Die Störungsrechnung im Dienste der Quantentheorie[1]).

I. Eine Methode der Störungsrechnung.

Von **Paul S. Epstein** in Pasadena (Kalifornien).

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 9. November 1921.)

§ 1. Einleitung. Die Methode, welche auf den folgenden Seiten dargestellt wird, wurde vom Verfasser vor einigen Jahren mit Rücksicht auf die Behandlung des Heliumatoms ausgearbeitet[2]). Es zeigte sich indessen, daß der Hauptgedanke derselben nicht neu war[3]) und schon einem von Delaunay[4]) in der Mondtheorie verwendeten Verfahren zugrunde gelegen hatte: Wenn auch die Begriffe des „bedingt periodischen Systems" und der „Winkelkoordinaten" von Delaunay nicht benutzt wurden, so ändert die Einführung derselben doch nur die formale Seite des Gedankenganges: wir werden das Verfahren deshalb im folgenden als die „Delaunaysche Methode" bezeichnen. Inzwischen wurden auch von anderer Seite Methoden der Störungsrechnung in die Quantentheorie eingeführt: J. M. Burgers[5]) lehnte sich dabei an ein von Whittaker herrührendes Verfahren an, während sich N. Bohr[6]) mit dem Problem der quantentheoretisch ausgezeichneten Koordinaten in leicht gestörten Systemen befaßte. Die von Bohr gegebenen Vorschriften wurden von Kramers[7]) mit großem Erfolg zur Erklärung des allmählichen Anwachsens des Starkeffektes mit dem elektrischen Felde verwendet.

Diese Arbeiten machen aber die Mitteilung meiner Modifikation der Delaunayschen Methode durchaus nicht überflüssig. Vielmehr glaube ich, daß sie aus mehreren Gründen Interesse beanspruchen kann:

---

[1]) Das englische Original dieser Abhandlung erscheint in Physical Review.

[2]) Eine Darstellung der Methode nebst Anwendungen für das Dreikörperproblem gab Verfasser schon im Oktober 1917 im Münchener physikal. Kolloquium. Die Resultate der vorliegenden Abhandlung und der beiden folgenden wurden von ihm auf der Schweizerischen Naturforscherversammlung 1919 mitgeteilt. (Referat: Verh. d. Schweizer. Naturforscher-Ges., 2. Teil, S. 83, 1920.)

[3]) Wertvolle Literaturhinweise verdanke ich einem Briefwechsel mit J. M. Burgers im Herbste 1917.

[4]) Delaunay, Théorie du mouvement de la lune (Mémoires de l'Academie des Sciences **28**, **29**). Paris 1860, 1867.

[5]) J. M. Burgers, Verslagen Amsterdam **26**, 115, 1917.

[6]) N. Bohr, Kgl. Danske Vedensk. Selsk., Naturvid. Afd., 8. Raekke, IV, 1, 1918.

[7]) H. A. Kramers, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Naturvid. Afd., 8. Raekke, III, 3, 1919.

Erstens ist dieses Verfahren dadurch besonders für die Quantentheorie geeignet, daß man es als sukzessive Annäherung durch bedingt periodische Bewegungen auffassen kann. Es wird ein Weg angegeben, eine Folge bedingt periodischer Systeme zu finden, welche die wirkliche Bewegung immer besser approximieren. Allerdings sind diese Systeme nicht von dem von Staeckel untersuchten einfachsten Typus und es entsteht daher die Aufgabe, eine allgemeinere Art bedingt periodischer Systeme zu untersuchen (§ 4, 5). Indessen lassen sich alle im Staeckelschen Falle gültigen Sätze auch auf den neuen Typus übertragen, insbesondere besteht die Möglichkeit fort, die Bewegung durch Winkelkoordinaten zu beschreiben (§ 6). Die Ansätze der Quantentheorie, wie sie vom Verfasser[1]) für bedingt periodische Systeme aufgestellt wurden, lassen sich daher ohne weiteres auf diejenige Stufe der Approximation, die man als Endstufe wählt, anwenden.

Zweitens: Auf jeder Annäherungsstufe können zwei wesentlich verschiedene Arten der Bewegung eintreten, welche für die Art des Überganges zur nächsten Stufe maßgebend sind. Auf diese Alternative wurde sowohl von Delaunay, als auch von Poincaré[2]) hingewiesen, aber, wie es scheint, nicht nachdrücklich genug: wenigstens wird diese wichtige Unterscheidung von der bereits erwähnten Whittakerschen Modifikation[3]) vollständig ignoriert, weshalb letztere das Problem nicht erschöpft und in vielen Fällen nicht anwendbar ist (§ 9). Wir legen daher besonderen Wert darauf, den physikalischen Sinn der durchgeführten Transformationen klar zu machen.

Drittens knüpfen die mir bekannten Durchführungen der Störungstheorie an die Existenz eines kleinen konstanten Parameters an, nach welchem man die Störungsfunktion entwickeln kann. Ein solcher Parameter ist jedoch nicht in allen Problemen der Quantentheorie vorhanden. Die Whittakersche Methode ist von dieser Beschränkung frei, umfaßt aber, wie schon erwähnt, nur einen der zwei möglichen Fälle. Der Schwerpunkt unserer Ausführungen liegt darin, daß in ihnen gezeigt wird, wie man die numerischen Rechnungen im zweiten, von der Whittakerschen Theorie nicht umfaßten Fall ohne Benutzung eines konstanten Parameters durchführen kann (§ 7, 8).

---

[1]) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **50**, 815; **51**, 168, 1916.

[2]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol. II, § 200 u. ff. Paris 1893.

[3]) E. T. Whittaker, Proc. London Math. Soc. **34**, 206, 1902; Analytical Dynamics, S. 404. Cambrigde 1917.

Soweit liegt die Untersuchung auf dem Gebiete der allgemeinen Dynamik und wird für den Astronomen nur teilweise neu sein.

Viertens aber eröffnet die Methode interessante quantentheoretische Ausblicke, mit denen sich § 10 beschäftigt. Es zeigt sich, daß die Frage der für die Quantelung berechtigten Koordinaten durch das Verfahren ganz automatisch gelöst wird: man braucht nur von Approximation zu Approximation fortzuschreiten, um immer die richtigen Variabeln zu finden. Im besonderen Falle, wenn die ungestörte Bewegung periodisch ist, stimmen die nach unserer Methode gefundenen Koordinaten genau mit denen überein, die aus den für diesen Fall von Bohr angegebenen Regeln folgen. Auch für einige andere, von Bohr betrachtete Fälle gibt unser Verfahren sehr ähnliche Resultate. Es sind jedoch auch Unterschiede vorhanden, denn Bohr betrachtet die Möglichkeit einer exakten Quantelung als Ausnahmefall und erwartet im allgemeinen für eine gestörte Bewegung unbestimmte Energiestufen. Dagegen ist vom Standpunkte unserer Theorie die exakte Quantelung das Normale, und unbestimmte Werte der Energie sind zum wenigsten viel seltener, als es Bohr annimmt. Die Entscheidung zwischen den beiden Standpunkten dürfte im Bereich der experimentellen Möglichkeiten liegen.

§ 2. Aus der Transformationstheorie der Dynamik. Wir wollen einige Sätze zusammenstellen, welche wir in dieser und den folgenden Mitteilungen brauchen werden.

Die Differentialgleichungen eines mechanischen Systems von f Freiheitsgraden seien in der kanonischen Form gegeben:

$$\frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, 3 \ldots f), \tag{1}$$

wo die Hamiltonsche Funktion $H(p, q, t)$ von den Impulsen p_i, den Lagenkoordinaten q_i und der Zeit t abhängt. Durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f; \quad t), \\ q_i &= q_i(P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f; \quad t), \end{aligned} \tag{2}$$

gehe man zu den Variablen P_i, Q_i über. Es wird danach gefragt, in welchem Falle die Veränderlichen P_i, Q_i wieder kanonische Koordinaten sind.

Wir werden es im folgenden mit den beiden Sonderfällen zu tun haben, daß die Funktionen (2) entweder von der Zeit unabhängig sind oder die Zeit in Form eines linearen Summanden $A_i t$ (bzw. $B_i t$) enthalten, wo A_i und B_i Konstanten bedeuten. In diesen Fällen kann das Kriterium dafür, daß P_i, Q_i kanonische Koordinaten sind, mit Hilfe der sogenannten „Lagrangeschen Parenthesen"

$$(a, b) = \sum_1^f i \left(\frac{\partial p_i}{\partial a}\frac{\partial q_i}{\partial b} - \frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial p_i}{\partial b}\right) \tag{3}$$

in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\begin{cases}(Q_j, Q_h) = 0, \\ (P_j, P_h) = 0,\end{cases} \quad (P_i, Q_h) = \begin{cases}0 \text{ für } j \neq h, \\ 1 \quad „ \quad j = h.\end{cases} \tag{4}$$
$$(h, j = 1, 2, 3 \ldots f).$$

Wir wollen die beiden erwähnten Fälle getrennt besprechen.

1. Eine von der Zeit unabhängige Transformation:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f), \\ q_i &= q_i(P_1 \ldots P_f, \quad Q_1 \ldots Q_f), \end{aligned} \tag{2'}$$

welche den Bedingungen (4) genügt, bezeichnet man als „Berührungstransformation"[1]). Die wichtigste Eigenschaft derselben besteht darin, daß die Systeme p_i, q_i und P_i, Q_i die gleiche Hamiltonsche Funktion besitzen. Die Hamiltonsche Funktion ist gegenüber einer Berührungstransformation invariant. Aus der Form der Gleichungen (4) erkennen wir ferner, daß dieselben von der jeweiligen Hamiltonschen Funktion gänzlich unabhängig sind und durch geeignete Wahl der Transformationsgleichungen (2') allein befriedigt werden können. Diesen bedeutsamen Umstand können wir in der Form des folgenden Satzes aussprechen:

Es sei ein System von Koordinaten p, q gegeben, welche in bezug auf zwei verschiedene Hamiltonsche Funktionen H und H^* kanonisch sind. Gelingt es, ein zweites Koordinatensystem P, Q zu finden, welches in bezug auf H kanonisch ist, so ist dasselbe auch in bezug auf H^* kanonisch.

Nach einem bekannten Satz von Jacobi genügt zur Definition einer Berührungstransformation eine einzige Funktion der Variablen P_i und q_i

$$W = W(P_1 \ldots P_f; \quad q_1 \ldots q_f), \tag{5}$$

aus welcher sich die Transformationsgleichungen in der Form

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \tag{5'}$$

ableiten lassen.

2. Den Fall, daß die Gleichungen (2) die Form annehmen

$$\begin{aligned} p_i &= p_i'(P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f) + A_i t, \\ q_i &= q_i'(P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f) + B_i t, \end{aligned} \tag{2''}$$

---

[1]) Über die Theorie der Berührungstransformationen vgl. z. B. E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, Chapter XI. Cambridge 1917.

wo A_i und B_i Konstanten sind, und den Bedingungen (4) genügt wird, wollen wir als „Delaunaysche Transformation" bezeichnen. Der Unterschied vom eben besprochenen Fall besteht darin, daß für die Hamiltonsche Funktion keine Invarianz besteht; vielmehr sind die neuen Variablen in bezug auf eine veränderte Hamiltonsche Funktion

$$H^* = H + \sum_1^f{}^i (A_i q_i - B_i p_i) \tag{6}$$

kanonisch. Ein Blick auf die Bedingungen (4) lehrt ferner, daß die Auswahl der Konstanten A_i, B_i durch sie nicht eingeschränkt wird. In den Anwendungen werden wir es mit dem Fall zu tun haben, daß nur die Abhängigkeit der Lagenkoordinaten q_i von der Zeit durch die Werte der Konstanten B_i $(i = 1, 2 \ldots f)$ vorgegeben ist. Aus der eben gemachten Bemerkung geht hervor, daß die Wahl der Größen A_i dann ganz in unserer Willkür liegt. Insbesondere können wir diese Konstanten auch gleich Null setzen, und das führt auf die folgende einfachste Form der Delaunayschen Transformation

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p_i^* (P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q^f), \\ q_i &= q_i^* (P_1 \ldots P_f; \quad Q_1 \ldots Q_f) + B_i t, \\ H^* &= H - \sum_1^f{}^i B_i p_i. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Unter p_i^*, q_i^* sind nach obigen Funktionen zu verstehen, welche für sich allein (d. h. bei Nullsetzen von B_i) eine Berührungstransformation ergeben.

§ 3. **Die Delaunaysche Methode.** Die Bewegung eines Systems sei durch die Hamiltonsche Funktion

$$H (p_1 \ldots p_f; \quad q_1 \ldots q_f)$$

gegeben. Um die Betrachtungen nicht unnötig zu komplizieren, setzen wir konservative Kräfte voraus, was das Fehlen der Zeit als expliziten Arguments von H zur Folge hat. Wir werden aber in der dritten Mitteilung sehen, daß sie ohne wesentliche Änderung auf gewisse Formen der expliziten Abhängigkeit von der Zeit übertragen werden können.

Um die Integration dieses Problems durchzuführen, benutzen wir mit Delaunay (l. c.) die folgende Approximationsmethode. Wir suchen eine bedingt periodische Bewegung mit der Hamiltonschen Funktion $H_1 (p_1 \ldots p_f; q_1 \ldots q_f)$ so aus, daß sie der vorgegebenen möglichst nahe kommt, und wenn wir die Funktion H in zwei Summanden zerlegen

$$H = H_1 + R_1, \tag{8}$$

der Rest oder die „Störungsfunktion“ R_1 möglichst klein wird. Die Bewegung, welche durch die Funktion H_1 gegeben ist, wird als „erste intermediäre Bewegung“ bezeichnet.

Eine der charakteristischen Eigenschaften der bedingt periodischen Systeme besteht darin, daß man sie durch sogenannte „Winkelkoordinaten“ beschreiben kann[1]), d. h. man kann mittels einer Berührungstransformation

$$W = W(u_1 \ldots u_f;\ q_1 \ldots q_f), \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad w_i = \frac{\partial W}{\partial u_i} \tag{9}$$

ein neues System kanonischer Koordinaten (w_i) und Impulse (u_i) einführen, dem die folgenden Eigentümlichkeiten zukommen:

1. Der Zustand des Systems (z. B. die räumlichen Koordinaten p_i, q_i) ist eine periodische Funktion der Variablen $w_1, w_2 \ldots w_f$ mit der Periode 2π.

2. Die Veränderlichen w_i sind lineare Funktionen der Zeit

$$w_i = \Omega_i t + \delta_i. \tag{10}$$

Den Koeffizienten Ω_i bezeichnet man als „mittlere Bewegung“.

3. Die Impulse u_i sind konstant, und zwar sind es gerade diejenigen Konstanten, welche in der Quantentheorie dem Planckschen Wirkungsquantum h proportional gesetzt werden,

$$u_i = \frac{h}{2\pi} n_i, \tag{11}$$

wo n_i ganze Zahlen, die sogenannten „Quantenzahlen“, bedeuten.

4. Nach Ausführung der Transformation (9) ist H eine Funktion der Impulse u_i allein und von den Variablen w_i unabhängig.

Die Theorie der bedingt periodischen Bewegungen (vgl. auch § 6) gibt uns die Regeln, die Transformation (9) für die durch die Funktion H_1 definierte intermediäre Bewegung aufzustellen. Durch Anwendung des in § 2 angegebenen Satzes erkennen wir jedoch, daß die durch diese Transformationsgleichungen eingeführten Variablen sich auch in bezug auf die ganze Hamiltonsche Funktion H als kanonisch erweisen. Allerdings geht dann ihr physikalischer Sinn verloren: auf das durch H definierte System bezogen, sind weder die Größen w_i linear in der Zeit noch die u_i konstant; da aber die Form der Abhängigkeit festgehalten wird, so bleiben p_i und q_i, formal genommen, nach wie vor periodische Funktionen der Variablen w_i. Falls die Störungsfunktion innerhalb des in Betracht kommenden Variationsbereiches in den p_i und q_i regulär ist, wie wir es voraussetzen wollen,

[1]) Vgl. z. B. C. G. Charlier, Die Mechanik des Himmels, 1. Bd., S. 74. Leipzig 1902. Auch P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51, 176, 1916.

so wird auch diese eine periodische Funktion der Winkelkoordinaten sein, die man in den meisten Fällen nach denselben in eine f-fache Fouriersche Reihe entwickeln kann. Jedenfalls setzen wir im folgenden immer eine solche Entwickelbarkeit voraus. Andererseits wird der Summand H_1 der Hamiltonschen Funktion nach wie vor lediglich von den Größen u_i abhängen:

$$\left.\begin{aligned} H = H_1(u_1, u_2, \ldots u_f) + \sum^{m_1} \sum^{m_2} \cdots \sum^{m_f} b_{m_1, m_2, \ldots m_f} \\ \cdot \frac{\cos}{\sin}(m_1 w_1 + \cdots + m_f w_f), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wobei die Koeffizienten b Funktionen der Impulse $u_1, u_2, \ldots u_f$ sind.

Es sei b derjenige der Koeffizienten, welcher den größten numerischen Wert hat. Wir betrachten das System, welches durch die Hamiltonsche Funktion

$$H_2 = H_1(u_1, \ldots u_f) + b(u_1, \ldots u_f) \frac{\cos}{\sin}(m_1 w_1 + \cdots + m_f w_f) \quad (13)$$

bestimmt ist. Wir werden in § 4, 5 beweisen, daß durch eine solche Funktion wiederum eine bedingt periodische Bewegung definiert wird. Diese Bewegung können wir als zweite intermediäre wählen, indem wir analog zu (8)

$$H = H_2(u, w) + R_2(u, w) \quad (8')$$

setzen, unter R_2 den Rest der Fourierschen Reihe verstanden. An Stelle von u, w sind jetzt die Winkelkoordinaten u', w' der durch (13) gegebenen bedingt periodischen Bewegung einzuführen: H_2 ist dann nur von den Größen u' abhängig, während R_2 in eine neue, nach den Argumenten w' fortschreitende Reihe umzuordnen ist.

Durch diese Umformung ist das numerisch stärkste Glied der Fourierreihe weggeschafft und zum aperiodischen Term geschlagen worden. Dasselbe Verfahren, auf das nächststärkste Glied angewendet, führt auf die dritte intermediäre, bedingt periodische Bewegung und schafft auch dieses Glied weg. Auf solche Weise sukzessive vorgehend, können wir die numerisch bedeutenderen Glieder der Fourierreihe eines nach dem anderen (bis auf ihre aperiodischen Bestandteile) zum Verschwinden bringen und zu bedingt periodischen Bewegungen fortschreiten, welche die vorgegebene immer besser approximieren, bis der gewünschte Genauigkeitsgrad erreicht ist.

Für die Quantentheorie ist dieses Verfahren dadurch besonders geeignet, daß es unmittelbar mit derjenigen Funktion operiert, auf welche es für die Zwecke derselben ankommt. Für die quantentheoretischen Anwendungen hat man nämlich in der Regel den Ausdruck der Energie durch die Quantenzahlen (11) zu bestimmen, und das läuft einfach darauf hinaus, die Hamiltonsche Funktion derjenigen intermediären Bewegung, mit welcher man das Approximationsverfahren abbricht, durch die Impulse u_i auszudrücken.

Es bleibt allerdings die Frage offen, ob das skizzierte Verfahren konvergent ist. Wir können nur darauf hinweisen, daß Delaunay dasselbe in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung für die Mondtheorie benutzt hat, und daß die Quantentheorie bei weitem nicht den Genauigkeitsgrad anstrebt, welcher von Delaunay und seinen Nachfolgern erreicht wurde. Wir gehen auf die Frage, ob die Reihen für die Größen H, q_i, p_i, zu welchen man durch unendliche Fortsetzung des Verfahrens gelangt, konvergent sind, noch kurz in § 10 ein.

§ 4. Erweiterte Theorie bedingt periodischer Bewegungen. Wir gehen nun daran, den Beweis nachzutragen, daß die durch Gleichung (13) des § 3 gegebene Hamiltonsche Funktion wirklich ein bedingt periodisches System definiert. Wir können uns auf den Fall des Kosinus beschränken, da derjenige des Sinus durch eine einfache Phasenverschiebung des Arguments aus dem ersteren hervorgeht. Als Ausgangspunkt benutzen wir den Energiesatz:

$$H_2 = H_1(u_1, \ldots u_f) + b(u_1, \ldots u_f) \cos(m_1 w_1 + \cdots + m_f w_f) = \alpha, \tag{14}$$

denn die Hamiltonsche Funktion drückt bekanntlich, sofern sie von der Zeit unabhängig ist, die Energie α des Systems aus.

Zunächst müssen wir Separation der Variablen herbeiführen und erreichen dies durch die einfache Berührungstransformation[1]):

$$W = u'_1(m_1 w_1 + \cdots + m_f w_f) + \sum_2^i u'_i w_i, \quad u_i = \frac{\partial W}{\partial w_i}, \quad w'_i = \frac{\partial W}{\partial u'_i}, \tag{15}$$

woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= m_1 u'_1, \quad u_2 = u'_2 + m_2 u'_1, \ldots \quad u_f = u'_f + m_f u'_1; \\ w'_1 &= m_1 w_1 + \cdots + m_f w_f, \quad w'_2 = w_2, \ldots \quad w'_f = w_f. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Wir führen die Größen u'_i, w'_i an Stelle der u_i, w_i in unsere Gleichung (14) ein.

$$H_2 = H'_1(u'_1, \ldots u'_f) + b'(u'_1, \ldots u'_f) \cos w'_1 = \alpha. \tag{17}$$

Nunmehr tritt nur eine einzige Lagenkoordinate in der Energiegleichung auf; die übrigen Koordinaten gehen in die Hamiltonsche Funktion überhaupt nicht ein und sind, wie man sagt, „zyklisch". Dies hat zur Folge, daß die ihnen zugeordneten Impulse (vermöge der Hamiltonschen Gleichungen $\dot{u}'_i = -\partial H / \partial w'_i$) konstant sind. Damit ist die Trennung der Variablen vollzogen: Gleichung (17)

---

[1]) Falls die ganzen Zahlen m_i einen gemeinsamen Teiler haben, sind sie in (15) und (16) durch diesen Teiler zu dividieren.

gibt uns die Beziehung zwischen den beiden Veränderlichen u_1', w_1', während die Größen α, $u_2', \ldots u_f'$ als Konstanten zu betrachten sind.

Wir wollen nun Gleichung (17) daraufhin untersuchen, ob sie eine bedingt periodische Bewegung darstellt. Einige Eigenschaften dieses Bewegungstyps haben wir schon in § 3 erwähnt. Das eigentlich Charakteristische desselben aber besteht darin, daß die Koordinaten, welche die Lage des Systems definieren, entweder von vornherein so beschaffen sind, daß der Zustand des Systems in ihnen periodisch ist, wenn sie unbegrenzt wachsen (nach Art eines ebenen Winkels), oder daß sie „Librationen" ausführen, d. h. zwischen zwei festen Grenzen hin und her pendeln. In dem Sonderfall, daß die Hamiltonsche Funktion in den Impulsen quadratisch ist, sind die Bedingungen für das Zustandekommen solcher Bewegungen und ihre Eigenschaften von Staeckel untersucht worden (vgl. § 3). Insbesondere wurde von Staeckel gezeigt, daß, sofern eine Separation der Variablen durchführbar ist, man die Konstanten der Bewegung stets so wählen kann, daß sie die Kennzeichen der bedingten Periodizität annimmt. Wir wollen beweisen, daß die Verhältnisse für die durch Gleichung (17) gegebene Form der Hamiltonschen Funktion ganz ähnlich liegen. Diese Form ist einerseits spezieller als die Staeckelsche, da die Abhängigkeit von der Lagenkoordinate w_1' eine ganz bestimmte ist, andererseits aber allgemeiner, da die Form der Funktionen H' und b' offen gelassen wird.

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir im folgenden die Striche an den Buchstaben wieder weg. Da $u_2, u_3, \ldots u_f$ nur die Rolle von Konstanten spielen, schreiben wir:

$$H = H_1(u_1) + b(u_1)\cos w_1 = \alpha. \tag{17'}$$

Diese Gleichung liefert uns eine funktionelle Beziehung zwischen u_1 und w_1, von welcher wir auf Grund des physikalischen Sinnes des Problems und der Bedeutung des Symbols u_1 als eines mechanischen Impulses von vornherein das Folgende aussagen können: 1. u_1 ist eine analytische, nicht unendlich vieldeutige Funktion von $\cos w_1$. 2. Hieraus folgt, daß wir den ganzen Verlauf von u_1 kennen, wenn uns diese Größe im Intervall $0 \leqslant w_1 \leqslant \pi$ gegeben ist. Die Werte in den Nachbarintervallen $-\pi \leqslant w_1 \leqslant 0$, $\pi \leqslant w_1 \leqslant 2\pi$ usw. — ergeben sich aus den ersteren durch Spiegelung. 3. u_1 ist wenigstens in einem Teile des Bereiches von 0 bis π reell. Wir wollen festsetzen, daß u_1 in der Umgebung von $w_1 = 0$ reell ist, was die Allgemeinheit unserer Schlüsse nicht beeinträchtigt.

Tragen wir in einem Diagramm w_1 als Abszisse, u_1 als Ordinate auf, so drückt sich die Neigungstangente in der folgenden Form aus:

$$\frac{d u_1}{d w_1} = - \frac{\dfrac{\partial H}{\partial w_1}}{\dfrac{\partial H}{\partial u_1}}.$$

Die Maxima und Minima der Kurve sind also durch die Bedingung

$$\frac{\partial H}{\partial w_1} = - b_1(u_1) \sin w_1 = 0 \tag{18}$$

gegeben, die Umkehrpunkte durch

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \frac{\partial b}{\partial u_1} \cos w_1 = 0. \tag{19}$$

Um die Überlegungen zu vereinfachen, wollen wir voraussetzen, daß $b(u_1)$ keine Nullstellen besitzt und u_1 keine unendlichen Werte annimmt, obwohl unsere Folgerungen auch bei Zulassung dieser

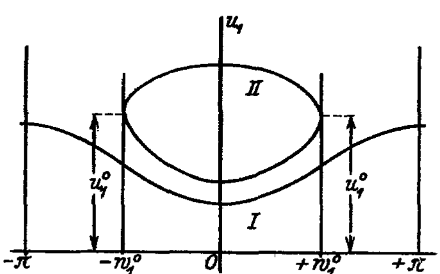

Fig. 1.

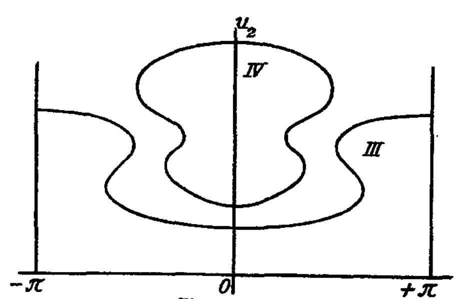

Fig. 2.

Möglichkeiten dieselben blieben. Dann liegen die Maxima und Minima der Kurve bei $\sin w_1 = 0$, d. h. bei $w_1 = 0$ und $w_1 = \pi$. Vom Punkte $w_1 = 0$ ausgehend, ändert sich der Wert von u_1 in monotoner Weise, bis die Kurve $w_1 = \pi$ erreicht oder zu $w_1 = 0$ zurückkehrt. Dabei sind verschiedene Fälle möglich: 1. $\partial H/\partial u_1$ hat im reellen Intervall $0 \leqslant w_1 \leqslant \pi$ keine Nullstellen, dann wächst auch die w_1-Koordinate monoton an (Fig. 1, Kurve I); 2. $\partial H/\partial u_1$ hat in dem erwähnten Intervall eine einfache Nullstelle w_1^0, dann kehrt die Kurve in diesem Punkte um (Kurve II); 3. $\partial H/\partial u_1$ besitzt zwei Nullstellen (Fig. 2, Kurve III); 4. $\partial H/\partial u_1$ besitzt drei Nullstellen (Kurve IV) usw.[1]

[1] Wenn wir die Annahme, daß u_1 in der Umgebung von $w_1 = 0$ reell ist, fallen lassen, können in den Fällen von einer oder zwei Nullstellen der Funktion $\partial H/\partial u_1$ noch zwei weitere Kurventypen vorkommen.

Wir stellen nun die Frage, ob es möglich ist, durch geeignete Wahl der Konstanten α die Fälle der Kurven I und II zu verwirklichen. Es ist mir nicht gelungen, die Frage allgemein für beliebige Funktionen H_1 und b zu beantworten, aber in jedem speziellen Falle ist die Untersuchung leicht durchführbar.

§ 5. Erweiterte Theorie bedingt periodischer Bewegungen (Fortsetzung). Wir wollen zur Illustration des in § 4 Gesagten zwei für die Probleme der Praxis typische Beispiele betrachten.

a) Gleichung (17′) sei uns in der Form gegeben:

$$-\frac{1}{2(u_1+u_2)^2}+\frac{\beta}{2}(u_1+u_2)^2\cos w_1=\alpha,$$

wobei β eine Konstante bedeutet. Ein Umkehrpunkt kann nach (19) nur auftreten, wenn die Bedingung

$$\frac{1}{(u_1+u_2)^3}+\beta(u_1+u_2)\cos w_1^0=0$$

erfüllt ist.

Die Elimination von u_1+u_2 aus diesen beiden Gleichungen gibt für die Lage des Umkehrpunktes:

$$\cos w_1^0=-\frac{\alpha^2}{\beta}. \tag{20}$$

Wir erhalten also das Resultat: Ist $\alpha^2>|\beta|$, so ist kein Umkehrpunkt vorhanden, und die Kurve läuft nach dem Typus I monoton von $w_1=0$ bis $w_1=\pi$. Im Falle $\alpha^2<|\beta|$ gibt es einen Umkehrpunkt, und zwar zwischen 0 und π nur einen, denn $\cos w_1^0$ ist für jeden Wert von α durch (20) eindeutig bestimmt; es liegt daher die geschlossene Kurve des Typus II vor. Die Fälle III und IV der Fig. 2 lassen sich durch keine Wahl von α verwirklichen.

b) Der Ausdruck der Hamiltonschen Funktion sei

$$H=-\frac{1}{2(u_1+u_2)^2}-\omega u_1+2\beta\sqrt{u_1}\cos w_1=\alpha,$$

wobei β sehr klein sein und u_1 auch nur sehr kleine Werte annehmen möge. ω bedeutet eine positive Konstante.

Die Bedingung (19) für den Umkehrpunkt lautet:

$$\frac{1}{(u_1+u_2)^3}-\omega+\frac{\beta}{\sqrt{u_1}}\cos w_1=0.$$

Wir entwickeln beide Gleichungen nach u_1 und beschränken uns auf Glieder erster Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2u_2^2}+\left(\frac{1}{u_2^3}-\omega\right)u_1+2\beta\sqrt{u_1}\cos w_1^0 &= \alpha, \\ \left(\frac{1}{u_2^3}-\omega\right)+\frac{\beta}{\sqrt{u_1}}\cos w_1^0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Durch Elimination von u_1 erhalten wir mit der Abkürzung $\Omega = 1/u_2^3$

$$\cos^2 w_1^0 = -\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\Omega-\omega}\left(\alpha+\frac{1}{2u_2^2}\right).$$

Da für reelle Werte von w_1^0 die Bedingung $0 \leqslant \cos^2 w_1^0 \leqslant 1$ erfüllt sein muß, gelangen wir unter der Voraussetzung $\Omega > \omega$ zu dem Ergebnis: In den Fällen

$$\alpha < -\left[\beta^2(\Omega-\omega)+\frac{1}{2u_2^2}\right] \quad \text{und} \quad \alpha > -\frac{1}{2u_2^2}$$

gibt es keinen Umkehrpunkt. Im gegenteiligen Falle

$$-\frac{1}{2u_2^2} \geqslant \alpha \geqslant -\left[\beta^2(\Omega-\omega)+\frac{1}{2u_2^2}\right] \tag{22}$$

ist ein Umkehrpunkt vorhanden.

Machen wir dagegen die Voraussetzung $\Omega < \omega$, so müssen wir in den Ungleichungen die Zeichen $<$ und $>$ vertauschen. Daß es nicht mehr als einen Umkehrpunkt geben kann, geht aus der folgenden Überlegung hervor: die Annahme $u_1 = 0$ würde auf $\alpha = -\frac{1}{2u_2^2}$ führen und kann daher, wenn wir α nicht gerade diesen Wert zuschreiben, nicht erfüllt sein. Daher kann $\sqrt{u_1}$ das Vorzeichen nicht wechseln, und man kann daher vermöge der Gleichung (21) $\cos w_1^0$ nur ein einziges Vorzeichen beilegen. Die Grenzen, in denen u_1 eingeschlossen sein muß, wenn der Fall der Kurve II vorliegt, ergeben sich, sowohl für $\Omega > \omega$ als für $\Omega < \omega$, zu

$$0 \leqslant u_1 \leqslant \beta^2. \tag{23}$$

Die Verhältnisse der Kurven III und IV sind in unseren beiden Beispielen nicht verwirklicht. Überhaupt scheinen sie zu den selteneren Ausnahmen zu gehören, denn sie sind dem Verfasser in keinem der von ihm untersuchten Fälle vorgekommen. Wir können daher im folgenden von diesen Möglichkeiten absehen.

Unser Ergebnis läuft also darauf hinaus, daß in einem gewissen Bereich der Werte der Konstanten α der Fall der Kurve I vorliegt, für die übrigen Werte der Fall der Kurve II. Im ersten Fall wächst die Variable w_1 unbegrenzt, denn nach den kanonischen Gleichungen kann die Geschwindigkeit w_1 nur bei Erfüllung der Bedingung $\partial H/\partial u_1 = 0$ ihr Vorzeichen wechseln, die wir hier ausgeschlossen haben. Der Impuls u_1 ist dann eine periodische Funktion der Koordinate w_1, die wir durch eine Fourierreihe darstellen können

$$u_1 = c_0 + c_1 \cos w_1 + c_2 \cos 2 w_1 + \cdots \tag{24}$$

Wir bezeichnen diesen Fall als den „periodischen“.

Im zweiten Fall variiert w_1 zwischen zwei festen Grenzen, oder führt, nach einer Bezeichnung von Charlier, „Librationsbewegungen“ aus. Wir nennen daher dieses Verhalten den „Fall der Libration“. Das analytische Verhalten des Impulses im Falle der Libration übersieht man am besten, wenn man die Abhängigkeit desselben von w_1 ins komplexe fortsetzt und den Verlauf der Funktion u_1 in der komplexen w_1-Ebene untersucht (Fig. 3). Im Bereich der reellen Achse zwischen den Punkten $w_1 = -w_1^0$ und $w_1 = w_1^0$ hat u_1, wie man

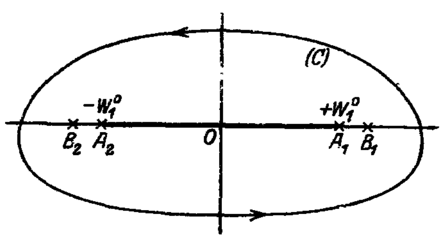

Fig. 3.

aus der Kurve II (Fig. 1) erkennt, zwei reelle Werte. In der Umgebung der Umkehrpunkte (u_1^0, w_1^0) und $(u_1^0, -w_1^0)$ kann man die Kurve II, da hier die Berührung mit der Vertikalen, nach Voraussetzung, eine einfache ist, durch die beiden Parabeln approximieren

$$u_1 - u_1^0 = c\sqrt{w_1 - w_1^0} \quad \text{bzw.} \quad u_1 - u_1^0 = c\sqrt{w_1 + w_1^0},$$

d. h. die Funktion u_1 der komplexen Variablen w_1 besitzt im Intervalle der reellen Achse $-\pi \leqslant w_1 \leqslant +\pi$ zwei Verzweigungspunkte $w_1 = w_1^0$ und $w_1 = -w_1^0$ mit den Exponenten 1/2, so daß man die Gesamtheit der Werte dieser Funktion mittels einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche darstellen kann. Verbindet man in der üblichen Weise die Verzweigungspunkte durch einen geradlinigen Schnitt, so nimmt die Funktion u_1 auf dem unteren Ufer des Schnittes eine Serie von reellen Werten an, auf dem oberen eine andere Reihe reeller Werte, die sich in den Verzweigungspunkten stetig der ersteren anschließt. Wir können dann die Änderung der Variablen w_1 vom

Werte $-w_1^0$ bis $+w_1^0$ und wieder zurück als eine Umkreisung des Verzweigungsschnittes auffassen.

Zusammenfassend können wir sagen: Je nach dem Wert, den wir den Konstanten α beilegen, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten wächst w_1 unbegrenzt, und u_1 ist eine periodische Funktion von w_1 mit der Periode 2π (Fall der Periodizität). Im zweiten pendelt w_1 monoton von der Grenze $-w_1^0$ zur Grenze $+w_1^0$ und wieder zurück, und der analytische Charakter von u_1 kann in der komplexen w_1-Ebene mit Hilfe einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche dargestellt werden (Fall der Libration). Die Verhältnisse stimmen also mit denen überein, welche Staeckel für die besondere, von ihm untersuchte Form der kinetischen Energie gefunden hat, und es ist daher berechtigt, auch die durch die Hamiltonsche Funktion (17′) bzw. (13) definierten Systeme als bedingt periodisch zu bezeichnen.

Durch die obigen Überlegungen haben wir über das Verhalten der Variablen w_1 Klarheit gewonnen. Wir wollen aber noch einige Worte über die zyklischen Variablen $w_2, w_3 \ldots w_f$ sagen. Im gewöhnlichen Fall einer in den Impulsen quadratischen Hamiltonschen Funktion können die zyklischen Koordinaten nur monoton anwachsen. Dagegen liegen in unserem Fall die Verhältnisse komplizierter, und es empfiehlt sich zu deren Klarlegung von der Jacobischen Wirkungsfunktion auszugehen, welche hier die Form gewinnt

$$W = \int u_1\, dw_1 + u_2 w_2 + \cdots + u_f w_f. \tag{25}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann bekanntlich

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \overline{w}_i \quad (i = 2, 3 \ldots f),$$

wo die Symbole $\overline{w}_i$ neue Konstanten bedeuten; oder nach (25)

$$w_i - \overline{w}_i = -\int \frac{\partial u_1}{\partial u_i}\, dw_1.$$

Im ersten, periodischen Fall, wenn der Ausdruck (24) für u_1 gilt, ergibt dies

$$w_i - \overline{w}_i = -\frac{\partial c_0}{\partial u_i} w_1 - \frac{\partial c_1}{\partial u_i} \sin w_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial c_2}{\partial u_i} \sin 2 w_1 \ldots$$

Der erste Term der rechten Seite wächst monoton und unbegrenzt. Diesem einseitigen Wachsen überlagert sich eine periodische Änderung von dem Rythmus der Variabeln w_1, so daß dw_i/dw_1 für verschiedene Werte von w_1 verschiedene Vorzeichen haben kann und die Änderung von w_i nur im Mittel einseitig ist. Im besonderen Falle, wenn c_0 von u_i unabhängig ist ($\partial c_0/\partial u_i = 0$), verschwindet die mittlere Änderung von w_i, d. h. wir haben ein Schwanken zwischen zwei festen Grenzen: eine Libration. Die Periode dieser Libration geht mit der Variablen w_1 synchron, woraus wir schließen können, daß dieser Fall nur in sogenannten „entarteten“ Systemen eintritt.

Nicht viel anders gestalten sich die Verhältnisse im zweiten Fall, in welchem w_1 eine Librationsbewegung ausführt. Man kann dann u_1, und folglich auch $\partial u_1/\partial u_i$, in einen regulären Summanden, welcher auf beiden Ufern des Verzweigungsschnittes der Fig. 3 den gleichen Wert besitzt, und einen verzweigten Summanden, bei dem die Vorzeichen auf beiden Ufern entgegengesetzt sind, zerlegen. Der Beitrag des zweiten Summanden zum Integral ist stets positiv, während derjenige des ersten periodisch ist und synchron mit w_1 das Vorzeichen wechselt. Librationsbewegungen haben wir dann, wenn der verzweigte Summand von u_i unabhängig ist. Auch hier bleibt diese Möglichkeit auf Fälle der Entartung beschränkt.

Es ist bekannt, daß entartete Systeme sich immer auf nicht entartete von einer geringeren Anzahl von Freiheitsgraden reduzieren lassen[1]). Wir denken uns diese Reduktion ausgeführt und dürfen dann von der Möglichkeit der Libration bei den zyklischen Koordinaten absehen. Dann können wir zusammenfassend feststellen, daß diese Variablen zwar nicht immer monoton wachsen, aber daß ihre eventuellen Schwankungen einen regelmäßig rythmischen Charakter tragen, so daß ihr Verhalten mit der Bezeichnung „bedingt periodische Systeme“ im Einklang steht.

§ 6. Einführung der Winkelkoordinaten. Als eine der Haupteigenschaften bedingt periodischer Systeme haben wir die Möglichkeit bezeichnet, sie durch Winkelkoordinaten zu beschreiben. Wir wollen jetzt zeigen, daß man in unserem allgemeineren Fall die Winkelkoordinaten und die ihnen zugeordneten Impulse in genau derselben Weise finden kann wie in dem von Staeckel untersuchten. Ferner werden wir beweisen, daß sämtliche in § 2 aufgezählten Eigenschaften dieser Koordinaten auch hier gültig bleiben. Um die Asymmetrie zu vermeiden, die daraus fließt, daß der Impuls u_1 variabel, die übrigen Impulse $u_2, u_3, \dots u_f$ konstant sind, wollen wir den allgemeinen Fall betrachten und Koordinaten und Impulse mit $q_1, \dots q_f$; $p_1, \dots p_f$, die Integrationskonstanten mit $\alpha_1, \dots \alpha_f$ bezeichnen, wobei α_1 die Energie bedeuten möge. Wie im Staeckelschen Falle gehen wir von der Wirkungsfunktion mit separierten Variablen aus:

$$W(q_1, \dots q_f; \alpha_1, \dots \alpha_f) = \sum_1^f{}^i \int p_i(q_i; \alpha_1, \dots \alpha_f)\, dq_i, \qquad (26)$$

[1]) Vgl. P. S. Epstein, l. c., S. 179.

mit deren Hilfe sich die Bewegungsgleichungen des Systems nach der Jacobischen Integrationsmethode in der folgenden Form ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} t + \beta_1 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \sum_1^f{}^i \int \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}\, d q_i, \\ \beta_h &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} = \sum_1^f{}^i \int \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_h}\, d q_i, \end{aligned}\right\} \tag{26'}$$

wenn β_i ($i = 1, 2, \ldots f$) weitere Konstanten bedeuten.

Für das Verhalten jeder einzelnen Variablen q_i hatten wir in § 5 zwei verschiedene Möglichkeiten gefunden: entweder ist der Zustand des Systems in denselben periodisch mit der Periode 2π (d. h. ihr physikalischer Variabilitätsbereich beträgt 2π), oder aber die Variable führt eine Libratation aus, wobei der zugehörige Impuls p_i eine in bestimmter Weise (Fig. 3) verzweigte Funktion von q_i ist. Im letzteren Falle tragen offenbar auch die Ableitungen $\partial p_i / \partial \alpha_h$ denselben Verzweigungscharakter. Daher ändert sich das Integral

$$s_{ih} = \int \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_h}\, d q_i, \quad (i, h = 1, 2, \ldots f), \tag{27}$$

während q_i einen Umlauf ausführt und zum Anfangswert zurückkehrt bzw. um 2π wächst, um den „Periodizitätsmodul"

$$\omega_{ih} = \oint \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_h}\, d q_i. \tag{28}$$

Der durch den Kreis am Integralzeichen angedeutete Integrationsweg ist im Falle des verzweigten Integranden (Libration) eine beliebige Umkreisung des Verzweigungsschnittes (Fig. 3) in der komplexen q_i-Ebene, welche jedoch so zu führen ist, daß sie keine weiteren Singularitäten des Integranden einschließt. Im Falle des unbegrenzten Anwachsens von q_i ist es der reelle Integrationsweg von Null bis 2π.

Kehrt man dagegen die Gleichung (27) um, und betrachtet die Variable q_i als Funktion von s_{ih}, so ist q_i eine periodische Funktion dieser Größe von der Periode ω_{ih}[1]. Diese Art der Abhängigkeit macht es möglich, in der durch Weierstrass angegebenen Weise neue Variable durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= t + \beta_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_1^f{}^i \omega_{i1} w_i, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} &= \quad \beta_h \quad = \frac{1}{2\pi} \sum_1^f{}^i \omega_{ih} w_i, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

[1] Nach einem Weierstrassschen Satz (Monatsber. der Berl. Akademie 1866), der bereits von Staeckel benutzt wurde.

so einzuführen, daß der Zustand des Systems in denselben periodisch von der Periode 2π wird [1]). Das sind die gesuchten Winkelkoordinaten, welche, wie man aus den Gleichungen (29) sieht, auch in diesem Falle lineare Funktionen der Zeit sind.

Auch die den Winkelkoordinaten kanonisch konjugierten Impulse drücken sich ebenso aus wie im Staeckelschen Falle. Vom Verfasser wurde nämlich bewiesen (l. c.), daß sie dort durch die Ausdrücke

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i \, d q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots f) \tag{30}$$

gegeben sind, wobei das Integrationssymbol dieselbe Bedeutung hat wie in Formel (28). Diese Gleichungen lassen sich als f simultane Beziehungen zwischen den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f$, von denen ja die Impulse abhängen, auffassen, die man nach diesen Konstanten auflösen kann. Das liefert

$$\alpha_i = \alpha_i(u_1, u_2, \ldots u_f), \quad (i = 1, 2, \ldots f), \tag{31}$$

wobei der erste dieser Ausdrücke ($i = 1$), wie wir gleich sehen werden, die Hamiltonsche Funktion ausdrückt.

Wir multiplizieren nun die Gleichungen des Systems (29) bzw. mit $\partial \alpha_h / \partial u_k$ und addieren alle diese Gleichungen

$$\sum_1^f{}^h \frac{\partial W}{\partial \alpha_h} \cdot \frac{\partial \alpha_h}{\partial u_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_1^f{}^i w_i \sum_1^f{}^h \omega_{ih} \frac{\partial \alpha_h}{\partial u_k}. \tag{32}$$

Den Integrationsweg der Formeln (28) und (30) kann man als fest und von den Konstanten α_i unabhängig auffassen, woraus man

$$\omega_{ih} = 2\pi \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_h}$$

folgert. Die zweite Summe der rechten Seite von (32) schreibt sich daher $\sum_1^f{}^h \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_h} \cdot \frac{\partial \alpha_h}{\partial u_k} = \frac{\partial u_i}{\partial u_k}$, während sich die linke Seite auf $\partial W / \partial u_k$ reduziert:

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = \sum_1^f{}^i \frac{\partial u_i}{\partial u_k} w_i. \tag{32'}$$

Die Größen u_i sind unabhängig, deshalb verschwinden alle Ableitungen $\partial u_i / \partial u_k$ mit Ausnahme des Falles $i = k$, in welchem die Ableitung gleich 1 wird. Von der Summe rechts bleibt also das einzige Glied w_k übrig. Wir können daher den folgenden Schluß ziehen: Wenn man im Ausdruck (26) der Hamiltonschen Funktion die Konstanten α_i mit Hilfe der Beziehungen (31)

[1]) Die Überlegungen sind dieselben wie im Staeckelschen Fall.

durch die neuen Konstanten u_i ersetzt, so gelten die Relationen

$$\left.\begin{aligned} W &= W(q_1, \dots q_f; u_1, \dots u_f), \\ p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad w_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Nach § 2 sind diese Gleichungen der analytische Ausdruck einer Berührungstransformation, welche den Übergang von den Koordinaten p_i, q_i zu den Koordinaten u_i, w_i vermittelt. Es geht daraus hervor, daß die letzteren Variablen kanonische Koordinaten des Problems sind. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß die Koordinaten w_i lineare Funktionen der Zeit und daß die Impulse u_i Konstanten sind. Die erste der Beziehungen (31) zeigt uns schließlich, daß die Energie α_1 sich nur durch die Impulse u_i ausdrückt und von den Variablen w_i unabhängig ist.

Pasadena, California Institute of Technology, September 1921.