

## 9.

**Recherches\*) sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des ellipsoïdes**

(par Mr. Ch. Despeyroux à Paris, Docteur es-sciences.)

**Première Partie.****Surfaces isothermes.**

1. Lagrange, le premier, a introduit, dans le calcul de l'attraction des corps, une certaine fonction des coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  du point attiré, dont les coefficients différentiels du premier ordre pris successivement par rapport à  $x, y, z$ , expriment les composantes respectives suivant les axes des  $x$ , des  $y$ , des  $z$ , de l'attraction du corps sur ce point. Cette fonction exprime la somme des molécules du corps attirant, divisées chacune par la distance au point attiré. Elle a été tout récemment appelée par M. Gauss le *potentiel* du corps sur le point attiré.

Cette fonction jouit de cette propriété remarquable, que pour tout point extérieur au corps attirant, la somme des dérivées partielles du second ordre par rapport à chacune des variables  $x, y, z$ , est nulle; et qu'elle est égale à  $-4\pi\rho$ , si le point attiré fait partie de la masse,  $\rho$  étant la densité du corps en ce point et  $\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi en désignant par  $V$  la fonction dont nous parlons, on aura, si le point attiré ne fait pas partie du corps,

$$(A) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \text{ et}$$

$$(B) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

si le point en fait partie.

---

\*) L'auteur doit à la libéralité scientifique de M. Libri, l'honneur d'avoir exposé ces principes, le 16. Février 1844, au cours du calcul des probabilités dont cet illustre géomètre est chargé à la faculté des sciences de Paris.

Ces deux équations étant indépendantes de la forme des corps, et de la loi de leur densité, constituent des propriétés générales de l'attraction de la matière. La première a été découverte par Laplace, la seconde par M. Poisson.

Laplace a en outre démontré un second théorème général concernant une couche infiniment mince, jouissant de la propriété de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs: „L'attraction ou la répulsion de „cette couche sur un point quelconque de la surface externe, est dirigée suivant „la normale à cette surface en ce point, et égale à  $4\pi\rho\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  designant l'épaisseur „de la couche au point attiré ou repoussé.” Plus tard, ce théorème a été généralisé par M. Poisson: Ce savant géomètre l'a étendu à un système de couches en équilibre, leur action simultanée étant nulle sur tout point intérieur à l'une quelconque d'entr'elles.

Les deux propositions que nous venons de citer, devaient naturellement servir de base à une théorie mathématique de l'attraction fondée sur son mode d'action, en raison directe des masses et inverse du carré des distances; théorie d'autant plus importante que c'est cette loi qui préside aux phénomènes électriques et magnétiques.

Le savant géomètre M. Gauss a publié, dans ces dernières années, des théorèmes généraux sur les forces attractives fondés sur les équations (A) et (B). Ils feront désormais partie de la théorie dont nous parlons, qui pourrait être désignée sous le nom de *Théorie du potentiel*. M. Chasles a aussi publié dans les additions à la *connaissance des temps* pour l'année 1845, un mémoire sur le même sujet.

Si actuellement on designe par  $U$  la température d'un point quelconque  $M$  d'un corps homogène parvenu à l'état des températures permanentes, on sait que cette fonction des coordonnées  $x, y, z$  de ce point, est assujétie à l'équation aux différentielles partielles du second ordre,

$$(C) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

2. De l'identité des équations (A), (C), ou peut déduire plusieurs conséquences importantes. En effet: 1. si on connaît la loi de l'attraction d'un corps de forme déterminée sur un point extérieur, c'est-à-dire la fonction  $V$  dont les dérivées du premier ordre par rapport à  $x, y, z$  représentent les composantes de l'attraction de ce corps sur le point; cette fonction devra vérifier l'équation (A). Elle fera donc connaître la loi des températures permanentes

d'un corps solide homogène, terminé par une surface ayant un rapport déterminé avec celle du corps attirant. La réciproque est vraie.

2. Quand par un calcul direct fondé sur la nature géométrique de la surface d'un corps homogène, ou par tout autre moyen, on aura déterminé les composantes de l'attraction de ce corps sur un quelconque de ses points, il sera facile (la densité et par suite la quantité  $4\pi\rho$  de l'équation (B) étant constantes) d'en déduire une fonction  $U$  vérifiant l'équation (C): ce qui conduira à l'expression analytique des températures permanentes d'un corps solide homogène terminé par une surface analogue à celle du corps attirant.

3. Enfin les théorèmes généraux du potentiel fondés sur l'équation (A), doivent éclairer la théorie mathématique de la chaleur en ce qui concerne les températures permanentes, fournir des résultats nouveaux et simplifier, sous plusieurs rapports, des théories déjà connues.

Nous nous sommes proposé d'appliquer les considérations précédentes à la recherche des lois du mouvement de la chaleur, dans les corps solides homogènes terminés par des surfaces du deuxième degré, et parvenus à l'état des températures finales. Nous déduisons de ces lois la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes ou hétérogènes sur un point extérieur ou faisant partie de la masse.

Nous devons ajouter que la plupart des résultats auxquels nous sommes arrivés, étaient déjà connus; mais une méthode simple et rapide pour y parvenir, *déduite de la théorie du potentiel*, nous a paru utile. Elle rattache, en effet, à une même théorie (celle de l'attraction des corps) la théorie importante des *surfaces isothermes*, création toute moderne due à M. Lamé\*). Elle fournit d'ailleurs une *nouvelle solution, indépendante de la théorie de la chaleur*, du problème de l'attraction des ellipsoïdes; et peut offrir, comme nous le ferons voir dans une autre occasion, quelques ressources à la théorie si imparfaite du mouvement des liquides, dans le cas très étendu où ce mouvement dépend d'une équation semblable à l'équation (A).

3. Dans la théorie de la chaleur on appelle surface *isotherme*, toute surface dont tous les points sont à une même température  $V$ .

Représentons-nous actuellement un corps terminé par deux surfaces isothermes, l'une à la température constante  $T$ , et l'autre à la température  $T'$ ,

\*) Voir le tome V. des mémoires présentés par des savants étrangers à l'Académie des sciences de Paris.

et supposons que les causes qui entretiennent tous les points de ces surfaces à une température constante soient permanentes; le corps finira par atteindre lui même un état thermométrique permanent. La température  $V$  d'un quelconque de ses points satisfera à l'équation

$$(A) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

$x, y, z$  étant les coordonnées rectangulaires de ce point.

Il s'agit, quand on connaîtra la nature des surfaces qui limitent un corps parvenu à l'état des températures finales, de déterminer l'équation générale des surfaces isothermes de ce corps, et la fonction  $V$  exprimant la loi des températures de tous ses points.

Nous allons à cet effet, en reprenant un calcul de M. Sturm, construire une formule générale, renfermant une belle propriété des surfaces isothermes, quelle que soit d'ailleurs leur nature géométrique.

Soit,  $A$ , (Fig. 1.) une des surfaces isothermes d'un corps quelconque, et

$$F(x, y, z) = a$$

l'équation générale de ces surfaces dans ce corps;  $a$  sera un paramètre constant pour une même surface de cette nature, mais variera de l'une à l'autre; en sorte que les constantes qui peuvent se trouver dans la fonction  $F$  devront être considérées comme des fonction de ce paramètre.

La température  $V$  d'un point quelconque du corps est une fonction des coordonnées  $x, y, z$  de ce point. En y transportant la valeur d'une de ces variables,  $z$  par exemple, donnée par cette dernière équation en  $x, y$ , et  $a$ , les variables  $x, y$  devront disparaître de cette fonction, puisqu'elle doit conserver la même valeur pour tous les points de la surface isotherme  $A$ . Elle sera donc exprimée par une fonction du paramètre seulement,

$$1. \quad V = \varphi(a).$$

Cela posé: soient  $x, y, z$  les coordonnées rectangulaires d'un point  $M$  extérieur à cette surface  $A$ ;  $\xi, \eta, \zeta$  celles du point  $N$  pris dans l'enceinte que cette surface détermine, et  $r$  la distance de ces deux points, on aura

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

et par suite, comme il est facile de s'en assurer en effectuant simplement les calculs,

$$2. \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

En multipliant l'équation (A) par  $\frac{1}{r}$ , l'équation (2.) par  $V$ , et retranchant les deux produits l'un de l'autre, il viendra en intégrant,

$$3. \quad \iiint dx dy dz \left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{dx^2} - V \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{dy^2} - V \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{d^2 V}{dz^2} - V \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \right) \right\} = 0.$$

Nous prendrons pour limites de l'intégrale, d'une part la surface isotherme  $A$ ; d'autre part la surface même du corps, que nous supposerons être de dimensions infinies, afin que les conditions relatives à la surface n'altèrent point les lois générales de la diffusion de la chaleur dans l'intérieur des corps.

Le premier terme de cette équation, intégré par rapport à  $x$  en considérant  $y$  et  $z$  comme constants, fournit l'intégrale indéfinie

$$\iint dy dz \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{dx} - V \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right), \text{ et pour intégrale définie } \\ - \iint dy dz \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{dx} - V \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right) + \iint dy' dz' \left( \frac{1}{r'} \frac{dV'}{dx'} - V' \frac{d \frac{1}{r'}}{dx'} \right);$$

la première partie de cette somme se rapportant à la surface  $A$ , et la seconde à la surface extérieure du corps que nous supposerons d'abord finie. La ligne  $PP'$  étant parallèle à l'axe des  $x$ , les lettres non accentuées seront relatives au point  $P$  et les lettres accentuées au point  $P'$  appartenant à la surface extérieure du corps. On  $V'$  étant la température de ce dernier point, et  $\frac{dV'}{dx'}$  la composante, suivant l'axe des  $x$ , du flux de chaleur qui passe en ce point, ces quantités ne pourront jamais devenir infinies quelles que soient les dimensions de cette surface; et comme  $r'$  désigne la distance  $NP'$ ,  $r'$  augmentera avec l'éloignement du point  $P'$ , c'est-à-dire de la surface du corps. Donc, à cause de  $r'$  en dénominateur dans  $\frac{1}{r'} \frac{dV'}{dx'}$ , et de  $r'^2$  dans  $V' \frac{d \frac{1}{r'}}{dx'}$ , la seconde partie de l'intégrale définie sera nulle quand la surface extérieure du corps aura des dimensions infinies. En sorte que le premier terme de l'équation (3.) donne

$$- \iint dy dz \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{dx} - V \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right).$$

Si on désigne par  $d\omega$  l'élément superficiel de la surface  $A$ , au point  $P$ , et par  $\alpha$  l'angle que fait avec l'axe des  $x$  la normale  $PH$  à cette surface en ce point, l'expression précédente deviendra

$$+ \iint d\omega \cos \alpha \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{dx} - V \frac{d^1}{dx} \right);$$

cette double intégrale devant être étendue à tous les élémens de la surface  $A$ .

Il est évident que les deux autres termes de l'équation (3.) donneront des résultats analogues, et que si on désigne par  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles que fait cette normale  $PH$  avec les axes des  $y$  et des  $z$ , cette équation fournira la suivante

$$4. \quad 0 = \iint \frac{d\omega}{r} \left( \frac{dV}{dx} \cos \alpha + \frac{dV}{dy} \cos \beta + \frac{dV}{dz} \cos \gamma \right) \\ - \iint V d\omega \left( \frac{d^1}{dx} \cos \alpha + \frac{d^1}{dy} \cos \beta + \frac{d^1}{dz} \cos \gamma \right).$$

La composition et la décomposition du flux de chaleur suivent les mêmes lois que celles de la composition et décomposition des forces; donc

$$\frac{dV}{dx} \cos \alpha + \frac{dV}{dy} \cos \beta + \frac{dV}{dz} \cos \gamma$$

est la mesure de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'unité de surface au point  $P$ , dans le sens de la normale. Ainsi en désignant par  $dn$  l'épaisseur, dans la direction de la normale, d'une couche infiniment mince comprise entre deux surfaces isothermes dont les températures soient  $V$  et  $V + dV$ , on aura en observant que  $V$  est une fonction de  $\alpha$ ,

$$\frac{dV}{dx} \cos \alpha + \frac{dV}{dy} \cos \beta + \frac{dV}{dz} \cos \gamma = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn}.$$

En effectuant les différentiations indiquées, on obtiendra aussi en désignant par  $i$  l'angle formé par les droites  $NP$ ,  $HP$ ,

$$\frac{d^1}{dx} \cos \alpha + \frac{d^1}{dy} \cos \beta + \frac{d^1}{dz} \cos \gamma = + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos \gamma \right) \\ = + \frac{\cos i}{r^2}.$$

Donc, l'équation (4) se transforme en celle-ci

$$\iint \frac{d\omega}{r} \frac{da}{dn} = \iint V \frac{\cos i d\omega}{r^2}.$$

Or, M. Gauss a démontré que pour tout point  $N$  intérieur à une surface quelconque,  $\iint \frac{\cos i d\omega}{r^2}$  étendue à toute la surface, était égale à  $4\pi$  \*);

\*) En effet;  $d\omega$  étant l'élément superficiel dans la direction de la normale  $PH$ ,  $\cos i d\omega$  sera la grandeur de cet élément estimé dans la direction  $NP$ , situé à la distance du point  $N$  marquée par  $r$ ; et par conséquent  $\frac{\cos i d\omega}{r^2}$  sera la grandeur de cet élément à l'unité de distance de ce même point  $N$ . Ainsi  $\iint \frac{d\omega \cos i}{r^2}$  étendue à toute la surface  $A$  sera égale à la surface d'une sphère d'un rayon égal à l'unité de longueur.

donc, en observant que pour tous les points de la surface  $A$ ,  $\frac{dV}{da}$  et  $V$  ou  $\varphi(a)$  sont constants, l'équation précédente donnera

$$5. \quad \frac{dV}{da} \iint \frac{d\omega}{r} \frac{da}{dn} = 4\pi \varphi(a).$$

Enfin construisons sur la surface isotherme  $A$  une nouvelle couche différente de celle qui est comprise entre les deux surfaces isothermes infiniment voisines que nous avons déjà considérée, et dont l'épaisseur, dans la direction de la normale, a été désignée par  $dn$ . A cet effet, portons intérieurement à la surface  $A$ , à partir de cette surface et sur chacune de ses normales, un segment  $\varepsilon$  proportionnel à la valeur inverse de cette distance  $dn$ ; les extrémités de ces segments appartiendront à la surface interne de la nouvelle couche, et son épaisseur sera réglée par l'équation

$$6. \quad \varepsilon = \frac{da^2}{dn}.$$

Nous supposons cette couche composée de matière, douée du pouvoir attractif selon la loi naturelle en raison inverse du carré des distances, et nous considérerons l'action qu'une pareille couche pourrait produire sur le point intérieur  $N$ .

Remarquons à cet égard que l'équation (5.) devient, en y introduisant la valeur de  $\varepsilon$

$$7. \quad \iint \frac{\varepsilon d\omega}{r} = \frac{4\pi \varphi(a)}{\frac{dV}{da}} da.$$

Or le premier membre de cette équation est le *potentiel* de cette couche sur le point  $N$ ; il est donc, en vertu du second, indépendant des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  de ce point, et par suite l'action de cette couche sur ce point est nulle.

Il en résulte donc ce théorème: *Si, sur une surface isotherme quelconque, on construit, (comme il a été dit), une couche douée du pouvoir attractif suivant la loi naturelle, l'action de cette couche sur un point placé comme on voudra dans le vide qu'elle forme, sera nulle.*

Ce théorème établi: prenons une enveloppe homogène parvenue à l'état des températures permanentes et dont l'équation des parois soit

$$F(x, y, z) = a,$$

le paramètre  $a$ , variant de l'une à l'autre de ces parois. Ces deux surfaces seront par hypothèse isothermes et nous devons chercher quelles sont les relations qui doivent exister entre les coefficients  $b, c, \dots$  qui se trouvent dans la

fonction  $F$ , et le paramètre  $a$ , pour que l'équation précédente puisse être l'équation générale des surfaces isothermes dans cette enveloppe. Or l'équation (6.) fera connaître  $dn$ , épaisseur normale de deux surfaces isothermes infiniment voisines, quand on connaîtra  $\varepsilon$  ou réciproquement: Mais dans un grand nombre de cas il est facile de trouver la loi des épaisseurs de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface isotherme, c'est-à-dire  $\varepsilon$ , on en déduira donc l'expression générale de  $dn$ ; expression qui fera connaître la nature des relations dont nous parlons.

4. Comme application des principes précédens, prenons pour équation des parois de l'enveloppe, la suivante

$$8. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui appartient à un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une ou à deux nappes, selon que des trois quantités  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , toutes, dans l'équation précédente, sont positives, ou deux, ou une seule. Dans un quelconque de ces trois cas,  $b$  et  $c$  devront être des fonctions du paramètre  $a$ . Pour les déterminer, cherchons d'abord  $\varepsilon$  par la condition que la couche auxiliaire construite sur une des surfaces isothermes (8.), n'exerce aucune action sur tout point intérieur  $N$  (Fig. 2.).

Prenons ce point pour le centre d'une surface conique infiniment déliée; elle interceptera sur cette couche deux élémens de volume  $dv$ ,  $dv'$ ; et si on appelle  $r$ ,  $r'$  les distance  $NQ$ ,  $NQ'$ ,  $\rho$  la densité constante de la couche,  $\mu$  la masse du point attiré  $N$ , et  $f$  le coefficient de l'attraction universelle, les actions de chacun de ces deux élémens sur ce point seront,

$$\frac{\mu f \rho dv}{r^2}, \quad \frac{\mu f \rho dv'}{r'^2};$$

Mais en désignant par  $d\sigma$ ,  $d\sigma'$  les élémens superficiels répondants aux points  $P$ ,  $P'$  on aura en négligeant un infiniment petit du quatrième ordre,

$$dv = d\sigma dr, \quad dv' = d\sigma' dr'.$$

En considérant actuellement le point  $N$  comme le centre d'une sphère d'un rayon égal à l'unité de longueur, la surface conique déterminera sur cette sphère un élément constant de surface,  $\omega$ , et on aura  $\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2} = \omega$ . En sorte que les expressions précédentes se changeront en

$$\mu f \rho \omega dz, \quad \mu f \rho \omega dz'.$$

Donc, pour que ce point  $N$  demeure en équilibre sous l'action simultanée



de ces deux élémens, et par suite sous l'action de la couche entière, il faut et il suffit que  $dr = dr'$  pour toute direction de la droite  $PP'$ , quelle que soit d'ailleurs la position du point  $N$  dans le vide formé par la couche.

Or pour deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, la condition de  $dr = dr'$  ou de  $Pa = P'a'$  se trouve remplie; et M. Gauss a prouvé que sur une surface donnée ou ne pouvait former qu'une seule couche infiniment mince, ayant la propriété de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs. Nous concluons de là que la surface interne de la couche auxiliaire est un ellipsoïde semblable et semblablement placé à l'ellipsoïde extérieur.

5. Pour déterminer actuellement la nature des fonctions  $b$  et  $c$  de  $\alpha$ , nous déduirons de l'équation (6.),

$$\frac{\varepsilon}{da} = \frac{da}{dn}.$$

Or si on désigne par  $p$  (Fig. 3.) la longueur de la perpendiculaire  $oq$  abaissée du centre commun des deux ellipsoïdes semblables, sur le plan tangent en  $P$ ; en menant par ce centre un plan parallèle au plan tangent, la portion  $PH$  de la normale à la surface extérieure, comprise entre ces deux plans, sera égale à  $p$ , et les deux triangles semblables  $PIK$ ,  $PHo$  donneront

$$\frac{PI}{PH} = \frac{PK}{Po};$$

mais  $\frac{PI}{PH} = \frac{\varepsilon}{p}$ , et en vertu de la similitude des ellipsoïdes,  $\frac{PK}{Po} = \frac{da}{\alpha}$ ; donc

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{da}{\alpha} \quad \text{et par suite}$$

$$9. \quad \frac{da}{dn} = \frac{p}{\alpha}.$$

Menons par le point  $P$  une parallèle à l'axe des  $x$ , la portion de cette parallèle comprise entre la surface isotherme  $A$  et la surface isotherme infiniment voisine sera égale à  $dx$ , et on aura

$$dn = \cos \alpha . dx;$$

par des formules connues, on aura aussi

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos \alpha = \frac{px}{a^2};$$

donc l'équation (9.) se transformera en celle-ci,

$$a da \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) = \frac{x dx}{a^2}.$$

En observant que  $b$  et  $c$  sont des fonctions du paramètre  $a$  et que pour tous les points de la parallèle à l'axe des  $x$ , passant par le point  $P$ , les variables  $y$  et  $z$  demeurent constantes, l'équation (8.) donnera,

$$\frac{x dx}{a^2} = \left( \frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} \frac{db}{da} + \frac{z^2}{c^3} \frac{dc}{da} \right) da;$$

on aura donc

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{ay^2}{b^4} + \frac{az^2}{c^4} = \frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} \frac{db}{da} + \frac{z^2}{c^3} \frac{dc}{da}.$$

Cette équation devant être vérifiée pour tous les points d'une même surface isotherme (8.), elle donnera

$$\begin{aligned} \frac{db}{da} &= \frac{a}{b}, & \frac{dc}{da} &= \frac{a}{c} \quad \text{d'où} \\ b^2 &= a^2 - \lambda^2, & c^2 &= a^2 - \mu^2, \end{aligned}$$

$\lambda^2$ ,  $\mu^2$  étant deux constantes arbitraires. Ce qui démontre que les excentricités des deux sections principales de l'ellipsoïde doivent être constantes.

Le calcul précédent pouvant s'appliquer au cas de l'hyperboloïde à une nappe et à celui de l'hyperboloïde à deux nappes, on en conclut que:

1. Si on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe homogène, terminée par deux ellipsoïdes homofocaux, toutes les surfaces isothermes de ce corps seront des ellipsoïdes homofocaux aux premiers.
2. Si les surfaces limites de l'enveloppe étaient hyperboloïdes à une nappe homofocaux, toutes les surfaces isothermes appartiendraient à la même espèce.
3. Si les surfaces limites étaient deux hyperboloïdes à deux nappes homofocaux, toutes les surfaces isothermes appartiendraient à cette même espèce.
4. Enfin, d'après les transformations connues, pour passer des surfaces du deuxième degré, douées d'un centre, à celles qui en sont dépourvues, on pourrait encore énoncer deux autres théorèmes analogues; pour le cas où les parois de l'enveloppe seraient deux paraboloïdes elliptiques de mêmes distances focales, et pour celui où elles seraient deux paraboloïdes hyperbolique de mêmes distances focales.

Dans le premier cas, l'équation générale des surfaces isothermes est

$$(D) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a^2 - \mu^2} = 1;$$

dans le second

$$(E) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{\mu^2 - a_1^2} = 1;$$

dans le troisième

$$(F) \quad \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 - a_2^2} - \frac{z^2}{\mu^2 - a_2^2} = 1.$$

L'équation (E) exige que  $\lambda < \mu$ , ce qui est conforme à la nature du corps dont les parois sont représentées par cette équation.

Ces résultats avaient été exposés par M. Lamé dans sons mémoire sur les surfaces isothermes du deuxième degré, par une méthode toute différente de la nôtre.

Il est facile de prouver par les équations connues des normales ou par celles des plans tangens aux surfaces (D), (E), (F), que une surface quelconque de l'un de ces systèmes coupe normalement toutes les surfaces des deux autres, et que toutes les surfaces de deux de ces trois systèmes tracent sur l'une quelconque du troisième toutes ses lignes de courbure.

M. M. Ch. Dupin et Binet avaient déjà, chacun de son côté, fait connaître ces belles propriétés.

6. La loi des températures permanentes dans chacun de ces corps est facile à connaître: En effet, la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse une surface isotherme quelconque, doit être évidemment constante et indépendante de la position de cette surface dans le corps; et le flux de chaleur, en un quelconque de ces points, normal à cette surface.

Or  $K$  étant la conductibilité de la matière dont le corps est composé,

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn},$$

sera la mesure du flux de chaleur, et

$$\iint K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{du} d\omega,$$

celle de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse la surface isotherme. On devra donc poser

$$\iint K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} d\omega = C,$$

équation qui, en vertu des notations précédentes, et en observant que  $\frac{dV}{da}$  est constant pour toute l'étendue des limites de l'intégrale, qui sont celles de la surface isotherme que l'on considère, se changera en celle-ci,

$$10. \quad \frac{dV}{da} \iint \varepsilon d\omega = C \cdot da.$$

Le facteur de  $\frac{dV}{da}$  exprime le volume de la couche dont nous avons parlé à la fin du No. 3. Or pour une couche comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées, on trouve facilement,

$$\iint \varepsilon d\omega = 4\pi b c da;$$

donc, l'équation (10.) deviendra

$$b c \frac{dV}{da} = C_1,$$

d'où remplaçant  $b$  et  $c$  par leurs valeurs  $\sqrt{a^2 - \lambda^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - \mu^2}$ , et intégrant

$$(G) \quad V = C_1 \int_a^a \frac{da}{\sqrt{a^2 - \lambda^2} \sqrt{a^2 - \mu^2}} + C_2,$$

$C_1$ ,  $C_2$  désignant deux constantes arbitraires que l'on déterminera à l'aide des températures constantes  $T$ ,  $T'$  aux quelles sont entretenues les parois de l'enveloppe ellipsoïdale.

Cette fonction vérifie, comme il est aisé de s'en assurer, l'équation (A), elle donnera donc la loi des températures permanentes dans un corps homogène, terminé par deux ellipsoïdes homofocaux.

Les fonctions

$$V = C_1 \int_{a_1}^{a_1} \frac{da_1}{\sqrt{a_1^2 - \lambda^2} \sqrt{\mu^2 - a_1^2}} + C_2,$$

$$V = C_1 \int_{a_2}^{a_2} \frac{da_2}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2} \sqrt{\mu^2 - a_2^2}} + C_2$$

vérifieront aussi cette même équation (A), et donneront, la première, les températures permanentes dans le second corps dont nous avons parlé au No. 5.; la seconde, celles du troisième.

On pourrait exprimer, d'une manière très simple, au moyen des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, ces fonctions  $V$ ; on pourrait même dans deux cas particuliers, celui où  $\lambda = \mu$ , et celui où l'une de ces deux quantités est nulle, les exprimer à l'aide des fonctions ordinaires: Mais nous laisserons de côté tous ces détails, pour nous occuper exclusivement de l'enveloppe ellipsoïdale dont les applications sont importantes.

7. Nous allons d'abord vérifier par un calcul très-simple, que la quantité de chaleur qui passe à chaque instant par une quelconque des surfaces isothermes ellipsoïdales, est constante et indépendante de la position de cette surface dans le corps.

En effet l'expression

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} d\omega,$$

est la mesure de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'élément  $d\omega$  de la surface isotherme  $\mathcal{A}$ , dans une direction normale à cette surface: et on sait que pour toute surface de cette nature la chaleur ne peut avoir d'autre direction. En sorte que si on conçoit un petit cylindre ayant pour base rectangulaire les éléments des deux lignes de courbure tracées sur cette surface ellipsoïdale isotherme, et pour axe l'élément de la ligne normale à cette surface, représentée par les deux équations  $(E)$ ,  $(F)$ ; l'expression précédente sera la mesure de flux de chaleur qui entre dans ce cylindre.

Or dans l'ellipsoïde,

$$d\omega = \frac{c^2}{z} dx dy \cdot \frac{1}{p};$$

donc par l'équation (9.), et remplaçant  $\frac{dV}{da}$  par la valeur  $\frac{C_1}{bc}$ , l'expression du flux deviendra,

$$\frac{C_1 K}{ab} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

En intégrant cette expression différentielle entre les limites de la surface isotherme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on obtiendra

$$4\pi K C_1,$$

quantité indépendante, en effet, de la position de cette surface.

8. L'expression  $K \frac{dV}{dn}$  est, avons-nous dit, la mesure du flux de chaleur dans la direction propre de ce fluide pour les surfaces isothermes.

Or

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} \text{ et } \frac{da}{dn} = \frac{p}{a},$$

donc

$$K \frac{dV}{dn} = K \frac{dV}{da} \cdot \frac{p}{a}.$$

*Ainsi dans toute surface ellipsoïdale, ce flux est proportionnel en chaque point à la perpendiculaire abaissée de son centre, sur le plan tangent à cette surface en ce point.*

En sorte qu'aux extrémités des diamètres principaux, les flux de chaleur sont proportionnels aux longueurs de ces diamètres; ce qu'avait démontré M. Lamé.

9. Reprenant le cylindre infiniment étroit dont les arêtes carvilignes sont les trajectoires orthogonales aux surfaces isothermes, et appelant  $M, M'$  les points par lesquels passent ses deux bases  $d\omega, d\omega'$  sur deux des surfaces isothermes ( $D$ ) situées à une distance quelconque l'une de l'autre,

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} d\omega, \quad K \frac{dV'}{da'} \cdot \frac{da'}{dn'} d\omega',$$

seront la mesure des quantités de chaleur qui, dans l'unité de temps, traversent ces deux bases  $d\omega, d\omega'$ .

Or d'après ce qui a été dit, No. 7., et se rappelant que

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{z}{c},$$

ces expressions pourront être mises sous la forme

$$\frac{C_1 K}{ab} \cdot \frac{c}{z} dx dy, \quad \frac{C_1 K}{a'b'} \cdot \frac{c'}{z'} dx' dy',$$

$a', b', c'$  étant les demi-axes du second ellipsoïde et  $x', y', z'$  les coordonnées du point  $M'$ .

Les points  $M, M'$  étant situés sur une même trajectoire orthogonale ayant pour équations ( $E$ ), ( $F$ ), on trouvera aisément que les coordonnées de ces deux points vérifient les équations

$$\frac{x'}{a'} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{y}{b}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{z}{c};$$

d'où  $dx' dy' = \frac{a'b'}{ab} dx dy$ , et par suite

$$\frac{C_1 K}{ab} \cdot \frac{c}{z} dx dy = \frac{C_1 K}{a'b'} \cdot \frac{c'}{z'} dx' dy'.$$

Donc, les quantités de chaleur qui, dans l'unité de temps, traversent ces deux élémens sont égales entr'elles: c'est-à-dire que le flux de chaleur qui entre dans le cylindre infiniment étroit, par la base inférieure  $d\omega$ , traverse ce cylindre et sort par la base supérieure  $d\omega'$  sans avoir éprouvé la moindre altération.

Ce résultat était d'ailleurs évident, attendu que la chaleur qui se propage dans ce cylindre n'éprouve aucune perte par les parois latérales, qu'à un élément quelconque  $d\omega$  de la première surface en correspond un seul  $d\omega'$  sur la seconde, et qu'enfin la température sur chaque surface est toujours la même en tous les points.

Les points  $M, M'$  sont appelés *correspondants*.

Ce qui précède suffit pour se faire une idée nette de la propagation de la chaleur dans une enveloppe solide homogène, terminée par deux ellipsoïdes homofocaux entretenus chacun à des températures constantes.

10. Le procédé qui nous a servi à trouver les résultats précédents, a tous les caractères d'une méthode analytique. Cependant si pour les corps particuliers que nous avons considérés dans cette première partie, on voulait prendre pour données géométriques, les théorèmes que nous avons énoncés à la fin du No. 5., théorèmes qui, comme nous l'avons dit, peuvent se démontrer immédiatement en partant des équations  $(D)$ ,  $(E)$ ,  $(F)$ ; on arriverait promptement aux résultats précédents relatifs aux surfaces isothermes, pour les corps terminés par des surfaces du deuxième degré.

Prenons, pour exemple, le cas de l'enveloppe terminée par deux ellipsoïdes homofocaux, et démontrons que toutes les surfaces isothermes de cette enveloppe sont des ellipsoïdes homofocaux aux premiers, c'est-à-dire que l'équation générale de ces surfaces est

$$(D) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a^2 - \mu^2} = 1.$$

Toutes les lignes représentées par les équations  $(E)$ ,  $(F)$ ,  $a_1$  et  $a_2$  passant par divers états de grandeurs, sont orthogonales aux différentes surfaces  $(D)$ . Il est donc probable que ces lignes représentent la direction de la chaleur dans l'enveloppe ellipsoïdale, et que par suite les surfaces isothermes de ce corps sont données par l'équation  $(D)$ .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'en partant de cette équation  $(D)$  on puisse trouver une fonction  $V$  en  $a$  vérifiant l'équation générale  $(A)$ , et telle que la quantité de chaleur qui passe à chaque instant à travers l'une des surfaces  $(D)$  soit constante et indépendante de la position de cette surface dans l'enveloppe.

Or, la valeur du flux de chaleur qui, dans l'unité de temps, traverse l'élément  $d\omega$ , est

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} d\omega;$$

d'après ce qu'on a vu, No. 5.,

$dn = \cos \alpha dx$ ,  $\cos \alpha = \frac{px}{a^2}$ , d'où  $dn = \frac{px dx}{a^2}$ : Mais l'équation  $(D)$  donne

$$\frac{x dx}{a^3} = \left( \frac{x^2}{a^3} + a \frac{y^2}{(a^2 - \lambda^2)^2} + a \frac{z^2}{(a^2 - \mu^2)^2} \right) da = \frac{ada}{p^2}$$

donc,  $\frac{da}{dn} = \frac{p}{a}$ ; et par suite, en ayant égard au calcul du No. 7., on aura

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dn} d\omega = K \frac{dV}{da} \frac{c}{a} \cdot \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Ainsi la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, toute la surface isotherme ( $D$ ) répondant au paramètre  $a$ , sera égale à

$$K \frac{dV}{da} \cdot \frac{c}{a} \iint \frac{dxdy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 4\pi K \frac{dV}{da} \cdot bc.$$

Pour que cette quantité soit constante et indépendante de la position de la surface isotherme, on devra donc poser

$$\frac{dV}{da} bc = C_1; \quad \text{d'où}$$

$$V = C_1 \int_a^a \frac{da}{\sqrt{a^2 - \lambda^2} \sqrt{a^2 - \mu^2}} + C_2,$$

expression qui, comme on peut s'en assurer, vérifie l'équation générale ( $A$ ).

On en déduirait les théorèmes des No. 8. et suivants; et on aurait ainsi une démonstration géométrique des résultats précédemment obtenus.

## Deuxième Partie.

### Attraction des Ellipsoïdes.

11. Dans la théorie de la chaleur, on appelle surface isotherme, toute surface où la température est constante en tous les points; dans celle de l'attraction des corps, on donne le nom de surface de *niveau* à toute surface pour tous les points de laquelle le *potentiel* de ces corps est constant.

De même qu'en un quelconque des points d'une surface isotherme, le flux de chaleur a une direction normale à cette surface; de même aussi l'attraction ou la repulsion d'un corps ou système de corps, sur un point quelconque d'une de ses surfaces de niveau, est normale à cette surface en ce point.

Représentons-nous une enveloppe dont les parois soient entretenues à des températures constantes et dont l'équation des surfaces isothermes soit



$$11. \quad F(x, y, z) = a,$$

$a$  étant un paramètre variable de l'une à l'autre de ces surfaces. La loi des températures permanentes sera exprimée par une fonction de  $a$ ,  $\varphi(a)$ , satisfaisant à l'équation ( $\mathcal{A}$ ).

Prenons actuellement un système de masses ayant pour une de ses surfaces de niveau l'une des surfaces (11.). Le potentiel de ces masses sur un des points de cette surface étant une fonction des coordonnées  $x, y, z$  de ce point, et devant être constant pour tous les points de cette surface, sera une fonction de  $a$ : en le désignant par  $V'$  on aura donc

$$V' = \psi(a).$$

Cette fonction  $V'$  variant avec le paramètre  $a$  qui indique la position de la surface considérée, et conservant la même valeur pour tous les points d'une quelconque des surfaces (11.); il s'ensuit que celles-ci seront toutes des surfaces de niveau de ce système de masses.

Cette fonction  $V'$  devra satisfaire à une équation semblable à l'équation générale ( $\mathcal{A}$ ), elle ne pourra donc différer de la fonction  $\varphi(a)$  qui exprime la loi des températures, que d'une quantité constante.

De plus nous avons démontré, No. 3., que si sur une surface isotherme on construit, selon la règle qui en a été donnée, une couche auxiliaire infiniment mince douée du pouvoir attractif, son action sur un point quelconque pris dans l'enceinte qu'elle détermine, est nulle.

Ce théorème s'appliquera donc également à une surface de niveau relative à l'attraction. On pourrait, d'ailleurs, l'établir par un calcul identique à celui du No. 3.

Enfin démontrons qu'on peut prendre pour le système de masses dont nous parlons, la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau. Pour cela, il suffira évidemment d'après ce qui vient d'être dit que le potentiel de cette couche sur tous les points de la surface externe soit constant, c'est-à-dire que cette surface soit une surface de niveau relative à l'action de cette couche.

Or, cette couche jouit de la propriété caractéristique de n'exercer aucune action sur les points qui lui sont intérieurs; donc son action sur le point  $I$  (Fig. 1.) sera nulle. Menons par ce point un plan  $CD$  tangent à la surface interne de cette couche; son action sur ce point proviendra de la résultante des actions exercées par les portions  $CKD$ ,  $CPD$ , sur ce même point; donc les forces qui résulteront de ces actions partielles seront égales, de même direction et de sens opposés. La première de ces forces pourra être prise pour celle

qui résulterait de l'action de cette même portion  $CKD$  sur le point  $P$ ; car pour déduire les composantes de la dernière de ces forces, de celles de la première, il suffirait de changer les coordonnées du point  $I$  en celles du point  $P$  qui n'en diffèrent que par des infiniment petits du premier ordre, la couche étant infiniment mince. Or ce changement ne pourra amener dans les termes de ces composantes que des quantités d'un ordre infiniment petit par rapport à celui de ces termes, elles pourront donc être négligées. Par une raison semblable, la seconde force sollicitant le point  $I$  et provenant de l'action de  $CPD$  sur ce point, sera égale à celle qui résulterait de l'action de la même portion sur le point  $P$ . Mais l'attraction de la couche sur ce dernier, est égale à la résultante des actions exercées par les portions  $CKD$ ,  $CPD$  sur ce point; il se trouvera donc sollicité par deux forces de même direction, de même sens et égales à celle qui provient de l'attraction de la partie  $CPD$  sur ce point. Or la couche étant infiniment mince, on pourra assimiler l'action de la calotte  $CPD$  sur le point  $P$  à celle d'une calotte sphérique sur ce même point; dès lors cette dernière force sera dirigée suivant la normale  $PH$  à cette surface, et le point  $P$  sollicité par une force double de même direction. Donc la surface externe de cette couche est une surface de niveau relative à son attraction \*).

12. Ce qui précède renferme implicitement une solution complète de l'attraction des ellipsoïdes, homogènes ou hétérogènes, sur des points extérieurs ou faisant partie de ces corps.

Prenons, en effet, pour surfaces isothermes, les ellipsoïdes homofocaux dont l'équation générale est ( $D$ ); la couche auxiliaire du numéro précédent sera alors, No. 4., comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés; et ses surfaces de niveau seront, No. 11., des ellipsoïdes homofocaux à celui de sa surface externe.

Donc, si par le point attiré, pris en dehors de la couche, on fait passer un ellipsoïde homofocal à celui de sa surface externe (et on ne peut en faire passer qu'un seul) l'action de cette couche sur ce point sera dirigée suivant la normale, en ce point, à cette surface de niveau relative à cette couche.

De là ce théorème connu: *L'action qu'une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées*

---

\*) On déduirait de là par un calcul très-simple, le théorème de Laplace, énoncé au No. 1., et ce même théorème généralisé par M. Poisson.

*exerce sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale, en ce point, à l'ellipsoïde qui passe par le point attiré, et qui est homofocal à celui de la surface externe de la couche.*

13. En vertu du No. 8, les attractions de cette couche sur les différents points de cet ellipsoïde homofocal passant par le point attiré, sont proportionnelles aux distances des plans tangens à cet ellipsoïde en ces points, au centre de la couche. Elles seront donc aux extrémités des diamètres principaux proportionnelles aux longueurs de ces diamètres.

14. Enfin d'après le No. 9., les attractions de cette couche sur deux élémens *correspondants* sont égales; et comme à un élément quelconque pris sur l'une des surfaces de niveau de la couche, répond un seul élément *correspondant* sur toute autre surface de niveau relative à la même couche, il s'ensuit que; *la somme des actions que cette couche exerce sur tous les points d'une quelconque de ses surfaces de niveau, est constante.*

Ce théorème aurait d'ailleurs pu se déduire des No. 7 et 11.

15. L'expression analytique  $v$  du potentiel de la couche sur le point attiré extérieur à cette couche, est facile à calculer. Car elle ne diffère que d'une quantité constante, de celle de températures permanentes de l'enveloppe ellipsoïdale terminée par deux surfaces de niveau relatives à cette couche.

Or, nous avons trouvé pour cette dernière, No. 6.,

$$v = C_1 \int_a^a \frac{da}{\sqrt{a^2 - \lambda^2} \sqrt{a^2 - \mu^2}} + C_2,$$

$a$  étant le demi-diamètre principal de l'ellipsoïde homofocal passant par le point attiré. En désignant donc par  $a_1, b_1, c_1$  les longueurs des demi-axes principaux de cet ellipsoïde, et par  $a, b, c$  celles qui se rapportant à l'ellipsoïde externe de la couche, on pourra poser

$$(H) \quad v = 4\pi\varrho f b c d a \int_a^{a_1} \frac{da_1}{\sqrt{a_1^2 - \lambda^2} \sqrt{a_1^2 - \mu^2}};$$

$\lambda^2$  étant égal à  $a_1^2 - b_1^2$ ,  $\mu^2$  à  $a_1^2 - c_1^2$ , et ayant

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2, \quad a_1^2 - c_1^2 = a^2 - c^2.$$

La constante  $C_1$  a été remplacée par  $4\pi\varrho f b c d a$ ,  $\varrho$  étant la densité de la couche,  $4\pi b c d a$  son volume, et  $f$  le coefficient de l'attraction universelle.

La composante, suivant l'axe des  $x$ , de l'attraction de cette couche sur le point attiré dont les coordonnées sont  $x, y, z$ , sera

$$(I) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{da_1} \frac{da_1}{dx} = 4\pi\varrho f b c d a \cdot \frac{p^2 x}{a_1^3 b_1 c_1},$$

en observant que  $\frac{da_1}{dn} = \frac{p^2 x}{a_1^3}$  (Voyez le No. 5.) et que  $b_1 = \sqrt{a_1^2 - \lambda^2}$ ,  $c_1 = \sqrt{a_1^2 - \mu^2}$ :

Mais  $\cos \alpha = \frac{px}{a_1^2}$ , donc

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi \rho f b c d a \frac{p}{a_1 b_1 c_1} \cos \alpha.$$

On aurait des expressions analogues pour les composantes  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dz}$ , de l'attraction de cette couche sur le même point, suivant l'axe des  $y$  et l'axe des  $z$ .

16. La formule (I) ramène aux quadratures le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde, homogène ou hétérogène, sur les points extérieurs.

Dans l'un et l'autre cas, nous décomposerons, en effet, l'ellipsoïde en couches infiniment minces, chacun d'elles étant comprise entre deux ellipsoïdes semblables à celui qui termine le corps, et semblablement placés.

Considérons d'abord le cas de l'homogénéité:

Soient  $A, B, C$ , les longueurs des demi-axes de la surface ellipsoïdale qui termine le corps;  $a, b, c$ , celles des demi-axes de l'ellipsoïde externe d'une de ses couches; on aura

$$(12) \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Si l'on désigne par  $a_1, b_1, c_1$  les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde auxiliaire passant par le point attiré et homofocal à l'ellipsoïde externe de la couche, on aura pour déterminer  $a_1$  et par suite  $b_1$  et  $c_1$ , les équations

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + (b^2 - a^2)} + \frac{z^2}{a_1^2 + (c^2 - a^2)} = 1,$$

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 + (b^2 - a^2)}, \quad c_1 = \sqrt{a_1^2 + (c^2 - a^2)},$$

$x, y, z$  étant les coordonnées du point attiré.

Cela posé: la formule (I) donne l'expression de la composante, suivant l'axe des  $x$ , de l'attraction de cette couche sur le point  $x, y, z$ ; il s'ensuit donc qu'en appelant  $\frac{dV}{dx}$  celle qui se rapporte à la même direction et au corps tout entier supposé homogène,

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi \rho f x \int_0^A p^2 \frac{b c d a}{a_1^3 b_1 c_1}.$$

Les relations (12) convertissent l'équation (13) en celle-ci

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + \left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{a_1^2 + \left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = a^2$$

ou

$$(14) \quad \frac{\frac{a^2}{a_1^2} x^2}{A^2} + \frac{\frac{a^2}{a_1^2} y^2}{A^2 + \frac{a^2}{a_1^2} (B^2 - A^2)} + \frac{\frac{a^2}{a_1^2} z^2}{A^2 + \frac{a^2}{a_1^2} (C^2 - A^2)} = \frac{a^2}{A^2}$$

qui détermine  $a_1$  en fonction de  $a$ . On en déduit

$$da = \frac{1}{p^2} a_1^3 d \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \text{partant}$$

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi \rho f x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{b c d \cdot \frac{a}{a_1}}{b_1 c_1},$$

$A_1$  désignant la longueur du demi-axe, dirigé suivant l'axe des  $x$ , de l'ellipsoïde passant par le point attiré et homofocal à celui qui termine le corps attirant.

Cette dernière expression peut successivement s'écrire,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 4\pi \rho f x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{b c d \cdot \frac{a}{a_1}}{\sqrt{a_1^2 + (b^2 - a^2)} \sqrt{a_1^2 + (c^2 - a^2)}} \\ &= 4\pi \rho f x B C \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{\frac{a^2}{A^2} d \cdot \frac{a}{a_1}}{\sqrt{a_1^2 + a^2 \left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} \sqrt{a_1^2 + a^2 \left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)}} \\ &= 4\pi \rho f x B C \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{\frac{a^2}{a_1^2} d \cdot \frac{a}{a_1}}{\sqrt{A^2 + \frac{a^2}{a_1^2} (B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + \frac{a^2}{a_1^2} (C^2 - A^2)}} \end{aligned}$$

ou enfin, en posant  $\frac{a}{a_1} = u$ ,

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi \rho f x B C \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2 (B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + u^2 (C^2 - A^2)}}$$

ce qui est la formule connue;  $A_1$  étant donné par l'équation

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A_1^2 + (B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2 + (C^2 - A^2)} = 1.$$

17. Considérons actuellement le cas de l'ellipsoïde hétérogène, et supposons que chacune des couches infiniment minces dont il est composé soit homogène, la densité variant de l'une à l'autre de ces couches suivant une loi exprimée par une fonction du demi-axe principal  $a$  de la surface externe de chacune d'elles. On pourra encore, dans ce cas général, ramener aux quadratures la détermination des composantes, suivant les axes des coordonnées,

de l'attraction de ce corps sur les points extérieurs.

Car ayant posé

$$\varrho = F(a),$$

l'équation (14.) donnera

$$\varrho = F \left( Au \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}} \right),$$

et par suite

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi x f B C \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 F(Au \sqrt{\dots}) du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

On obtiendrait des expressions analogues pour les deux autres composantes,

$$\frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz}.$$

On peut remarquer qu'en prenant la densité  $\varrho$  en raison inverse du demi-axe  $a$  comme l'ont supposé plusieurs géomètres, l'expression précédente s'obtient sous forme finie par les premières règles du calcul intégral; mais nous ne saurions nous arrêter à ces détails. Il est cependant remarquable qu'on puisse dans certains cas, obtenir sous forme finie, les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène, tandis que pour le cas des ellipsoïdes homogènes il faut recourir aux fonctions elliptiques.

18. Si le point attiré était situé à la surface du corps, on aurait  $A_1 = A$  et par conséquent

$$\begin{aligned} (K) \quad \frac{dV}{dx} &= 4\pi \varrho f B C x \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}} \\ &= 4\pi \varrho f x \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + u^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} \sqrt{1 + u^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)}}. \end{aligned}$$

19. Enfin, si le point attiré faisait partie du corps, on ferait passer par ce point un ellipsoïde  $a, b, c$  semblable à celui qui termine le corps. L'action de la couche comprise entre ces deux surfaces semblables, sur ce point, serait nulle; et celle de la partie restante du corps aurait pour composante, suivant l'axe des  $x$ , la même expression (K), en vertu des équations

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

On obtiendrait les deux autres composantes  $\frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz}$ , par un simple échange de lettres.

Elles amèneraient donc de nouvelles quadratures à effectuer; mais par

un changement de variable indépendante dû à Laplace (voir le 3. livre de la mécanique céleste) on peut faire dépendre le calcul des trois composantes, de la détermination d'une seule intégrale.

M. *Jacobi* a aussi présenté les trois composantes de l'attraction des ellipsoïdes sur les points intérieurs sous une forme très élégante.

Pour les obtenir, cet habile géomètre pose

$$u = \frac{A}{\sqrt{\alpha + A^2}},$$

$\alpha$  étant la nouvelle variable indépendante; et on trouve facilement

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{x}{A^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}},$$

$$\frac{dV}{dy} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{y}{B^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}},$$

$$\frac{dV}{dz} = 2\pi\varrho f \cdot \frac{z}{C^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{C^2}\right)}}.$$

20. Le beau théorème de M. *Ivory* sur le rapport de l'attraction exercée par deux corps terminés par des surfaces ellipsoïdales et homofocales entr'elles, sur deux points correspondants situés sur les surfaces respectives de ces deux corps, peut se déduire des formules précédentes.

En effet, soient  $A, B, C$  les longueurs des demi-axes de l'une de ces surfaces;  $A', B', C'$  celles de la deuxième que nous supposons intérieure à la première et concentrique;  $x', y', z'$  les coordonnées d'un point  $M'$  placé sur la première, et  $x, y, z$  celles d'un autre point  $M$  placé sur la seconde.

Les surfaces étant homofocales et les points  $M, M'$  étant correspondants, on aura

$$B^2 - A^2 = B'^2 - A'^2, \quad C^2 - A^2 = C'^2 - A'^2,$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{A}{A'}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{B}{B'}, \quad \frac{z'}{z} = \frac{C}{C'}.$$

Désignons actuellement par  $X$  la composante, suivant l'axe des  $x$ , de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point  $M$  intérieur à ce corps; et par  $X'$  celle qui est relative au second ellipsoïde sur le point extérieur  $M'$ , et suivant la même direction.

On aura par les formules des No. 16. et 18.,

$$X = 4\pi \rho f B C x \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2 (B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + u^2 (C^2 - A^2)}},$$

$$X' = 4\pi \rho f B' C' x' \int_0^{\frac{A'}{A}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A'^2 + u^2 (B^2 - A^2)} \sqrt{A'^2 + u^2 (C^2 - A^2)}}.$$

Changeons de variable indépendante, à l'aide de l'équation  $u = \frac{A'}{A} v$ ; la dernière formule se transformera, en ayant égard aux relations précédentes, en

$$X' = 4\pi \rho f B' C' x' \int_0^1 \frac{v^2 dv}{\sqrt{A^2 + v^2 (B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + v^2 (C^2 - A^2)}},$$

donc

$$\frac{X}{X'} = \frac{BC}{B'C'}; \text{ et par suite}$$

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \frac{Z}{Z'} = \frac{AB}{A'B'};$$

$Y, Y', Z, Z'$ , désignant les composantes suivant les axes des  $y$  et des  $z$ , de l'attraction de ces deux corps sur les mêmes points  $M, M'$ .

Ces trois dernières égalités démontrent le théorème de M. Ivory.

Ce théorème réduisait évidemment le calcul de l'attraction des ellipsoïdes homogènes sur les points intérieurs et sur les points extérieurs, seulement à l'un ou l'autre de ces deux cas. Or le premier peut être traité d'une manière directe par un calcul fondé sur la nature particulière de la surface qui termine ces corps; on avait donc ainsi une théorie complète de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. Mais il restait encore à examiner le cas des ellipsoïdes hétérogènes.

21. L'illustre auteur de la mécanique céleste se servait d'un théorème différent de celui de M. Ivory, pour passer de l'attraction des ellipsoïdes homogènes sur les points intérieurs, au cas des points extérieurs.

La démonstration de ce théorème est facile par ce qui précède. La formule (H), du No. 15., fait voir, en effet, que le potentiel d'une couche sur un point extérieur est proportionnel à son volume  $4\pi b c d a$ , lorsque  $a_1$ , demi-axe de l'ellipsoïde auxiliaire passant par le point attiré et homofocal à celui de la surface externe de la couche, est constant.

Donc, si on considère le potentiel pour le même point, d'une nouvelle couche terminée à l'extérieur par un ellipsoïde homofocal à celui de la surface externe de la première et à l'intérieur par un ellipsoïde semblable; on aura, en désignant par  $v'$  ce potentiel et par  $4\pi b' c' d a'$  le volume de cette seconde couche,



$$15. \quad \frac{v}{v'} = \frac{b c d a}{b' c' d a'}.$$

Ainsi: les potentiels de deux couches infiniment minces, comprises chacune entre deux ellipsoïdes semblables et dont les surfaces externes sont homofocales, sont pour un même point extérieur à ces couches, proportionnels à leurs volumes: les actions de ces deux couches sur ce même point, ont une même direction qui est celle de la normale, en ce point, de l'ellipsoïde qui y passe et qui est homofocal à leur surfaces externes.

Cette dernière équation (15.) peut aisément s'étendre à deux corps homogènes terminés par des ellipsoïdes homofocaux, en décomposant chacun de ces corps en couches infiniment minces dont chacune serait comprise entre deux ellipsoïdes semblables.

En désignant donc par  $V$ ,  $V'$  les potentiels de ces deux corps sur un même point extérieur; par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les demi-axes principaux du premier, et par  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ceux du second, on aura l'équation

$$V = \frac{ABC}{A'B'C'} V',$$

qui fera connaître  $V$  par  $V'$  ou réciproquement.

Au reste, cette dernière équation pourrait se démontrer par la formule du No. 16., sans qu'on eût besoin de passer par la décomposition de chaque corps en couches infiniment minces.

On a, en effet, par cette formule

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi\rho f B c x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}$$

pour le premier ellipsoïde, et

$$\frac{dV'}{dx} = 4\pi\rho f B' C' x \int_0^{\frac{A'}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A'^2 + u^2(B'^2 - A'^2)} \sqrt{A'^2 + u^2(C'^2 - A'^2)}}$$

pour le second;  $A_1$  ayant évidemment la même valeur pour les deux.

Or, en posant  $u = \frac{A'}{A} v$ , cette dernière formule se transforme immédiatement en celle-ci

$$\frac{dV'}{dx} = 4\pi\rho f \frac{A'B'C'}{A} x \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{v^2 dv}{\sqrt{A^2 + v^2(B^2 - A^2)} \sqrt{A^2 + v^2(C^2 - A^2)}}$$

donc

$$\frac{dV}{dx} = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot \frac{dV'}{dx}, \text{ partant}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot \frac{dV'}{dy},$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot \frac{dV'}{dz}$$

et par suite

$$V = \frac{ABC}{A'B'C'} \cdot V'.$$

22. Les beaux travaux de M. *Poisson* \*) sur l'attraction des ellipsoïdes dispensaient d'avoir recours à l'un ou l'autre de ces deux théorèmes. Ce Géomètre avait, par un calcul direct fondé sur la nature des surfaces ellipsoïdales, ramené aux quadratures les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. Après avoir vaincu cette première difficulté de calcul qui avait pendant si long-temps résisté aux efforts des plus grands géomètres, ce célèbre analyste avait donné l'expression de l'attraction, sur un point extérieur, d'une couche infiniment mince comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées, et en avait déduit l'attraction d'une ellipsoïde hétérogène.

Cette savaute analyse constituait donc une théorie complète de l'attraction des ellipsoïdes, tant homogènes qu'hétérogènes, sur des points extérieurs ou faisant partie de la masse: mais elle avait ses difficultés.

Elles avaient été, il est vrai, éludées, comme on le voit par les travaux de M. *Chasles*; mais les méthodes employées par ce géomètre, quoique fort élégantes, reposaient sur des propositions de géométrie assez épineuses et supposaient qu'on devait considérer, tantôt une couche comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, tantôt des ellipsoïdes homofocaux.

Nous avons pensé qu'il était utile d'exposer un procédé simple, fondé sur des principes généraux, dont la marche ne pût être éclairé par les résultats supposés *inconnus* auxquels il conduit dans les applications, et qui fût susceptible d'être appliqué à d'autres corps.

Dans une autre occasion nous ferons connaître les résultats qu'il offre pour les corps homogènes ou hétérogènes, terminés par quelques surfaces de révolution; soit qu'il s'agisse de la nature des surfaces isothermes de ces corps

---

\*) Voir les mémoires de l'académie des sciences de Paris, Tom XIII.

dans leur état d'équilibre de température; soit qu'on veuille étudier l'attraction de ces corps sur des points intérieurs ou extérieurs à leurs masses.

23. Pour ne rien laisser à désirer sur la théorie importante de l'attraction des ellipsoïdes, nous allons la reprendre et en donner une démonstration indépendante de la considération des surfaces isothermes. Elle sera uniquement basée sur des théorèmes généraux déduits de la théorie du potentiel.

24. Soit

$$F(x, y, z) = a$$

l'une des surfaces de niveau d'un corps ou système de corps. Le potentiel  $V$  de ce système sur un des points de cette surface étant fonction des coordonnées de ce point, et devant conserver la même valeur pour tous les points de cette surface, sera une certaine fonction du paramètre  $a$

$$V = \varphi(a).$$

Un calcul identique à celui du No. 3. démontrera que: *si, sur une surface de niveau quelconque, on construit (comme il a été dit dans ce numéro) une couche douée du pouvoir attractif suivant la loi naturelle, l'action de cette couche sur un point placé comme on voudra dans l'enceinte qu'elle détermine, sera nulle.*

25. En prenant pour surface de niveau, un ellipsoïde

$$18. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la surface interne de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau sera, d'après le théorème précédent et le No. 4., un ellipsoïde semblable et semblablement placé.

La surface de niveau infiniment voisine sera, No. 5., un ellipsoïde homofocal au premier. Ce dernier ellipsoïde étant une surface de niveau du même système de masses, la surface interne de la couche auxiliaire que l'on construira sur lui sera un ellipsoïde semblable et semblablement placé, et par suite la surface de niveau infiniment voisine sera un ellipsoïde homofocal au second et partant au premier; et ainsi de suite. Donc, *si un ellipsoïde est une surface de niveau d'un système de masses, tous les ellipsoïdes homofocaux au premier seront encore des surfaces de niveau de ce même système.*

L'équation générale de ces surfaces sera donc

$$(D) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{a_1^2 - \mu^2} = 1,$$

$\lambda^2, \mu^2$  étant respectivement égaux à  $a^2 - b^2, a^2 - c^2$ .

Or nous avons vu, No. 11., que la surface externe de la couche auxiliaire que l'on construit sur toute surface de niveau, était elle même une surface de niveau relative à son attraction. Donc, on pourra dans le cas présent, prendre pour système de masses la couche auxiliaire construite sur l'ellipsoïde (18.), et dès-lors les surfaces représentées par l'équation (*D.*) seront des surfaces de niveau relatives à l'action de cette couche, dont la surface interne est un ellipsoïde semblable et semblablement placé à celui de sa surface externe.

26. Cette couche étant comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, et ses surfaces de niveau étant des ellipsoïdes homofocaux à celui de sa surface externe, il en résultera le théorème énoncé au No. 11.; en se rappelant toutefois que l'action d'un corps sur un point quelconque d'une de ses surfaces de niveau est dirigée suivant la normale, en ce point, à cette surface.

27. Un calcul semblable à celui du No. 8., démontrera le théorème énoncé au No. 13.

28. Cherchons actuellement l'expression  $v$  du potentiel de cette couche sur un point extérieur.

Nous avons démontré, No. 3., qu'en appelant  $d\omega$  l'élément d'une surface quelconque  $A$  (Fig. 1.),  $r$  la distance  $NP$ , et  $i$  l'angle formé par cette droite  $NP$  et la normale  $PH$  à cette surface, on a

$$\iint \frac{d\omega}{r^2} \cos i = 4\pi,$$

cette intégrale étant étendue à toute la surface, et la point  $N$  étant placé comme on voudra dans son intérieur.

Cette théorème aura donc encore lieu pour une surface de niveau d'un corps ou système de corps, enveloppant tout le système.

Soit  $A$  une de ses surfaces de niveau; on a vu, No. 3., que

$$\iint \frac{d\omega}{r^2} \cos i = \iint d\omega \left( \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx} \cos \alpha + \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy} \cos \beta + \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dz} \cos \gamma \right);$$

mais  $\frac{1}{r}$  est le potentiel d'une masse égale à l'unité, placée au point  $N$ , et le trinome soumis au signe  $\int$  exprime l'action de cette masse sur le point  $P$ , estimée suivant la direction de la normale  $PH$  à cette surface: Donc, puisque l'intégrale du premier membre, étendue à toute la surface  $A$ , est égale à  $4\pi$ , il en résultera que la somme des valeurs numériques des actions exercées

par cette masse sur tous les points de cette surface et estimées suivant ses directions normales, sera égale à  $4\pi$ .

En prenant le point  $N$  dans toute autre position du système de corps que l'on considère, on aura un résultat analogue pour la somme des valeurs numériques des actions normales exercées par la portion de masse égale à l'unité, appartenant à ce système et placée en ce point. Or pour un même point  $P$  quelconque, les actions normales exercées par ces deux masses, égales chacune à l'unité, donneront une résultante égale à leur somme et dirigée suivant la même droite. Donc la somme des valeurs numériques des actions normales de ces deux masses, sur tous les points de cette surface, sera égale à  $4\pi \times 2$ .

Ce résultat peut évidemment s'étendre à la masse entière du système de corps: Mais alors la surface  $A$  étant une surface de niveau de ce système, la somme des actions normales exercées par toutes les parties de cette masse sur un même point  $P$  de cette surface, exprimera l'action totale du système sur ce point. Il en résultera donc ce théorème dû à M. *Chasles* \*):

*La somme des valeurs numériques des attractions qu'un corps ou système de corps exerce sur les éléments superficiels d'une de ces surfaces de niveau, quand cette surface entoure le système de toutes parts, est égale à la masse entière du système multipliée par  $4\pi$ .*

Nous pouvons actuellement passer à la détermination du potentiel  $v$ . Car en conservant les notations du No. 15. et prenant pour système de masses la couche infiniment mince dont nous avons parlé au No. 26., le théorème précédent fournira l'équation

$$\iint \frac{dv}{dn} d\omega = 4\pi m,$$

$m$  désignant la masse de cette couche.

Or  $m = 4\pi \rho b c d a$ ,  $\frac{dv}{dn} = \frac{dv}{da_1} \frac{da_1}{dn}$ ,  $\frac{da_1}{dn} = \frac{\varepsilon}{da_1}$ , donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{da_1} \frac{dv}{da_1} \iint \varepsilon d\omega = 4\pi \cdot 4\pi \rho b c d a, \quad \text{et}$$

comme  $\iint \varepsilon d\omega = 4\pi b_1 c_1 d a_1$ , on en déduira

$$\frac{dv}{da_1} = 4\pi \rho b c d a \frac{1}{b_1 c_1}; \quad \text{d'où}$$

\*) Voir les additions à la connaissance des temps pour 1845.

en rétablissant le coefficient  $f$  de l'attraction universelle qui a été pris pour unité,

$$v = 4\pi\varrho f b c d a \int \frac{da_1}{b_1 c_1}.$$

Avec cette expression, on pourra évidemment continuer les calculs des No. 15. et suivants. On aura ainsi une *nouvelle solution* de l'attraction des ellipsoïdes, indépendante de la considération des surfaces isothermes.

29. On déduit de ce qui précède, sans nouveaux calculs, des théorèmes relatifs à l'électricité, et démontrés pour la première fois d'une manière analytique par M. *Poisson*, comme on le voit dans les *mémoires de l'institut pour l'année 1811*.

Lorsqu'un corps conducteur a été électrisé, le fluide en excès se retire à la surface et y forme une couche infiniment mince, retenue à l'extérieur par le contact et la pression de l'air environnant. Sa surface externe est celle du corps électrisé, sa surface interne doit être telle que lorsque l'équilibre est établi, cette couche n'exerce aucune action sur le fluide neutre des points intérieurs du corps et que la répulsion qu'elle produit sur un point quelconque de sa surface externe, qui est celle du corps, soit normale en ce point à cette surface.

Si le corps électrisé est terminé par un ellipsoïde, on déduira de ce qui précède les conséquences suivantes:

1. La couche électrique, à la surface d'un ellipsoïde, est comprise entre deux ellipsoïdes semblables.
2. Son action répulsive sur un quelconque des points de sa surface externe est normale, en ce point, à cette surface et proportionnelle à son épaisseur en ce point; puisque la formule No. 15.

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi\varrho f b c d a \cdot \frac{\beta}{a_1 b_1 c_1} \cos \alpha,$$

se convertit, en vertu de  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $c_1 = c$  et  $\frac{\varepsilon}{p} = \frac{da}{a}$ , en

$$\frac{dv}{dx} = 4\pi\varrho f \varepsilon \cos \alpha,$$

et par suite l'action de la couche est égale à  $4\pi\varrho f \varepsilon$ .

3. Ses actions sur les différents points de sa surface externe sont, No. 13., proportionnelles aux distances du centre du corps aux plans tangens à cet ellipsoïde en ces points. Donc, aux extrémités des diamètres principaux, elles sont proportionnelles aux longueurs de ces diamètres.

D'où il résulte que si l'on considère des ellipsoïdes de plus en plus allongés, le fluide électrique s'accumulera aussi de plus en plus vers leurs pôles; la pression exercée contre l'air extérieur augmentera et finira par dépasser la pression atmosphérique; en sorte que le fluide électrique s'échappera à travers l'air. De là l'explication mathématique de la déperdition du fluide électrique par les extrémités des corps allongés.

4. Enfin le théorème (3.) aura encore lieu pour tous les points de tout autre ellipsoïde homofocal à celui de la surface du corps.

Paris en Août 1844.