Paar (α, β) *ist das Element mit kleinerer Zahl von Erzeugenden, mit dem Exponenten* $+1$ *oder* -1 *versehen, Anfangs- oder Endbestandteil des Elements mit der größeren Zahl von Erzeugenden, oder dies ist durch Transformation erreichbar. Haben beide Elemente die gleiche Zahl von Erzeugenden, so besteht jedes aus nur einer Erzeugenden.*

6. Es sei $N(\alpha) < N(\beta)$. Dann ist also — eventuell nach einer reduzierten Transformation des Paares — $\beta = \alpha\beta'$ oder $\beta'\alpha$ oder $\alpha^{-1}\beta'$ oder $\beta'\alpha^{-1}$. Es sei zur Fixierung des Ausdrucks z. B. die erste Form angenommen. Nach (2) ist

$$a = \prod_{i=1}^{i=\pi} (\alpha^{\mu_i} \beta^{\nu_i}) = \prod_{i=1}^{i=\pi} (\alpha^{\mu_i} [\alpha\beta']^{\nu_i}) = \prod_{i=1}^{i=\bar{\pi}} (\alpha^{\bar{\mu}_i} \beta'^{\bar{\nu}_i})$$

und entsprechend für b. Also ist auch (α, β') ein primitives Paar. β' muß in reduzierter Form erhalten werden, denn wäre $\beta' = d\mathsf{B}d^{-1}$, wo d aus einer Erzeugenden besteht, so müßte $\alpha = d\mathsf{A}$ oder $\mathsf{A}d^{-1}$ sein. Im ersten Fall wäre β nicht reduziert, im zweiten Fall käme $d^{-1}d$ in β vor.

Ist nun noch $N(\beta') > N(\alpha)$, so ist — eventuell nach einer reduzierten Transformation — $\bar{\alpha}^{\pm 1}$ Anfangs- oder Endbestandteil von $\bar{\beta}'$.

Durch Abspalten von Bestandteilen α kommt man so schließlich zu einem Residuum γ von β, für das $N(\gamma) < N(\alpha)$ ist. Nun kann man in gleicher Weise immer nötigenfalls nach reduzierten Transformationen Anfangs- oder Endbestandteile $\gamma^{\pm 1}$ von α abspalten und fährt analog fort, bis nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Residuum von nur einer Erzeugenden als Element eines neuen Paares S_2 sich ergibt. Indem man nunmehr ohne weitere Transformationen dieses, so oft es geht, von dem anderen Element des Paares abspaltet, bringt man auch dieses auf ein Residuum von nur einer Erzeugenden und hat damit ein letztes Grundpaar S_1 in einer der unter 3. aufgeführten Grundformen erhalten.

7. (ξ, η) sei ein reduziertes Paar, für welches $1 < N(\xi) < N(\eta) < 2N(\xi)$ ist und das im besonderen die Eigenschaft hat, daß $\xi^{\pm 1}$ Anfangs- oder Endbestandteil von η ist und nach jeder reduzierten Transformation das transformierte $\bar{\xi}^{\pm 1}$ immer Anfangs- oder Endbestandteil des gleichzeitig transformierten $\bar{\eta}$ bleibt. Diese letztere Eigenschaft eines Paares soll kurz „Vollkommenheit" heißen.

Nur zur Fixierung des Ausdrucks sei wieder die bestimmte Form angenommen: $(\xi = \xi,\ \eta = \xi\eta')$. Dann erhält man durch Transformation mit ξ:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi, \\ \bar{\eta} = \eta'\xi. \end{cases}$$

Denkt man sich diese Transformation durch eine Folge von reduzierten, „rechts vertauschenden" (d. h. Aggregate von vorne nach hinten versetzenden) Einzeltransformationen mit je einer der aufeinanderfolgenden Erzeugenden von ξ ersetzt, so muß es darunter eine bestimmte Transformation T mit der Erzeugenden e geben, so daß *vor* T das Element $\bar{\bar{\xi}}$ Anfangsbestandteil von $\bar{\bar{\eta}}$, und *nach* T das Element $\bar{\bar{\bar{\xi}}}$ Endbestandteil von $\bar{\bar{\bar{\eta}}}$ ist. Also gibt es eine Darstellung:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' e \xi'', & \eta &= \xi' e \xi'' \eta', \\ \bar{\bar{\xi}} &= e\xi''\xi', & \bar{\bar{\eta}} &= e\xi''\eta'\xi', \\ \bar{\bar{\bar{\xi}}} &= \xi''\xi' e, & \bar{\bar{\bar{\eta}}} &= \xi''\eta'\xi' e. \end{aligned}$$

Es müssen danach die Erzeugenden von η' der Reihe nach mit denen von ξ', und diejenigen von η'^{-1} der Reihe nach mit denen von ξ''^{-1} übereinstimmen.

Das reduzierte Paar (sign μ = sign ν):

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi, \\ \eta_1 = \xi^{\mu}\eta\xi^{\nu}, \end{cases}$$

wobei $|\mu + \nu| > 0$ sein darf, hat offenbar auch die Eigenschaft der Vollkommenheit. Es gilt dann der Hilfssatz: Dasselbe gilt weiter auch von dem reduzierten Paar (sign μ' = sign ν'):

$$\begin{cases} \xi_2 = \eta_1^{\mu'}\xi_1\eta_1^{\nu'}, \\ \eta_2 = \eta_1. \end{cases}$$

Für $|\mu' + \nu'| > 1$ ist das unmittelbar ersichtlich, ist aber z. B. $\mu' = 1$, $\nu' = 0$, so ist also

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \eta_1\xi_1 = \xi^{\mu}\eta\xi^{\nu+1} = (\xi' e\xi'')^{\mu+1}\eta'(\xi' e\xi'')^{\nu+1}, \\ \eta_2 &= \eta_1 \quad\ = \xi^{\mu}\eta\xi^{\nu} \quad\ = (\xi' e\xi'')^{\mu+1}\eta'(\xi' e\xi'')^{\nu}. \end{aligned}$$

Transformieren wir rechts vertauschend mit $(\xi' e\xi'')^{\mu+1}$, so wird

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 &= \eta'(\xi' e\xi'')^{\mu+\nu+2}, \\ \bar{\eta}_2 &= \eta'(\xi' e\xi'')^{\mu+\nu+1} \end{aligned}$$

$\bar{\eta}_2$ steht am Anfang von $\bar{\xi}_2$. Das bleibt bei allen reduzierten links vertauschenden Transformationen erhalten. Nach den Eigenschaften von T bleibt es auch bei weiteren $N(\xi')$ rechts vertauschenden Transformationen erhalten, falls $N(\xi') \leqq N(\eta')$. Schon nach $N(\eta') - N(\xi'')$ von diesen ist aber das erzielte $\overline{\overline{\eta}}_2$ Endbestandteil von $\overline{\overline{\xi}}_2$ und bleibt das bei allen weiteren rechts vertauschenden Transformationen. Da nun nach Voraussetzung $N(\xi') + N(\xi'') \geqq N(\eta')$ ist, so ist damit die Vollkommenheit für das Paar (ξ_2, η_2) erwiesen. Das bleibt richtig, falls $N(\xi) = 1$, $N(\eta) = 2$ ist. Dann ist $N(\eta') = 1$ und $N(\xi') = N(\xi'') = 0$. Die Richtigkeit des Hilfssatzes ist in diesem Fall am Paar (ξ_2, η_2) unmittelbar abzulesen.

Das Paar S_2, auf das in 6. das ursprüngliche primitive Paar (α, β) schrittweise zurückgeführt war, hat nun offenbar die Eigenschaft der Vollkommenheit. Also besteht sie nach dem Hilfssatz auch für alle Paare der Entwicklung rückwärts und schließlich für (α, β) selbst.

Der beschränkende Zusatz im Ergebnis von 5. lautend: „oder dies ist durch Transformation erreichbar" wird hierdurch aufgehoben.

8. Wir können nach dem Bisherigen den Aufbau jedes reduzierten, primitiven Paares durch zwei Rekursionsformeln charakterisieren:

$$(8) \qquad S_{2\varrho}: \begin{cases} \alpha_{2\varrho} = \alpha_{2\varrho-1}, \\ \beta_{2\varrho} = \alpha_{2\varrho-1}^{\varepsilon_{2\varrho-1}} \beta_{2\varrho-1} \alpha_{2\varrho-1}^{\varepsilon'_{2\varrho-1}}, \end{cases}$$

$$(9) \qquad S_{2\varrho+1}: \begin{cases} \alpha_{2\varrho+1} = \beta_{2\varrho}^{\varepsilon_{2\varrho}} \alpha_{2\varrho} \beta_{2\varrho}^{\varepsilon'_{2\varrho}}, \\ \beta_{2\varrho+1} = \beta_{2\varrho} \end{cases}$$

mit den Bedingungen: S_1 hat eine der in 3. angegebenen Grundformen; ε_i und ε_i' haben das gleiche Vorzeichen, sonst wäre α_{i+1} bzw. β_{i+1} nicht reduziert; ε_i und ε_{i-1} haben das gleiche Vorzeichen, sonst gäbe es in α_{i+1} bzw. β_{i+1} einen Bestandteil von der Form $\Gamma\Gamma^{-1}$. Also haben alle ε das gleiche Vorzeichen, und das gleiche gilt von den durch $\mathsf{E}_i = \varepsilon_i + \varepsilon_i'$ definierten Größen E. Diese notwendigen Bedingungen sind zugleich hinreichend. Denn bildet $S_{2\varrho}$ ein primitives Paar, so schreiben wir die Doppelgleichung (9):

$$\begin{cases} \alpha_{2\varrho} = \beta_{2\varrho+1}^{-\varepsilon_{2\varrho}} \alpha_{2\varrho+1} \beta_{2\varrho+1}^{-\varepsilon'_{2\varrho}}, \\ \beta_{2\varrho} = \beta_{2\varrho+1} \end{cases}$$

und folgern, daß auch $S_{2\varrho+1}$ ein primitives Paar ist. Analog ist $S_{2\varrho}$ ein primitives Paar, wenn es $S_{2\varrho-1}$ ist. Und für das Paar S_1 ist es vorausgesetzt.

Das zu Anfang gestellte Problem ist damit vollständig gelöst.

9. Bilden wir für die Rekursionsformeln das charakteristische Zahlenquadrupel wie am Anfang von I, so erscheint es ebenfalls in rekursiver Form:

$$\text{für } S_{2\varrho}: \quad \begin{Bmatrix} \Sigma m_{2\varrho-1} & \Sigma n_{2\varrho-1} \\ \Sigma m_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho-1} + \Sigma m'_{2\varrho-1} & \Sigma n_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho-1} + \Sigma n'_{2\varrho-1} \end{Bmatrix}$$

$$\text{und für } S_{2\varrho+1}: \quad \begin{Bmatrix} \Sigma m'_{2\varrho} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho} + \Sigma m_{2\varrho} & \Sigma n'_{2\varrho} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho} + \Sigma n_{2\varrho} \\ \Sigma m'_{2\varrho} & \Sigma n'_{2\varrho} \end{Bmatrix}.$$

Angenommen, es sei:
$$|\Sigma m_{2\varrho}| + |\Sigma n_{2\varrho}| = N(\alpha_{2\varrho}),$$
$$|\Sigma m'_{2\varrho}| + |\Sigma n'_{2\varrho}| = N(\beta_{2\varrho}),$$
so müssen in $\Sigma m'_{2\varrho}$ und ebenso in $\Sigma n'_{2\varrho}$ beide Summanden das gleiche Vorzeichen haben. Entwickelt man also
$$\begin{aligned}\Sigma m_{2\varrho+1} &= \Sigma m'_{2\varrho} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho} + \Sigma m_{2\varrho} \\ &= \Sigma m_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho} + \Sigma m'_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho} + \Sigma m_{2\varrho-1}\end{aligned}$$
und berücksichtigt, daß $\mathsf{E}_{2\varrho-1} \cdot \mathsf{E}_{2\varrho}$ positiv ist, so folgt, daß diese drei Summanden das gleiche Vorzeichen haben. Also kann man entwickeln:
$$\begin{aligned}|\Sigma m_{2\varrho+1}| + |\Sigma n_{2\varrho+1}| &= |\mathsf{E}_{2\varrho}| \cdot (|\Sigma m'_{2\varrho}| + |\Sigma n'_{2\varrho}|) + |\Sigma m_{2\varrho}| + |\Sigma n_{2\varrho}| \\ &= |\mathsf{E}_{2\varrho}| \cdot N(\beta_{2\varrho}) + N(\alpha_{2\varrho}) = N(\alpha_{2\varrho+1}).\end{aligned}$$
Ferner ist
$$|\Sigma m'_{2\varrho+1}| + |\Sigma n'_{2\varrho+1}| = |\Sigma m'_{2\varrho}| + |\Sigma n'_{2\varrho}| = N(\beta_{2\varrho}) = N(\beta_{2\varrho+1}).$$
Also hat auch $S_{2\varrho+1}$ die von $S_{2\varrho}$ vorausgesetzte Eigenschaft. Analog läßt sie sich von $S_{2\varrho}$ erweisen, wenn sie von $S_{2\varrho-1}$ gilt. Nun gilt sie sicher von S_1, also gilt allgemein:
$$\begin{cases}|\Sigma m| + |\Sigma n| = N(\alpha), \\ |\Sigma m'| + |\Sigma n'| = N(\beta),\end{cases}$$
in Worten: *In einem in reduzierter Form gegebenen, primitiven Paar haben alle in einem Element auftretenden Erzeugenden einer Art das gleiche Exponentenvorzeichen.*

10. Unterwirft man $S_{2\varrho+1}$ der Transformation mit $\beta_{2\varrho}^{\varepsilon'_{2\varrho}}$, so wird:
$$\begin{cases}\bar{\alpha}_{2\varrho+1} = \beta_{2\varrho}^{\mathsf{E}_{2\varrho}} \alpha_{2\varrho}, \\ \bar{\beta}_{2\varrho+1} = \beta_{2\varrho}.\end{cases}$$
Transformiert man dies Paar weiter mit $\alpha_{2\varrho-1}^{\varepsilon'_{2\varrho-1}}$, so bleibt $\alpha_{2\varrho}$ ungeändert, und es wird
$$\bar{\bar{\beta}}_{2\varrho} = \alpha_{2\varrho-1}^{\mathsf{E}_{2\varrho-1}} \beta_{2\varrho-1}.$$
Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird nach 2ϱ Schritten für alle i von 1 bis 2ϱ
$$\varepsilon_i = \mathsf{E}_i, \quad \varepsilon'_i = 0.$$
Die so erhaltene, transformierte Form von $S_{2\varrho+1}$ möge Normalform heißen. Sie ist vollkommen charakterisiert durch Angabe von S_1 und der charakteristischen Reihe der E_i. Die Zahlen Σm, Σn, $\Sigma m'$ und $\Sigma n'$ werden durch die Transformationen nicht geändert. Nun führt aber*) jedes Zahlenquadrupel mit der Determinante ± 1 in eindeutiger Weise zu einem Teileralgorithmus, definiert also eindeutig eine charakteristische Reihe E_i

*) Vgl. z. B. meine Schrift „Kurvennetze auf Flächen". In. Diss., Kiel 1913, S. 47—49.

und ein aus Gliedern 0, $+1$ und -1 bestehendes Grundquadrupel. Also folgt der Satz:

Alle primitiven Paare von $G(a, b)$, die in den vier Zahlen Σm, Σn, $\Sigma m'$, $\Sigma n'$ übereinstimmen, sind ineinander transformierbar.

II.

Das unter I. erzielte Kriterium läßt sich durch das folgende einfache ersetzen:

*Zwei Elemente α und β von $G(a, b)$ bilden dann und nur dann ein Paar zusammengehöriger primitiver Elemente, wenn die Gleichung erfüllt ist:**)

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \Gamma(aba^{-1}b^{-1})^{\pm 1}\Gamma^{-1}. \tag{11}$$

1. Die Bedingung (11) ist notwendig.

Erfüllt ein Paar (α, β) die Bedingung (11), so erfüllt sie auch jedes aus (α, β) durch Transformation hervorgehende Paar. Für ein reduziertes Paar setzt man α_i und β_i aus (8) oder (9) in (11) ein und findet, daß S_i der Bedingung (11) genügt, wenn ihr S_{i-1} genügt. S_1 genügt aber der Bedingung, folglich auch S_i.

2. Die Bedingung (11) ist hinreichend.

(α, β) genüge der Bedingung, und jedes Element sei in den Erzeugenden so geschrieben, daß kein Bestandteil $\Gamma\Gamma^{-1}$ vorkommt. Hat z. B. α die Form $\alpha = c\alpha' c^{-1}$, wo c aus einer Erzeugenden besteht, so muß sich der als Zyklus geschriebene Ausdruck $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (vgl. Fig. 1) im Sinne

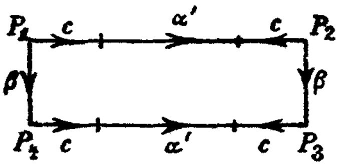

Fig. 1

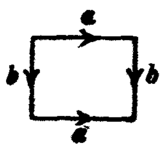

Fig. 2.

$P_1 P_2 P_3 P_4$ gelesen auf $(aba^{-1}b^{-1})^{\pm 1}$ (Fig. 2) reduzieren: Es muß also mindestens an einer Ecke P_i Absorption stattfinden, also β von der Form $c\beta'$ oder $\beta' c^{-1}$ sein. In beiden Fällen kann man durch Transformation mit c $N(\alpha)$ verkleinern, ohne $N(\beta)$ zu vergrößern. (α, β) sei also reduziert vorausgesetzt und da mit (α, β) auch (β, α) die Bedingung (11) erfüllt, können wir, ohne eine Einschränkung zu begehen, $N(\alpha) \leqq N(\beta)$ annehmen. Es sei $\alpha = c\alpha' d$. α' besteht aus 0, 1, 2 usw., c und d je aus 0 oder 1 Erzeugenden. Im Zyklus (Fig. 3) findet Absorption nicht gleichzeitig bei P_1 und P_2 statt, sonst würde $c = d^{-1}$ folgen und α wäre nicht reduziert, ebenso

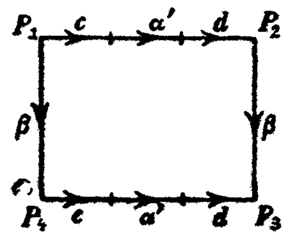

Fig. 3.

*) Dieser Satz ist mir von M. Dehn mitgeteilt worden. Sein Beweis ist von dem folgenden verschieden.

nicht gleichzeitig bei P_1 und P_4, sonst wäre β nicht reduziert. Reduktion findet nur an zwei gegenüberliegenden Ecken statt, z. B. bei P_1 und P_3.

Ist nun $N(\alpha) = N(\beta)$, so kann keine Rechtecksseite der Figur 3 ganz absorbiert werden, denn sonst wäre $\alpha = \beta$ und $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$. Findet überhaupt Reduktion statt, so muß nur an P_2 der Streckenzug dc und an P_4 im gleichen Umlaufssinn der Streckenzug $c^{-1}d^{-1}$ nachbleiben. Also ist $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$, was ausgeschlossen ist. Es kann also überhaupt keine Reduktion stattfinden, $N(\alpha) = N(\beta) = 1$. Man liest dann aus Fig. 2 ab, daß (α, β) eine der unter I, 3. angegebenen acht Grundformen hat, also ein primitives Paar ist.

Ist aber $N(\alpha) < N(\beta)$, so muß mindestens eine α-Seite ganz absorbiert werden; denn sonst blieben im Zyklus nach der Reduktion sechs oder mehr Erzeugende nach. Also ist $\alpha^{\pm 1}$ Anfangs- oder Endbestandteil von β, z. B. $\beta = \alpha\beta'$. Dann ist $\beta' = \alpha^{-1}\beta$ und

$$\alpha\beta'\alpha^{-1}\beta'^{-1} = \alpha\alpha^{-1}\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha = \alpha^{-1}(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\alpha = \Gamma(aba^{-1}b^{-1})^{\pm 1}\Gamma^{-1}.$$

Also erfüllt auch (α, β') die Gleichung (11); analog für die anderen Spezialfälle. β' wird in reduzierter Form erhalten, denn sonst wäre genau wie unter I, 6. ein Widerspruch zu folgern.

Damit sind die Bedingungen für die gleiche Analyse des Paares (α, β) wie in I mit dem dort als primitiv vorausgesetzten Paar (α, β) gegeben. (α, β) gestattet also eine Auflösung nach den Rekursionsformeln (8) und (9) mit Exponenten ε von gleichem Vorzeichen und führt auf ein primitives Grundpaar S_1, ist also selbst primitiv.

III.

Ist (α, β) ein primitives Paar, so definiert die Substitution S, bei welcher a durch α und b durch β ersetzt wird, einen Isomorphismus von $G(a, b)$. S heiße kurz „isomorphe Substitution".

Übt man auf eine isomorphe Substitution S_1 eine ebensolche S_2 aus, so entsteht wieder eine isomorphe Substitution S_3. Denn definiert man S_1 und S_2 durch Gleichungssysteme der Form (1), so existiert für jede ein Auflösungssystem (2). Entsteht also S_3, indem man S_2 auf S_1 ausübt, so kann man aus α_3, β_3 mit Hilfe des Auflösungssystems von S_1 die Elemente α_2, β_2 und weiter hieraus mit Hilfe des Auflösungssystems von S_2 die ursprünglichen Erzeugenden a und b ausdrücken.

Schreibt man diese Beziehung

$$S_3 = S_1 \cdot S_2,$$

so läßt sich das assoziative Gesetz:

$$(S_{i1} \cdot S_{i2}) \cdot S_{i3} = S_{i1} \cdot (S_{i2} \cdot S_{i3})$$

leicht nachweisen, indem man die Elemente der durch

$$S_l = (S_{i1} \cdot S_{i2}) \cdot S_{i3},$$
$$S_m = S_{i1} \cdot (S_{i2} \cdot S_{i3})$$

definierten Substitutionen mit Hilfe der Definitionsgleichungen der S_i ausführlich hinschreibt, wodurch dann die Identität von S_l und S_m augenscheinlich wird.

Mit S^{-1} sei eine isomorphe Substitution bezeichnet, welche auf S ausgeübt, diese in die identische Substitution (a, b) überführt. Es wird nach der Existenz und Auffindung von S^{-1} gefragt.

S habe die vier charakteristischen Zahlen Σm, Σn, $\Sigma m'$, $\Sigma n'$ und die aus ihnen gebildete Determinante $\Delta = \pm 1$. Dann sind durch die Gleichungen (7) vier weitere Zahlen definiert, für welche

$$\begin{vmatrix} \Sigma\mu & \Sigma\nu \\ \Sigma\mu' & \Sigma\nu' \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} \Sigma n' & -\Sigma n \\ -\Sigma m' & \Sigma m \end{vmatrix} = \Delta = \pm 1.$$

Indem man auf dieses Zahlenquadrupel einen Teileralgorithmus anwendet, gelangt man zu einer Reihe von Faktoren $\mathsf{E}_{\sigma-1}$ bis E_1 und einem Anfangsquadrupel $\begin{Bmatrix} \mu_0 & \nu_0 \\ \mu_0' & \nu_0' \end{Bmatrix}$, dessen Glieder in der einen Diagonale 0 und in der andern $+1$ oder -1 sind. Bildet man dann S_1 durch

$$\alpha_1 = a^{\mu_0} b^{\nu_0},$$
$$\beta_1 = a^{\mu_0'} b^{\nu_0'}$$

so kann man weiter mit Hilfe der Rekursionsformeln (8) und (9) S_2 bis S_σ konstruieren. Dabei hat man bei jedem Schritt die Freiheit, E_i in zwei Summanden ε_i und ε_i' von gleichem Vorzeichen zu zerlegen. Übt man dann S_σ auf S aus, so resultiert eine isomorphe Substitution mit den charakteristischen Zahlen

$$\begin{Bmatrix} \Sigma\mu \cdot \Sigma m + \Sigma\mu' \cdot \Sigma n & \Sigma\nu \cdot \Sigma m + \Sigma\nu' \cdot \Sigma n \\ \Sigma\mu \cdot \Sigma m' + \Sigma\mu' \cdot \Sigma n' & \Sigma\nu \cdot \Sigma m' + \Sigma\nu' \cdot \Sigma n' \end{Bmatrix}$$

diese sind aber nach (7) gleich

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

die Substitution $S \cdot S_\sigma$ ist also in die Identität transformierbar. Ist

$$S \cdot S_\sigma = (\Gamma a \Gamma^{-1}, \Gamma b \Gamma^{-1}), \quad \text{so ist} \quad S^{-1} = (\Gamma^{-1} \alpha_\sigma \Gamma, \Gamma^{-1} \beta_\sigma \Gamma),$$

also stets nach dieser Methode auffindbar.

Bildet man nun $S^{-1} \cdot S$, so ist das jedenfalls eine isomorphe Substitution, also existiert $(S^{-1} \cdot S)^{-1}$ so, daß

(12) $$(S^{-1} \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot S)^{-1} = 1$$

Übt man auf S^{-1} die identische Substitution $S \cdot S^{-1}$ aus:

$$S^{-1} \cdot (S \cdot S^{-1}) = S^{-1}$$

und hierauf weiter die Substitution $S \cdot (S^{-1} \cdot S)^{-1}$, so läßt sich das unter Anwendung des assoziativen Gesetzes schreiben:

$$(S^{-1} \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot S)^{-1} = (S^{-1} \cdot S) \cdot (S^{-1} \cdot S)^{-1}$$

und mit Hilfe von Gleichung (12) folgt

$$S^{-1} \cdot S = 1.$$

S^{-1} ist also auch definierbar als diejenige Substitution, welche in die Identität übergeht, wenn S auf sie ausgeübt wird. Dies Ergebnis läßt sich formulieren:

Jede isomorphe Substitution ist Auflösungssubstitution zu ihrer Auflösungssubstitution

oder anders gesprochen:

Die Aufgabe, zu einer gegebenen isomorphen Substitution die reziproke zu finden, ist identisch mit der Aufgabe, aus einem gegebenen Paar zusammengehöriger, primitiver Elemente die ursprünglichen Erzeugenden a und b auszudrücken.

IV.

Mit R' sei eine einfach berandete Fläche vom Geschlecht 1 bezeichnet. Sind a und b auf R' zwei geschlossene, doppelpunktlose Kurven mit einem gemeinsamen Punkt, so ist die allgemeine, unendliche Gruppe $G(a, b) = G_{R'}$ die „Fundamentalgruppe von R'"*). R sei die geschlossene Fläche vom Geschlecht 1 (Ring), die entsteht, wenn man die Randkurve von R' durch ein Elementarflächenstück schließt. Die Fundamentalgruppe von R ist die Abelsche Gruppe $G_R = G_A(a, b)$ mit der Relation $aba^{-1}b^{-1} = 1$. Nun besteht der folgende Hilfssatz:

Zwei geschlossene, doppelpunktlose Kurven, die auf R ineinander transformierbar sind, sind es auch auf R'.**)

Zwei stetige eineindeutige Abbildungen von R bzw. von R' sind ineinander transformierbar, wenn die beiden Bilder von a und gleichzeitig die beiden Bilder von b ineinander transformierbar sind. Jede stetige eineindeutige Abbildung von R' läßt sich zu einer solchen von R erweitern, indem man sie über das die Randkurve schließende Elementarflächenstück fortsetzt. Homotope Abbildungen von R' führen dabei zu homotopen Abbildungen von R. Andererseits können zwei nicht-homotope Abbildungen

*) Vgl. M. Dehn, „Über unendliche diskontinuierliche Gruppen". Math. Ann. 71 (1911).

**) Wegen Raummangels muß dieser Hifssatz hier ohne Beweis angegeben werden. Ich behalte mir vor, den Beweis später in anderem Zusammenhange mitzuteilen.

von R' auch nicht zu homotopen Abbildungen von R erweitert werden, denn zwei einander entsprechende Bildkurven, die auf R' nicht homotop sind, können es nach dem Hilfssatz auch auf R nicht sein. Es findet also eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der topologisch unterscheidbaren Abbildungstypen von R und R' statt. Die (unendliche, diskontinuierliche) Abbildungsgruppe von R' ist also wie die von R durch einen zweistufigen Isomorphismus mit der erweiterten Modulgruppe verbunden.*)

Ein Unterschied zwischen den Abbildungen von R und denen von R' besteht erst bei der Frage nach den die Abbildungen definierenden isomorphen Substitutionen der Fundamentalgruppen. Die Abbildungen von R werden definiert durch die Substitutionen $\alpha = a^m b^n$, $\beta = a^{m'} b^{n'}$ der Abelschen Gruppe G_R, bei denen $\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = \pm 1$ ist. Diese bestimmen zugleich den Abbildungstypus von R'. Die zugehörigen Substitutionen aus der Gruppe $G_{R'}$ sind von der Form der Gleichungen (1) in I und können nach der Methode von I gefunden werden, da das charakteristische Zahlenquadrupel bekannt ist. Es ergibt sich also der Satz:

Die Gruppe der topologisch unterscheidbaren Abbildungstypen der Fläche R' vom Geschlecht 1 *mit einer Randkurve ist isomorph mit der Gruppe der Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen, diskontinuierlichen Gruppe $G(a, b)$ mit zwei Erzeugenden, der Fundamentalgruppe von R'.*

Im besonderen entspricht einem Abbildungstypus von R' die invariante Untergruppe aller in eine bestimmte isomorphe Substitution transformierbaren Substitutionen von $G(a, b)$.

Das Erkennungsmerkmal für die Abbildung und die zugehörige Untergruppe von Substitutionen ist das zugehörige charakteristische Zahlenquadrupel.

Für die berandete Fläche vom Geschlecht 1 besteht also der gleiche Zusammenhang zwischen den Abbildungen der Fläche und den Isomorphismen der zugehörigen Fundamentalgruppe, wie ihn M. Dehn für *geschlossene* Flächen beliebigen Geschlechts gefunden hat.**)

Für berandete Flächen von höherem Geschlecht ist das nicht mehr der Fall.

Konstantinopel im Oktober 1917.

*) Vgl. meine Schrift „Kurvennetze auf Flächen", Inaug. Diss., Kiel 1913.

**) Nach Mitteilung von M. Dehn.