Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung.

Von

Paul Funk in Prag.

I. Formulierung der Aufgabe. In eine geometrisch anschauliche Form eingekleidet, lautet die Aufgabe, die wir hier behandeln wollen, folgendermaßen: Man denke sich, es sei für jeden ebenen Schnitt, den man durch einen Punkt O im Innern eines Körpers K legen kann, das Volumen der beiden Hälften, in die der Körper zerfällt, bekannt; was kann man dann über die Gestalt des Körpers K aussagen? Wir denken uns die Gleichung der Oberfläche von K in gewöhnlichen räumlichen Polarkoordinaten dargestellt, den Punkt O wählen wir als den Ursprung des Koordinatensystems, r sei der Radiusvektor, u die Poldistanz, v die geographische Länge. Dann können wir

$$\frac{r^3}{3} = \Phi(u, v)$$

als die gesuchte Funktion des Ortes auf der Kugel betrachten und die obige Frage auch folgendermaßen ausdrücken. Von der Funktion des Ortes auf der Kugel $\Phi(u, v)$ sei das über jede beliebige Halbkugel erstreckte Doppelintegral

$$\int \Phi(u, v)\, dk$$

bekannt, wobei dk das Flächenelement bedeutet; inwiefern ist hierdurch die Funktion $\Phi(u, v)$ selbst bestimmt? Ordnen wir den Wert des Doppelintegrals immer dem Pol der Halbkugel zu, über die es erstreckt ist, so erhalten wir eine als gegeben anzusehende Funktion des Ortes auf der Kugel $\Psi(u, v)$, die die Eigenschaft hat, daß die Summe der Werte in zwei diametral entgegengesetzten Punkten immer ein und denselben konstanten Wert V ergibt nämlich den Wert des über die ganze Kugel erstreckten Doppelintegrals, also das Volumen des gesuchten Körpers.

Sei nun $F(x)$ eine folgendermaßen definierte Funktion von x

$$\text{für}\quad 0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{sei} \quad F(x) = 1,$$
$$\text{für}\quad -1 \leqq x < 0 \quad \text{sei} \quad F(x) = 0$$

und deuten wir jetzt x als den Kosinus der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf der Kugel, also setzen wir

$$x = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'),$$

dann können wir unsere Aufgabe auch in der Form einer Integralgleichung erster Art aussprechen:

$$\Psi(u, v) = \int F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\, \Phi(u', v')\, dK',$$

wobei das Integral über die ganze Kugel zu erstrecken ist und $\Psi(u, v)$ der Bedingung genügt:

$$\Psi(u, v) + \Psi(\pi - u, v + \pi) = V.$$

Die gesuchte Funktion können wir uns nun in drei Bestandteile zerlegt denken

$$\text{(1)}\qquad \Phi(u, v) = \frac{1}{2}\left(\Phi(u, v) - \Phi(\pi - u, v + \pi)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\Phi(u, v) + \Phi(\pi - u, v + \pi) - \frac{V}{2\pi}\right) + \frac{V}{4\pi}.$$

Der erste Teil ist eine ungerade Funktion des Ortes auf der Kugel (d. h. eine Funktion, bei der die Summe der Werte in diametral entgegengesetzten Punkten gleich Null ist). Wir wollen ihn kurz mit $\Phi_1(u, v)$ bezeichnen. Der zweite Teil ist eine gerade Funktion des Ortes auf der Kugel (d. h. eine Funktion, bei der die Werte an diametral entgegengesetzten Punkten gleich sind). Ferner ist für ihn das über jede beliebige Halbkugel erstreckte Integral gleich Null; somit hat dieser Bestandteil auf den Wert von Ψ keinen Einfluß und kann also vollkommen willkürlich gewählt werden. Der dritte Teil bei der obigen Zerlegung ist als bekannt anzusehen. Den zweiten Bestandteil wollen wir zunächst identisch gleich Null wählen. Subtrahieren wir dann von (1) die Identität

$$\frac{V}{2} = \int (F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\, \frac{V}{4\pi}\, dK'$$

und bezeichnen wir $\Psi(u, v) - \frac{V}{2}$ mit $\Psi_1(u, v)$, so erhalten wir

$$\text{(1a)}\qquad \Psi_1(u, v) = \int F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\, \Phi_1(u', v')\, dK',$$

wo jetzt Φ_1 und Ψ_1 ungerade Funktionen des Ortes auf der Kugel sind.

II. Zurückführung der Integralgleichung mit dem Doppelintegral auf eine Intgralgleichung mit einem einfachen Integral. Setzen wir nun in der Integralgleichung (1a) $u = \frac{\pi}{2}$, d. h. nehmen wir an, der Pol der Halbkugel, über die das Integral zu erstrecken ist, liege am Äquator, dann erhalten wir

$$\Psi_1\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \int\limits_{v-\frac{\pi}{2}}^{v+\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\pi} \Phi_1(u', v') \sin u' \, du'\right) dv'.$$

Differenzieren wir jetzt nach v, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial v} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \int\limits_0^{\pi} \Phi_1\left(u', v + \frac{\pi}{2}\right) \sin u' \, du' - \int\limits_0^{\pi} \Phi_1\left(u', v - \frac{\pi}{2}\right) \sin u' \, du'.$$

Aus der Voraussetzung, daß $\Phi_1(u, v)$ eine ungerade Funktion sein soll, folgt:

$$O = \int\limits_0^{\pi} \Phi_1\left(u', v + \frac{\pi}{2}\right) \sin u \, du + \int\limits_0^{\pi} \Phi_1\left(u', v - \frac{\pi}{2}\right) \sin u' \, du',$$

und durch Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \int\limits_0^{\pi} \Phi_1\left(u', v + \frac{\pi}{2}\right) \sin u' \, du'.$$

Die soeben angeschriebene Gleichung hat einen von der speziellen Lage des benützten Koordinatensystems unabhängigen Sinn. Links vom Gleichheitszeichen steht der halbe Differentialquotient nach dem Bogenelement der bekannten Funktion $\Psi_1(u, v)$. Rechts vom Gleichheitszeichen steht ein Integral, das über einen halben Großkreis zu erstrecken ist. Dieser halbe Großkreis steht mit dem Bogenelement, nach dem differenziert wird, in der folgenden Lagenbeziehung. Legt man durch das Bogenelement einen Großkreis und trägt auf ihm entsprechend dem Richtungssinn des Bogenelements $\frac{\pi}{2}$ auf, dann gelangt man zum Halbierungspunkt des Halbkreises und es stehen dieser Viertelkreis und der Halbkreis aufeinander senkrecht. Durch diese Lagenbeziehung sind einem Halbkreis zwei Linienelemente auf der Kugel zugeordnet, und zwar liegen sie an diametral entgegengesetzten Stellen der Kugel, sie gehören ein und demselben Großkreis an, der Richtungssinn, den jedes von ihnen diesem Großkreis zuordnet, ist aber verschieden. Da aber die Funktion, die nach dem Bogenelement differenziert wird, eine ungerade Funktion des Ortes auf der Kugel ist, so ist der Wert des Differentialquotienten bei beiden Bogenelementen derselbe. Unter dem Integralzeichen steht die unbekannte Funktion des Ortes, multipliziert mit dem Sinus der Bogenlänge (gerechnet von einem der Eckpunkte aus) und mit dem (mit positiven Vorzeichen versehenen) Längenelement. Für jeden beliebigen halben Großkreis können wir also den Wert dieses Integrals als bekannt ansehen.

III. Der Spezialfall des Rotationskörpers. Wenden wir uns nun dem Fall zu, daß die gesuchte ungerade Funktion die Variable v nicht enthält und setzen wir dann statt Φ_1: $\varphi_1(\cos u)$. Es entspricht dies dem Fall des Rotationskörpers. Den halben Großkreis, über den das betrachtete Integral zu erstrecken ist, wählen wir so, daß seine Endpunkte am Äquator liegen.

Sei λ die sphärische Entfernung eines Punktes des Halbkreises von einem Endpunkt aus und i der Neigungswinkel des Halbkreises gegen den Äquator, so daß alle seine Punkte der Gleichung genügen

$$\cos u = \sin i \sin \lambda .$$

Nach dem soeben Erörterten ist das Integral

$$\int_0^\pi \varphi_1(\sin i \sin \lambda) \sin \lambda \, d\lambda = \chi(\sin i)^{*)} \tag{2}$$

als eine bekannte Funktion von i anzusehen. Setzen wir nun

$$\sin i \sin \lambda = \sqrt{z}, \qquad \sin i = \sqrt{x}$$

also

$$d\lambda = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{x-z}},$$

so verwandelt sich Gleichung (2) nach Multiplikation mit $\sin i$ in:

$$\sqrt{x} \cdot \chi(\sqrt{x}) = \int_0^x \frac{\varphi(z)\, dz}{\sqrt{x-z}}. \tag{2a}$$

Somit ist für diesen Fall unser Problem tatsächlich auf die Auflösung einer Abelschen Integralgleichung**) zurückgeführt. Nach der von Abel angegebenen Auflösungsmethode erhält man

$$\varphi(y) = \int_0^y \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\chi(\sqrt{x})\right)}{\sqrt{y-x}}\, dx$$

*) Bezeichnet man für diesen Spezialfall die gegebene Funktion mit $\psi_1(\cos u)$ statt mit Ψ_1, so ist:

$$\chi(\sin i) = \left(-\frac{d\psi_1(\cos u)}{du}\right)_{u=i}$$

**) Abel, Crelles Journal Bd. 1, S. 153. Vgl. auch Goursat, Cours d'Analyse, 2. ed. S. 343.

und zwar ist dies, wie aus der Abelschen Schlußweise unmittelbar hervorgeht, die einzige Lösung von (2a).

IV. **Eine allgemeine Bemerkung über Integralgleichungen, in denen eine Funktion der Entfernung zweier Punkte der Kugel als Kern auftritt.** Wie in einer anderen Arbeit, so werde ich auch hier, um eine bequemere Ausdrucksweite zu erzielen, für einen in der Theorie der Kugelfunktionen seit jeher gebrauchten Begriff eine kurze Bezeichnung einführen. Sei A ein beliebiger Punkt auf der Kugel. Betrachten wir ihn als Pol eines Koordinatensystems, das aus Meridianen und Parallelkreisen besteht. Es bedeute in diesem Koordinatensystem u und v wieder Poldistanz bzw. geographische Länge. $\Phi(u, v)$ sei nun eine beliebige Funktion des Ortes auf der Kugel. Dann bezeichne ich $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(u, v)\,dv$ als *„die Versteifung der Funktion Φ für den Punkt A"*. In A ist der Wert der Funktion und ihrer Versteifung derselbe. Von einer *„für den Punkt A steifen Funktion"* wollen wir sprechen, wenn die Funktion längs aller Parallelkreise, die zu A als Pol gehören, konstant ist. Sei nun $F(x)$ irgendeine im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ integrable Funktion von x und deuten wir x als Kosinus der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf der Kugel. Dann gilt folgender Satz: Wenn Φ der Integralgleichung genügt

$$\Psi(u,v) = \int F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\,\Phi(u', v')\,dK',$$

so genügt die Versteifung von Φ für irgendeinen Punkt A jener Integralgleichung, in der rechts vom Gleichheitszeichen statt Ψ die Versteifung von Ψ für A auftritt. Indem wir nämlich auf beiden Seiten nach v integrieren, durch 2π dividieren und auf der rechten Seite die Integrationsfolge vertauschen, erhalten wir:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(u,v)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\left[\int\limits_0^{2\pi} F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\,dv\right]\Phi(u', v')\,dK'.$$

Nun ist aber der Ausdruck in der eckigen Klammer von v' unabhängig, somit erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(u,v)\,dv$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^{2\pi} F(\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos(v - v'))\,dv\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(u', v')\,dv'\right]\sin u'\,du'$$

und nach der Vertauschung der Buchstaben v und v' können wir auch schreiben

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(u,v)\,dv$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} F(\cos u\cos u' + \sin u\sin u'\cos(v-v'))\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(u',v)\,dv\right]dv'\right\}\sin u'\,du',$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

V. Die Anwendung auf das vorliegende Problem. Wenn also die ungerade Funktion Ψ_1 so beschaffen ist*), daß es zu Ψ_1 eine ungerade Funktion Φ_1 gibt, die die Integralgleichung (1a) erfüllt, dann muß es auch für die Versteifung von Ψ_1 für einen beliebigen Punkt A eine Lösung der Integralgleichung (1a) geben, nämlich die Versteifung von Φ_1 für A. Diese muß als Versteifung einer ungeraden Funktion selbst eine ungerade Funktion sein. Sie ist somit nach III. durch Auflösung einer Abelschen Integralgleichung eindeutig bestimmt. Da in A der Wert von Φ_1 mit dem Wert der Versteifung gleich ist, so ist auch der Wert von Φ_1 im Punkt A eindeutig bestimmt. Um die allgemeinste Lösung von (1) zu finden, kann man zu Φ_1, wie im Anfang der Arbeit bereits erwähnt wurde, eine beliebige gerade Funktion vom Mittelwert Null addieren, was bei der betrachteten geometrischen Deutung darauf hinauskommt, daß man die Gestalt des Körpers dadurch eindeutig festlegen kann, wenn man außer dem Volumen der beiden Hälften für jeden beliebigen Schnitt auch noch bei einem dieser Schnitte die Gestalt der einen der beiden Hälften des Körpers als gegeben betrachtet.

Im Anschluß an die im obigen behandelte Aufgabe wollen wir noch zwei kleine Bemerkungen machen.

1. Bezeichnet w die sphärische Entfernung zweier Punkte auf der Kugel, so ist der iterierte Kern zu dem in der Integralgleichung (1) auftretenden Kern $2\pi - 2w$. Somit erkennt man, daß sich auch jene Integralgleichung, in der die sphärische Entfernung zweier Punkte auf der Kugel selbst als Kern auftritt, durch zweimalige Auflösung einer Abelschen Integralgleichung auflösen läßt.

*) Jede Integralgleichung, in der eine Funktion der Entfernung zweier Punkte auf der Kugel als ein Kern auftritt, kann man natürlich auch dadurch auflösen, daß man auf beiden Seiten der Gleichung in eine Laplacesche Reihe von Kugelfunktionen entwickelt und die Koeffizienten vergleicht. Durch Untersuchung der Konvergenz könnte man im vorliegenden Falle ähnlich, wie ich dies in meiner Dissertation, Göttingen 1911 „Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien“ getan habe, hinreichende Bedingungen für die Existenz von Φ herleiten.

2. In engem Zusammenhang mit der soeben behandelten Aufgabe steht eine früher von mir behandelte Funktionalgleichung*) für Funktionen des Ortes auf der Kugel. Integriert man nämlich eine Funktion Φ des Ortes auf der Kugel längs eines größten Kreises und ordnet man den Wert des Integrals den beiden Polen zu, die zu diesem größten Kreis gehören, so bezeichnete ich die so erklärte Funktion $\Psi^{(1)}$ als die Kreisintegralfunktion von Φ. Die Aufgabe, eine Funktion Φ zu bestimmen, deren Kreisintegralfunktion bekannt ist, läßt sich, wie dort gezeigt wurde, ebenfalls auf die Auflösung einer Abelschen Integralgleichung zurückführen. Es ist nun diese Aufgabe gewissermaßen der Grenzfall einer gewöhnlichen Integralgleichung erster Art mit einer Funktion der Entfernung zweier Punkte auf der Kugel als Kern. Sei $F(x,\delta)$ eine folgendermaßen erklärte Funktion von x und δ:

$$\text{für } -1 \leqq x \leqq -\delta \text{ und für } \delta \leqq x \leqq 1 \text{ sei } F(x,\delta) = 0,$$
$$\text{für } -\delta < x < \delta \qquad \text{sei } F(x,\delta) = \frac{1}{2\delta},$$
$$0 < \delta < 1,$$

dann kann man die Kreisintegralfunktion auch folgendermaßen definieren:

$$\Psi^{(1)}(u,v) = \lim_{\delta=0} \int F(\cos w, \delta)\, \Phi(u',v')\, dK'.$$

Bildet man nun aber von der Funktion $\Psi^{(1)}$ wieder die Kreisintegralfunktion und bezeichnet man die so definierte Funktion mit $\Psi^{(2)}$, dann hängt $\Psi^{(2)}$ mit Φ durch eine Integralgleichung erster Art zusammen. Man übersieht dies sofort, wenn man zunächst $(\Psi^{(2)})_{u=0}$ berechnet. Es ergibt sich:

$$\Psi^{(2)}(u,v) = \int \frac{2}{\sin w}\, \Phi(u',v')\, dK'.$$

Auch bei dieser Integralgleichung läßt sich somit die Lösung durch zweimalige Auflösung einer Abelschen Integralgleichung ermitteln.

*) Vgl. meine bereits erwähnte Dissertation oder Math. Ann. S. 283.