Zur Theorie der linearen funktionalen Differentialgleichungen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Es seien in der linearen funktionalen Differentialgleichung

$$f^{(m)}(x)+\sum_{0}^{m-1}{}_{p}\sum_{0}^{n}{}_{q}k_{pq}f^{(p)}(x+h_q)=g(x), \tag{1}$$

$$\text{(wobei } f^{(0)}(x)=f(x),\ 0=h_0<h_1<h_2<\cdots<h_n \text{ ist)},$$

die Größen k_{pq} gegebene reelle oder komplexe, die Größen h_q gegebene reelle Konstanten; $g(x)$ sei eine für alle reellen Werte von x definierte, überall stetige Funktion, die für $x=\pm\infty$ nicht stärker unendlich wird, wie eine bestimmte Potenz von x. Dann zeigt E. Schmidt*), daß diese Gleichung eine und nur eine Lösung $f(x)$ hat, die für $x=\pm\infty$ nur wie eine Potenz von x unendlich wird, wenn die Gleichung

$$l(z)=z^m+\sum_{0}^{m-1}{}_{p}\sum_{0}^{n}{}_{q}k_{pq}z^pe^{h_q z}=0 \tag{2}$$

keine rein imaginäre Wurzeln besitzt. Die Gleichung (2) besitzt stets nur eine endliche Anzahl rein imaginärer Wurzeln; nehmen wir an, es gebe k solche, jede ihrer Vielfachheit nach gezählt, dann entsteht die allgemeinste Lösung von (1), welche für $x=\pm\infty$ nur wie eine Potenz von x unendlich wird, aus irgend einer solchen Lösung durch Hinzuaddieren einer Funktion der Form

$$\sum_{1}^{k}{}_{\mu}c_\mu\varphi_\mu(x), \tag{3}$$

*) E. Schmidt, Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen, Math. Ann. 70 (1911), S. 499 ff.

wobei die c_μ willkürliche Konstanten sind und die $\varphi_\mu(x)$ ein gewisses, explizit angebbares System von k linear unabhängigen Funktionen bilden, die der homogenen funktionalen Differentialgleichung, welche aus (1) entsteht, wenn man $g(x) \equiv 0$ setzt, genügen.

Die Eigenschaft, daß die Gleichung (2) nur eine endliche Anzahl rein imaginärer Wurzeln besitzen kann, gilt nur, wenn man von der speziellen Form (1) ausgeht, braucht aber nicht mehr zu gelten, wenn man von der nur wenig allgemeineren Form

$$(4) \qquad \sum_0^m{}_p \sum_0^n{}_q k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = g(x),$$

(wobei wie oben $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n$ ist),

ausgeht, in welcher die gewöhnlichen Differenzengleichungen

$$(5) \qquad \sum_0^n{}_q k_q f(x+q) = g(x)$$

als spezieller Fall enthalten sind. So führt beispielsweise die Differenzengleichung

$$(6) \qquad f(x+2) + f(x) = g(x)$$

entsprechend (2) auf die Gleichung

$$(7) \qquad e^{2z} + 1 = 0,$$

welche die Wurzeln $z = \frac{1}{2}(2k+1)\pi i$ für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ besitzt. In diesem Falle bleibt also die Lösung durch die von E. Schmidt eingeführten Grenzbedingungen noch bis auf unendlich viele, linear hinzutretende Funktionen unbestimmt.

Es erscheint daher von einem gewissen Interesse, die Lösungen von (4) statt durch Grenzbedingungen durch Vorgabe von $f(x)$ in dem Intervalle $x_0, x_0 + h_n$ festzulegen und $f(x)$ durch eine für alle x in einem beliebig großen Intervalle der reellen x gleichmäßig konvergente Reihe darzustellen. Es wird sich herausstellen, daß dadurch die natürliche Verallgemeinerung der klassischen Integrationstheorie der gewöhnlichen Differenzengleichungen auf die linearen funktionalen Differentialgleichungen (4) gewonnen ist. Da man durch eine leichte, hier nicht näher auszuführende Modifikation der Methode von Schmidt stets eine partikuläre Lösung von (4) erhält, so können wir uns auf die Lösung des entsprechenden Problems für die homogenen Gleichungen (4) beschränken Das Hauptresultat von Schmidt bezüglich dieser homogenen Gleichungen ergibt sich dann als Zusatz aus der Lösung der obigen Problemstellung.

Für die spezielle lineare funktionale Differentialgleichung

$$f'(x+1) = af(x) \tag{8}$$

hat F. Schürer*) die oben postulierte Darstellung der allgemeinen Lösung gegeben, indem er $f(x)$ unter Anwendung einer von Herglotz**) gegebenen Reihenentwicklung in der Form

$$f(x) = \sum_\nu e^{z_\nu x} \frac{z_\nu}{1+z_\nu}\left(\int_0^1 e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu + \frac{1}{a} f(1)\right) \tag{9}$$

darstellt, wo die Summe über alle Wurzeln der Gleichung

$$z_\nu e^{z_\nu} - a = 0 \tag{10}$$

zu nehmen ist. In diesem Beispiele tritt jedoch noch nicht die charakteristische Schwierigkeit hervor, welche bei der Darstellung von $f(x)$ im allgemeinen Falle zutage tritt. Man erhält nämlich, wie wir sehen werden, bei dem Ansatze der gesuchten Reihenentwicklungen im allgemeinen Falle für jedes der n Intervalle $x_0, x_0 + h_1;\ x_0 + h_1, x_0 + h_2;\ \cdots;\ x_0 + h_{n-1}, x_0 + h_n$ zunächst lauter verschiedene Reihenentwicklungen für $f(x)$ und es entsteht die Aufgabe, die noch zur Verfügung stehenden Entwicklungen von Null so zu bestimmen, daß man für alle diese Intervalle und dann für alle reelle x eine einheitliche Darstellung für $f(x)$ erhält. Auf eine ganz entsprechende Aufgabe kommt man, wenn man die Reihenentwicklungen willkürlicher Funktionen sucht, welche aus gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen entspringen, sofern man für die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ an Stelle der linearen Relationen zwischen den Werten der $\varphi_\nu(x)$ und ihrer Ableitungen in den beiden Randpunkten lineare Relationen zwischen den Werten der $\varphi_\nu(x)$ und ihrer Ableitungen in beliebig vielen vorgegebenen Punkten vorschreibt. Es entsteht so eine neue umfassende Gruppe von Aufgaben, die nach der im folgenden zu entwickelnden Methode behandelbar sind, worauf jedoch an anderer Stelle eingegangen werden soll.

§ 1.

Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes auf Reihenentwicklungen.

Diese Anwendung wurde von Cauchy***) selbst gegeben; da sie die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet, so soll diese Methode hier im Anschluß an Picard kurz skizziert werden.

---

*) F. Schürer, Über die Funktional-Differentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$. Berichte der kgl. sächs. Ges. der Wissensch. zu Leipzig. Math. phys. Klasse, Bd. 64 (1912), S. 167 ff.

**) Herglotz, Integralgleichungen der Elektronentheorie. Math. Ann. 65 (1908), S. 87 ff.

***) Vgl. Picard, Traité d'Analyse II. Bd. (1. Aufl., S. 167 ff., 2. Aufl., S. 179 ff).

Es sei $F(z)$ eine eindeutige analytische Funktion der komplexen Variabeln

$$z = \xi + i\eta = re^{i\varphi}$$

und besitze im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes, das von der Kurve C begrenzt werde, nur Pole z_ν mit den Residuen R_ν; auf C selbst sei $F(z)$ holomorph. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F(z)\,dz = \sum R_\nu, \tag{11}$$

wobei das Integral über C entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn zu nehmen ist. Es sei nun speziell

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{\pi(z)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu \tag{12}$$

und zwar seien $\psi(z)$ und $\pi(z)$ ganze transzendente Funktionen von z, x und x_0 reelle Parameter und $x_0 < x$, $f(\mu)$ eine reelle stetige Funktion von μ, welche den Dirichletschen Bedingungen für die Entwicklung von $f(\mu)$ in eine Fouriersche Reihe genügt. Wir nehmen nun an, es gebe in der Ebene der komplexen Veränderlichen z eine Folge von Kurven $C^{(1)}$, $C^{(2)}, \cdots, C^{(\varrho)}, \cdots$ derart, daß

a) für alle Punkte von $C^{(\varrho)}$ stets $|z|$ eine beliebig große Zahl überschreite, wenn ϱ groß genug ist,

b) daß für alle Punkte von $C^{(\varrho)}$

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\psi(z)}{\pi(z)}e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn} \quad -\frac{\pi}{2}+\vartheta < \varphi < \frac{\pi}{2}-\vartheta \tag{13}$$

und ϑ eine beliebige kleine mit wachsendem ϱ nach 0 konvergierende Größe,

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1, \quad \text{wenn} \quad \frac{\pi}{2}+\vartheta < \varphi < \frac{3}{2}\pi-\vartheta, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\right| < M, \text{ wenn } -\frac{\pi}{2}-\vartheta \leqq \varphi \leqq -\frac{\pi}{2}+\vartheta \text{ oder } \frac{\pi}{2}-\vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}+\vartheta \tag{15}$$

und M eine feste Zahl ist.

Wir zerlegen nun $C^{(\varrho)}$ in zwei Teile $C_1^{(\varrho)}$ und $C_2^{(\varrho)}$;
für die Punkte von $C_1^{(\varrho)}$ sei $\xi \geqq 0$,
für die Punkte von $C_2^{(\varrho)}$ sei $\xi < 0$.

Es sei zunächst $\xi \geqq 0$. Dann folgt aus dem zweiten Mittelwertsatz die Existenz einer Zahl M_1, so daß, wie groß auch $|z|$ sei

$$\left|(\xi+i\eta)\int\limits_{x_0}^{x} e^{-(\xi+i\eta)(\mu-x_0)} f(\mu)\,d\mu\right| < M_1 \tag{16}$$

ist. Es ist also nach (13) und (15)

$$(17)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1^{(\varrho)}} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz$$

$$= \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1^{(\varrho)}} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu\, dz = 0.$$

Es sei jetzt $\xi < 0$. Dann ist

$$(18)\qquad \lim_{r=\infty} (\xi+i\eta) \int\limits_{x_0}^{x} e^{(\xi+i\eta)(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = -\frac{1}{2} f(x),$$

also nach (14) und (15)

$$(19)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2^{(\varrho)}} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz = -\frac{1}{2} f(x).$$

Ist nun z_ν eine einfache Nullstelle von $\pi(z)$, so ist das zu z_ν gehörige Residuum R_ν von $F(z)$

$$(20)\qquad R_\nu = \frac{\psi(z_\nu)}{\pi'(z_\nu)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}$$

es folgt also aus (11), (17) und (19)

$$(21)\qquad -\frac{f(x)}{2} = \sum_\nu \frac{\psi(z_\nu)}{\pi'(z_\nu)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x},$$

wobei die Summe über alle Nullstellen z_ν von $\pi(z)$ zu nehmen ist. Auf die Änderungen, welche eintreten, wenn z_ν eine mehrfache Nullstelle von $\pi(z)$ ist, soll zunächst nicht eingegangen werden.

Es sei jetzt

$$(22)\qquad \psi(z) + \chi(z) = \pi(z), \quad x_1 > x$$

und für die Punkte der Kurven $C^{(\varrho)}$

$$(23)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \left| \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} \right| = 0, \quad \text{wenn } \frac{\pi}{2} + \vartheta < \varphi < \frac{3}{2}\pi - \vartheta \quad \text{ist.}$$

Aus (13) und (15) folgt

$$(24)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1, \qquad \text{wenn } -\frac{\pi}{2} + \vartheta < \varphi < \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

und die Existenz einer positiven Zahl M_2, so daß

$$(25)\qquad \left|\frac{\chi(z)}{\pi(z)}\right| < M_2, \text{ wenn } -\frac{\pi}{2}-\vartheta \leqq \varphi \leqq -\frac{\pi}{2}+\vartheta \text{ oder } \frac{\pi}{2}-\vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}+\vartheta$$

ist. Genau wie oben folgt also, wenn für die Punkte z von $C_1^{(\varrho)}$ wieder $\xi \geqq 0$, für die Punkte z von $C_2^{(\varrho)}$ wieder $\xi < 0$ ist,

$$(26)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(\varrho)}} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} \int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz = \frac{1}{2} f(x),$$

$$(27)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(\varrho)}} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} \int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz$$

$$= \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(\varrho)}} \frac{\chi(z)}{\pi(z)}\, e^{z(x-x_1)} \int_x^{x_1} e^{z(x_1-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz = 0,$$

$$(28)\qquad \frac{f(x)}{2} = \sum_\nu \frac{\chi(z_\nu)}{\pi'(z_\nu)} \int_x^{x_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}.$$

Durch Addition von (21) und (28) erhält man mit Benützung von (22) die gesuchte Darstellung

$$(29)\qquad f(x) = \sum_\nu - \frac{\psi(z_\nu)}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \text{ wenn } x_0 < x < x_1 \text{ ist.}$$

Es entsteht daher bei gegebenem $\pi(z)$ die Aufgabe, dieses so in zwei Summanden zu zerlegen, daß man die Kurven $C^{(\varrho)}$ so bestimmen kann, daß (13), (14), (15), (23), (24) und (25) erfüllt sind.

Von der Wahl dieser Zerlegung hängt natürlich die Bestimmung von x_1 ab, wenn x_0 gegeben ist, mit anderen Worten, es hängt von dieser Wahl die Größe des Intervalles für x ab, innerhalb dessen die Darstellung (29) gilt. Aus der Forderung a) für die Kurven $C^{(\varrho)}$ folgt überdies, daß es zu der Bestimmung der Kurven $C^{(\varrho)}$ genügen wird, die asymptotischen Werte von $\pi(z)$, $\psi(z)$ und $\chi(z)$ für große Werte von $|z|$ heranzuziehen.

§ 2.

Erstes Beispiel.

Wir betrachten die Differenzengleichung

$$(30)\qquad a_0 f(x) + a_1 f(x+h_1) + a_2 f(x+h_2) = 0,$$

in welcher a_0, a_1, a_2 reelle oder komplexe, h_1 und h_2 irgend welche reelle Konstanten sind, und zwar sei $0 < h_1 < h_2$.

Setzt man dann vorübergehend

$$f(x) = e^{z_\nu x}, \tag{31}$$

so erhält man für z_ν die transzendente Gleichung

$$\pi(z_\nu) = a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu} + a_2 e^{h_2 z_\nu} = 0 \tag{32}$$

und es ist zu zeigen, daß sich jede stetige Lösung von (30), die den Dirichletschen Bedingungen genügt, durch eine innerhalb jedes noch so großen Intervalles der reellen x gleichmäßig konvergente Reihe, die linear aus diesen partikulären Lösungen mit konstanten Koeffizienten zusammengesetzt ist, darstellen läßt. Um dieses durchzuführen, zerlegen wir $\pi(z)$ auf zweierlei Weise in zwei Summanden $\psi(z) + \chi(z)$, wobei das eine Mal

$$\psi(z) = a_0, \quad \chi(z) = a_1 e^{h_1 z} + a_2 e^{h_2 z}, \tag{1)}$$

das andere Mal

$$\psi(z) = a_0 + a_1 e^{h_1 z}, \quad \chi(z) = a_2 e^{h_2 z} \tag{2)}$$

ist. Es folgt also im *Falle* 1):

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_2, \tag{33a}$$

$$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1, \tag{33b}$$

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1, \tag{33c}$$

$$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_1. \tag{33d}$$

Im *Falle* 2) ist

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_2 - h_1, \tag{34a}$$

$$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1, \tag{34b}$$

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1, \tag{34c}$$

$$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_2. \tag{34d}$$

Wenn also im Falle 1) $x_0 < x < x_0 + h_1$, d. h.

$$x_1 = x_0 + h_1$$

ist, so sind die Gleichungen (13) und (14) bezüglich (23) und (24) erfüllt. Das Gleiche gilt im Falle 2), wenn wir x_0 durch $x_0 + h_1$, x_1 durch $x_0 + h_2$ ersetzen, für alle x, für welche

$$x_0 + h_1 < x < x_0 + h_2$$

ist. Es handelt sich also nur noch darum die Kurven $C^{(\varrho)}$ entsprechend der Bedingung a) des § 1 so zu bestimmen, daß außerdem noch in beiden Fällen (15) bzw. (25) erfüllt ist. Dieses ist gewiß der Fall, wenn wir die Kurven $C^{(\varrho)}$ so legen, daß $|\pi(z)|$ stets größer ist als der dem absoluten Betrage nach größte der drei Summanden von $\pi(z)$, nachdem wir diesen mit einer geeignet gewählten festen Zahl multipliziert haben.

Man kann zunächst eine feste Zahl a so angeben, daß

$$|\pi(z)| > \left|\frac{a_2}{2} e^{h_2 z}\right|, \text{ wenn } \xi > a, \quad |\pi(z)| > \frac{|a_0|}{2}, \text{ wenn } \xi < -a$$

ist und daß dabei $a_2 e^{h_2 z}$ bzw. a_0 die absolut größten Summanden von $\pi(z)$ sind. Wir betrachten jetzt die Folge der Zahlen $2h_1 k\pi$ und $2h_2 k\pi$ für $k = 1, 2, \cdots$ und bezeichnen die kleinsten positiven Reste dieser Zahlen modulo 2π mit $K_1, K_2, \cdots$ bzw. $L_1, L_2, \cdots$. Aus der Folge der Zahlen $K_1, K_2, \cdots$ greifen wir dann eine Folge $K_{\varrho_1}, K_{\varrho_2}, \cdots$ derart heraus, daß zu jeder beliebig kleinen Zahl ε ein μ existiert, so daß $K_{\varrho_\nu} < \varepsilon$, wenn $\nu > \mu$ ist. Die entsprechenden Größen $L_{\varrho_1}, L_{\varrho_2}, \cdots$ haben zum mindesten einen Häufungspunkt L, den man in der bekannten Weise festlegen kann. Wir greifen dann aus der Folge $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ eine neue Folge $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ derart heraus, daß

$$K_{\sigma_\nu} < \varepsilon, \; |L_{\sigma_\nu} - L| < \varepsilon$$

wird, wenn $\nu > \mu_1$, und μ_1 eine bei gegebenem ε geeignet gewählte Zahl ist. Es sei jetzt

$$(35) \qquad a_0 + a_1 e^{h_1 z} + a_2 e^{h_2 z + iL} = \varphi_1(z),$$

$$(36) \qquad a_0 + a_1 e^{h_1 z} + a_2 e^{h_2 z - iL} = \varphi_2(z);$$

wir bestimmen dann innerhalb des Rechteckes, das von den vier Geraden $\xi = \pm a$, $\eta = 2\pi i$ und 0, bzw. $\xi = \pm a$, $\eta = -2\pi i$ und 0 begrenzt wird, je eine einfache Kurve Γ bzw. $\bar{\Gamma}$, (z. B. eine Gerade), welche zwei passend gewählte Punkte auf den Seiten $\xi = +a$ und $\xi = -a$ verbindet, derart, daß längs dieser Kurven $|\varphi_1(z)|$ bzw. $|\varphi_2(z)|$ oberhalb einer geeignet bestimmten Zahl M_3 liegt. Dann verschieben wir Γ_1 bzw. $\bar{\Gamma}$ in der Richtung der η-Achse um die Stücke $2\sigma_1\pi$, $2\sigma_2\pi$, usf. bzw. um $-2\sigma_1\pi$, $-2\sigma_2\pi$ usf. in die Kurven $\Gamma^{(\sigma_1)}, \Gamma^{(\sigma_2)}, \cdots$ bzw. $\bar{\Gamma}^{(\sigma_1)}, \bar{\Gamma}^{(\sigma_2)}, \cdots$. Ist daher ν groß genug, so bleibt längs $\Gamma^{(\sigma\nu)}$ und $\bar{\Gamma}^{(\sigma_\nu)}$ gewiß $|\pi(z)|$ oberhalb einer festen Grenze, während die absoluten Beträge aller einzelnen Summanden von $\pi(z)$ unterhalb einer festen Grenze liegen, wenn $-a \leqq \xi \leqq +a$ ist. Es ist also für hinreichend große ν längs der Kurven $\Gamma^{(\sigma_\nu)}$ und $\bar{\Gamma}^{(\sigma_\nu)}$ (15) und (25) erfüllt. Außerhalb des von den Geraden $\xi = \pm a$ begrenzten Streifens genügt es, im Anschlusse an die Kurven $\Gamma^{(\sigma_\nu)}$ bzw. $\bar{\Gamma}^{(\sigma_\nu)}$ die übrigen Teile von $C^{(\sigma_\nu)}$ so zu legen, daß die Forderung a) des § 1 erfüllt ist; wir erreichen dieses etwa auf die folgende Weise: Es seien A_{σ_ν}, B_{σ_ν}, C_{σ_ν} und D_{σ_ν} die vier auf den Seiten $\xi = \pm a$ gelegenen Endpunkte von $\Gamma^{(\sigma_\nu)}$ und $\overline{\Gamma}^{(\sigma_\nu)}$, D_{σ_ν} derjenige von den vier Punkten, der vom Koordinatenanfangspunkt O am weitesten entfernt ist, dann verlängern wir OA_{σ_ν}, OB_{σ_ν} und OC_{σ_ν} bis A'_{σ_ν}, B'_{σ_ν}, C'_{σ_ν}, so daß

$$OA'_{\sigma_\nu} = OB'_{\sigma_\nu} = OC'_{\sigma_\nu} = OD_{\sigma_\nu}$$

und verbinden A'_{σ_ν}, B'_{σ_ν} bzw. C'_{σ_ν}, D_{σ_ν} durch Kreisbogen, deren Mittelpunkt O ist. Dann erfüllen die Kurven $C^{(\sigma_\nu)}$, welche aus den Kurven $\Gamma^{(\sigma_\nu)}$, $\overline{\Gamma}^{(\sigma_\nu)}$, den drei Strecken $A_{\sigma_\nu}A'_{\sigma_\nu}$, $B_{\sigma_\nu}B'_{\sigma_\nu}$, $C_{\sigma_\nu}C'_{\sigma_\nu}$ und den beiden Kreisbogen $A'_{\sigma_\nu}B'_{\sigma_\nu}$, $C'_{\sigma_\nu}D_{\sigma_\nu}$ zusammengesetzt sind, alle gewünschten Bedingungen. Die so gewonnenen Kurven bezeichnen wir als $C^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, 2, \cdots)$*).

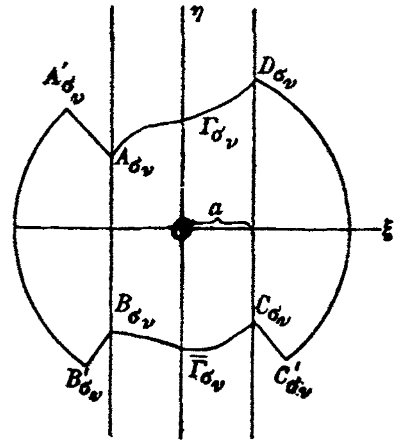

Fig. 1.

Es ergibt sich also unter der Voraussetzung, daß die Gleichung (32) nur einfache Nullstellen besitzt, aus dem im § 1 abgeleiteten Entwicklungstheorem unter Zugrundelegung der *Zerlegung* 1) *bzw.* 2)

$$(37)\quad f(x) = \sum_\nu -\frac{a_0}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \qquad \text{wenn } x_0 < x < x_0 + h_1,$$

$$(38)\quad f(x) = \sum_\nu -\frac{a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu}}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \quad \text{wenn } x_0+h_1 < x < x_0+h_2.$$

Es entsteht nun die Aufgabe, diese Darstellung von $f(x)$ so umzuformen, daß man zunächst in den beiden Intervallen eine einzige einheitliche Darstellung erhält; man erreicht dieses, wie wir sehen werden, indem man zu (37) bzw. (38) Nullentwicklungen, d. h. Darstellungen der Null hinzuaddiert. Es ist nämlich im *Falle* 1) nach (33) unter Berücksichtigung von (15)

$$(39)\quad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(\varrho)}} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_2,$$

$$(40)\quad \lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(\varrho)}} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu\, dz = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 > h_1,$$

also

*) Wie in § 1 zerlegen wir $C^{(\varrho)}$ in zwei Teile $C_1^{(\varrho)}$ und $C_2^{(\varrho)}$, so daß für die Punkte von $C_1^{(\varrho)}$ stets $\xi \geqq 0$, für die Punkte von $C_2^{(\varrho)}$ $\xi < 0$ ist.

$$(41)\quad 0=\sum_\nu -\frac{a_0}{\pi'(z_\nu)}\int\limits_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu\, e^{z_\nu x}, \qquad \text{wenn } x_0+h_1<x<x_0+h_2$$

ist. Entsprechend hat man für die *Zerlegung* 2)

$$(42)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1^{(\varrho)}}\frac{\chi(z)}{\pi(z)}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu\,dz=0, \qquad \text{wenn } x<x_0+h_1,$$

$$(43)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2^{(\varrho)}}\frac{\chi(z)}{\pi(z)}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu\,dz=0, \qquad \text{wenn } x>x_0,$$

also

$$(44)\quad 0=\sum_\nu -\frac{a_0+a_1e^{h_1z_\nu}}{\pi'(z_\nu)}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu\, e^{z_\nu x}, \qquad \text{wenn } x_0<x<x_0+h_1.$$

Durch Addition von (37) und (44), bzw. (38) und (41) erhält man daher die Darstellung

$$(45)\quad f(x)=\sum_\nu -\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\left[a_0\int\limits_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu + a_1e^{h_1z_\nu}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu\right],$$

wenn

$$x_0<x<x_0+h_1 \quad \text{oder} \quad x_0+h_1<x<x_0+h_2.$$

Die Summe ist dabei über alle Wurzeln z_ν von (32) zu nehmen. Aus der Ableitung folgt überdies, daß die Reihe (45) gleichmäßig konvergiert, wenn die Grenzpunkte der beiden Intervalle durch beliebig kleine Intervalle ausgeschlossen werden.

Wir zeigen jetzt, daß die Koeffizienten der Funktionen $e^{z_\nu x}$ in der Darstellung (45) gar nicht von x_0 abhängen, sofern $f(x)$ eine Lösung der Differenzengleichung (30) ist. Setzen wir, um dieses zu zeigen,

$$(46)\quad a_0\int\limits_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu + a_1e^{h_1z_\nu}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu} f(\mu)\,d\mu = C_\nu(x_0)$$

so ist

$$(47)\quad \frac{dC_\nu(x_0)}{dx_0}=a_0e^{-z_\nu(x_0+h_2)}f(x_0+h_2)-a_0e^{-z_\nu x_0}f(x_0)$$
$$+a_1e^{h_1z_\nu}e^{-z_\nu(x_0+h_2)}f(x_0+h_2)-a_1e^{-z_\nu x_0}f(x_0+h_1).$$

Es folgt aber aus (32)

$$a_0e^{-z_\nu(x_0+h_2)}f(x_0+h_2)+a_1e^{h_1z_\nu}e^{-z_\nu(x_0+h_2)}f(x_0+h_2)$$
$$=-a_2e^{z_\nu h_2}e^{-z_\nu(x_0+h_2)}f(x_0+h_2),$$

also wird

$$(48)\quad \frac{dC_\nu(x_0)}{dx_0}=-e^{-z_\nu x_0}(a_0f(x_0)+a_1f(x_0+h_1)+a_2f(x_0+h_2))=0.$$

Da also die Koeffizienten der Funktionen $e^{z_\nu x}$ in (45) von x_0 unabhängig sind, so folgt durch dachziegelartige Überdeckung der Achse der reellen x mit Intervallen der Längen h_1 und $h_2 - h_1$, daß die Reihe (45) für alle reellen x konvergiert, und daß diese Konvergenz in jedem noch so großen, aber festen Intervalle eine gleichmäßige ist.

Wir haben also die Fundamentalaufgabe gelöst, *eine stetige Lösung* $f(x)$ *von* (30), *die innerhalb eines Intervalles* $x_0 \leqq x < x_0 + h_2$ *vorgegebene stetige, den Dirichletschen Bedingungen genügende Werte*) annimmt, durch eine für alle reelle* x *konvergente Reihe* (45) *darzustellen. Die Reihe* (45) *konvergiert überdies in jedem beliebig großen aber festen Intervall der reellen* x *gleichmäßig.*

Zusatz 1. Setzt man in (46) $f(\mu) = e^{z_{\nu_1}\mu}$, so folgt

$$(49) \qquad a_0 \int_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-(z_\nu - z_{\nu_1})\mu}\, d\mu + a_1 e^{h_1 z_\nu} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-(z_\nu - z_{\nu_1})\mu}\, d\mu$$
$$= \frac{e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu - z_{\nu_1}} \left(a_0 e^{z_{\nu_1} x_0} + a_1 e^{z_{\nu_1}(x_0+h_1)} + a_2 e^{z_{\nu_1}(x_0+h_2)}\right);$$

ist also z_{ν_1} eine Wurzel von (32), so folgt

$$(50) \quad a_0 \int_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-(z_\nu - z_{\nu_1})\mu}\, d\mu + a_1 e^{h_1 z_\nu} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-(z_\nu - z_{\nu_1})\mu}\, d\mu \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \nu \neq \nu_1, \\ = -\pi'(z_\nu), & \text{wenn } \nu = \nu_1. \end{cases}$$

Aus dieser Beziehung (50), welche den Orthogonalitätsrelationen bei den gewöhnlichen Fourierschen Reihen entspricht, folgt unmittelbar, daß es nur eine *einzige* im Intervalle x_0, $x_0 + h_2$ gleichmäßig konvergente Entwicklung (45) gibt.

Zusatz 2. Besitzt (32) eine mehrfache Wurzel z_ν, so folgt aus dem Cauchyschen Residuensatze, daß sich nur die Form des z_ν entsprechenden Summanden ändert, daß dieser aber formal durch Grenzübergang aus den Summanden von (45) erhalten wird, welche zu den zusammenfallenden Wurzeln gehören. Ist etwa z_ν eine doppelte Wurzel, so wird der entsprechende Summand von (45)

$$\frac{2e^{z_\nu x}}{\pi''(z_\nu)} \left[a_0 \int_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} f(\mu) \mu\, d\mu + a_1 e^{h_1 z_\nu} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} (\mu - h_1) f(\mu)\, d\mu \right]$$
$$- \frac{2x e^{z_\nu x}}{\pi''(z_\nu)} \left[a_0 \int_{x_0}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu + a_1 e^{h_1 z_\nu} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu \right].$$

An allen anderen Schlußfolgerungen wird nichts geändert.

---

*) Diese Werte müssen aber so vorgegeben sein, daß der aus (30) berechnete Wert von $f(x_0 + h_2)$ sich stetig an die Werte von $f(x)$ für $x < x_0 + h_2$ anschließt.

§ 3.

Behandlung der allgemeinen linearen Differenzengleichungen.

Es seien in der Differenzengleichung

$$(51)\qquad a_0 f(x) + a_1 f(x+h_1) + \cdots + a_n f(x+h_n) = 0$$

die Größen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reelle oder komplexe, die Größen $h_1, h_2, \cdots, h_n$ beliebige reelle Konstanten und zwar sei

$$0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n.$$

Setzt man vorübergehend

$$f(x) = e^{z_\nu x},$$

dann erhält man für z_ν die transzendente Gleichung

$$(52)\qquad \pi(z_\nu) = a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu} + a_2 e^{h_2 z_\nu} + \cdots + a_n e^{h_n z_\nu}.$$

Wir zerlegen nun $\pi(z)$ in zwei Summanden $\psi(z) + \chi(z)$ und zwar auf folgende Weisen

1) $\psi(z) = a_0,\qquad \chi(z) = a_1 e^{h_1 z} + a_2 e^{h_2 z} + \cdots + a_n e^{h_n z},$

2) $\psi(z) = a_0 + a_1 e^{h_1 z},\qquad \chi(z) = a_2 e^{h_2 z} + \cdots + a_n e^{h_n z},$

. . . .

l) $\psi(z) = a_0 + a_1 e^{h_1 z} + \cdots + a_{l-1} e^{h_{l-1} z},\qquad \chi(z) = a_l e^{h_l z} + \cdots + a_n e^{h_n z},$

. . . .

n) $\psi(z) = a_0 + a_1 e^{h_1 z} + \cdots + a_{n-1} e^{h_{n-1} z},\qquad \chi(z) = a_n e^{h_n z}.$

Im Falle 1) *ist*

$$(53a)\qquad \lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_n;$$

$$(53b)\qquad \lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

$$(53c)\qquad \lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

$$(53d)\qquad \lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_1.$$

Im Falle 2) *ist*

$$(54a)\qquad \lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_n - h_1,$$

$$(54b)\qquad \lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

$$(54c)\qquad \lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

$$(54d)\qquad \lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_2.$$

Im Falle l) ist

(55a) $$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_n - h_{l-1},$$

(55b) $$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

(55c) $$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

(55d) $$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_l.$$

Im Falle n) ist

(56a) $$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_0)} = 0, \quad \text{wenn } x - x_0 < h_n - h_{n-1},$$

(56b) $$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

(56c) $$\lim_{\xi=+\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1,$$

(56d) $$\lim_{\xi=-\infty} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} e^{z(x-x_1)} = 0, \quad \text{wenn } x_1 - x < h_n.$$

Die Bestimmung der Kurven $C^{(\varrho)}$ erfolgt genau wie in § 2, nur daß das Auswahlverfahren wiederholt anzuwenden ist.

Es sei nun $f(x)$ eine im Intervall $x_0, x_0 + h_n$ stetige, den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktion. Dann folgt aus der *Zerlegung* 1) vermittelst des Cauchyschen Satzes unter Zuhilfenahme der oben zusammengestellten Grenzwerte (53) genau wie bei (37).

(57) $$f(x) = \sum_\nu - \frac{a_0}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \quad \text{wenn } x_0 < x < x_0 + h_1.$$

Setzt man in (11)

(58) $$F(z) = \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu, \qquad \text{wenn } x_0 + h_1 < x < x_0 + h_n,$$

so folgt

(59) $$0 = \sum_\nu - \frac{a_0}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \quad \text{wenn } x_0 + h_1 < x < x_0 + h_n.$$

Die *zweite Zerlegung* liefert

$$0 = \qquad\qquad \text{wenn } x_0 < x < x_0 + h_1,$$

(60) $$f(x) = \sum_\nu - \frac{a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu}}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, \quad \text{wenn } x_0 + h_1 < x < x_0 + h_2,$$

$$0 = \qquad\qquad \text{wenn } x_0 + h_2 < x < x_0 + h_n.$$

Die erste dieser Gleichungen (60) erhält man, wenn man für die x des betreffenden Intervalles unter Berücksichtigung der Gleichungen (54) in (11)

$$(61) \qquad F(z) = -\frac{\chi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

einführt; die zweite Gleichung wird gewonnen, wenn man in (29) x_0 bzw. x_1 durch $x_0 + h_1$ bzw. $x_0 + h_2$ ersetzt, die dritte Gleichung folgt für die in Betracht kommenden x aus dem Ansatze (58), wenn als Grenzen des Integrals $x_0 + h_1$ und $x_0 + h_2$ gewählt werden. Ebenso folgt aus der l^{ten} *Zerlegung*

$$(62) \quad \begin{aligned} 0 &= && \text{wenn } x_0 < x < x_0 + h_{l-1}, \\ f(x) &= \sum_\nu - \frac{a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu} + \cdots + a_{l-1} e^{h_{l-1} z_\nu}}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0+h_{l-1}}^{x_0+h_l} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, && \text{wenn } x_0 + h_{l-1} < x < x_0 + h_l \\ 0 &= && \text{wenn } x_0 + h_l < x < x_0 + h_n \end{aligned}$$

und aus der *letzten Zerlegung*

$$(63) \quad \begin{aligned} 0 &= && \text{wenn } x_0 < x < x_0 + h_{n-1}, \\ f(x) &= \sum_\nu - \frac{a_0 + a_1 e^{h_1 z_\nu} + \cdots + a_{n-1} e^{h_{n-1} z_\nu}}{\pi'(z_\nu)} \int_{x_0+h_{n-1}}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu\, e^{z_\nu x}, && \text{wenn } x_0 + h_{n-1} < x < x_0 + h_n \end{aligned}$$

Durch Addition der Gleichungen (57) bzw. (59), (63) und der Gleichungen (62) für $l = 2, 3, \cdots, n-1$ erhält man

$$(64) \qquad f(x) = \sum_\nu - \frac{C_\nu(x_0) e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}$$

$$= \sum_\nu - \left[a_0 \int_{x_0}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu} d\mu + a_1 e^{h_1 z_\nu} \int_{x_0+h_1}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu} d\mu + \cdots + a_{n-1} e^{h_{n-1} z_\nu} \int_{x_0+h_{n-1}}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu} d\mu \right] \frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}$$

und zwar konvergiert diese Reihe gleichmäßig, wenn bei beliebig kleinem ε

$$x_0 + \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + h_1 - \varepsilon \text{ oder } x_0 + h_1 + \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + h_2 - \varepsilon \text{ oder } \cdots$$
$$\cdots x_0 + h_{n-1} + \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + h_n - \varepsilon$$

ist. Wir zeigen nun, daß abermals die Größen $C_\nu(x_0)$ von x_0 unabhängig sind. In der Tat folgt, wenn $f(x)$ eine Lösung von (51) ist*)

*) Die im Intervalle $x_0 \leqq x < x_0 + h_n$ vorgegebene Funktion muß also so gewählt sein, daß der aus (51) berechnete Wert von $f(x_0 + h_n)$ sich stetig an die Werte von $f(x)$ für $x < x_0 + h_n$ anschließt.

$$(65)\qquad \frac{dC_\nu(x_0)}{dx_0}=f(x_0+h_n)e^{-z_\nu(x_0+h_n)}\sum_0^{n-1}{}^l a_l e^{h_l z_\nu}-e^{-z_\nu x_0}\sum_0^{n-1}{}^l a_l f(x_0+h_l)$$
$$=-e^{-z_\nu x_0}\sum_0^{n}{}^l a_l f(x_0+h_l)=0,$$

also spielt x_0 in (64) keine ausgezeichnete Rolle, und durch dachziegelartige Überdeckung der die reellen x darstellenden Geraden folgt, daß die Reihe (64) in jedem beliebig großen, aber festen Intervall der x gleichmäßig konvergiert. Damit ist also auch für (51) die Fundamentalaufgabe gelöst.

Zusatz 1. Wir zeigen wie in § 2, daß es nur eine einzige in dem Intervall x_0, x_0+h_n gleichmäßig konvergente Entwicklung der Form (64) gibt. In der Tat ist genau wie dort

$$(66)\qquad \sum_0^{n-1}{}^l a_l e^{h_l z_\nu}\int_{x_0+h_l}^{x_0+h_n} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)\mu}\,d\mu=\frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)(x_0+h_n)}}{z_{\nu_1}-z_\nu}\sum_0^{n-1}{}^l a_l e^{h_l z_\nu}$$
$$-\frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu}\sum_0^{n-1}{}^l a_l e^{h_l z_{\nu_1}}=-\frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}\pi(z_{\nu_1})}{z_{\nu_1}-z_\nu},$$

also

$$\sum_0^{n-1}{}^l a_l e^{h_l z_\nu}\int_{x_0+h_l}^{x_0+h_n} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)\mu}\,d\mu \begin{array}{l} = \quad 0, \text{ wenn } \nu\neq\nu_1, \\ =-\pi'(z_\nu), \text{ wenn } \nu=\nu_1 \text{ ist.}\end{array}$$

Zusatz 2. Der bisher ausgeschlossene Fall, daß (52) mehrfache Nullstellen besitzt, erledigt sich genau wie im § 2.

§ 4.

Zusammenhang mit der gewöhnlichen Theorie der Differenzengleichungen.*)

Wir wollen nun zeigen, daß man die Darstellung (64) für die Lösung der gewöhnlichen Differenzengleichung

$$(67)\qquad a_0f(x)+a_1f(x+1)+\cdots+a_nf(x+n)=0$$

aus der für diese Gleichungen bekannten Theorie direkt erhält. Bekanntlich läßt sich nämlich die allgemeine Lösung von (67) durch n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, die also durch keine lineare

*) Vgl. hierzu A. Guldberg und G. Wallenberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen, 1911, S. 79f.

Relation $\varkappa_1(x)y_1(x)+\varkappa_2(x)y_2(x)+\cdots+\varkappa_n(x)y_n(x)=0$, (wobei die $\varkappa(x)$ stetige Funktionen von x mit der Periode 1 sind), verbunden sind, in der Form darstellen

$$f(x)=\omega_1(x)y_1(x)+\omega_2(x)y_2(x)+\cdots+\omega_n(x)y_n(x). \tag{68}$$

Der Funktionen $\omega(x)$ sind dabei stetige Funktion von x mit der Periode 1. Es entsteht dann die Aufgabe, die Funktionen $\omega(x)$ so zu bestimmen, daß $f(x)$ in einem Intervalle von der Größe n, also etwa im Intervalle $0 \leqq x \leqq n$ mit einer vorgegebenen stetigen Funktion $f(x)$ zusammenfällt, die den Dirichletschen Bedingungen genügt und für welche*)

$$a_n f(n)=-a_0 f(0)-a_1 f(1)-\cdots-a_{n-1}f(n-1).$$

Ist also $0 \leqq x \leqq 1$, so erhält man für die unbekannten Funktionen $\omega(x)$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\omega_1(x)y_1(x) &&+\omega_2(x)y_2(x) &&+\cdots+\omega_n(x)y_n(x) &&=f(x),\\
&\omega_1(x)y_1(x+1) &&+\omega_2(x)y_2(x+1) &&+\cdots+\omega_n(x)y_n(x+1) &&=f(x+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_1(x)y_1(x+n-1) &&+\omega_2(x)y_2(x+n-1) &&+\cdots+\omega_n(x)y_n(x+n-1) &&=f(x+n-1).
\end{aligned} \tag{69}$$

Die Determinante dieses Systems

$$D(x)=D(y_1(x),\, y_2(x),\, \cdots,\, y_n(x))=|y_k(x+i-1)| \quad \text{für } \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,n,\\ k=1,2,\cdots,n\end{array}$$

ist wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $y_k(x)$ von Null verschieden und es ist

$$D(x+1)=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}D(x). \tag{70}$$

Es ist also

$$\omega_k(x)=\frac{D(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{k-1}(x),\ f(x),\ y_{k+1}(x),\cdots,y_n(x))}{D(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{k-1}(x),y_k(x),y_{k+1}(x),\cdots,y_n(x))}; \tag{71}$$

da auch $f(x)$ der Gleichung (67) genügt, so gilt auch für den Zähler die Gleichung (70), so daß die Funktionen $\omega_k(x)$ tatsächlich die Periode 1 besitzen. Wir setzen nun

$$u_k^{(i)}(x)=\frac{1}{D}\,\frac{\partial D}{\partial y_k(x+i-1)}, \tag{72}$$

dann erhält man

$$\omega_k(x)=u_k^{(1)}(x)f(x)+u_k^{(2)}(x)f(x+1)+\cdots+u_k^{(n)}(x)f(x+n-1); \tag{73}$$
$$(k=1,2,\cdots,n).$$

Es lassen sich aber alle Funktionen $u_k^{(i)}(x)$ durch die Funktionen

$$u_k(x)=u_k^{(n)}(x)=\frac{1}{D}\,\frac{\partial D}{\partial y_k(x+n-1)} \tag{74}$$

*) Eine entsprechende Randbedingung muß das vorgegebene $f(x)$ selbstverständlich bei allen behandelten Funktionalgleichungen erfüllen, vgl. § 2 und § 3.

linear ausdrücken. Betrachten wir dabei der Allgemeinheit wegen die Größen a zunächst als Funktionen von x, so folgt aus (70) und (72)

$$
(75) \qquad
\begin{aligned}
-u_k^{(1)}(x) &= \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\, u_k(x+1),\\
u_k^{(1)}(x+1) - u_k^{(2)}(x) &= \frac{a_1(x)}{a_n(x)}\, u_k(x+1),\\
u_k^{(2)}(x+1) - u_k^{(3)}(x) &= \frac{a_2(x)}{a_n(x)}\, u_k(x+1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_k^{(n-1)}(x+1) - u_k(x) &= \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, u_k(x+1).
\end{aligned}
$$

Es genügen daher die Funktionen $u_k(x)$ der zu (67) adjungierten Differenzengleichung

$$
(76) \qquad
\begin{aligned}
&u_k(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, u_k(x+1) + \frac{a_{n-2}(x+1)}{a_n(x+1)}\, u_k(x+2) + \cdots\\
&\cdots + \frac{a_1(x+n-2)}{a_n(x+n-2)}\, u_k(x+n-1) + \frac{a_0(x+n-1)}{a_n(x+n-1)}\, u_k(x+n) = 0
\end{aligned}
$$

und es folgt ferner aus (75)

$$
(77) \qquad u_k^{(n-s)}(x) = \sum_0^s {}_p\, \frac{a_{n-p}(x-s+p-1)}{a_n(x-s+p-1)}\, u_k(x-s+p),
$$

also

$$
u_k^{(\varrho)}(x) = \sum_0^{n-\varrho} {}_p\, \frac{a_{n-p}(x-n+\varrho+p-1)}{a_n(x-n+\varrho+p-1)}\, u_k(x-n+\varrho+p),
$$

daher wird nach (73)

$$
\begin{aligned}
(78) \quad \omega_k(x) &= \sum_1^n {}_\varrho \sum_0^{n-\varrho} {}_p\, \frac{a_{n-p}(x-n+\varrho+p-1)}{a_n(x-n+\varrho+p-1)}\, u_k(x-n+\varrho+p) f(x+\varrho-1)\\
&= \sum_0^{n-1} {}_p \sum_1^{n-p} {}_\varrho\, \frac{a_{n-p}(x-n+\varrho+p-1)}{a_n(x-n+\varrho+p-1)}\, u_k(x-n+\varrho+p) f(x+\varrho-1).
\end{aligned}
$$

Indem wir nun $\omega_k(x)$ in eine gewöhnliche Fourierreihe entwickeln, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(79) \quad \omega_k(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m\, e^{2m\pi i x} \sum_0^{n-1} {}_p \sum_1^{n-p} {}_\varrho \int_0^1 \frac{a_{n-p}(\mu-n+\varrho+p-1)}{a_n(\mu-n+\varrho+p-1)}\, u_k(\mu-n+\varrho+p) f(\mu+\varrho-1) e^{-2m\pi i\mu} d\mu\\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m\, e^{2m\pi i x} \sum_0^{n-1} {}_p \int_0^{n-p} \frac{a_{n-p}(\mu-n+p)}{a_n(\mu-n+p)}\, u_k(\mu-n+p+1) f(\mu) e^{-2m\pi i\mu}\, d\mu.
\end{aligned}
$$

Sind in der Differenzengleichung (67) die a Konstanten, so erhält man ein Fundamentalsystem $y_k(x)$ für $(k=1,2,\cdots,n)$ durch die Funktionen $e^{z_k x}$, wo die z_k Wurzeln der Gleichung

$$\pi(z_k)=a_0+a_1e^{z_k}+a_2e^{2z_k}+\cdots+a_ne^{nz_k}=0 \tag{80}$$

sind und etwa als die Hauptwerte der Logarithmen der n als voneinander verschieden angenommenen Wurzeln t_k der Gleichung

$$a_0+a_1t_k+a_2t_k^2+\cdots+a_nt_k^n=0 \tag{81}$$

definiert sein mögen.

Eine elementare Rechnung gibt in diesem Falle

$$u_k(x)=\frac{a_ne^{z_k}e^{-z_kx}}{\pi'(z_k)}. \tag{82}$$

Setzen wir unter Berücksichtigung von (82) den Wert von ω_k aus (79) in (68) ein, so erhalten wir die Darstellung

$$f(x)=\sum_\nu -\frac{C_\nu e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}, \tag{83}$$

wobei die Summe über alle Wurzeln

$$z_\nu=z_k+2m\pi i \quad (k=1,2,\cdots,n;\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

zu nehmen ist und

$$C_\nu=-\pi'(z_\nu)\sum_0^{n-1}{}_p\int_0^{n-p}\frac{a_{n-p}}{a_n}\frac{a_n}{\pi'(z_k)}e^{-(z_k+2m\pi i)\mu}e^{(n-p)z_k}f(\mu)\,d\mu \tag{84}$$

$$=-\sum_0^{n-1}{}_p\,a_{n-p}e^{(n-p)z_\nu}\int_0^{n-p}f(\mu)e^{-z_\nu\mu}\,d\mu$$

ist. Da aber nach (80)

$$0=\sum_0^{n}{}_p\,a_{n-p}e^{(n-p)z_\nu}\int_0^{n}f(\mu)e^{-z_\nu\mu}\,d\mu, \tag{85}$$

so folgt durch Addition

$$C_\nu=a_0\int_0^n f(\mu)e^{-z_\nu\mu}\,d\mu+a_1e^{z_\nu}\int_1^n f(\mu)e^{-z_\nu\mu}\,d\mu+\cdots \tag{86}$$

$$\cdots+a_{n-1}e^{(n-1)z_\nu}\int_{n-1}^n f(\mu)e^{-z_\nu\mu}\,d\mu;$$

dieser Ausdruck wird aber mit dem von C_ν in (64) identisch, wenn man daselbst $h_1, h_2, \cdots, h_{n-1}, h_n$ durch $1, 2, \cdots, n-1, n$ ersetzt.

§ 5.

Formaler Übergang zu den Funktionalgleichungen (4).

Um uns ein Bild zu machen, welche Darstellung im Falle der allgemeinen Funktionalgleichung (4) an die Stelle von (64) tritt, ersetzen wir zunächst (51) durch die Gleichung

$$(87)\quad \sum_0^n {}^q k_{0q} f(x+h_q) + \frac{1}{\delta}\left[\sum_0^n {}^q k_{1q} f(x+h_q+\delta) - \sum_0^n {}^q k_{1q} f(x+h_q)\right] = 0$$

und lassen δ nach 0 konvergieren, dann wird in (64)

$$(88)\quad C_\nu = \sum_0^n {}^q k_{0q} e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n+\delta} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu$$

$$+ \frac{1}{\delta} \sum_0^n {}^q k_{1q} \left[e^{(h_q+\delta) z_\nu} \int_{x_0+h_q+\delta}^{x_0+h_n+\delta} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu - e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n+\delta} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu \right],$$

also

$$(89)\quad \lim_{\delta=0} C_\nu = \sum_0^{n-1} {}^q k_{0q} e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu$$

$$+ \sum_0^{n-1} {}^q k_{1q} z_\nu e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu - \sum_0^n {}^q k_{1q} f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}$$

$$= \sum_0^1 {}^p \sum_0^{n-1} {}^q k_{pq} e^{h_q z_\nu} z_\nu^p \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} f(\mu) e^{-z_\nu \mu}\, d\mu - \sum_0^n {}^q k_{1q} f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}.$$

Entsprechend erhält man, wenn man durch Grenzübergang zu

$$(90)\quad \sum_0^n {}^q [k_{2q} f^{(2)}(x+h_q) + k_{1q} f^{(1)}(x+h_q) + k_{0q} f(x+h_q)] = 0$$

aufsteigt

$$(91)\quad C_\nu = \sum_0^2 {}^p \sum_0^{n-1} {}^q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu$$

$$- \sum_1^2 {}^p \sum_0^n {}^q k_{pq} z_\nu^{p-1} e^{-z_\nu x_0} f(x_0+h_q) - \sum_0^n {}^q k_{1q} f'(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}$$

und allgemein, wenn man zu

(92) $$\sum_0^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = 0$$

aufsteigt,

(93) $$C_\nu = \sum_0^m {}_p \sum_0^{n-1} {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu$$
$$- \sum_1^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{-z_\nu x_0} \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q)}{z_\nu^{p_1+1}}.$$

Man sieht also, daß in der von Schürer gegebenen Entwicklung (9) und ganz allgemein in (93) diejenigen Glieder, die nur von den Werten von $f(x)$ in den festen Punkten $x_0 + h_q$ abhängen, von den durch Grenzübergang verwischten Intervallen herrühren. Wir wenden uns jetzt in den folgenden Paragraphen zu der direkten Ableitung von (93) aus dem Cauchyschen Residuensatz.

§ 6.

Konstruktion der Kurven $C^{(\varrho)}$.

Es sei in der Gleichung (4)

(4) $$\sum_0^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = 0,$$

$k_{pq_p} \neq 0$, $k_{pq} = 0$, wenn $q > q_p$; $k_{p\bar{q}_p} \neq 0$, $k_{pq} = 0$, wenn $q < \bar{q}_p$;
$k_{p_q q} \neq 0$, $k_{pq} = 0$, wenn $p > p_q$; $k_{\bar{p}_q q} \neq 0$, $k_{pq} = 0$, wenn $p < \bar{p}_q$ ist.

Setzen wir vorübergehend
$$f(x) = e^{z_\nu x},$$
so erhalten wir für z_r die Gleichung

(94) $$\pi(z_r) = \sum_0^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu}$$

Wir haben nun die Kurven $C^{(\varrho)}$ so zu bestimmen, daß mit wachsendem ϱ für alle Punkte z von $C^{(\varrho)}$ $|z|$ beliebig groß wird, daß andererseits eine feste Zahl a existiert, so daß längs $C^{(\varrho)}$ stets $|\pi(z)|$ größer ist als der mit a multiplizierte, dem absoluten Betrage nach jeweils größte Summand von $\pi(z)$. Schließen wir die η-Achse zwischen zwei durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Gerade ein, welche mit der η-Achse den beliebig kleinen Winkel $\pm\vartheta$ einschließen, dann ist asymptotisch ($\sim$) für große Werte von r, wenn wieder
$$z = re^{i\varphi}$$

gesetzt wird,

(95) $\pi(z) \sim k_{p_n n} z^{p_n} e^{z h_n}$, sofern $-\frac{\pi}{2} + \vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \vartheta$,

(96) $\pi(z) \sim k_{p_0 0} z^{p_0}$, sofern $\frac{\pi}{2} + \vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{3}{2}\pi - \vartheta$ ist.

Die Schwierigkeit besteht also wesentlich darin, die Kurven $C^{(\varrho)}$ innerhalb der Sektoren $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ und $\frac{3}{2}\pi - \vartheta$, $\frac{3}{2}\pi + \vartheta$ geeignet zu wählen. Wir schließen zunächst die η-Achse durch zwei zu ihr parallele Gerade in endlichem Abstande so ein, daß außerhalb dieses Streifens $\left|\sum_0^n {}^q k_{mq} e^{z h_q}\right|$ bei positiven ξ oberhalb einer festen wesentlich positiven Grenze, bei negativem ξ oberhalb $\left|\alpha k_{m\bar{q}_m} e^{z h_{\bar{q}_m}}\right|$ bleibt, wenn α eine feste Zahl ist, die etwa kleiner als 0,5 sei. Die innerhalb des Streifens liegenden Teile der Kurve $C^{(\varrho)}$ bestimmen wir vermittels des im § 2 eingeführten Auswahlverfahrens so, daß wenn

(97) $$\sum_0^n {}^q k_{mq} e^{z h_q} = s_m$$

gesetzt wird, $|s_m|$ längs dieser Kurvenstücke oberhalb einer festen Grenze liegt.

Innerhalb des Streifens ist dann längs dieser Kurvenstücke in $|\pi(z)|$ der Bestandteil $|s_m z^m|$ ausschlaggebend, d. h. es existieren zwei positive Zahlen a und b, so daß

(98) $$a\,|z^m s_m| < |\pi(z)| < b\,|z^m s_m|$$

und dieses gilt ganz allgemein rechts dieses Streifens, so lange dort $|\eta|$ sehr groß gegenüber $e^{h_1 \xi}$ ist. Wenn jedoch dies letztere nicht mehr der Fall ist, d. h. wenn $e^{h_1 \xi}$ von derselben Größenordnung ist, wie η, so sind die dem absoluten Betrage nach größten Summanden von $\pi(z)$ gewiß in

(99) $$\bar{s} = \sum_0^m {}^p k_{p q_p} z^p e^{z h_{q_p}}$$

enthalten. Um nun die in $\bar{s}$ vorkommenden, jeweils absolut größten Summanden zu bestimmen, fragen wir, wann die absoluten Beträge zweier darin auftretender Summanden gleich werden, wann also etwa

(100) $$\left|k_{p_1 q_{p_1}} z^{p_1} e^{z h_{q_{p_1}}}\right| = \left|k_{p_2 q_{p_2}} z^{p_2} e^{z h_{q_{p_2}}}\right|$$

wird. Dabei nehmen wir $|\eta|$ sehr groß an, es soll sich aber, um den Anschluß an die innerhalb des Streifens durch das Auswahlverfahren gewonnenen Stücke der Kurven $C^{(\varrho)}$ leicht bewerkstelligen zu können, η

von einer bei festem ϱ festen Größe η_ϱ um höchstens $\pm 2\pi$ unterscheiden dürfen, so daß also

(101) $\eta = \eta_\varrho + 2\Theta\pi$, wobei $-1 \leqq \Theta \leqq +1$ und $\lim\limits_{\varrho=\infty} \eta_\varrho = \infty$ ist.

Setzen wir vorübergehend

$$\frac{k_{p_2 q_{p_2}}}{k_{p_1 q_{p_1}}} = A^{p_1 - p_2},$$

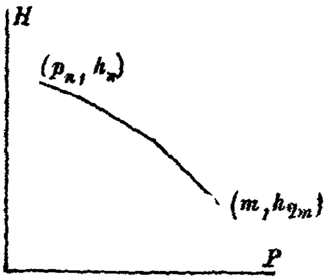

Fig. 2.

so muß, wenn (100) gelten soll,

(102) $$|z| = |A| \left| e^{z \frac{h_{q_{p_2}} - h_{q_{p_1}}}{p_1 - p_2}} \right|$$

sein. Es muß also für große Werte von $|\eta_\varrho|$

(103) $$\xi \sim \frac{p_1 - p_2}{h_{q_{p_2}} - h_{q_{p_1}}} \lg \eta_\varrho$$

sein. Wir ziehen zur weiteren Diskussion ein Koordinatensystem P, H heran und tragen auf der P-Achse die Größen p, auf der H-Achse die dazu gehörigen Größen h_{q_p} auf. Durch den Punkt m, h_{q_m} legen wir eine Parallele zur H-Achse und drehen diese entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn bis ein oder mehrere Punkte p, h_{q_p} darauf fallen. Um den zu dem kleinsten p gehörigen dieser Punkte drehen wir in demselben Sinne weiter, bis neue Punkte auf die Gerade fallen; dieses Verfahren setzen wir fort, bis die Gerade durch den Punkt p_n, h_n geht. Die Winkel, welche die Seiten dieses Polygonzuges mit der H-Achse einschließen, seien $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$, ferner sei,

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \mu_j \qquad (j = 1, 2, \cdots),$$

dann ist $\mu_j < \mu_{j+1}$ und es sind, wenn

(104) $$(\delta + \mu_{j-1}) \lg \eta_\varrho < \xi < (\mu_{j+1} - \delta) \lg \eta_\varrho$$

ist, unter den zur j^{ten} Polygonseite gehörigen Summanden von $\bar{s}$ die absolut größten Summanden von $\pi(z)$ enthalten, sofern δ eine positive Zahl ist, die beliebig klein wird, wenn $|\eta_\varrho|$ groß genug ist. Wir betrachten jetzt eine Polygonseite, auf welcher die Punkte $p_1, h_{q_{p_1}}; p_2, h_{q_{p_2}}; \cdots; p_\nu, h_{q_{p_\nu}}$ liegen mögen, so daß

(105) $$\frac{p_1 - p_2}{h_{q_{p_2}} - h_{q_{p_1}}} = \frac{p_1 - p_3}{h_{q_{p_3}} - h_{q_{p_1}}} = \cdots = \frac{p_1 - p_\nu}{h_{q_{p_\nu}} - h_{q_{p_1}}} = \mu_j \text{ und } p_1 > p_2 > \cdots > p_\nu$$

ist. Die zu diesen Punkten gehörigen Summanden von $\bar{s}$ haben als Summe

(106) $$s_j = k_{p_1 q_{p_1}} z^{p_1} e^{z h_{q_{p_1}}} + k_{p_2 q_{p_2}} z^{p_2} e^{z h_{q_{p_2}}} + \cdots + k_{p_\nu q_{p_\nu}} z^{p_\nu} e^{z h_{q_{p_\nu}}}$$

$$= z^{p_1} e^{z h_{q_{p_1}}} \left[k_{p_1 q_{p_1}} + k_{p_2 q_{p_2}} \left(\frac{e^{\frac{z}{\mu_j}}}{z} \right)^{p_1 - p_2} + \cdots + k_{p_\nu q_{p_\nu}} \left(\frac{e^{\frac{z}{\mu_j}}}{z} \right)^{p_1 - p_\nu} \right].$$

Setzt man dann

$$\xi = t \lg \eta_\varrho \tag{107}$$

wobei entsprechend zu (104)

$$\mu_{j-1} + \delta < t < \mu_{j+1} - \delta, \tag{108}$$

so wird

$$\frac{e^{\frac{z}{\mu_j}}}{z} = \frac{\eta_\varrho^{\frac{t}{\mu_j}} e^{\frac{i\eta}{\mu_j}}}{\eta_\varrho \left[\frac{\xi}{\eta_\varrho} + \frac{i\eta}{\eta_\varrho}\right]} = \frac{\eta_\varrho^{\frac{t-\mu_j}{\mu_j}} e^{\frac{i\eta}{\mu_j}}}{i + \delta_1} = v, \tag{109}$$

wo $|\delta_1|$ beliebig klein ist, wenn $|\eta_\varrho|$ groß genug ist. Durchläuft t die Werte von μ_{j-1} bis μ_{j+1}, so geht, wenn $|\eta_\varrho|$ groß genug ist, $|v|$ von beliebig kleinen zu beliebig großen Werten. Man kann aber zwei nur von den k_{pq} abhängige Größen g_1 und g_2 so angeben, daß

$$|s_j| > \frac{1}{2} \left| k_{p_1 q_{p_1}} z^{p_1} e^{z h_{q_{p_1}}} \right|, \quad \text{wenn } |v| < g_1 \text{ und daß}$$

$$|s_j| > \frac{1}{2} \left| k_{p_\nu q_{p_\nu}} z^{p_\nu} e^{z h_{q_{p_\nu}}} \right|, \quad \text{wenn } |v| > g_2$$

ist. Da nun der auf der rechten Seite von (106) in eckigen Klammern stehende Ausdruck ein Polynom in v ist, so kann man nach (107) zu jedem Werte von t, für den $g_1 < |v| < g_2$ ist, stets Θ entsprechend (101) so bestimmen, daß der absolute Betrag des Polynoms oberhalb einer festen Größe liegt. Man kann daher in den durch (107) und (108) festgelegten Streifen die entsprechenden Stücke der Kurven $C^{(\varrho)}$ so wählen, daß für die in diesem Streifen liegenden Teile der Kurven $C^{(\varrho)}$ die Ungleichheitsbedingungen

$$|s_j| > M \left| z^{p_1} e^{z h_{q_{p_1}}} \right| \tag{110}$$

und

$$|s_j| > M \left| z^{p_\nu} e^{z h_{q_{p_\nu}}} \right| \tag{111}$$

gelten und daß diese ferner auch für $|\bar{s}|$ und $|\pi(z)|$ erfüllt sind.

Da man dieselbe Konstruktion für das einer jeden Polygonseite entsprechende Intervall machen und entsprechend für negative ξ vorgehen kann, so folgt, daß wir die innerhalb der Sektoren

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} - \vartheta \leqq \varphi \leqq \frac{3}{2} \pi + \vartheta$$

liegenden Stücke der Kurven $C^{(\varrho)}$ entsprechend der am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Forderung konstruieren können. Da außerhalb dieser beiden Sektoren $|\pi(z)|$ für alle Werte von z von genügend großem absoluten Betrage von selbst die gewünschten Eigenschaften hat, so kann man außerhalb der beiden Sektoren die Kurven $C^{(\varrho)}$ beispielshalber wie in § 2 durch die drei geraden Linien und zwei Kreisbogen ergänzen.

§ 7.

Zweites Beispiel.

Es sei

$$m = 4, \quad n = 3,$$

also

$$\sum_0^4 {}_p \sum_0^3 {}_q k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = 0. \tag{112}$$

Wir ersetzen vorübergehend $f(x)$ durch $e^{z_\nu x}$ und erhalten für z_ν die Gleichung

$$\pi(z_\nu) = \sum_0^4 {}_p \sum_0^3 {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} = 0, \tag{113}$$

von der wir zunächst annehmen, daß sie lauter einfache Wurzeln besitze. Wir zerlegen dann $\pi(z)$ in $\psi(z) + \chi(z)$ auf folgende Weisen

1) $\quad \psi(z) = \sum_0^4 {}_p k_{p0} z^p, \qquad \chi(z) = \sum_0^4 {}_p \sum_1^3 {}_q k_{pq} z^p e^{h_q z},$

2) $\quad \psi(z) = \sum_0^4 {}_p \sum_0^1 {}_q k_{pq} z^p e^{h_q z}, \qquad \chi(z) = \sum_0^4 {}_p \sum_2^3 {}_q k_{pq} z^p e^{h_q z},$

3) $\quad \psi(z) = \sum_0^4 {}_p \sum_0^2 {}_q k_{pq} z^p e^{h_q z}, \qquad \chi(z) = \sum_0^4 {}_p k_{p3} z^p e^{h_3 z}.$

Es sei nun $f(x)$ eine im Intervalle $x_0 < x < x_0 + h_3$ viermal stetig differenzierbare Funktion, dann erhält man entsprechend der *Zerlegung* 1)

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{(\varrho)}} \left[\sum_0^4 {}_p \frac{k_{p0} z^p}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \right. \tag{114}$$

$$\left. - \sum_1^4 {}_p \frac{k_{p0} z^p}{\pi(z)} \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0)\, e^{z(x-x_0)}}{z^{p_1+1}} \right] dz = -\frac{1}{2} f(x),$$

wenn $x_0 < x < x_0 + h_3$,

$$(115)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}_{p}\sum_{1}^{3}{}_{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\int_{x}^{x_0+h_1}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$

$$+\sum_{1}^{4}{}_{p}\sum_{1}^{3}{}_{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{z(x-x_0-h_1)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=\frac{1}{2}f(x),$$

wenn $x_0<x<x_0+h_1$;

$$(116)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}_{p}\frac{k_{p0}z^{p}}{\pi(z)}\int_{x_0}^{x_0+h_1}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu-\sum_{1}^{4}{}_{p}\frac{k_{p0}z^{p}}{\pi(z)}\sum_{1}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0)e^{z(x-x_0)}}{z^{p_1+1}}$$

$$+\sum_{1}^{4}{}_{p}\frac{k_{p0}z^{p}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{z(x-x_0-h_1)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=0,$$

wenn $x_0+h_1<x<x_0+h_3$.

Aus (114) und (115) folgt genau wie im § 2, indem man zur Umformung des ersten Summanden noch (113) heranzieht,

$$(117)\qquad f(x)=\sum_{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}_{p}k_{p0}z_\nu^{p}\int_{x_0}^{x_0+h_1}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu-\sum_{1}^{4}{}_{p}k_{p0}z_\nu^{p}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0)e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_{1}^{4}{}_{p}\sum_{1}^{3}{}_{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0<x<x_0+h_1$;

entsprechend folgt aus (116)

$$(118)\qquad 0=\sum_{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}_{p}k_{p0}z_\nu^{p}\int_{x_0}^{x_0+h_1}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu-\sum_{1}^{4}{}_{p}k_{p0}z_\nu^{p}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0)e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$+\sum_{1}^{4}{}_{p}k_{p0}z_\nu^{p}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0+h_1<x<x_0+h_3$.

Geht man von der *Zerlegung* 2) aus, so erhält man, wenn x_0 durch x_0+h_1 ersetzt wird

$$(119)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}_{p}\sum_{0}^{1}{}_{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\int_{x_0+h_1}^{x}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_{1}^{4}{}_{p}\sum_{0}^{1}{}_{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{z(x-x_0-h_1)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=-\frac{1}{2}f(x),$$

wenn $x_0+h_1<x<x_0+h_3$;

$$(120)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_0^4{}_p\sum_2^3{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\int_x^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$+\sum_1^4{}_p\sum_2^3{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{z(x-x_0-h_2)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=\frac{1}{2}f(x),$$
wenn $x_0<x<x_0+h_2$;

$$(121)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_0^4{}_p\sum_0^1{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_1^4{}_p\sum_0^1{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{z(x-x_0-h_1)}}{z^{p_1+1}}$$
$$+\sum_1^4{}_p\sum_0^1{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{z(x-x_0-h_2)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=0,$$
wenn $x_0+h_2<x<x_0+h_3$;

$$(122)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_0^4{}_p\sum_2^3{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_1^4{}_p\sum_2^3{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{z(x-x_0-h_1)}}{z^{p_1+1}}$$
$$+\sum_1^4{}_p\sum_2^3{}_q\frac{k_{pq}z^p e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{z(x-x_0-h_2)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=0,$$
wenn $x_0<x<x_0+h_1$.

Aus (122) bzw. aus (119) und (120) bzw. aus (121) erhält man daher die Darstellungen

$$(123)\qquad 0=\sum_\nu-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^4{}_p\sum_0^1{}_q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2} e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$
$$+\sum_1^4{}_p\sum_2^3{}_q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$-\sum_1^4{}_p\sum_2^3{}_q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}_{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{-z_\nu(x_0+h_2)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$
wenn $x_0<x<x_0+h_1$;

$$(124)\quad f(x)=\sum_{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{1}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_{1}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{1}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$-\sum_{1}^{4}{}^{p}\sum_{2}^{3}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{-z_\nu(x_0+h_2)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$
wenn $x_0+h_1<x<x_0+h_2$

$$(125)\quad 0=\sum_{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{1}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_1}^{x_0+h_2}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_{1}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{1}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1)e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$+\sum_{1}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{1}{}^{q}k_{pq}z_\nu^{p}e^{h_q z_\nu}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{-z_\nu(x_0+h_2)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$
wenn $x_0+h_2<x<x_0+h_3$

Die *Zerlegung* 3) liefert

$$(126)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{2}{}^{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\int\limits_{x_0+h_2}^{x}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_{1}^{4}{}^{p}\sum_{0}^{2}{}^{q}\frac{k_{pq}z^{p}e^{h_q z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{z(x-x_0-h_2)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=-\frac{1}{2}f(x),$$
wenn $x_0+h_2<x<x_0+h_3$

$$(127)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}^{p}\frac{k_{p3}z^{p}e^{h_3 z}}{\pi(z)}\int\limits_{x}^{x_0+h_3}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$+\sum_{1}^{4}{}^{p}\frac{k_{p3}z^{p}e^{h_3 z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_3)e^{z(x-x_0-h_3)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=\frac{1}{2}f(x)$$
wenn $x_0<x<x_0+h$

$$(128)\quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^{(\varrho)}}\Bigg[\sum_{0}^{4}{}^{p}\frac{k_{p3}z^{p}e^{h_3 z}}{\pi(z)}\int\limits_{x_0+h_2}^{x_0+h_3}e^{z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$
$$-\sum_{1}^{4}{}^{p}\frac{k_{p3}z^{p}e^{h_3 z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{z(x-x_0-h_2)}}{z^{p_1+1}}$$
$$+\sum_{1}^{4}{}^{p}\frac{k_{p3}z^{p}e^{h_3 z}}{\pi(z)}\sum_{0}^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_3)e^{z(x-x_0-h_3)}}{z^{p_1+1}}\Bigg]dz=0,$$
wenn $x_0<x<x_0+h$

Es folgt daher aus (128) bzw. (126) und (127)

$$(129)\quad 0=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^4{}^{p}\sum_0^2{}^{q}k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_2}^{x_0+h_3}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$+\sum_1^4{}^{p}k_{p3}z_\nu^p e^{h_3 z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_3)e^{-z_\nu(x_0+h_3)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_1^4{}^{p}k_{p3}z_\nu^p e^{h_3 z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_3)e^{-z_\nu(x_0+h_3)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0 < x < x_0 + h_2$;

$$(130)\quad f(x)=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^4{}^{p}\sum_0^2{}^{q}k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_2}^{x_0+h_3}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_1^4{}^{p}\sum_0^2{}^{q}k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_2)e^{-z_\nu(x_0+h_2)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_1^4{}^{p}k_{p3}z_\nu^p e^{h_3 z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_3)e^{-z_\nu(x_0+h_3)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg].$$

wenn $x_0 + h_2 < x < x_0 + h_3$.

Durch Addition von (117), (123) und (129) bzw. (118), (124), (129) bzw. (118), (125) (130) folgt

$$(131)\quad f(x)=\sum^{\nu}-\frac{C_\nu(x_0)e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^4{}^{p}\sum_0^2{}^{q}k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_q}^{x_0+h_3}e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_1^4{}^{p}\sum_0^3{}^{q}k_{pq}z_\nu^p\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q)e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0+\varepsilon \leqq x \leqq x_0+h_1-\varepsilon$ oder $x_0+h_1+\varepsilon \leqq x \leqq x_0+h_2-\varepsilon$ oder ... oder $x_0+h_{n-1}+\varepsilon \leqq x \leqq x_0+h_n-\varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig kleine Zahl ist. Die Reihe (131) konvergiert für diese Werte der x gleichmäßig.

Es sei jetzt $f(x)$ eine Lösung von (112), welche für alle reellen x viermal stetig differenzierbar ist. *Sind k_{40} und $k_{43} \neq 0$, so dürfen wir $f(x)$ als willkürliche, viermal stetig differenzierbare Funktion im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h_3$ vorschreiben, sofern die Werte der Funktion in $x_0 + h_3$ nur der Gleichung* (112) *genügen, in der x durch x_0 ersetzt ist.* Ist aber k_{40}*) oder k_{43} Null, so wird im allgemeinen $f(x)$, um überall viermal stetig differenzierbar zu sein, überall, also speziell für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h_3$, beliebig oft differenzierbar

*) Das Entsprechende ist z. B. in dem in der Einleitung erwähnten, von Schürer behandelten Beispiele der Fall.

sein müssen. Die allgemeinste Form, die $f(x)$ in diesem Falle hat, wird in dem Zusatz zu diesem Paragraphen gegeben.

Nachdem dieses vorausgeschickt, zeigen wir wieder, daß wenn $f(x)$ eine für alle reellen x viermal stetig differenzierbare Lösung von (112) ist, $C_\nu(x_0)$ von x_0 unabhängig ist. In der Tat ist

$$
\begin{aligned}
(132)\quad \frac{d C_\nu(x_0)}{d x_0} &= \sum_0^4{}_p \sum_0^2{}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} e^{-z_\nu(x_0+h_3)} f(x_0+h_3) - \sum_0^4{}_p \sum_0^2{}_q k_{pq} z_\nu^p f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} \\
&+ \sum_1^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} z_\nu^p \sum_0^{p-1}{}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1}} \\
&- \sum_1^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} z_\nu^p \sum_1^{p}{}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1}}.
\end{aligned}
$$

Indem man nun den ersten Summanden vermittelst (113) umformt und diejenigen Glieder des dritten und vierten Summanden, die sich gegenseitig wegheben, wegläßt, erhält man

$$
\begin{aligned}
(133)\quad \frac{d C_\nu(x_0)}{d x_0} &= -\sum_0^4{}_p k_{p3} z_\nu^p f(x_0+h_3) e^{-z_\nu x_0} - \sum_0^4{}_p \sum_0^2{}_q k_{pq} z_\nu^p f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} \\
&+ \sum_1^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} z_\nu^p f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} - \sum_1^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} f^{(p)}(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} \\
&= -\sum_0^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} z_\nu^p f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} + \sum_1^4{}_p \sum_0^3{}_q k_{pq} z_\nu^p f(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0} \\
&+ \sum_0^3{}_q k_{0q} f(x+h_q) e^{-z_\nu x_0} = 0.
\end{aligned}
$$

Also konvergiert die Reihe (131) in jedem noch so großen, aber festen Intervall der x gleichmäßig, da wir jedes solche Intervall dachziegelartig mit einer endlichen Anzahl von Teilintervallen überdecken können, innerhalb deren die Reihe (131) gleichmäßig konvergiert.

Zusatz. Ist $f(x)$ eine überall fünfmal stetig differenzierbare Lösung von (112), so ist auch $f'(x)$ eine Lösung von (112), und es ist $f'(x)$ in eine in jedem noch so großen, aber festen Intervalle gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar. Durch Benützung derselben Umformung, die zur Herleitung von (133) diente, sieht man, daß diese Reihe identisch ist mit der Reihe, welche man erhält, wenn man (131) gliedweise differenziert. Ist also eine Lösung von (112) beliebig oft differenzierbar, so muß auch die Reihe (131) für alle reelle x beliebig oft differenzierbar sein und umgekehrt befriedigt eine Reihe (131), die nebst ihren vier ersten durch gliedweise Differentiation gewonnenen Ableitungen in jedem beliebig großen Intervalle gleichmäßig konvergiert, die Gleichung (112).

§ 8.

Der allgemeine Fall.

Es sei

$$(134)\qquad \sum_0^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} f^{(p)}(x+h_q) = 0, \qquad \text{wobei } h_0 = 0,\ f^{(0)}(x) = f(x).$$

Ferner sei

$$(135)\qquad \pi(z_\nu) = \sum_0^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} = 0$$

und diese Gleichung möge zunächst nur einfache Wurzeln besitzen. Ist dann $f(x)$ eine im Intervalle $x_0, x_0 + h_n$ vorgegebene, m-mal stetig differenzierbare Funktion, so erhält man wie in § 7 die Darstellungen

$$(136)\quad f(x) = \sum_\nu - \frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m {}_p k_{p0} z_\nu^p \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu - \sum_1^m {}_p k_{p0} z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$- \sum_1^m {}_p \sum_1^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1) e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0 < x < x_0 + h_1$,

$$(137)\quad 0 = \sum_\nu - \frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m {}_p k_{p0} z_\nu^p \int_{x_0}^{x_0+h_1} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu - \sum_1^m {}_p k_{p0} z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$+ \sum_1^m {}_p k_{p0} z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_1) e^{-z_\nu(x_0+h_1)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0 + h_1 < x < x_0 + h_n$;

ferner folgt für $N = 1, 2, \cdots, n-2$

$$(138)\quad 0 = \sum_\nu - \frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m {}_p \sum_0^N {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_N}^{x_0+h_{N+1}} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu$$
$$+ \sum_1^m {}_p \sum_{N+1}^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_N) e^{-z_\nu(x_0+h_N)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$
$$- \sum_1^m {}_p \sum_{N+1}^n {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_{N+1}) e^{-z_\nu(x_0+h_{N+1})}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0 < x < x_0 + h_N$;

$$(139)\quad f(x)=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m{}^p\sum_0^N{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_N}^{x_0+h_{N+1}} e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_1^m{}^p\sum_0^N{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_N)e^{-z_\nu(x_0+h_N)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_1^m{}^p\sum_{N+1}^n{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_{N+1})e^{-z_\nu(x_0+h_{N+1})}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

wenn $x_0+h_N<x<x_0+h_{N+1}$;

$$(140)\quad 0=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m{}^p\sum_0^N{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_N}^{x_0+h_{N+1}} e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_1^m{}^p\sum_0^N{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_N)e^{-z_\nu(x_0+h_N)}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$+\sum_1^m{}^p\sum_0^N{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_{N+1})e^{-z_\nu(x_0+h_{N+1})}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

wenn $x_0+h_{N+1}<x<x_0+h_n$;

und schließlich

$$(141)\quad 0=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m{}^p\sum_0^{n-1}{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_{n-1}}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$+\sum_1^m{}^p k_{pn}z_\nu^p e^{h_n z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_{n-1})e^{-z_\nu(x_0+h_n}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_1^m{}^p k_{pn}z_\nu^p e^{h_n z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_n)e^{-z_\nu(x_0+h_n)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg]$$

wenn $x_0<x<x_0+h_{n-1}$;

$$142)\quad f(x)=\sum^{\nu}-\frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)}\Bigg[\sum_0^m{}^p\sum_0^{n-1}{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\int\limits_{x_0+h_{n-1}}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu\mu}f(\mu)\,d\mu$$

$$-\sum_1^m{}^p\sum_0^{n-1}{}^q k_{pq}z_\nu^p e^{h_q z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_{n-1})e^{-z_\nu(x_0+h_n}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$-\sum_1^m{}^p k_{pn}z_\nu^p e^{h_n z_\nu}\sum_0^{p-1}{}^{p_1}\frac{f^{(p_1)}(x_0+h_n)e^{-z_\nu(x_0+h_n)}}{z_\nu^{p_1+1}}\Bigg],$$

wenn $x_0+h_{n-1}<x<x_0+h_n$.

Ist $x_0 + \varepsilon < x < x_0 + h_1 - \varepsilon$ oder $x_0 + h_2 + \varepsilon < x < x_0 + h_3 - \varepsilon, \cdots$ oder $x_0 + h_{n-1} + \varepsilon < x < x_0 + h_n - \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine Zahl ist, so konvergiert die Reihe

$$143)\quad f(x) = \sum_\nu - \frac{C_\nu(x_0)}{\pi'(z_\nu)} e^{z_\nu x} = \sum_\nu - \frac{e^{z_\nu x}}{\pi'(z_\nu)} \left[\sum_0^m {}_p \sum_0^{n-1} {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu - \sum_1^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}} \right],$$

gleichmäßig. Es sei nun $f(x)$ eine Lösung von (134), welche für alle reelle x m-mal stetig differenzierbar ist. *Sind k_{m0} und k_{mn} von Null verschieden, so dürfen wir $f(x)$ im Intervalle $x_0 < x < x_0 + h_n$ als m-mal stetig differenzierbare Funktion vorschreiben, sofern diese Funktion nur der Gleichung* (134) *für $x = x_0$ genügt.* Ist dagegen k_{m0} oder k_{mn} Null, so muß, wie im § 7, $f(x)$ für alle reelle x, speziell also für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h_n$, im allgemeinen beliebig oft differenzierbar sein.

Es folgt wieder, wenn $f(x)$ eine für alle reellen x m-mal stetig differenzierbare Lösung von (136) ist,

$$\frac{d C_\nu(x_0)}{d x_0} = 0$$

und daraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (143) für alle reellen x in einem beliebig großen, aber festen Intervall.

Damit ist also die Fundamentalaufgabe der Theorie der linearen Funktionalgleichungen (134) gelöst, es ist nämlich *eine für alle reellen x gültige Darstellung einer jeden allgemeinen Lösung von* (134), *welche für alle reellen x m-mal stetig differenzierbar ist, gewonnen.*

Wir zeigen nun noch, daß es nur eine *einzige* gleichmäßig konvergente Entwicklung der Form (143) gibt, indem wir, wie im § 2, für die Funktionen $e^{z_\nu x}$ eine der Orthogonalitätsrelationen bei gewöhnlichen Fourierschen Reihen analoge Beziehung aufstellen. In der Tat sei

$$(144)\quad S_{\nu,\nu_1} = \sum_0^m {}_p \sum_0^{n-1} {}_q k_{pq} z_\nu^p e^{h_q z_\nu} \int_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} e^{z_{\nu_1} \mu}\, d\mu - \sum_1^m {}_p \sum_0^n {}_q k_{pq} z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \left(\frac{d^{p_1} e^{z_{\nu_1} x}}{d x^{p_1}} \right)_{x = x_0 + h_q} \frac{e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}},$$

so folgt

$$(145)\quad S_{\nu,\nu_1} = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_\nu} \frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)(x_0+k_n)}}{z_{\nu_1}-z_\nu} - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} k_{pq} z_\nu^p \frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}\, e^{k_q z_{\nu_1}}}{z_{\nu_1}-z_\nu}$$

$$- \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} k_{pq} z_\nu^p \sum_{p_1=0}^{p-1} \frac{z_{\nu_1}^{p_1} e^{z_{\nu_1}(x_0+k_q)}\, e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}}$$

$$= -\sum_{p=0}^{m} k_{pn} z_\nu^p e^{k_n z_{\nu_1}} \frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu} - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_{\nu_1}} \frac{e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu}$$

$$+ \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_{\nu_1}} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0} \frac{1-\left(\frac{z_{\nu_1}}{z_\nu}\right)^p}{z_{\nu_1}-z_\nu}$$

$$= -\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_{\nu_1}} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu} + \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_{\nu_1}} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu}$$

$$- \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{k_{pq} z_{\nu_1}^p e^{k_q z_{\nu_1}} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu}$$

$$= -\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \frac{k_{pq} z_{\nu_1}^p e^{k_q z_{\nu_1}} e^{(z_{\nu_1}-z_\nu)x_0}}{z_{\nu_1}-z_\nu}.$$

Also ist

$$(146)\qquad S_{\nu,\nu_1} \begin{array}{ll} = 0, & \text{wenn } \nu \neq \nu_1, \\ = -\pi'(z_\nu), & \text{wenn } \nu = \nu_1. \end{array}$$

Zusatz. Ist $f(x)$ für alle reellen x $m+1$-mal stetig differenzierbar, so folgt wie im § 7, daß die Reihe, welche man durch gliedweise Differentiation von (143) erhält, für ein jedes beliebig großes Intervall der reellen x gleichmäßig konvergiert. Ist also eine Lösung von (134) für alle reellen x beliebig oft differenzierbar, so darf man (143) beliebig oft gliedweise differenzieren und umgekehrt liefert jede Reihe (143), welche ebenso wie die durch beliebig oftmalige gliedweise Differentiation gewonnenen Reihen für jedes noch so große Intervall der x gleichmäßig konvergiert, eine für alle reelle x beliebig oft differenzierbare Lösung von (134).

§ 9.

Der Satz von Ehrhardt Schmidt. Fall mehrfacher Wurzeln.

E. Schmidt macht die spezielle Voraussetzung, daß nur eine einzige der Größen k_{mq}, etwa $k_{mr} \neq 0$ ist. Es ist also in diesem Falle

$$(147)\qquad \pi(z_\nu) = k_{mr} z_\nu^m e^{k_r z_\nu} + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n} k_{pq} z_\nu^p e^{k_q z_\nu} = 0,$$

so daß man die Achse der rein imaginären z durch zwei von ihr in endlichem Abstand gezogene Parallelen so einschließen kann, daß innerhalb dieses Streifens und speziell auf der Achse selbst nur eine endliche Anzahl von Wurzeln liegt. Wird dann $f(x)$ und seine $n-1$ ersten Ableitungen für $x = \pm \infty$ nur unendlich wie eine Potenz von x, so gilt nach (134) in dem vorliegenden Falle dasselbe für $f^{(m)}(x)$.

Nun ist aber nach (143)

$$(148)\quad C_\nu(x_0) = \sum_0^m {}_p \sum_0^{n-1} {}_q\, k_{pq}\, z_\nu^p\, e^{h_q z_\nu} \int\limits_{x_0+h_q}^{x_0+h_n} e^{-z_\nu \mu} f(\mu)\, d\mu$$
$$- \sum_1^m {}_p \sum_0^n {}_q\, k_{pq}\, z_\nu^p \sum_0^{p-1} {}_{p_1} \frac{f^{(p_1)}(x_0+h_q) e^{-z_\nu x_0}}{z_\nu^{p_1+1}};$$

ist also der reelle Teil von z_ν positiv, so kann man x_0 so groß positiv wählen, daß sicher $|C_\nu(x_0)|$ kleiner wird als eine beliebig klein vorgegebene Zahl ε, so daß also $C_\nu(x_0)$, das von x_0 unabhängig ist, verschwinden muß. Ist der reelle Teil von z_ν negativ, so folgt das Verschwinden von $C_\nu(x_0)$, wenn wir x_0 einen absolut genommen genügend großen, aber negativen Wert geben. Damit ist aber der in der Einleitung erwähnte, die homogenen Funktionalgleichungen betreffende Satz von E. Schmidt bewiesen.*)

Besitzt die Gleichung (135) mehrfache Wurzeln, so erhält man aus dem Cauchyschen Residuensatz direkt dieselbe Reihenentwicklung, auf die man kommt, wenn man diese Wurzeln in der Entwicklung (143) formal zusammenfallen läßt. Daraus folgt unmittelbar ohne neue Rechnung, daß auch in diesen Fällen die Koeffizienten der entsprechenden Darstellungen (143) von x_0 unabhängig sind, ferner bleibt auch die eben skizzierte Ableitung des E. Schmidtschen Satzes bestehen, da bei dem Grenzübergang nur gewöhnliche Potenzen von μ bzw. x_0 hinzutreten, während $C_\nu(x)$ bei der Ableitung des Satzes wie eine Exponentialfunktion verschwand.

Würzburg, April 1916.

---

*) Vgl. Schürer, l. c. S. 193—194.