Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null.

Von

A. WIMAN in Upsala.

---

1. Bezeichnet $G(z)$ eine transzendente Funktion endlicher Ordnung ϱ, so ist ϱ bekanntlich die kleinste Zahl, für welche, nach Vorgabe einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$, die Bedingung

$$|G(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

befriedigt wird, falls nur $|z| = r$ genügend groß gewählt wird. Handelt es sich überdies um ein kanonisches Produkt $G(z)$ von Primfunktionen, so hat diese Zahl ϱ noch die Eigenschaft, daß von den Reihen

$$\sum \frac{1}{r_n^{\varrho-\varepsilon}} \quad \text{bez.} \quad \sum \frac{1}{r_n^{\varrho+\varepsilon}}$$

erstere divergiert und letztere konvergiert, wobei $r_n = |a_n|$ ist, falls $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ die (von Null verschiedenen) Nullstellen nach steigenden absoluten Beträgen bedeuten.

Andererseits hat Herr Hadamard ein fundamentales Theorem bewiesen, nach welchem sich eine unendliche Folge von Zahlen $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_\lambda, \cdots$ bestimmen läßt, so daß $\lim\limits_{\lambda=\infty} \bar{r}_\lambda = \infty$ und

$$|G(z)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}}$$

für alle z von irgendeinem der Beträge $\bar{r}_\lambda$ ist.

Bei der Betrachtung der Funktion

$$(1) \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\frac{1}{\nu^{\varrho}}}\right) \qquad (0<\varrho<1)$$

bin ich zuerst auf die Vermutung gekommen, daß für $\varrho < \frac{1}{2}$ dieser Hadamardsche Satz durch die schärfere

$$(2) \qquad G(z) > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

ersetzt werden kann*). Erst späterhin gelang es mir durch Benutzung eines inzwischen von Herrn Phragmén gefundenen Resultates diesen Satz zu beweisen**). Nachdem das zugrunde liegende Phragménsche Resultat durch neue schöne Untersuchungen der Herren Phragmén und Lindelöf verbessert worden war, gab sodann Herr Lindelöf einen vereinfachten Beweis***). Einen elementaren Beweis des von mir aufgestellten Satzes hat endlich Herr Wiener gegeben†). Unter den Verfassern, welche sich mit Ergänzungen des Satzes für den Fall $\varrho = 0$ beschäftigt haben, bemerken wir die Herren Littlewood und Valiron††).

Eine noch weitergehende Verschärfung des Hadamardschen Satzes ist aber aus meinen Resultaten bezüglich der asymptotischen Darstellung der Funktion (1) nahegelegt, welche für jede Ordnung $\varrho < 1$ Bedeutung hat. Bezeichnen nämlich $M(r)$ und $m(r)$ den Maximal- bez. Minimalbetrag der Funktion für $|z| = r$, so gibt es beliebig große r, für welche

$$m(r) > M(r)^{\cos \varrho \pi - \varepsilon} \tag{3}$$

ist. Eine Vermutung, daß (3) für jede ganze Funktion von einer Ordnung $\varrho < 1$ Gültigkeit hat, ist auch in der Tat von Herrn Littlewood ausgesprochen†††), wobei er, wie es scheint, eben von den Verhältnissen bei der speziellen Klasse von Funktionen (1) angeregt worden ist. Beweisen konnte jedoch Herr Littlewood nur die weniger weit gehende Ungleichung

$$m(r) > M(r)^{\cos 2\varrho \pi - \varepsilon} \qquad \left(\varrho < \frac{1}{2}\right),$$

welche für $\varrho \geqq \frac{1}{4}$ offenbar in (2) enthalten ist*†).

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns die Aufgabe gestellt, den vollständigen Littlewoodschen Satz zu beweisen. Es ist uns dies jetzt durch Benutzung einer Methode gelungen, vermittelst welcher wir anfänglich vergebens die Richtigkeit von (2) darzulegen versucht haben*††).

*) „Über die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen", Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 1 (1903), S. 105.

**) „Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard", Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 2 (1905), Nr. 14.

***) „Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières", Rend. del Circ. Mat. di Palermo 25 (1908), S. 228.

†) „Elementare Beiträge zur neueren Funktionentheorie", Diss. (Göttingen 1911).

††) Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions, Lond. Mat. Soc. Proc. (2) V (1907), S. 361; Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul, Math. Ann. 70 (1911), S. 471.

†††) „A general theorem on integral functions of finite order", Lond. Math. Soc. Proc. (2) VI (1907), S. 139.

*†) Bei irregulär wachsenden Funktionen kann man nicht ohne weiteres aus der etwa bewiesenen Gültigkeit von (3) die Richtigkeit von (2) erschließen.

*††) D. h. in der Hauptsache mit solchen elementaren Hilfsmitteln, welche dem Beweise des Herrn Wiener zugrunde liegen.

Eine fundamentale Rolle als Vergleichsfunktion wird dabei der Funktion (1) zuerteilt.

2. Zunächst ist festzustellen, daß der Satz für die Funktion (1) gilt. Dies ersieht man unmittelbar aus der früher von uns gegebenen asymptotischen Darstellung, wofür wir

$$\frac{e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi} z^{\varrho}}}{[2\pi z^{\varrho}]^{\frac{1}{2\varrho}}} \tag{4}$$

mit einem Ergänzungsfaktor von der Größenordnung $\frac{d}{r}$ erhalten haben, wobei d die kleinste Entfernung zwischen der Stelle z und einer Nullstelle $-n^{\frac{1}{\varrho}}$ bedeutet; letzterer Faktor hat sogar für $\lim r=\infty$ den Grenzwert 1, falls für $\frac{d}{r}$ eine endliche untere Grenze angenommen wird.

Wenn hier $z=r$ gesetzt wird, bekommt man offenbar $M(r)$, und ebenso $m(r)$ für $z=-r$. Man hat also

$$\lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{(2\pi)^{-\frac{1}{2\varrho}}\, r^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi} r^{\varrho}}} = 1. \tag{5}$$

Beschränkt man sich auf die ins Unendliche steigende Reihe

$$r=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}},$$

so läßt sich auch $m(r)$ ohne wesentlichen Fehler mit dem Betrag von (4) gleichsetzen. Dies ist ohne Schwierigkeit aus den Entwicklungen in unserer zitierten Arbeit ersichtlich. Da wir aber dort einen solchen Schluß nicht gezogen haben, so möge der Beweis, doch nur für diesen besonderen Fall, hier reproduziert werden.

Es handelt sich um den Betrag von

$$\varphi(r)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)$$

für $r=\left(N+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$. Wir schreiben

$$\log|\varphi(r)| = \sum_{1}^{N} \log\frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}} + \sum_{1}^{N} \log\left(1-\frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)$$

$$+\sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right) = A+B+C.$$

Sofort ergibt sich

$$A = \frac{N}{\varrho}\log\left(N+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\varrho}\log\Gamma(N+1),$$

oder nach Benutzung der bekannten Annäherungsformel für die Γ-Funktion:

$$A = \frac{1}{\varrho}\log\left(N+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\varrho}\log 2\pi N + \left[\frac{1}{N}\right],$$

wo $\left[\frac{1}{N}\right]$ ein Glied von der Größenordnung $\frac{1}{N}$ bedeutet. Dieses Resultat ist mit dem folgenden äquivalent:

$$A = \frac{1}{\varrho}r^\varrho - \frac{1}{2\varrho}\log 2\pi r^\varrho + \left[\frac{1}{r^\varrho}\right]. \tag{6}$$

Um nun $B + C$ abzuschätzen, betrachten wir zunächst die Integrale

$$J_1 + J_2 = \int_0^{r^\varrho}\log\left(1-\frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)dx + \int_{r^\varrho}^{\infty}\log\left(1-\frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}}\right)dx.$$

Machen wir hier die Substitution $\frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r} = u$ bez. $\frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}} = u$, so erhalten wir

$$J_1 + J_2 = \varrho r^\varrho\left[\int_0^1 u^{\varrho-1}\log(1-u)\,du + \int_0^1 u^{-\varrho-1}\log(1-u)\,du\right].$$

Durch Reihenentwicklung bekommen wir alsdann:

$$J_1 + J_2 = -\varrho r^\varrho\int_0^1\sum_1^\infty\frac{u^{k+\varrho-1}+u^{k-\varrho-1}}{k}\,du$$

$$= -2\varrho r^\varrho\sum_1^\infty\frac{1}{k^2-\varrho^2},$$

oder bei Bezugnahme auf die Entwicklung von $\cos\varrho\varphi$ in eine trigonometrische Reihe für $\varphi = \pi$ *):

$$J_1 + J_2 = r^\varrho\left[\pi\frac{\cos\varrho\pi}{\sin\varrho\pi} - \frac{1}{\varrho}\right]. \tag{7}$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß man

$$B + C > J_1 + J_2$$

hat. Man hat in der Tat

*) Oder auf die gewöhnliche Zerlegung von $\cot\varrho\pi$ in Partialbrüche.

$$(8_1)\qquad \int\limits_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)dx < \log\left(1-\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right) \qquad (\nu \leqq N),$$

sowie auch

$$(8_2)\qquad \int\limits_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}}\right)dx < \log\left(1-\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \qquad (\nu > N).$$

Dies ersieht man daraus, daß erstens für $0<\delta\leqq\frac{1}{2}$, $\nu\leqq N$:

$$\left(1-\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)^2 = 1+\frac{\nu^{\frac{2}{\varrho}}}{r^2}-2\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r} > \left(1-\frac{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)\left(1-\frac{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)$$

$$= 1+\frac{(\nu^2-\delta^2)^{\frac{1}{\varrho}}}{r^2}-\frac{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}-\frac{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}.$$

Deriviert man $(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}+(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}$ nach δ, so bekommt man

$$\frac{1}{\varrho}\left[(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}-1}-(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}-1}\right],$$

also eine positive Größe. Hieraus folgt

$$(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}+(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}} > 2\nu^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Die Evidenz der obigen Ungleichung ist mithin dargelegt. Andererseits erschließt man die Richtigkeit von (8_2), indem man für $0<\delta\leqq\frac{1}{2}$ den Ausdruck

$$\log\left(1-\frac{r}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)+\log\left(1-\frac{r}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)$$

nach δ deriviert. Man bekommt ja dann

$$-\frac{r}{\varrho}\left[\frac{1}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}+1}\left(1-\frac{r}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)}-\frac{1}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}+1}\left(1-\frac{r}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)}\right],$$

welche Größe ja <0 ist. Hiernach ergibt sich aus (6) und (7)

$$\log m(r) > \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}r^{\varrho}\cos\varrho\pi-\frac{1}{2\varrho}\log 2\pi r^{\varrho}-\varepsilon.$$

Der wesentliche Faktor von $m(r)$ ist mithin

$$\frac{e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi} r^{\varrho} \cos\varrho\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2\varrho}} r^{\frac{1}{2}}}.$$

Vergleicht man mit (5), so bekommt man für $1 > \varrho_1 > \varrho$, wenn N genügend groß angenommen wird:

$$m(r) > [M(r)]^{\cos\varrho_1\pi}, \tag{9}$$

welche Relation offenbar mit (3) äquivalent ist.

3. Wir betrachten jetzt eine beliebige ganze transzendente Funktion $F(z)$ von einer Ordnung $\varrho < 1$. Es sei $F_1(z)$ die Funktion, welche aus $F(z)$ erhalten wird, wenn die Nullstellen mit gleichbleibenden absoluten Beträgen sämtlich auf die negative reelle Achse verlegt werden. Es bezeichne $M_1(r)$ bez. $m_1(r)$ den Maximal- bez. Minimalbetrag von $F_1(z)$. Dann hat man

$$M(r) \leqq M_1(r); \quad m(r) \geqq m_1(r).$$

Hieraus ist, in Übereinstimmung mit einer früheren Bemerkung von uns, ersichtlich, *daß (3) allgemein gilt, wenn der Beweis für solche Funktionen $F(z)$ ausgeführt werden kann, deren sämtliche Nullstellen auf der negativen reellen Achse liegen.* Auch ersieht man, daß es für die allgemeine Gültigkeit des Satzes von keiner Bedeutung ist, falls wir beim Beweise etwaige Nullstellen $z = 0$ weglassen, d. h. den Einfluß eines in $m(r)$ und $M(r)$ in gleicher Weise auftretenden Faktors r^k $(k > 0)$ nicht abschätzen. Überdies mag, da ein konstanter Faktor hier ohne Bedeutung ist, $F(0) = 1$ gesetzt werden.

Zunächst wollen wir eine geeignete Vergleichsfunktion $\overline{F}(z)$ konstruieren, für welche die Gültigkeit von (3) sich schon aus den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer erschließen läßt. Dabei handelt es sich doch, wenn wir uns genau ausdrücken wollen, in verschiedenen Intervallen um verschiedene Vergleichsfunktionen. Für die Funktion $\overline{F}(z)$ habe $\overline{M}(r)$ bez. $\overline{m}(r)$ dieselbe Bedeutung wie $M(r)$ bez. $m(r)$ für $F(z)$. Die Bedingungen, welche die Hilfsfunktion erfüllen soll, seien die folgenden:

$$m(r)\,M(r) > \overline{m}(r)\,\overline{M}(r); \tag{10_1}$$

$$\frac{m(r)}{M(r)} > \frac{\overline{m}(r)}{\overline{M}(r)}. \tag{10_2}$$

Aus diesen folgt nämlich, falls

$$m(r) = [M(r)]^{\varkappa}$$

und

$$\overline{m}(r) = [\overline{M}(r)]^{\overline{\varkappa}}$$

gesetzt werden, bei Berücksichtigung von $\bar{\varkappa} > -1$,

$$(11) \qquad \varkappa > \bar{\varkappa}.$$

Betrachten wir nämlich die Möglichkeiten

$$\frac{m(r)}{[M(r)]^u} \gtreqless \frac{\bar{m}(r)}{[\bar{M}(r)]^u}$$

für die verschiedenen u-Werte, so ist aus (10) ersichtlich, daß das Zeichen $>$ für $u = \pm 1$ gültig ist. Dasselbe muß dann für einen beliebigen Wert $1 > u > -1$ der Fall sein. Für das Zeichen $=$ hat man ja nur eine einzige reelle Lösung $u = u_0$, und dabei muß entweder $u_0 > 1$ oder $u_0 < -1$ sein, da offenbar die Zeichen $>$ und $<$ sich in irgendeiner Weise auf die Fälle $u > u_0$ und $u < u_0$ verteilen. Aus diesem Grunde ist

$$\frac{m(r)}{[M(r)]^{\bar{\varkappa}}} > \frac{\bar{m}(r)}{\bar{M}(r)^{\bar{\varkappa}}} = 1,$$

woraus sofort (11) folgt.

Das Produkt $m(r)$ zerlegen wir in zwei Teilprodukte $m_1(r)$ und $m_2(r)$, so daß in $m_1(r)$ die zu den Nullstellen gehörigen Faktoren auftreten, deren Beträge $< r$ sind, und die übrigen in $m_2(r)$. Nach demselben Grundsatze seien auch $M(r)$, $\bar{m}(r)$ und $\bar{M}(r)$ zerlegt. Wir werden die Vergleichsfunktion jedesmal so wählen, daß $F(z)$ und $\bar{F}(z)$ dieselbe Anzahl von Nullstellen besitzen, deren Beträge $< r$ sind. Überdies wollen wir den Teilprodukten die folgenden Bedingungen auferlegen:

$$(12_1) \qquad m_1(r) > \bar{m}_1(r); \quad M_1(r) > \bar{M}_1(r);$$

$$(12_2) \qquad m_2(r) > \bar{m}_2(r); \quad M_2(r) < \bar{M}_2(r).$$

Wir versuchen dann (10_1) und (10_2) schon für $m_1(r)$ und $m_2(r)$ usw. besonders zu befriedigen. Es wird dann von selbst je eine Bedingung auf Grund von (12) befriedigt. Was übrig bleibt, ist noch

$$(13_1) \qquad \frac{m_1(r)}{M_1(r)} > \frac{\bar{m}_1(r)}{\bar{M}_1(r)}$$

und

$$(13_2) \qquad m_2(r)\,M_2(r) > \bar{m}_2(r)\,\bar{M}_2(r)$$

zu erfüllen.

In welcher Weise wir bei der Konstruktion von $\bar{F}(z)$ auf die in (12) und (13) enthaltenen Bedingungen Bezug nehmen wollen, werden wir zunächst darlegen.

4. Wir werden zeigen, daß den weiteren Bedingungen von selbst genügt wird, falls wir nur die auf die Maximalbeträge bezüglichen Ungleichungen

$$M_1(r) > \bar{M}_1(r); \quad M_2(r) < \bar{M}_2(r)$$

in geeigneter Weise befriedigen. Ehe wir noch die Funktion $\overline{F}(z)$ endgültig fixieren, wollen wir nachweisen, von was für Umständen die in Aussicht gestellte Lösung unserer Aufgabe abhängt. Wir schreiben in Produktdarstellung

$$M(r) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right) \qquad (a_\mu \leqq a_{\mu+1});$$

$$\overline{M}(r) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{b_\mu}\right) \qquad (b_\mu \leqq b_{\mu+1}).$$

Hat man dann

$$a_n < r < a_{n+1}; \quad b_n < r < b_{n+1},$$

so ergibt sich

$$M_1(r) = \prod_{\mu=1}^{n}\left(\frac{r}{a_\mu} + 1\right); \qquad M_2(r) = \prod_{\mu=n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right);$$

$$\overline{M}_1(r) = \prod_{\mu=1}^{n}\left(\frac{r}{b_\mu} + 1\right); \qquad \overline{M}_2(r) = \prod_{\mu=n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{b_\mu}\right).$$

Sämtlichen Anforderungen werden wir nun in der besonderen Weise genügen, daß, falls wir

$$M_1^{(\nu)}(r) = \prod_{\mu=n-\nu}^{n}\left(\frac{r}{a_\mu} + 1\right);$$

$$M_2^{(\nu)}(r) = \prod_{n+1}^{n+\nu}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right)$$

schreiben, und in ähnlicher Weise die Produkte $\overline{M}_1^{(\nu)}(r)$, $\overline{M}_2^{(\nu)}(r)$ einführen, dafür Sorge getragen wird, daß man stets

$$(14_1) \qquad M_1^{(\nu)}(r) > \overline{M}_1^{(\nu)}(r) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(14_2) \qquad M_2^{(\nu)}(r) < \overline{M}_2^{(\nu)}(r) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty)$$

hat.

Was in (14_1) und (14_2) verlangt wird, läßt sich auch so formulieren. Setzt man

$$\frac{r}{a_\mu} + 1 = \left(\frac{r}{b_\mu} + 1\right)(1 + \varepsilon_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n);$$

$$\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right)(1 + \delta_\mu) = \frac{r}{b_\mu} + 1 \qquad (\mu = n+1, \cdots, \infty),$$

so soll

$$(15_1) \qquad \prod_{\mu=0}^{\nu}(1 + \varepsilon_{n-\mu}) > 1 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(15_2) \qquad \prod_{\mu=1}^{\nu} (1+\delta_{n+\mu}) > 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty)$$

sein. Wir bemerken, daß man für die eingeführten Größen

$$\varepsilon_\mu = \frac{r\left(\frac{1}{a_\mu} - \frac{1}{b_\mu}\right)}{\frac{r}{b_\mu}+1};$$

$$\delta_\mu = \frac{r\left(\frac{1}{b_\mu} - \frac{1}{a_\mu}\right)}{1+\frac{r}{a_\mu}}$$

bekommt.

Behufs der weiteren Entwicklungen werden wir auf die leicht zu beweisenden Ungleichungen

$$(16) \qquad \frac{\alpha}{1+\alpha} \leqq \log(1+\alpha) \leqq \alpha \qquad (\alpha > -1)$$

besonders Bezug nehmen. Nach diesem folgt aus den Systemen (15_1) und (15_2), welche wir bereits als erfüllt annehmen:

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \varepsilon_{n-\mu} > 0; \quad \sum_{\mu=1}^{\nu} \delta_{n+\mu} > 0.$$

Führen wir jetzt die für diese Größen gefundenen Ausdrücke ein, so läßt sich das Resultat in der folgenden Weise darstellen:

$$(17_1) \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\frac{1}{a_{n-\mu}} - \frac{1}{b_{n-\mu}}}{\frac{r}{b_{n-\mu}}+1} > 0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(17_2) \qquad \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\frac{1}{b_{n+\mu}} - \frac{1}{a_{n+\mu}}}{1+\frac{r}{a_{n+\mu}}} > 0 \qquad (\nu = 1, \cdots, \infty).$$

Was noch übrig bleibt, ist alles erledigt, falls wir nur, mit Benutzung der erhaltenen Ergebnisse, die Richtigkeit der beiden Systeme

$$(18_1) \qquad \frac{m_1^{(\nu)}(r)}{M_1^{(\nu)}(r)} > \frac{\overline{m}_1^{(\nu)}(r)}{\overline{M}_1^{(\nu)}(r)} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(18_2) \qquad m_2^{(\nu)}(r)\, M_2^{(\nu)}(r) > \overline{m}_2^{(\nu)}(r)\, \overline{M}_2^{(\nu)}(r) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty)$$

nachweisen können. Hier machen wir ebenfalls eine Umformung in der folgenden Weise. Wir schreiben

$$\frac{\frac{r}{a_\mu}-1}{\frac{r}{a_\mu}+1}=\frac{\frac{r}{b_\mu}-1}{\frac{r}{b_\mu}+1}(1+\eta_\mu) \qquad (\mu=0,1,\cdots,n);$$

$$\left(1-\frac{r}{a_\mu}\right)\left(1+\frac{r}{a_\mu}\right)=\left(1-\frac{r}{b_\mu}\right)\left(1+\frac{r}{b_\mu}\right)(1+\vartheta_\mu)$$
$$(\mu=n+1,\cdots,\infty),$$

so daß also (18_1) und (18_2) durch

$$(19_1) \qquad \prod_{\mu=0}^{\nu}(1+\eta_{n-\mu})>1 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(19_2) \qquad \prod_{\mu=1}^{\nu}(1+\vartheta_{n+\mu})>1 \qquad (\nu=1,\cdots,\infty)$$

ersetzt werden. Es gilt zu untersuchen, inwieweit aus (17_1) und (17_2) auf (19_1) und (19_2) sich schließen läßt. Nach (16) weiß man, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn es gelingt, den Beweis für

$$(20) \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\eta_{n-\mu}}{1+\eta_{n-\mu}}>0; \quad \sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\vartheta_{n+\mu}}{1+\vartheta_{n+\mu}}>0$$

zu erbringen. Nun hat man

$$\eta_\mu=\frac{2\left(\frac{r}{a_\mu}-\frac{r}{b_\mu}\right)}{\left(\frac{r}{a_\mu}+1\right)\left(\frac{r}{b_\mu}-1\right)};$$

$$\vartheta_\mu=\frac{\frac{r^2}{b_\mu^2}-\frac{r^2}{a_\mu^2}}{1-\frac{r^2}{b_\mu^2}}.$$

Was in (20) verlangt wird, läßt sich also, nach Einführung der zu den Größen η_μ und ϑ_μ gehörigen Ausdrücke, in der folgenden Weise schreiben:

$$(21_1) \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\frac{1}{a_{n-\mu}}-\frac{1}{b_{n-\mu}}}{\left(\frac{r}{b_{n-\mu}}+1\right)\left(\frac{r}{a_{n-\mu}}-1\right)}>0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(21_2) \qquad \sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\frac{1}{b_{n+\mu}^2}-\frac{1}{a_{n+\mu}^2}}{1-\frac{r^2}{a_{n+\mu}^2}}>0 \qquad (\nu=1,\cdots,\infty).$$

Daß in der Tat die Systeme (21) nichts anderes als Folgerungen aus den Systemen (17) darstellen, läßt sich, wie wir sofort sehen werden, ohne Schwierigkeit nachweisen.

5. Hierbei kommt besonders in Betracht, daß die Glieder in (21_1) je aus den entsprechenden in (17_1) durch Hinzufügung des Faktors

$$\frac{1}{\frac{r}{a_{n-\mu}}-1}$$

erhalten werden, und daß man in gleicher Weise je durch Vermittlung des Faktors

$$\frac{\frac{1}{b_{n+\mu}}+\frac{1}{a_{n+\mu}}}{1-\frac{r}{a_{n+\mu}}}$$

von (17_2) nach (21_2) hinüberkommt. In beiden Fällen handelt es sich, wie man leicht sieht, um Faktoren, welche bei steigendem μ jedenfalls nicht zunehmen. Diese Tatsache genügt, wie aus dem folgenden allgemeinen Reihensatze, dessen Beweis sich äußerst einfach ausführen läßt, ersichtlich ist.

Man betrachte die beiden Reihensysteme

$$P_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots)$$

und

$$Q_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \lambda_\mu \alpha_\mu ,$$

wobei die in Q_ν hinzutretenden Faktoren λ_μ positive mit μ nicht zunehmende Größen, also $\lambda_\mu \geqq \lambda_{\mu+1}$, bedeuten. Hat man dann jedesmal

$$P_\nu > 0,$$

so muß auch stets

$$Q_\nu > 0$$

sein.

Der Beweis folgt ganz einfach daraus, daß man

$$Q_\nu = \lambda_\nu P_\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}) P_\mu$$

schreiben kann.

6. Jetzt haben wir zu zeigen, wie man die Konstruktion von Funktionen $\overline{F}(z)$ wirklich ausführen kann, so daß den fundamentalen Bedingungen (14_1) und (14_2) genügt wird; doch ist es dabei offenbar belanglos,

falls irgendwo das Zeichen $>$ durch $=$ ersetzt wird. Wir setzen voraus, daß $r > a_\lambda$ sein soll, wo λ eine beliebig große Zahl bedeutet. In solcher Weise wird dann auch r beliebig groß.

Wir betrachten für $1 > \varrho_1 > \varrho$ das Verhältnis

$$\frac{a_\mu}{\frac{1}{\mu^{\varrho_1}}} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \lambda).$$

Die zugehörige obere Grenze sei l. Wir fixieren dann die zu $\overline{F}(z)$ gehörigen Nullstellen durch

$$b_\mu = l\,\mu^{\frac{1}{\varrho_1}} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \infty).$$

Es folgt hieraus

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{b_\mu}{a_\mu} = 0.$$

Es sei n_2 die niedrigste Zahl mit der Eigenschaft, daß für $\mu > n_2$ stets $b_\mu < a_\mu$ ist. Andererseits sei n_1 die größte Zahl, so daß für $\mu \leqq n_1$ man ohne Ausnahme

$$b_\mu \geqq a_\mu$$

hat. Nach den Voraussetzungen ist $n_1 \geqq \lambda$.

Bezüglich der Lage von r ist zu zeigen, daß dieselbe sich zwischen b_{n_1} und b_{n_2+1} feststellen läßt. Um dann (14_1) und (14_2) zu befriedigen, genügt für $\mu \leqq n_1$ und $\mu > n_2$ schon der Vergleich der einzelnen Faktoren, da man ja unmittelbar findet

$$\frac{r}{a_\mu} + 1 \geqq \frac{r}{b_\mu} + 1 \qquad (\mu \leqq n_1);$$

$$1 + \frac{r}{a_\mu} < 1 + \frac{r}{b_\mu} \qquad (\mu > n_2).$$

Wir versuchen zunächst mit der Wahl

$$r = l\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho_1}}.$$

Ist $n_1 = n_2$, so ist die Sache hiermit schon erledigt. Anderenfalls hat man zu untersuchen, wie es sich mit den Möglichkeiten

$$\prod_{\varrho=1}^{\mu}\left(1 + \frac{r}{a_{n_1+\varrho}}\right) \lesseqgtr \prod_{\varrho=1}^{\mu}\left(1 + \frac{r}{b_{n_1+\varrho}}\right) \quad (\mu = 1, \cdots, n_2 - n_1)$$

verhält. Kommt hier nirgends das untere Zeichen vor, so sind sämtliche Grundbedingungen ebenfalls erfüllt. Wir nehmen aber an, daß es sich in so einfacher Weise nicht verhält, daß also das untere Zeichen zum ersten Male für $\mu = n_3 - n_1$ auftritt. Dann hat man offenbar immer

$$(22)\qquad \prod_{\varrho=0}^{\mu}\left(1+\frac{r}{a_{n_3-\varrho}}\right)>\prod_{\varrho=0}^{\mu}\left(1+\frac{r}{b_{n_3-\varrho}}\right)$$
$$(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1).$$

Wie die Herleitung von (17_1) zeigt, folgt hieraus

$$(23)\qquad \sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\frac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\frac{1}{b_{n_3-\varrho}}}{1+\frac{r}{b_{n_3-\varrho}}}>0\qquad(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1).$$

Wir wollen jetzt nachweisen, daß in den Ungleichungen (22) r durch jede Größe $R>r$ ersetzt werden darf. Bei dem Beweise dieser Tatsache werden wir sogar etwas mehr leisten. Schreiben wir nämlich

$$\frac{1+\frac{R}{a_{n_3-\varrho}}}{1+\frac{R}{b_{n_3-\varrho}}}=\frac{1+\frac{r}{a_{n_3-\varrho}}}{1+\frac{r}{b_{n_3-\varrho}}}(1+\delta_{n_3-\varrho}),$$

so wird sich herausstellen, daß man

$$(24)\qquad \prod_{\varrho=0}^{\mu}(1+\delta_{n_3-\varrho})>1\qquad(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

hat. Man bekommt ja

$$\delta_{n_3-\varrho}=\frac{(R-r)\left(\frac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\frac{1}{b_{n_3-\varrho}}\right)}{\left(1+\frac{R}{b_{n_3-\varrho}}\right)\left(1+\frac{r}{a_{n_3-\varrho}}\right)},$$

und den Ungleichungen (24) wird genügt, falls sich beweisen läßt, daß

$$\sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\delta_{n_3-\varrho}}{1+\delta_{n_3-\varrho}}>0\qquad(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

ist. Nach Einführung der für die Größen $\delta_{n_3-\varrho}$ gegebenen Ausdrücke geht diese hinreichende Bedingung in

$$(25)\qquad \sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\frac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\frac{1}{b_{n_3-\varrho}}}{\left(1+\frac{R}{a_{n_3-\varrho}}\right)\left(1+\frac{r}{b_{n_3-\varrho}}\right)}>0$$
$$(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

über. Vergleicht man jetzt (23) und (25), so entsprechen diese einander in solcher Weise, daß aus je einem Glied im ersteren System das zugehörige im letzteren System durch Hinzufügung eines Faktors

$$\frac{1}{1+\frac{R}{a_{n_3}-\varrho}}$$

erhalten wird. Da dieser Faktor mit ϱ nie zunimmt, so läßt sich, nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze, (25) als eine Folgerung aus (23) auffassen.

Für $n > n_3$ wird es ein erstes Mal, etwa für $n = n_4 + 1$, vorkommen, daß man $b_n < a_n$ erhält. Offenbar ist $n_4 \leqq n_2$. Wir versuchen dann mit einer neuen Wahl von r, indem wir

$$r = l\left(n_4 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho_1}}$$

setzen. Hierdurch werden ja, wie aus den soeben gemachten Auseinandersetzungen folgt, die Bedingungen (14_1), ebenso wie bei der vorigen Wahl, von selbst erfüllt. Ist dasselbe auch hier nicht mit (14_2) der Fall, so machen wir noch einmal einen Schritt in derselben Weise, wie wir soeben von $n = n_1$ zu $n = n_4$ hinaufstiegen. Da man hier stets $n \leqq n_2$ erhält, so muß zuletzt auch den Bedingungen (14_2) Genüge geleistet werden; wenn nicht früher, so allenfalls für $n = n_2$.

Aus der Tatsache, daß r so gewählt werden kann, daß die Anzahl n der Nullstellen, deren Beträge $< r$ sind, beliebig groß wird, und aus den in der 2. Nummer dargelegten Eigenschaften der Funktion $\bar{F}(z)$ folgt jetzt, da $\varrho_1 - \varrho$ beliebig klein gewählt werden kann, unser Hauptsatz (3).

7. Noch genauere Resultate kann man erhalten, wenn man den von Herrn Lindelöf verallgemeinerten Ordnungsbegriff einführt. Dabei wird es nötig, besondere Abschätzungen von Funktionen wie

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}(\log n)^{\alpha_1}}\right)$$

auszuführen. Im Falle $\varrho = \frac{1}{2}$ und $\alpha_1 > 0$ ergibt sich für diese Vergleichsfunktion, und mithin auch für gewisse allgemeine Funktionenklassen von der Ordnung $\varrho = \frac{1}{2}$, daß der Minimalbetrag für beliebig große r

$$> e^{r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

wird, so daß also Übereinstimmung mit den Funktionen von einer Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ eintritt.

Der Fall der ganzen Funktionen von der Höhe 0 und der Ordnung 1 läßt sich jetzt auch behandeln. Die Resultate, welche sich dann herleiten lassen, erlauben den folgenden allgemeinen Satz aufzustellen:

Es sei eine beliebige ganze Funktion von der Höhe 0 *und der Ordnung* ϱ $(1 \geqq \varrho)$ *gegeben. Dann läßt sich für* r *eine unendliche Folge*

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots \qquad (\lim_{n=\infty} r_n = \infty)$$

aufstellen, so daß die Ungleichung

$$m(r)\,M(r) > e^{r^{\varrho - \varepsilon}}$$

bestätigt wird.

Auf den Beweis der in dieser Nummer mitgeteilten Sätze verzichten wir hier.

Upsala, 11. Februar 1914.