Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen.

Von Meissel in Iserlohn.

Die Methode der Absonderung aller Primzahlen von den natürlichen Zahlen durch Streichung der Vielfachen ist unter dem Namen „Sieb des Eratosthenes“ bekannt. Burckhardt bediente sich derselben zur Construction seiner Factorentafeln, aus denen man durch Abzählung die Menge der Primzahlen innerhalb der ersten drei Millionen aufgefunden hat.

Wie leicht hierbei Versehen stattfinden können, ergiebt sich aus der Menge von Zählungsfehlern, welche in dem zweiten Bande von Gauss Werken pag. 436/7 enthalten sind. Es sind folgende:

Chilias	Gauss	Wahrer Werth	Chilias	Gauss	Wahrer Werth
20	102	104	501	78	79
159	87	77	546	68	69
199	96	86	601	75	76
206	85	83	625	68	78
245	78	88	668	73	74
289	85	77	675	69	73
290	84	85	784	74	75
334	80	81	800	81	71
352	80	81	879	68	78
			985	74	70

Achtzehn dieser Fehler fand ich durch directes Nachzählen; den Fehler in der 501ten Chiliade aber hatte ich wohl deshalb übersehen, weil mein Zählungsresultat mit dem von Gauss übereinstimmte. Erst später entdeckte ich denselben mittels des folgenden Verfahrens, die Primzahlenmenge innerhalb gegebener Zahlengrenzen zu ermitteln.

Bezeichnungen.

Es sei $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 5$; $\ldots$ p_n die n^{te} Primzahl; ferner bezeichne $\theta(m)$ die Menge der Primzahlen, welche $\leqq m$ sind.

Wird das Product $m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ aufgelöst und jeder Term innerhalb seines Vorzeichens mit dem Zeichen E behaftet (d. h. nach Legendre sein Decimalbruch weggelassen), so erhalten wir eine Function der beiden Elemente m und n, welche durch $\Phi(m, n)$ oder kürzer durch (m, n) bezeichnet werden mag.

---

1. Die Function $\Phi(m, n)$ drückt die Menge derjenigen Zahlen aus, welche innerhalb des Intervalls 1 bis m inclusive durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ theilbar sind.
2. Setzt man $n = \varphi(m)$, so folgt $\Phi(m, \varphi(m)) = 1$.
Denn im Intervall 1 bis m wird die Einheit allein durch keine der ersten $\varphi(m)$ Primzahlen getheilt.
3. Es wird ferner

$$\Phi(m, a + \varphi(m)) = 1$$
$$\{a \geqq 0\} \qquad a \text{ ganz}$$

4.

$$\Phi(m, a) = 1 + \varphi(m) - a$$
$$\varphi(m) \geqq a \geq \varphi(\sqrt{m})$$

Denn das Zeichen $\Phi(m, a)$ drückt die Menge der Zahlen des Intervalls 1 bis m aus, welche durch die ersten a Primzahlen nicht theilbar sind. Das sind ausser der Einheit die Primzahlen von p_{a+1} incl. bis m incl., nämlich $p_{a+1}, p_{a+2}, \ldots, p_{\varphi m}$ und deren Productverbindungen.

Da aber nach der Voraussetzung $p_{a+1} > \sqrt{m}$, so befindet sich im Intervall p_{a+1} bis m keine Productverbindung der Primzahlen desselben. Die Menge der Primzahlen dieses Intervalls ist aber $\varphi(m) - a$; daher

$$\Phi(m, a) = 1 + \varphi(m) - a$$
$$\{\varphi m \geqq a \geq \varphi\sqrt{m}\}.$$

5.

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1) - \Phi\left(E\frac{m}{p_n}, n-1\right).$$

Durch Auflösung der Functionenzeichen werden beide Seiten identisch gleich.

6. Die Differenz

$$\Phi(m + a, n) - \Phi(m, n)$$

giebt die Menge der Zahlen an, welche im Intervall m excl. bis $m + a$ incl. durch eine der ersten n Primzahlen nicht getheilt werden; ist demnach gleich:

$\varphi(m + a) - \varphi m +$ Menge der zusammengesetzten Zahlen in dem erwähnten Intervall, deren kleinste Factoren $> p_n$ sind.

7. Zum Beweise der für unsere Zwecke wichtigsten Formel

$$\Phi\left(m, \theta(\sqrt{m}) - a\right) =$$

$$1 + \theta(m) - (a+1)\,\theta(\sqrt{m}) + \frac{a(a+3)}{2} + \sum_{s=1+\theta(\sqrt{m})-a}^{s=\theta(\sqrt{m})} \theta\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\left\{\theta(\sqrt{m}) - \theta(\sqrt[3]{m}) \geqq a \geqq 0\right\}$$

sei

$$\theta(\sqrt{m}) = n + \mu$$

$$\theta(\sqrt[3]{m}) = n.$$

Schliesst man s innerhalb der Grenzen ein

$$\mu \geqq s \geqq 0,$$

so wird in der aus 5. fliessenden Gleichung

$$(\alpha)\quad \Phi(m, n+s) = \Phi(m, n+s-1) - \Phi\left(E\frac{m}{p_{n+s}}, n+s-1\right)$$

das Argument $n+s-1$ innerhalb der Grenzen liegen,

$$\theta\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n+s-1 \gtreqqless \theta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.\right)$$

Denn es nimmt $E\frac{m}{p_{n+s}}$ ab, $n+s-1$ zu, wenn s wächst;

für $s = 1$ ist aber

$$\frac{m}{p_{n+1}} < \sqrt[3]{m^2}\,, \qquad \sqrt{\frac{m}{p_{n+1}}} < \sqrt[3]{m}\,.$$

Da nun $n = \theta(\sqrt[3]{m})$ ist, so folgt für $s = 1$

$$n + s - 1 \geqq \theta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

Für jeden folgenden Werth von s ist also

$$n + s - 1 > \theta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.\right)$$

Demnach allgemein

$$n + s - 1 \geqq \theta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\,.\right)$$

Ferner nimmt $n+s-1$ ab, $E\frac{m}{p_{n+s}}$ zu, wenn s abnimmt;

für $s = \mu$ ist aber $\qquad \frac{m}{p_{n+\mu}} \gtreqqless \sqrt{m}$

oder $\qquad \theta\left(\frac{m}{p_{n+\mu}}\right) \geqq n + \mu > n + \mu - 1.$

Folglich ist für $s \leqq \mu$

$$\pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1\,.$$

Die Function $\Phi\left(E\,\frac{m}{p_{n+s}},\, n+s-1\right)$ lässt sich in Folge der gewonnenen Grenzeinschliessung

$$\pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) > n + s - 1 \geqq \pi\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n+s}}}\right)$$

aus 4. berechnen. Man erhält

$$\Phi\left(E\,\frac{m}{p_{n+s}},\, n+s-1\right) = 1 + \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right) - (n+s-1)\,,$$

demnach aus (α)

$$\Phi\,(m,\, n+s) = \Phi\,(m,\, n+s-1) + n + s - 2 - \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

Setzt man hier für s die a Werthe

$$\mu,\ \mu - 1,\ \ldots\ \mu - (a-1) \qquad \{\mu \geqq a \geqq 0\}$$

und addirt, so folgt

$$\Phi\left(m,\, \pi(\sqrt{m})\right) = \Phi\,(m,\, \pi(\sqrt{m}) - a) + a\,\pi(\sqrt{m}) - \frac{a\,(a+3)}{2}$$
$$- \sum_{\mu+1-a}^{\mu} \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

Für die linke Seite hat man nun den aus 4. sich ergebenden Werth $1 + \pi(m) - \pi(\sqrt{m})$ einzuführen, dann erhält man

$$\Phi\,(m,\, \pi(\sqrt{m}) - a) = 1 + \pi(m) - (a+1)\,\pi(\sqrt{m}) + \frac{a\,(a+3)}{2}$$
$$+ \sum_{1+\pi(\sqrt{m}-a)}^{\pi(\sqrt{m})} \pi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\{\mu = \pi(\sqrt{m}) - \pi(\sqrt[3]{m}) \geqq a \geqq 0\}\,.$$

8. Setzt man, wie vorher

$$n + \mu = \pi(\sqrt{m}) = \pi_2$$
$$n \phantom{{}+\mu} = \pi(\sqrt[3]{m}) = \pi_3$$

und macht in Formel 7. $a = \mu$, so ergiebt sich die zur Berechnung der Primzahlenmenge im Intervall 1 bis m wichtige Gleichung

$$\pi(m) = \Phi\,(m,\, n) + n\,(\mu+1) + \frac{\mu\,(\mu-1)}{2} - 1 - \sum_{1}^{\mu} \pi\left(\frac{m}{p_{n+s}}\right).$$

9. Noch mag einer Formel gedacht werden, welche die Rechnungen wesentlich abkürzt.

Es sei

$$m = g \cdot p_1\, p_2\, p_3 \cdots p_n + r\,; \qquad \{g, r \; ganz\}$$

so wird

$$\Phi\,(m, n) = g \cdot (p_1 - 1)\,(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1) + \Phi\,(r, n).$$

Zur weiteren Abkürzung der Rechnungen construirte ich eine Tafel von $(2-1)\,(3-1)\,(5-1)\,(7-1)\,(11-1) = 480$ Werthen, aus welcher mittels 9. der Werth von $\Phi\,(m, 5)$ abgelesen werden konnte.

Ferner construirte ich eine Tafel für

$$\Phi\,(100m, 5n) \text{ bis } m = 800 \text{ und } n = 2 \text{ bis } 6.$$

Ausserdem benutzte ich ein Verzeichniss der 4500 ersten Primzahlen, sowie für weiter ausgedehnte Rechnungen eine selbstverfertigte*) Tafel für $\varphi\,(100n)$ bis $n = 2000$.

Folgende vier Beispiele werden die Methode erläutern.

Gesucht 1) $\varphi\,(20000)$
2) $\varphi\,(500000)$
3) $\varphi\,(1000000)$
4) $\varphi\,(10000000)$.

---

1) $m = 20000$

$$\begin{array}{l} n + \mu = 34 \\ n \qquad = 9 \end{array} \; ; \quad \mu = 25$$

$$\varphi\,(m) = \Phi\,(m, n) - 1 + 9\,.\,26 + \frac{25\,.\,24}{2} - \sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{10}^{34} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 1547$$

$$\varphi\,(m) = \Phi\,(m, 9) - 1014$$

$$\begin{array}{rlllll} \Phi\,(m, 9) = & \Phi\,(m, 8) & - \; \Phi\,(869, 8) & = \Phi(m, 8) & - & 148 \\ (m, 8) = & (m, 7) & - \; (1052, 7) & = (m, 7) & - & 189 \\ (m, 7) = & (m, 6) & - \; (1176, 6) & = (m, 6) & - & 224 \\ (m, 6) = & (m, 5) & - \; (1538, 5) & = (m, 5) & - & 320 \\ \hline \Phi\,(m, 9) = & \Phi\,(m, 5) & - & & & 881 \\ = & 4157 & - \; 881 & = 3276 & & \\ \varphi\,(m) = & 2262. & & & & \end{array}$$

---

*) Bei dieser Gelegenheit fand ich in dem dritten Abdruck der Stereotyp-Ausgabe von Hülsse, Sammlung mathematischer Tafeln folgende Fehler:

pag. 431 ist als Primzahl zu löschen 173279 = 241 . 719.
pag. 432 fehlt die Primzahl 177347.

2) $m = 500\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 126 \\ n = 22 \end{matrix}; \; \mu = 104$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 22) + 7665 - \sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{23}^{126} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 28543$$

Φ	(6329 , 21) =	805
	(6849 , 20) =	868
	(7042 , 19) =	901
	(7462 , 18) =	958
	(8196 , 17) =	1069
	(8474 , 16) =	1123
	(9433 , 15) =	1281
	(10638 , 14) =	1481
	(11627 , 13) =	1661
	(12195 , 12) =	1798
	(13513 , 11) =	2056
	(16129 , 10) =	2549
	(17241 , 9) =	2822
	(21739 , 8) =	3722
	(26315 , 7) =	4752
	(29411 , 6) =	5642
	(38461 , 5) =	7994
	Summa =	41482

$\Phi(m, 22) = \Phi(m, 5)$ — Summa

$\Phi(m, 5) = 103898$

Summa $= 41482$

$\Phi(m, 22) = 62416$

$\varphi(m) = 41538$

3) $m = 1\,000\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 168 \\ n = 25 \end{matrix}; \; \mu = 143.$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 25) + 13752 - \sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$$

$$\sum_{26}^{168} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 56014.$$

Φ	(10309 , 24) =	1245
	(11235 , 23) =	1355
	(12048 , 22) =	1461
	(12658 , 21) =	1554
	(13698 , 20) =	1701
	(14084 , 19) =	1776
	(14925 , 18) =	1911
	(16393 , 17) =	2144
	(16949 , 16) =	2262
	(18867 , 15) =	2576
	(21276 , 14) =	2983
	(23255 , 13) =	3357
	(24390 , 12) =	3618
	(27027 , 11) =	4137
	(32258 , 10) =	5099
	(34482 , 9) =	5647
	(43478 , 8) =	7435
	(52631 , 7) =	9503
	(58823 , 6) =	11284
	(76923 , 5) =	15984
	Summa =	87032

$\Phi(m, 5) = 207792$

$\Phi(m, 25) = 120760$

$\varphi(m) = 78498$

4) $m = 10\,000\,000$

$$\begin{matrix} n + \mu = 446 \\ n = 47 \end{matrix}; \; \mu = 399 \; ; \; \varphi(m) = \Phi(m, 47) + 98200 - \sum_{48}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right).$$

Φ	(47393 , 46) =	4844
	(50251 , 45) =	5128
	(50761 , 44) =	5185
	(51813 , 43) =	5304
	(52356 , 42) =	5375
	(99009 , 25) =	11711
	(103092 , 24) =	12359
	(112359 , 23) =	13669
	(120481 , 22) =	14877
	(126582 , 21) =	15872

$\Phi\,(55248\,,\,41)$	$=$	5685
$(55865\,,\,40)$	$=$	5772
$(57803\,,\,39)$	$=$	6007
$(59880\,,\,38)$	$=$	6249
$(61349\,,\,37)$	$=$	6433
$(63694\,,\,36)$	$=$	6725
$(66225\,,\,35)$	$=$	7035
$(67114\,,\,34)$	$=$	7182
$(71942\,,\,33)$	$=$	7769
$(72992\,,\,32)$	$=$	7957
$(76335\,,\,31)$	$=$	8399
$(78740\,,\,30)$	$=$	8749
$(88495\,,\,29)$	$=$	9956
$(91743\,,\,28)$	$=$	10452
$(93457\,,\,27)$	$=$	10780
$(97087\,,\,26)$	$=$	11345
S_1	$=$	152331

$\Phi\,(136986\,,\,20)$	$=$	17468
$(140845\,,\,19)$	$=$	18250
$(149253\,,\,18)$	$=$	19656
$(163934\,,\,17)$	$=$	21976
$(169491\,,\,16)$	$=$	23124
$(188679\,,\,15)$	$=$	26229
$(212765\,,\,14)$	$=$	30206
$(232558\,,\,13)$	$=$	33781
$(243902\,,\,12)$	$=$	36294
$(270270\,,\,11)$	$=$	41318
$(322580\,,\,10)$	$=$	50950
$(344827\,,\,9)$	$=$	56406
$(434782\,,\,8)$	$=$	74357
$(526315\,,\,7)$	$=$	95017
$(588235\,,\,6)$	$=$	112830
$(769230\,,\,5)$	$=$	159840
S_2	$=$	886190

$$\Phi\,(m\,,47) = \Phi\,(m,5) - (S_1 + S_2) = 2077921 - (S_1 + S_2) = 1039400$$

$$\sum_{48}^{130} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 220747\,;\quad \sum_{131}^{220} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 108791\,;\quad \sum_{221}^{310} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 69826$$

$$\sum_{311}^{400} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 51635\,;\quad \sum_{401}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 22021\,;\quad \sum_{48}^{446} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 473021$$

$$\varphi\,(m) = 664579.$$

Die Resultate der folgenden Zusammenstellung sind durch directe Zählung aus den Burckhardt'schen Tafeln und Berechnung nach der obigen Methode übereinstimmend gewonnen.

Es kommen vor bis zur

Chilias.	Primzahlen.	Chilias.	Primzahlen
100	9592	600	49098
200	17984	700	56543
300	25997	800	63951
400	33860	900	71274
500	41538	1000	78498

Hiernach sind die Burckhardt'schen Tafeln in der ersten Million hinsichtlich der vorhandenen Primzahlen correct.

Sobald ich die Berechnung der Primzahlenmenge in den ersten hundert Millionen vollendet habe, werde ich das Resultat bekannt machen.

Iserlohn, den 27. März 1869.