

## SOPRA LE VIBRAZIONI ARMONICHE SMORZATE DI UN CORPO ELASTICO IMMERSO IN UN FLUIDO.

NOTA DI E. LAURA <sup>1)</sup>.

È fisicamente intuitivo, che le vibrazioni di un corpo elastico isotropo vibrante in un fluido indefinito non possono essere in generale delle armoniche semplici, qualora vibratore e fluido non sieno sollecitati da forze di massa. Il moto del vibratore è comunicato, invero, in parte al fluido e quindi la sua energia totale tende ad estinguersi.

Mi propongo nella presente Nota di dedurre simile risultato dalla considerazione del comportamento all'infinito di potenziali analoghi a quelli già considerati dall' Helmholtz e supponendo inoltre la continuità della tensione e della velocità normale attraverso la superficie del vibratore.

1. Sieno  $(u, v, w)$   $(u_1, v_1, w_1)$  due spostamenti regolari nel vibratore (spazio  $S$ ), i quali verificheranno perciò in  $S$  le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi. Se  $(X_v, Y_v, Z_v)$   $(X_v^{(1)}, Y_v^{(1)}, Z_v^{(1)})$  sono le corrispondenti tensioni unitarie sulla superficie  $\sigma$  del vibratore attraverso l'elemento di normale interno  $v$ , il teorema di reciprocità fornirà l'equazione:

$$(1) \quad \int_S \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} v - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} w \right) dS = \int_{\sigma} (X_v u_1 + Y_v v_1 + Z_v w_1 - \\ - X_v^{(1)} u - Y_v^{(1)} v - Z_v^{(1)} w) d\sigma$$

<sup>1)</sup> *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XXI, serie 5.<sup>a</sup>, 2.<sup>o</sup> sem., fasc. 11.<sup>o</sup> e 12.<sup>o</sup>.

se, come supponiamo, il vibratore non è sollecitato da forze di massa.

Il moto generato nel fluido (il quale è supposto inizialmente in quiete) ammetta un potenziale di velocità  $\Phi$ , il quale, poichè il moto del fluido come quello del vibratore è supposto piccolo, soddisfa all'equazione:

$$(2) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = c^2 \Delta \Phi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

In essa  $c$  è la velocità del suono nel fluido, e questo è supposto pure non sollecitato da forze di massa.

Gli spostamenti considerati nelle (1) sieno possibili nel vibratore quando è immerso nel fluido. Esisteranno in corrispondenza due potenziali di velocità  $\Phi, \Phi_1$  che, oltre soddisfare la (2), verificheranno sopra  $\sigma$  quelle condizioni che derivano dalla ipotesi supposta della continuità delle tensioni e delle componenti normali di velocità attraverso  $\sigma$ .

Abbiamo così le equazioni (sopra  $\sigma$ ) <sup>1)</sup>:

$$(2^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X_v, Y_v, Z_v) = \varsigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial v} = - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{array} \right.$$

e quattro analoghe per lo spostamento  $u_1, v_1, w_1$  e il potenziale  $\Phi_1$ . Da queste si deduce:

$$\begin{aligned} X_v u_1 + Y_v v_1 + Z_v w_1 &= \varsigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left( u_1 \frac{\partial x}{\partial v} + v_1 \frac{\partial y}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + w_1 \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \varsigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} s_v^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v^{(1)} u + Y_v^{(1)} v + Z_v^{(1)} w &= \varsigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \left( u \frac{\partial x}{\partial v} + v \frac{\partial y}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + w \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \varsigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} s_v. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $\varsigma_1$  è la densità nel fluido.

La (1) diviene allora:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \varsigma \int_S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 + \dots - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u - \dots \right) dS = \\ & = \varsigma_1 \int_{\sigma} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} s_v^{(1)} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} s_v \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Supponiamo ora lo spostamento nel vibratore, e il potenziale di velocità nel fluido dipendere da  $t$  a mezzo di un esponenziale.

Poniamo cioè:

$$(4) \quad \begin{cases} u, v, w = e^{\lambda_m t} (u_m, v_m, w_m), & u_1, v_1, w_1 = e^{\lambda_n t} (u_n, v_n, w_n) \\ \Phi = \mu_m e^{\lambda_m t} \varphi_m & \Phi_1 = \mu_n e^{\lambda_n t} \varphi_n. \end{cases}$$

Le  $u_m, v_m, w_m, \varphi_m, \dots$  sono funzioni di posizione e soddisfanno a equazioni che è facile formare. Le  $\lambda_m, \lambda_n$  saranno poi radici di una equazione trascendente in  $\lambda$ , la quale si ricava dalle equazioni in superficie (del tipo 2 bis) nello stesso modo in cui si ottiene l'equazione di frequenza delle vibrazioni libere di un corpo elastico <sup>1)</sup>.

Con la posizione (4), la (3) diviene allora, dopo facili riduzioni:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \varsigma (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_S (u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n) dS = \\ & = - \varsigma_1 \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m \lambda_n} \int_{\sigma} \left( \lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> E cioè dalle equazioni in superficie, che nell'attuale problema sono quattro, e da quella della superficie del vibratore si eliminano le  $x, y, z$  e la  $\mu$ . Cfr. le mie due Note (*Rendiconti Acc. dei Lincei*, vol. XXI, 1° sem., pp. 754-759; 2° sem., pp. 20-25), dove una simile equazione è calcolata nel caso delle vibrazioni di una lastra piana e nel caso di una sfera vibrante radialmente.

Sia  $\sigma_1$  una superficie tutta esterna al vibratore. Diciamo  $\nu_1$  la sua normale interna,  $S_1$  lo spazio compreso tra  $\sigma$  e  $\sigma_1$ . In esso si ha [per la (2)]:

$$c^2 \Delta \varphi_m = \lambda_m^2 \varphi_m,$$

$$c^2 \Delta \varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n.$$

E poichè per il lemma di Green si ha pure:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \varphi_m \Delta \varphi_n dS_1 &= \int_{\sigma} \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma - \\ &\quad - \int_{\sigma_1} \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} d\sigma_1 - \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m, \varphi_n) dS_1, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\Delta_1(\varphi_m, \varphi_n) = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z},$$

avremo infine:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left( \lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} \right) d\sigma &= \int_{\sigma_1} \left( \lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} \right) d\sigma_1 - (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m, \varphi_n) dS. \end{aligned}$$

La (5) allora diviene (supposto  $\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} (6) \quad \int_S (u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n) dS + \varepsilon_1 \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m, \varphi_n) dS_1 &= \\ = - \varepsilon_1 \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m \lambda_n \lambda_m^2 - \lambda_n^2} \int_{\sigma_1} \left( \lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu_1} \right) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Nel fluido si ha d'altra parte propagazione di sole onde progressive; il potenziale di velocità nel fluido sarà dunque esprimibile nella forma di un potenziale ritardato, e le  $\varphi_m, \varphi_n$  sotto forma di potenziali generalizzati di Helmholtz <sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_m(Q) = \int_S F(P) \frac{e^{-\lambda_m \frac{r}{c}}}{r} dS, \\ \varphi_n(Q) = \int_S F(P) \frac{e^{-\lambda_n \frac{r}{c}}}{r} dS, \end{array} \right.$$

essendo P la posizione dell'elemento  $dS$  e  $r$  la distanza dei punti P, Q.

L'equazione di cui  $\lambda_m, \lambda_n$  sono radici (che solo per brevità ma impropriamente <sup>2)</sup> dirò di frequenza nel seguito) è a coefficienti reali; potremo perciò assumere nella (6) per  $\lambda_m, \lambda_n$  una coppia di radici complesse coniugate. Per la validità della (6) supporremo inoltre diversa da zero la parte reale di  $\lambda_m$ .

Poniamo:

$$\frac{\lambda_m}{c} = h + i k$$

$$\frac{\lambda_n}{c} = k - i k.$$

<sup>1)</sup> Se le  $\lambda$  sono immaginarie pure si hanno quei potenziali per primo considerati dall'Helmoltz. Per la loro irregolarità all'infinito nel caso di  $\lambda$  immaginario puro cfr. Pockels, *Ueber die Gleichung*  $\Delta_s u + h^2 u = 0$ . Il caso di  $\lambda$  immaginario con parte reale diversa da zero è stato considerato da me nella Memoria: « Sopra i moti vibratorii semplici e smorzati ecc. » *Acc. Sc. di Torino*, tomo LIX, serie II.

<sup>2)</sup> Se questa equazione ammette invero una radice  $\alpha + i\beta$ , a questa corrisponde una vibrazione del tipo smorzato (cfr. la mia Memoria sopra citata) se  $\alpha < 0$ . Questa è di frequenza  $\beta$  (cioè di periodo  $\frac{2\pi}{\beta}$ ); la quantità  $\alpha$  è poi un coefficiente di smorzamento. La suddetta equazione dovrebbe perciò dirsi l'equazione al periodo e agli smorzamenti.

Avremo allora :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \int_{\sigma_1} \left( \lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu_1} \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{4ik} \int_S \int_{S_1} F(P) F(P_1) dS dS_1 \int_{\sigma_1} \left[ (h+ik)^2 \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1} \times \right. \\ &\quad \times \left\{ -(h-ik) \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1} - \frac{e^{-(h-ik)r_1}}{r_1^2} \right\} - \\ &\quad \left. - (h-ik)^2 \frac{e^{-(h-ik)r_1}}{r_1} \left\{ -(h+ik) \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1} - \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1^2} \right\} \right] \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1} d\sigma_1, \end{aligned}$$

nella quale  $P, P_1$  sono le posizioni degli elementi  $dS, dS_1$  e  $r, r_1$  sono le distanze di questi punti dall'elemento  $d\sigma_1$ . Semplificando otteniamo :

$$\begin{aligned} L &= - \frac{2(h^2 + k^2)}{4hk} \int_S \int_{S_1} F(P) F(P_1) dS dS_1 \times \\ &\quad \times \int_{\sigma_1} \frac{e^{-h(r+r_1)}}{r r_1^2} \left[ k \cos k(r-r_1) + h \sin k(r-r_1) \right] \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2hk} \int_S \int_{S_1} F(P) F(P_1) dS dS_1 \times \\ &\quad \times \int_{\sigma_1} \frac{e^{-h(r+r_1)}}{r r_1^2} \left[ (h^2 - k^2) \sin k(r-r_1) - 2hk \cos k(r-r_1) \right] \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1} d\sigma. \end{aligned}$$

Gli integrali superficiali del 2° membro hanno significato pure al limite quando come superficie  $\sigma_1$  si assuma quella di una sfera il cui raggio  $R$  tende a divenire infinito. Poichè d'altro lato il 1° membro della (6) nella posizione (7 bis) fatta è sempre positivo (è per di più crescente con  $R$ ), ed il coefficiente  $\varsigma_1 \frac{\lambda_m \lambda_n}{\mu_m \mu_n}$  è pur esso positivo, dovrà aversi :

$$L < 0.$$

Al limite il 2° integrale che compare nell'espressione di  $L$  è trascurabile rispetto al 1°, e  $\frac{\partial r_1}{\partial v_1}$  tende a  $-1$ . Il segno di  $L$  (al limite) è dunque quello di:

$$L_1 = \lim \frac{h^2 + k^2}{2hk} \int_S \int_S F(P) F(P_1) dS dS_1 \times \\ \times \int_{\sigma_1} \frac{e^{-h(r+r_1)}}{r r_1} \{k \cos k(r-r_1) + h \sin k(r-r_1)\} d\sigma.$$

Si scambi l'ordine delle integrazioni, allora subito si vede che è nullo l'integrale che contiene  $\sin k(r-r_1)$ . E poichè allora:

$$L_1 = \lim \frac{h^2 + k^2}{2h} \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \left\{ \int_S F(P) \frac{e^{-hr}}{r} \cos kr dS \int_S F(P_1) \frac{e^{-kr_1}}{r_1} \cos kr_1 dS_1 + \right. \\ \left. + \int_S F(P) \frac{e^{-hr}}{r} \sin kr dS \int_S F(P_1) \frac{e^{-hr_1}}{r_1} \sin kr_1 dS_1 \right\} = \\ = \lim \frac{h^2 + k^2}{2h} \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \left\{ \left[ \int_S F(P) \frac{e^{-hr}}{r} \cos kr dS \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \int_S F(P) \frac{e^{-hr}}{r} \sin kr dS \right]^2 \right\},$$

si conclude che il segno di  $L_1$  (e quindi quello di  $L$ ) coincide con il segno di  $h$ .

Per quanto precede si dovrà dunque avere:

$$h < 0.$$

Sicchè: le sole vibrazioni del tipo:

$$e^{+ht} [\cos kt \cdot u(x, y, z) - \sin kt \cdot u'(x, y, z)],$$

dove  $h \neq 0$ , che possono sussistere nel moto di un corpo elastico immerso in un fluido sono quelle per le quali si ha:

$$h < 0$$

ossia quelle di tipo *armonico smorzato*.

Per discutere le armoniche semplici e i moti aperiodici del vibratore devesi non più ricorrere all'equazione (6) (teorema di reciprocità) ma bensì all'equazione delle forze vive.

2. Sia  $W$  il potenziale elastico unitario del vibratore corrispondente allo spostamento  $u, v, w$ ;  $\Phi$  il potenziale di velocità nel fluido. L'equazione delle forze vive, per il moto del vibratore, assume allora ovviamente la forma:

$$(9) \quad \left\{ \frac{\epsilon}{2} \int_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dS + \int_S W dS \right\}_0^t = \\ = - \epsilon_1 \int_0^t dt \int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial v} d\sigma,$$

dove il simbolo  $\left\{ \right\}_0^t$  indica differenza dei valori che assume la funzione in parentesi agli istanti 0 e  $t$ .

Sia:

$$\lambda_n = i k_n \quad (k_n \text{ quantità reale})$$

una radice imaginaria pura dell'equazione di frequenza. Poniamo perciò:

$$(10) \quad u = \cos k_n t u_n(x, y, z) \text{ ecc.}$$

Porremo per la  $\Phi$ , in corrispondenza della posizione (10),

$$(11) \quad \Phi(Q) = \int_S F(P) \frac{\cos k_n \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} dS = \cos k_n t \int_S F(P) \frac{\cos k_n \frac{r}{c}}{r} dS + \\ + \sin k_n t \int_S F(P) \frac{\sin k_n \frac{r}{c}}{r} dS = \varphi_n(Q) \cos k_n t + \psi_n(Q) \sin k_n t,$$



e ciò perchè nel fluido si ha propagazione di sole onde progressive.

Per la posizione (10) il 1° membro di (9) diviene una funzione periodica di  $t$ , mentrechè il 2° per la posizione (11) diviene somma di una funzione periodica di  $t$  (con lo stesso periodo della 1ª) e del termine:

$$\frac{\varepsilon_1}{2} k_n t \int_{\sigma} \left( \varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right) d\sigma = \frac{\varepsilon_1}{2} t H$$

Dico che  $H$  è nulla solo se è identicamente nulla la  $F$ .

Procediamo perciò come nel numero precedente. Sia  $\sigma_1$  una superficie tutta esterna a  $S$ ,  $S_1$  lo spazio compreso tra  $\sigma$  e  $\sigma_1$ . Nello spazio  $S_1$  si ha:

$$\Delta(\varphi_n, \psi_n) = -\frac{k_n^2}{c^2}(\varphi_n, \psi_n).$$

Avremo dunque per il lemma di Green:

$$H = k_n \int_{\sigma_1} \left( \varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu_1} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} \right) d\sigma_1 \quad \nu_1 = \text{normale interna a } \sigma.$$

E quindi per la posizione (11):

$$H = \frac{k_n^2}{c} \int_S \int_{S_1} F(P) F(P_1) dS dS_1 \times \\ \times \int_{\sigma_1} \left( \frac{\cos \frac{k_n}{c}(r-r_1)}{r r_1} + \frac{\sin \frac{k_n}{c}(r-r_1)}{r r_1^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1} d\sigma_1.$$

Sia  $\sigma_1$  una superficie sferica di raggio tendente all'infinito. Gli integrali superficiali hanno significato pure al limite. Al limite quello contenente il seno si annulla, e  $\frac{\partial r_1}{\partial \nu_1}$  tende a  $-1$ . Avremo dunque:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad H &= -\frac{k_n^2}{c} \lim \int_S \int_S F(P) F(P_1) dS dS_1 \int_{\sigma_1}^{\cos \frac{k_n}{c} (r-r_1)} \frac{1}{r r_1} d\sigma_1 \\
 &= -\frac{k_n^2}{c} \lim \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \left[ \left\{ \int_S \cos \frac{k_n}{c} r F(P) dS \right\}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \int_S F(P) \frac{\sin \frac{k_n}{c} r}{r} dS \right\}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Cioè  $H$  è costantemente negativa.

Notiamo che  $H$  può esprimersi mediante un integrale esteso allo spazio  $S$ . Nello spazio  $S$ , per le espressioni assunte per le  $\varphi_n, \psi_n$ , applicando il teorema di Lorenz, si ha:

$$\begin{cases} \Delta \varphi_n + \frac{k_n^2}{c^2} \varphi_n = -4\pi F \\ \Delta \psi_n + \frac{k_n^2}{c^2} \psi_n = 0. \end{cases}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
 \int (\varphi_n \Delta \psi_n - \psi_n \Delta \varphi_n) dS &= 4\pi \int F \psi_n dS = \\
 &= 4\pi \int_S \int_S F(P) F(P_1) \frac{\sin \frac{k_n}{c} r}{r} dS dS_1,
 \end{aligned}$$

avendo posto:

$$r = |PP_1|,$$

da questa, per il lemma di Green, consegue:

$$H = -\frac{4\pi k_n^2}{c} \int_S \int_S F(P) F(P_1) \frac{\sin \frac{k_n}{c} r}{\frac{k_n}{c} r} dS dS_1.$$

Alla stessa formola si perviene calcolando l'integrale superficiale che compare nella (12); questo calcolo conferma la validità del suddetto passaggio al limite. Diciamo  $\alpha$  l'angolo che  $PP_1$  fa con la direzione comune dei raggi  $r, r_1$  (al limite) e poniamo  $l = PP_1$ ; avremo:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_1} \int \frac{\cos k_n (r - r_1)}{r r_1} d\sigma_1 &= \\ &= 2\pi \int_0^\pi \cos\left(\frac{k_n l}{c} \cos \alpha\right) \sin \alpha d\alpha = \frac{4\pi}{c} \frac{\sin \frac{k_n l}{c}}{\frac{k_n l}{c}} \end{aligned}$$

e quindi discende ancora la (13).

Si conclude quindi: *il nucleo simmetrico*  $\frac{\sin \frac{k_n}{c} r}{\frac{k_n}{c} r}$  *è definito*

*nito positivo.*

Infine la (9), per essere soddisfatta dalla posizione (10), vuole che  $\Phi$  sia identicamente nulla; cioè che non vi sia propagazione di moto nel fluido.

Nell'ipotesi da noi fatta, della continuità delle tensioni e dello spostamento normale attraverso la superficie del vibratore, possono effettivamente sussistere nel vibratore delle vibrazioni semplici non propagantesi nel fluido. Basterà che esse diano tensioni nulle e spostamenti normali ancora nulli sulla superficie. L'esistenza di tali vibrazioni è stata provata dal Lamb nella sua classica Memoria « Sopra le vibrazioni libere di una sfera elastica isotropa » <sup>1)</sup>.

3. Passiamo infine a considerare i moti aperiodici. Sia  $\lambda_n$  una radice reale dell'equazione di frequenza. In corrispondenza ad essa avremo una soluzione del problema:

$$u = e^{\lambda_n t} u_n(x, y, z) \text{ ecc.,} \quad \Phi = \mu_n e^{\lambda_n t} \varphi_n(x, y, z).$$

<sup>1)</sup> H. Lamb. *London Math. Soc. Proc.*, vol. 13, 1882.

La equazione (9) quando in essa si faccia questa posizione diviene, dopo aver soppresso il fattore  $e^{2\lambda_n t} - 1$ .

$$(14) \quad \frac{\epsilon}{2} \lambda_n^2 \int_S (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) dS + \int_S W_n dS = -\frac{\epsilon_1 \mu_n^2}{2} \int_{\sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma.$$

In essa  $W_n$  è il potenziale elastico unitario corrispondente allo spostamento  $u_n, v_n, w_n$ ; il 1° membro è dunque l'energia totale iniziale del vibratore, ed è una quantità essenzialmente positiva.

Poniamo  $\varphi_n$  sotto forma di potenziale di spazio: tenendo conto della osservazione più volte fatta, che nel fluido vi è solo propagazione di onde all'esterno del vibratore, dovremo porre:

$$\varphi_n(Q) = \int_S F(P) \frac{e^{-\lambda_n \frac{r}{c}}}{r} dS.$$

All'esterno di  $S$  si ha:

$$\Delta \varphi_n = \frac{\lambda_n^2}{c^2} \varphi_n.$$

Sia  $\sigma$ , una superficie tutta esterna a  $S$ ,  $S_1$  lo spazio compreso tra  $\sigma$  e  $S$ . Avremo:

$$\int_{\sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \lambda_n^2 \int_{S_1} \varphi_n^2 dS_1 + \int_{S_1} \Delta_1 \varphi_n dS_1.$$

La (14) diviene allora indicandone con  $E_0$  il 1° membro:

$$E_0 + \frac{\epsilon_1 \mu_n^2}{2} \left[ \lambda_n^2 \int_{S_1} \varphi_n^2 dS_1 + \int_{S_1} \Delta_1 \varphi_n dS_1 + \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} dS_1 \right] = 0.$$

Dovrà dunque essere qualunque sia la superficie  $\sigma_1$ :

$$K = \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} d\sigma_1 < 0.$$

Come superficie  $\sigma$ , assumiamo quella di una sfera di raggio  $R$  infinitamente grande. La  $\varphi_n$  all'infinito è asintotica a:

$$A \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c} R}}{R} \quad (A \text{ essendo una costante}).$$

La quantità  $K$  è dunque asintotica a:

$$A^2 \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c} R}}{R} \left[ \frac{\lambda_n}{c} \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c} R}}{R} + \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c} R}}{R^2} \right] 4 \pi R^2.$$

Il segno di  $K$  al limite è perciò quello di:

$$A^2 \frac{\lambda_n}{c} \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c} R}}{R} \cdot 4 \pi R^2.$$

Per l'osservazione prima fatta avremo dunque:

$$\lambda_n < 0.$$

Gli unici moti aperiodici compatibili sono cioè smorzati.

4. Possiamo infine così riassumere i risultati di questa Nota.

*In un corpo elastico isotropo immerso in un fluido perfetto, vibrante in virtù di uno stato di velocità e di una deformazione iniziale, possono sussistere solo delle vibrazioni armoniche smorzate e semplici e dei moti aperiodici smorzati, se il vibratore e il fluido non sono sollecitati da forze di massa.*

Inoltre le vibrazioni armoniche semplici del vibratore non sono comunicate al fluido; esse danno cioè tensioni nulle e spostamento normale nullo in superficie.

Ed anche: *L'equazione di frequenza relativa alle vibrazioni di un corpo elastico isotropo vibrante immerso in un fluido nella ipotesi di assenza di forze di massa, ha le sue radici complesse coniugate con parte reale negativa o nulla.*

Torino — R. Università.

---