

## Über den Einfluß der Krümmung der Erdoberfläche und der Schwerkraftsänderungen auf die Pendelbewegung. Von V. Špaček.

In den Astron. Nachr. Bd. 165 p. 97 hat Prof. N. Herz eine Reduktion der Schwingungszeit des Pendels wegen Lotablenkung entwickelt. Die betreffende Formel lautet

$$T = \pi \sqrt{\cos \mu} \sqrt{l/g} (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \mu + \dots)$$

wo  $g = g_0 + c$ ,  $g_0$  die ungestörte Schwerkraftbeschleunigung,  $c$  die in ihre Richtung fallende Komponente der störenden Ablenkungskraft ist. Die Lotabweichung  $\mu$  ist durch die Gleichung  $\tan \mu = a/g$  bestimmt, wo  $a$  die in die Schwingungsebene fallende Horizontalkomponente der Ablenkungskraft ist.

Aus dem rechtwinkligen Kräfteparallelogramm, dessen Seiten  $a$  und  $g$  sind, folgt, daß die Beschleunigung in der Richtung der Gleichgewichtslage des Pendels, welche mit  $g$  den Winkel  $\mu$  einschließt,  $G = \sqrt{g^2 + a^2}$  und  $g = G \cos \mu$  ist. Setzt man diesen Wert in die obige Formel ein, so ist

$$T = \pi \sqrt{l/G} (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \mu + \dots).$$

Die Reduktion wegen Lotabweichung kommt hier nicht vor, statt  $g$  steht hier  $G$ , die Beschleunigung in der Gleichgewichtslage des Pendels.

Hier wollen wir den Einfluß der Konvergenz der Schwerkraftsrichtungen ableiten. Wenn das Pendel bei der Bewegung einen Raum, dessen größte horizontale Dimension 15 cm ist, durchläuft, so ist der Winkel zwischen den Richtungen der Schwerkraft in den äußersten Punkten etwa  $\frac{1}{200}$  einer Bogensekunde. Wir werden auch den Einfluß der ungleichen Beschleunigung in verschiedenen Punkten des physischen Pendels untersuchen. Ist z. B. die Länge des Pendels 1 m, der Erdradius  $R = 6370 \cdot 10^8$  m,  $g_u$ ,  $g_o$  die Beschleunigung am unteren und oberen Ende des Pendels, so ist

$$g_u/g_o = [(R+1)/R]^2 = 1 + 3 \cdot 10^{-7}$$

und  $g_u - g_o = 3 \cdot 10^{-4}$  cm.

Zugleich nehmen wir Rücksicht auf die Rotation der Erde.

Es seien  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  rechtwinklige Koordinaten eines beweglichen Punktes in den festen Koordinatenachsen  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  und  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Koordinaten desselben Punktes in den beweglichen Koordinaten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , deren beweglicher Anfang  $O(x_0, y_0, z_0)$  ist. Bezeichnen wir die Winkel zwischen den Achsen nach dem folgenden Schema

	$x$	$y$	$z$	
$x'$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	(1)
$y'$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	
$z'$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\gamma_3$	

dann ist

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= y_0 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= z_0 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \quad (2)$$

Es sei  $O$  der Durchschnittspunkt der horizontalen Rotationsachse mit der Längsachse des Pendels in der Höhe  $h$  über der Erdoberfläche,  $Z$  vertikal nach unten,  $X$  horizontal nach Norden,  $Y$  horizontal nach Osten gerichtet. Wir sehen

von der fortschreitenden Bewegung der Erde ab und wählen als  $Z'$  die Erdachse, als  $X'$  die Schnittlinie des Äquators mit der Meridianebene des Punktes  $O$  in dem Augenblick, von welchem aus die Zeit gerechnet wird,  $Y'$  lotrecht zur  $XZ$ -Ebene. Dann ist, wenn  $\omega$  die Rotationsgeschwindigkeit der Erde,  $R_0$  die Entfernung von  $O$  vom Erdmittelpunkt,  $\psi_0$  geographische,  $\varphi_0$  geozentrische Breite von  $O$  bedeutet,  $\angle XZ' = \psi_0$ ,  $\angle Y'Y' = \omega t$ ,  $\angle Y'Z' = \frac{1}{2}\pi$  und mit Hilfe der bekannten Relationen zwischen den Größen (1)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos \omega t \sin \psi_0, & \beta_1 &= -\sin \omega t, & \gamma_1 &= -\cos \psi_0 \cos \omega t \\ \alpha_2 &= -\sin \omega t \sin \psi_0, & \beta_2 &= \cos \omega t, & \gamma_2 &= -\cos \psi_0 \sin \omega t \\ \alpha_3 &= \cos \psi_0, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= -\sin \psi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

und

$$x_0 = R_0 \cos \varphi_0 \cos \omega t, \quad y_0 = R_0 \cos \varphi_0 \sin \omega t, \quad z_0 = R_0 \sin \varphi_0. \quad (4)$$

Für das Pendel selbst führen wir rechtwinklige, mit dem Körper fest verbundene Koordinatenachsen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ein; die erste sei die horizontale Rotationsachse, die dritte die durch den Schwerpunkt des Pendels gehende Längsachse, die zweite lotrecht zur  $\xi\zeta$ -Ebene. Die Cosinus der Winkel zwischen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  und  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  sind:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$		$\xi$	$\eta$	$\zeta$		
$x'$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	(5)	$x$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	(6)
$y'$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$		$y$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	
$z'$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$		$z$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$	

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta & x &= b_{11} \xi + b_{12} \eta + b_{13} \zeta \\ y' &= y_0 + a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta & y &= b_{21} \xi + b_{22} \eta + b_{23} \zeta \\ z' &= z_0 + a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \zeta & z &= b_{31} \xi + b_{32} \eta + b_{33} \zeta. \end{aligned} \quad (7) \quad (8)$$

Bildet die Schwingungsebene mit der Meridianebene das Azimut  $\alpha$ , so ist  $\angle X\xi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ ,  $\angle Y\xi = \pi - \alpha$ . In der Gleichgewichtslage fallen  $Z$  und  $\zeta$  zusammen. Bezeichnen wir noch mit  $\vartheta$  die Elongation des Pendels, so bestimmen diese drei Winkel auch die übrigen Größen  $b$  und es ist

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sin \alpha & b_{12} &= \cos \alpha \cos \vartheta & b_{13} &= \cos \alpha \sin \vartheta \\ b_{21} &= -\cos \alpha & b_{22} &= \sin \alpha \cos \vartheta & b_{23} &= \sin \alpha \sin \vartheta \\ b_{31} &= 0 & b_{32} &= -\sin \vartheta & b_{33} &= \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (9)$$

Mittels  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $b$ , (3), (9) kann man die Größen  $a$  bestimmen. Denn z. B.

$$\begin{aligned} a_{12} &= \alpha_1 b_{12} + \beta_1 b_{22} + \gamma_1 b_{32} \\ a_{11} &= -\sin \psi_0 \sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t \\ a_{12} &= \cos \omega t (\cos \psi_0 \sin \vartheta - \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \vartheta) \\ &\quad - \sin \alpha \sin \omega t \cos \vartheta \\ a_{13} &= -\cos \omega t (\sin \psi_0 \cos \alpha \sin \vartheta + \cos \psi_0 \cos \vartheta) \\ &\quad - \sin \alpha \sin \omega t \sin \vartheta \\ a_{21} &= -\sin \psi_0 \sin \alpha \sin \omega t - \cos \alpha \cos \omega t \\ a_{22} &= \sin \omega t (\cos \psi_0 \sin \vartheta - \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \vartheta) \\ &\quad + \sin \alpha \cos \omega t \cos \vartheta \\ a_{23} &= -\sin \omega t (\sin \psi_0 \cos \alpha \sin \vartheta + \cos \psi_0 \cos \vartheta) \\ &\quad + \cos \omega t \sin \alpha \sin \vartheta \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \cos \psi_0 \sin \alpha \\ a_{32} &= \sin \psi_0 \sin \vartheta + \cos \psi_0 \cos \alpha \cos \vartheta \\ a_{33} &= \cos \psi_0 \cos \alpha \sin \vartheta - \sin \psi_0 \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \Sigma m \cdot d^2 x' / dt^2 &= \Sigma X' \\ \Sigma m \cdot d^2 y' / dt^2 &= \Sigma Y' \\ \Sigma m \cdot d^2 z' / dt^2 &= \Sigma Z' \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Sigma m (y' \cdot d^2 z' / dt^2 - z' \cdot d^2 y' / dt^2) &= \Sigma (y' Z' - z' Y') \\ \Sigma m (z' \cdot d^2 x' / dt^2 - x' \cdot d^2 z' / dt^2) &= \Sigma (z' X' - x' Z') \\ \Sigma m (x' \cdot d^2 y' / dt^2 - y' \cdot d^2 x' / dt^2) &= \Sigma (x' Y' - y' X') \end{aligned} \quad (12)$$

wo  $X', Y', Z'$  die Komponenten der auf das Pendel wirkenden Kräfte in der Richtung der Achsen  $X', Y', Z'$  sind. Durch die Komponenten  $X, Y, Z$  ausgedrückt, ist

$$\begin{aligned} M(y_0 z_0'' - z_0 y_0'') + M \varrho (y_0 a_{33}'' - a_{33} y_0'' - z_0 a_{23}'' + a_{23} z_0'') + L_1 &= \Sigma (y' Z' - z' Y') \\ M(z_0 x_0'' - x_0 z_0'') + M \varrho (z_0 a_{13}'' - a_{13} z_0'' - x_0 a_{33}'' + a_{33} x_0'') + L_2 &= \Sigma (z' X' - x' Z') \\ M(x_0 y_0'' - y_0 x_0'') + M \varrho (x_0 a_{23}'' - a_{23} x_0'' - y_0 a_{13}'' + a_{13} y_0'') + L_3 &= \Sigma (x' Y' - y' X') \end{aligned} \quad (16)$$

wo  $A_{11} = \Sigma m \xi^2$ ,  $A_{12} = \Sigma m \xi \eta$ ,  $A_{22} = \Sigma m \eta^2$  u. s. w.

$$\begin{aligned} L_1 &= A_{11} (a_{21} a_{31}' - a_{21}' a_{31}) + A_{12} (a_{21} a_{32}' - a_{21}' a_{32} + a_{22} a_{31}' - a_{22}' a_{31}) \\ &\quad + A_{22} (a_{22} a_{32}' - a_{22}' a_{32}) + A_{13} (a_{21} a_{33}' - a_{21}' a_{33} + a_{23} a_{31}' - a_{23}' a_{31}) \\ &\quad + A_{33} (a_{23} a_{33}' - a_{23}' a_{33}) + A_{23} (a_{22} a_{33}' - a_{22}' a_{33} + a_{23} a_{32}' - a_{23}' a_{32}) \\ L_2 &= A_{11} (a_{31} a_{11}' - a_{31}' a_{11}) + A_{12} (a_{31} a_{12}' - a_{31}' a_{12} + a_{32} a_{11}' - a_{32}' a_{11}) \\ &\quad + A_{22} (a_{32} a_{12}' - a_{32}' a_{12}) + A_{13} (a_{31} a_{13}' - a_{31}' a_{13} + a_{33} a_{11}' - a_{33}' a_{11}) \\ &\quad + A_{33} (a_{33} a_{13}' - a_{33}' a_{13}) + A_{23} (a_{32} a_{13}' - a_{32}' a_{13} + a_{33} a_{12}' - a_{33}' a_{12}) \\ L_3 &= A_{11} (a_{11} a_{21}' - a_{11}' a_{21}) + A_{12} (a_{11} a_{22}' - a_{11}' a_{22} + a_{12} a_{21}' - a_{12}' a_{21}) \\ &\quad + A_{22} (a_{12} a_{22}' - a_{12}' a_{22}) + A_{13} (a_{11} a_{23}' - a_{11}' a_{23} + a_{13} a_{21}' - a_{13}' a_{21}) \\ &\quad + A_{33} (a_{13} a_{23}' - a_{13}' a_{23}) + A_{23} (a_{12} a_{23}' - a_{12}' a_{23} + a_{13} a_{22}' - a_{13}' a_{22}). \end{aligned} \quad (17)$$

Die rechten Seiten von (12) sind mit Rücksicht auf (2) und (13)

$$\Sigma (y' Z' - z' Y') = \Sigma \{ y_0 Z' - z_0 Y' + (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) (xY - yX) + (\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3) (yZ - zY) + (\gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3) (zX - xZ) \}$$

und infolge (14) und der Relationen zwischen  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\Sigma (y' Z' - z' Y') = M(y_0 z_0'' - z_0 y_0'') + M \varrho (y_0 a_{33}'' - z_0 a_{23}'') + \alpha_1 \Sigma (yZ - zY) + \beta_1 \Sigma (zX - xZ) + \gamma_1 \Sigma (xY - yX). \quad (18)$$

Werden die letzten drei Summen kurz mit  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  bezeichnet, dann wird die erste Gleichung (16) und analog die beiden anderen

$$\begin{aligned} M \varrho (a_{23} z_0'' - a_{33} y_0'') + L_1 &= \alpha_1 \Sigma_1 + \beta_1 \Sigma_2 + \gamma_1 \Sigma_3 \\ M \varrho (a_{33} x_0'' - a_{13} z_0'') + L_2 &= \alpha_2 \Sigma_1 + \beta_2 \Sigma_2 + \gamma_2 \Sigma_3 \\ M \varrho (a_{13} y_0'' - a_{23} x_0'') + L_3 &= \alpha_3 \Sigma_1 + \beta_3 \Sigma_2 + \gamma_3 \Sigma_3. \end{aligned}$$

Multipliziert man sie der Reihe nach mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , dann mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , endlich mit  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  und addiert, indem auch  $z_0'' = 0$  gesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} M \varrho \{ x_0'' (\alpha_2 a_{33} - \alpha_3 a_{23}) + y_0'' (\alpha_3 a_{13} - \alpha_1 a_{33}) \} + L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2 + L_3 \alpha_3 &= \Sigma (yZ - zY) \\ M \varrho \{ x_0'' (\beta_2 a_{33} - \beta_3 a_{23}) + y_0'' (\beta_3 a_{13} - \beta_1 a_{33}) \} + L_1 \beta_1 + L_2 \beta_2 + L_3 \beta_3 &= \Sigma (zX - xZ) \\ M \varrho \{ x_0'' (\gamma_2 a_{33} - \gamma_3 a_{23}) + y_0'' (\gamma_3 a_{13} - \gamma_1 a_{33}) \} + L_1 \gamma_1 + L_2 \gamma_2 + L_3 \gamma_3 &= \Sigma (xY - yX). \end{aligned} \quad (19)$$

Aus (14) folgt auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned} M(x_0'' \alpha_1 + y_0'' \alpha_2) + M \varrho (a_{13}'' \alpha_1 + a_{23}'' \alpha_2 + a_{33}'' \alpha_3) &= \Sigma X \\ M(x_0'' \beta_1 + y_0'' \beta_2) + M \varrho (a_{13}'' \beta_1 + a_{23}'' \beta_2 + a_{33}'' \beta_3) &= \Sigma Y \\ M(x_0'' \gamma_1 + y_0'' \gamma_2) + M \varrho (a_{13}'' \gamma_1 + a_{23}'' \gamma_2 + a_{33}'' \gamma_3) &= \Sigma Z. \end{aligned} \quad (20)$$

Außer der Schwere wirken auf das Pendel Kräfte, welche seine Rotationsachse in ihrer festen Lage halten. Es genügt zwei Punkte dieser Achse als fest vorauszusetzen, z. B. den Anfang  $O$  und einen Punkt  $B(\xi_1, 0, 0)$ , in welchen Kräfte mit den Komponenten  $X_0, Y_0, Z_0$  und  $X_1, Y_1, Z_1$  wirken. Wenn wir weiter mit  $X, Y, Z$  die Komponenten der Anziehungskraft der Erde (nicht der Schwerkraft) bezeichnen, so sind die rechten Seiten der Gleichungen (19) und (20)

$$\Sigma (yZ - zY) + \gamma_1 Z_1 \quad \Sigma (zX - xZ) - x_1 Z_1 \quad \Sigma (xY - yX) + x_1 Y_1 - y_1 X_1 \quad (19')$$

$$X_0 + X_1 + \Sigma X \quad Y_0 + Y_1 + \Sigma Y \quad Z_0 + Z_1 + \Sigma Z \quad (20')$$

wo laut (8)  $x_1 = \xi_1 \sin \alpha$ ,  $y_1 = -\xi_1 \cos \alpha$ .

Aus den Gleichungen (19), (20) resp. (19'), (20') können  $X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z_0, Z_1$  berechnet werden, wobei eine von den vier ersten Komponenten unbestimmt bleibt. Aus den ersten zwei Gleichungen (19), (19') läßt sich  $Z_1$  eliminieren und man erhält folgende Differentialgleichung der Pendelbewegung

$$\begin{aligned} M \varrho \{ x_0'' [\cos \alpha (\beta_2 a_{33} - \beta_3 a_{23}) - \sin \alpha (\alpha_2 a_{33} - \alpha_3 a_{23})] + y_0'' [\cos \alpha (\beta_3 a_{13} - \beta_1 a_{33}) - \sin \alpha (\alpha_3 a_{13} - \alpha_1 a_{33})] \} \\ + (L_1 \beta_1 + L_2 \beta_2 + L_3 \beta_3) \cos \alpha - (L_1 \alpha_1 + L_2 \alpha_2 + L_3 \alpha_3) \sin \alpha = \cos \alpha \Sigma (zX - xZ) - \sin \alpha \Sigma (yZ - zY). \end{aligned}$$

Nach kurzer Umformung wird

$$M \varrho (x_0'' a_{12} + y_0'' a_{22}) - (L_1 a_{11} + L_2 a_{21} + L_3 a_{31}) = \cos \alpha \Sigma (z X - x Z) - \sin \alpha \Sigma (y Z - z Y). \quad (21)$$

Die Derivierten von  $a$  lassen sich einfach durch diese Größen ausdrücken, z. B.  $a'_{13} = a_{12} \vartheta' - a_{23} \omega$ ,  $a''_{11} = -\omega^2 a_{11}$  u. s. w. Mittels dieser Relationen und (17) findet man

$$L_1 a_{11} + L_2 a_{21} + L_3 a_{31} = A_{22} (-\vartheta'' + \omega^2 a_{32} a_{33}) - A_{33} (\vartheta'' + \omega^2 a_{32} a_{33}) + A_{12} \omega^2 a_{31} a_{33} - A_{13} \omega^2 a_{31} a_{32} + A_{23} (a_{33}^2 - a_{32}^2) = -\vartheta'' (A_{22} + A_{33}) + P_1 \sin \vartheta + Q_1 \cos \vartheta + S_1 \sin 2\vartheta + T_1 \cos 2\vartheta \quad (22)$$

wo

$$\begin{aligned} P_1 &= \omega^2 \sin \alpha \cos \psi_0 (A_{12} \cos \alpha \cos \psi_0 - A_{13} \sin \psi_0) \\ Q_1 &= -\omega^2 \sin \alpha \cos \psi_0 (A_{12} \sin \psi_0 + A_{13} \cos \alpha \cos \psi_0) \\ S_1 &= \frac{1}{2} \omega^2 (A_{22} - A_{33}) (\cos^2 \alpha \cos^2 \psi_0 - \sin^2 \psi_0) - \omega^2 A_{23} \cos \alpha \sin 2\psi_0 \\ T_1 &= \omega^2 A_{23} (\sin^2 \psi_0 - \cos^2 \alpha \cos^2 \psi_0) - \omega^2 (A_{22} - A_{33}) \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Im ersten Glied (21) ist

$$x'' a_{12} + y'' a_{22} = R_0 \cos \varphi_0 \omega^2 (-\cos \psi_0 \sin \vartheta + \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \vartheta). \quad (24)$$

Ist  $R$  die Entfernung eines Punktes  $C(x', y', z')$  des Pendels vom Erdmittelpunkt,  $\varphi$  seine geozentrische Breite, so ist seine Entfernung von der Erdachse

$$R \cos \varphi = V(x'^2 + y'^2) = [x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 (a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta) + 2y_0 (a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta)]^{1/2}$$

wenn das Quadrat  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\zeta^2$  der Dimensionen des Pendels gegenüber dem Quadrat der Entfernung von der Erdachse  $x_0^2 + y_0^2 = R_0^2 \cos^2 \varphi_0$  vernachlässigt werden kann. Setzen wir die Werte (4) ein, so ist

$$\begin{aligned} R \cos \varphi &= R_0 \cos \varphi_0 \{1 + 2(a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta) \cos \omega t / R_0 \cos \varphi_0 + 2(a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta) \sin \omega t / R_0 \cos \varphi_0\}^{1/2} \\ &= R_0 \cos \varphi_0 - \xi \sin \alpha \sin \psi_0 + \eta (\cos \psi_0 \sin \vartheta - \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \vartheta) - \zeta (\cos \psi_0 \cos \vartheta + \cos \alpha \sin \psi_0 \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (25)$$

Wenn  $X, Y, Z$  die Komponenten der Anziehungskraft der Erde bedeuten,  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  die Beschleunigungskomponenten, so ist  $X = m \bar{X}$   $Y = m \bar{Y}$   $Z = m \bar{Z}$ . (26)

Die Schwerkraft  $g$  setzt sich aus der Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft zusammen, deren Komponenten im Punkte  $C(R, \varphi)$

$$-\omega^2 R \cos \varphi \sin \psi \quad 0 \quad -\omega^2 R \cos \varphi \cos \psi \quad (27)$$

sind. Die Komponenten der Anziehungskraft bekommen wir also, wenn wir von den Komponenten  $g_x = 0$ ,  $g_y = 0$ ,  $g_z = g$  der Beschleunigung  $g$  die Komponenten (27) abziehen. Es ist dann

$$\bar{X} = \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi, \quad \bar{Y} = 0, \quad \bar{Z} = \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi + g. \quad (28)$$

$$\begin{array}{l} \bar{X} \\ X \sin \psi_0 \sin \psi \cos \Delta\lambda + \cos \psi_0 \cos \psi \\ Y - \sin \psi \sin \Delta\lambda \\ Z \cos \psi_0 \sin \psi \cos \Delta\lambda - \sin \psi_0 \cos \psi \end{array}$$

Die Winkel, welche  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  in einzelnen Punkten des Pendels mit den Achsen  $X, Y, Z$  einschließen, lassen sich einfach ausdrücken. Befindet sich der Meridian von  $O$  in der  $X'Z'$ -Ebene, so sind die Richtungen von  $X, Y, Z$  durch (3) ausgedrückt, wenn hier  $t = 0$  gesetzt wird. Die betreffenden Richtungscosinus seien den Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  im Schema (1) entsprechend  $\alpha', \beta', \gamma'$ . In einem anderen Punkte, dessen geographische Breite  $\psi$  ist und dessen geographische Länge sich von jener von  $O$  um  $\Delta\lambda$  unterscheidet, bekommt man die Richtungscosinus  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  von  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ , wenn man in (3)  $\psi$  statt  $\psi_0$  und  $\Delta\lambda$  für  $\omega t$  setzt. Dann sind die Cosinus der Winkel zwischen  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  und den Achsen  $X, Y, Z$  — nach der Formel

$$\begin{array}{l} \cos X \bar{Y} = \alpha_1' \beta_1'' + \alpha_2' \beta_2'' + \alpha_3' \beta_3'' \text{ u. s. w. berechnet —} \\ \bar{Z} \\ \sin \psi_0 \cos \psi \cos \Delta\lambda - \cos \psi_0 \sin \psi \\ - \cos \psi \sin \Delta\lambda \\ \cos \psi_0 \cos \psi \cos \Delta\lambda + \sin \psi_0 \sin \psi. \end{array} \quad (29)$$

Über die Erdgestalt haben wir keine Voraussetzung gemacht. Die Meridianebenen, welche durch die Vertikale und eine zur Erdachse parallele Gerade bestimmt sind, enthalten im allgemeinen die Erdachse nicht. Die Schnittlinien der Meridianebenen sind aber der Erdachse immer parallel. Sind  $\varrho_1, \varrho_2$  Krümmungsradien des Meridians und des Breitenkreises, so sind die Elemente dieser Linien  $\varrho_1 d\psi$  und  $\varrho_2 d\lambda$ . Man kann aber auch  $x$  und  $y$  als Bogen betrachten, und es ist also

$$\Delta\psi = x/\varrho_1 \quad \Delta\lambda = y/\varrho_2. \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \cos X \bar{X} &= \cos(\psi - \psi_0) = 1 \\ \cos Y \bar{X} &= -\sin \psi \cdot y/\varrho_2 \\ \cos Z \bar{X} &= \sin(\psi - \psi_0) = x/\varrho_1 \end{aligned}$$

Diese Größen sind sehr klein, und wir werden nur ihre ersten Potenzen behalten. Die kleinen Änderungen von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  in einzelnen Punkten des Pendels haben auf  $\Delta\psi, \Delta\lambda$  nur einen verschwindenden Einfluß, und man kann  $\varrho_1, \varrho_2$  als konstant betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} \sin \Delta\psi &= \Delta\psi = x/\varrho_1 & \cos \Delta\psi &= 1 - \frac{1}{2} \Delta\psi^2 = 1 \\ \sin \Delta\lambda &= y/\varrho_2 & \cos \Delta\lambda &= 1 \end{aligned} \quad (31)$$

und nach (29)

$$\begin{aligned} \cos X \bar{Z} &= -\sin(\psi - \psi_0) = -x/\varrho_1 \\ \cos Y \bar{Z} &= -\cos \psi \cdot y/\varrho_2 \\ \cos Z \bar{Z} &= \cos(\psi - \psi_0) = 1. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (28) wirken also in der Richtung der Achsen  $X, Y, Z$  in einzelnen Punkten des Pendels die Komponenten  $X = m (\bar{X} \cos X \bar{X} + \bar{Y} \cos X \bar{Y} + \bar{Z} \cos X \bar{Z}) = m \{ \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi - \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi \cdot x/\varrho_1 - g \cdot x/\varrho_1 \}$  (31')

$$Y = -m \{ \omega^2 R \cos \varphi + g \cos \psi \} y/\varrho_2 \quad Z = m \{ \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi \cdot x/\varrho_1 + \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi + g \}$$

und die rechte Seite der Gleichung (21) wird

$$\begin{aligned} \Sigma m \{ \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi \cdot z \cos \alpha - \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi \cos \alpha \cdot x z/\varrho_1 - \omega^2 R \cos \varphi \sin \alpha \cdot y z/\varrho_2 \\ - \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi (x \cos \alpha + y \sin \alpha) x/\varrho_1 - g (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - g z (\cos \alpha x/\varrho_1 + \sin \alpha y/\varrho_2) \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Im Produkt  $\omega^2 R \cos \varphi$  behalten wir nach (25) noch Glieder von der Ordnung  $\omega^2 \xi$ ,  $\omega^2 \eta$ ,  $\omega^2 \zeta$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\omega^2 R \cos \varphi \sin \psi &= \omega^2 R \cos \varphi (\sin \psi_0 + \Delta \psi \cos \psi_0) = \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi_0 + \omega^2 R_0 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 \cdot x/\varrho_1 \\ \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi &= \omega^2 R \cos \varphi (\cos \psi_0 - \Delta \psi \sin \psi_0) = \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi_0 - \omega^2 R_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_0 \cdot x/\varrho_1\end{aligned}\quad (32')$$

und der Ausdruck (32) bekommt die einfachere Form

$$\begin{aligned}\Sigma m \{ \omega^2 R \cos \varphi \sin \psi_0 z \cos \alpha - \omega^2 R \cos \varphi \cos \psi_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ - \omega^2 R_0 \cos \varphi_0 \sin \alpha \cdot y z/\varrho_2 - g z (\cos \alpha x/\varrho_1 + \sin \alpha \cos \psi y/\varrho_2) - g (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \}.\end{aligned}\quad (33)$$

Setzt man die gefundenen Werte (22), (24), (33) in (21) ein und entwickelt auf der rechten Seite die ersten beiden Glieder mit Hilfe der Gleichungen (25) und (8), so ist die Differentialgleichung der Pendelbewegung

$$\begin{aligned}\vartheta'' (A_{22} + A_{33}) - P_1 \sin \vartheta - Q_1 \cos \vartheta - S_1 \sin 2\vartheta - T_1 \cos 2\vartheta = \\ = A_{12} \omega^2 \sin \alpha \sin \psi_0 (\cos \psi_0 \cos \vartheta + \cos \alpha \sin \psi_0 \sin \vartheta) + A_{13} \omega^2 \sin \alpha \sin \psi_0 (\cos \psi_0 \sin \vartheta - \cos \alpha \sin \psi_0 \cos \vartheta) \\ + (A_{33} - A_{22}) \omega^2 (1/2 \cos^2 \psi_0 \sin 2\vartheta - 1/2 \cos^2 \alpha \sin^2 \psi_0 \sin 2\vartheta - 1/2 \cos \alpha \sin 2\psi_0 \cos 2\vartheta) \\ + A_{23} \omega^2 (\cos \alpha \sin 2\psi_0 \sin 2\vartheta - \cos^2 \alpha \sin^2 \psi_0 \cos 2\vartheta + \cos^2 \psi_0 \cos 2\vartheta) \\ - (\omega^2 R_0 \cos \varphi_0/\varrho_2) \sin \alpha \Sigma m y z - \Sigma m g z (\cos \alpha x/\varrho_1 + \sin \alpha \cos \psi y/\varrho_2) - \Sigma m g (x \cos \alpha + y \sin \alpha).\end{aligned}\quad (34)$$

Ist  $g_0$  die Beschleunigung im Punkte  $O$ , so ist im Punkte  $(x, y, z)$

$$g = g_0 + x g_x' + y g_y' + z g_z' \quad (35)$$

wo  $g_x' = \partial g / \partial x = (1/\varrho_1) \partial g / \partial \psi$ ,  $g_y' = \partial g / \partial y = (1/\varrho_2) \partial g / \partial \lambda$ ,  $g_z' = \partial g / \partial z$ .

Nach *Helmert*<sup>1)</sup> ist im Meeresniveau bei regelmäßigem Verlauf

$$g = 978.046 (1 + 0.005302 \sin^2 \psi - 0.000007 \sin^2 2\psi)$$

und daraus  $g_x' = (1/\varrho_1) 978 \cdot 0.0053 \sin 2\psi = 77 \cdot 10^{-10} \sin 2\psi$ ,  $g_y' = 0$ ,  $g_z' = 0.000003069 + 0.000000004 \sin^2 \psi$ .<sup>2)</sup>

Die Derivationen von  $g$  sind also von derselben Ordnung wie  $\xi/\varrho$  u. s. w. Bezeichnen wir noch die Trägheitsmomente

$$A = \Sigma m (\eta^2 + \zeta^2) \quad B = \Sigma m (\xi^2 + \zeta^2) \quad C = \Sigma m (\xi^2 + \eta^2) \quad (36)$$

und entwickeln noch die Summen  $\Sigma m x y$ ,  $\Sigma m x z \dots$  in (34) mit Rücksicht auf (35) und (8), so ist

$$A \vartheta'' + P \sin \vartheta + Q \cos \vartheta + S \sin 2\vartheta + U \cos 2\vartheta + V = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\text{wo } P &= 1/2 A_{12} \sin 2\alpha [(\omega^2 R_0 \cos \varphi_0 + g_0 \cos \psi_0)/\varrho_2 - g_0/\varrho_1 - \omega^2] + M g_0 \varrho + A_{13} (g_x' \sin \alpha - g_y' \cos \alpha) \\ Q &= 1/2 A_{13} \sin 2\alpha [\omega^2 + g_0/\varrho_1 - (\omega^2 R_0 \cos \varphi_0 + g_0 \cos \psi_0)/\varrho_2] + A_{12} (g_x' \sin \alpha - g_y' \cos \alpha) \\ S &= 1/2 (B - C) [g_x' - \omega^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha g_0/\varrho_1 + (\omega^2 R_0 \cos \varphi_0 + g_0 \cos \psi_0) \sin^2 \alpha/\varrho_2] + A_{23} (g_x' \cos \alpha + g_y' \sin \alpha) \\ U &= A_{23} [g_z' - \omega^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha g_0/\varrho_1 + (\omega^2 R_0 \cos \varphi_0 + g_0 \cos \psi_0) \sin^2 \alpha/\varrho_2] + 1/2 (B - C) (g_x' \cos \alpha + g_y' \sin \alpha) \\ V &= 1/2 A (g_x' \cos \alpha + g_y' \sin \alpha).\end{aligned}$$

Ist das Pendel symmetrisch gebaut und sind  $\xi \zeta$ ,  $\eta \zeta$  seine Symmetrie-Ebenen, so ist  $A_{12} = 0$ ,  $A_{13} = 0$ ,  $A_{23} = 0$  und die Ausdrücke  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $U$  vereinfachen sich sehr. Wenn die Erdoberfläche in  $O$  wirklich eine Rotationsfläche ist, deren Achse die Erdachse ist, so ist  $\varrho_2 = R_0 \cos \varphi_0$ , und die Glieder mit  $\omega^2$  fallen weg. Ist  $\varrho_3$  der Krümmungsradius des zur Meridian-

ebene senkrechten Normalschnittes, so ist  $\varrho_2 = \varrho_3 \cos \psi_0$ , und wenn die Meridianebene ein Hauptschnitt ist,  $\varrho_3$  der Krümmungsradius der Niveaufäche in der Schwingungsebene, dann ist  $\cos^2 \alpha/\varrho_1 + \sin^2 \alpha/\varrho_2 = 1/\varrho_3$ . Schreibt man noch

$$g_s' = g_x' \cos \alpha + g_y' \sin \alpha$$

so ist die Gleichung (37) der Bewegung des Pendels

$$A \vartheta'' + M g_0 \varrho \sin \vartheta + 1/2 (B - C) (g_s' + g_0/\varrho_3) \sin 2\vartheta + 1/2 (B - C) g_s' \cos 2\vartheta + 1/2 A g_s' = 0$$

$$\text{und ihr Integral } A (d\vartheta/dt)^2 - 2 M g_0 \varrho \cos \vartheta - 1/2 (B - C) (g_s' + g_0/\varrho_3) \cos 2\vartheta + 1/2 (B - C) g_s' \sin 2\vartheta + A g_s' \vartheta = K. \quad (38)$$

Die oben angeführten Zahlenwerte zeigen, daß die Koeffizienten von  $\sin 2\vartheta$  und  $\vartheta$  sehr klein im Verhältnis zum Koeffizienten von  $\cos 2\vartheta$  sind. Vernachlässigen wir diese beiden Glieder, so ist, wenn  $\vartheta_0$  die Amplitude bezeichnet

$$A (d\vartheta/dt)^2 = 2 M g_0 \varrho (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) + 1/2 (B - C) (g_s' + g_0/\varrho_3) (\cos 2\vartheta - \cos 2\vartheta_0)$$

und nach kurzer Umformung, wenn die Veränderliche  $\mu$  eingeführt wird

$$\sin 1/2 \vartheta = \sin 1/2 \vartheta_0 \sin \mu \quad (39)$$

$$V(A/M g_0 \varrho) d\mu (1 - \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu)^{-1/2} = dt V(1 + D \cos^2 1/2 \vartheta_0) V[1 - (D \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu)/(1 + D \cos^2 1/2 \vartheta_0)]$$

wo  $D = (g_s' + g_0/\varrho_3) \cdot (B - C)/M g_0 \varrho$ . Hieraus folgt die Schwingungszeit

$$t = 2 \sqrt{\frac{A}{M g_0 \varrho (1 + D \cos^2 1/2 \vartheta_0)}} \int_0^{1/2 \pi} \frac{d\mu}{F_1 F_2} \quad (40)$$

und wenn man die Reihen

$$1/F_1 = (1 - \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu)^{-1/2} = 1 + 1/2 \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu + [(1 \cdot 3)/(2 \cdot 4)] \sin^4 1/2 \vartheta_0 \sin^4 \mu$$

$$1/F_2 = [1 - (D \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu)/(1 + D \cos^2 1/2 \vartheta_0)]^{-1/2} = 1 + 1/2 D \sin^2 1/2 \vartheta_0 \sin^2 \mu$$

entwickelt und sich auf die erste Potenz von  $D$  beschränkt, so wird

$$t = \pi V \{ A/[M g_0 \varrho (1 + D \cos^2 1/2 \vartheta_0)] \} \{ 1 + (1/2)^2 (1 + D) \sin^2 1/2 \vartheta_0 + [(1 \cdot 3)/(2 \cdot 4)]^2 (1 + 2/3 D) \sin^4 1/2 \vartheta_0 \}. \quad (41)$$

<sup>1)</sup> Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau. Sitz.-Ber. d. Pr. Ak. d. Wiss. 1901 S. 328.

<sup>2)</sup> *Rudski*, Physik der Erde, S. 62.

Die Korrektur auf unendlich kleine Amplitude hat sich also sehr wenig geändert gegen den Fall, wenn  $D$  nicht berücksichtigt wird. Im Nenner erscheint aber der Faktor  $1 + D \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta_0$ , eventuell  $1 + D$  bei unendlich kleiner Amplitude.

Das  $g$ , welches aus der üblichen Formel  $t = \pi \sqrt{l/g}$  folgt, ist demnach  $g = g_0 (1 + D)$ , wo  $g_0$  den Wert von  $g$  im Koordinatenanfang an der Achse des Pendels bedeutet. Daraus

$$g_0 = g(1 - D) = g - gD = g - (g_z' + g_0/q_s) \cdot (B - C)/Mq. \quad (42)$$

Da  $C$  gegen  $B$  klein ist und  $B$  von derselben Ordnung wie  $A$ , so ist  $(B - C)/Mq$  von der Ordnung der reduzierten Pendellänge, beim Sekundenpendel etwa 100 cm. Für  $q_s$  nehmen wir den Erdradius, dann ist  $g_0/q_s = 1.5 \cdot 10^{-6}$ ; wie oben angeführt wurde, ist  $g_z' = 3.1 \cdot 10^{-6}$ . Die Reduktion in (42) ist also rund

$$(g_z' + g_0/q_s) \cdot (B - C)/Mq = 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ cm sec}^{-2}.$$

Schließlich werden wir noch zeigen, daß die Glieder mit  $\omega^2$  in den Gleichungen, welche *Denizot* für die Bewegung des Foucaultschen Pendels abgeleitet hat und welche seinerzeit eine Polemik hervorgerufen haben, fortfallen, wenn man Rücksicht auf die Konvergenz der Schwerkräfterichtungen und auf die Änderung der Schwerkraft nimmt.

Aus den Bewegungsgleichungen (11) folgt für die relative Bewegung eines Massenpunktes, wenn man mit Hilfe von (2), (3), (4) und (13) die Größen  $X', Y', Z', x', y', z'$  eliminiert,

$$\begin{aligned} m \cdot d^2 x / dt^2 &= X - m \omega^2 R_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_0 \\ &\quad - m \omega^2 (x \sin^2 \psi_0 + z \sin \psi_0 \cos \psi_0) \\ &\quad - 2m \omega \sin \psi_0 \cdot dy/dt \end{aligned}$$

Raudnitz, 1918 Juni.

<sup>1)</sup> Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung. S. 39.

$$\begin{aligned} m \cdot d^2 y / dt^2 &= Y + m \omega^2 y + 2m \omega (\sin \psi_0 \cdot dx/dt + \cos \psi_0 \cdot dz/dt) \\ m \cdot d^2 z / dt^2 &= Z - m R_0 \omega^2 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 + m \omega^2 \times \\ &\quad \times (x \sin \psi_0 \cos \psi_0 + z \cos^2 \psi_0) - 2m \omega \cos \psi_0 \cdot dy/dt. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen hat *Denizot*<sup>1)</sup> vektoranalytisch entwickelt und bemerkt ausdrücklich, daß  $X, Y, Z$  Komponenten der reinen Gravitationskraft sind. Wenn es sich um einen Punkt handelt, der an einem unbiegsamen Faden von der Länge  $l$  aufgehängt ist, so ist  $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ , und man hat auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen noch die Glieder  $\lambda x, \lambda y$  bzw.  $\lambda z$  hinzuzufügen. Für  $X, Y, Z$  haben wir aber die Werte (31) abgeleitet und mit Rücksicht auf (32') ist also

$$\begin{aligned} X &= m (\omega^2 R \cos \varphi \sin \psi_0 - g \cdot x/q_1) \\ Y &= -m (\omega^2 R_0 \cos \varphi_0 + g \cos \psi_0) y/q_2 \\ Z &= m (\omega^2 R \cos \varphi \cos \psi_0 + g). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} R \cos \varphi &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= R_0 \cos \varphi_0 [1 - (x \sin \psi_0 + z \cos \psi_0)/R_0 \cos \varphi_0] \end{aligned}$$

und die Bewegungsgleichungen des Foucaultschen Pendels sind

$$\begin{aligned} d^2 x / dt^2 &= -2\omega \sin \psi_0 dy/dt - g_0 \cdot x/q_1 + \lambda x \\ d^2 y / dt^2 &= \omega^2 y (1 - \cos \varphi_0 R_0/q_2) \\ &\quad + 2\omega (\sin \psi_0 dx/dt + \cos \psi_0 dz/dt) - g_0 \cos \psi_0 y/q_2 + \lambda y \\ d^2 z / dt^2 &= g_0 + x g_z' + y g_y' + z g_z'' - 2\omega \cos \psi_0 \cdot dy/dt + \lambda z. \end{aligned}$$

Ist die Erdoberfläche eine Rotationsfläche, so ist  $q_2 = R_0 \cos \varphi_0$ , und das Glied  $\omega^2$  fällt auch in der zweiten Gleichung fort. In den ersten beiden Gleichungen haben wir in den Korrektionsgliedern  $g_0$  statt  $g$  geschrieben, in der dritten den genaueren Wert (35).

V. Spaček.

## Vergleich zwischen den Flächenhelligkeiten von Ring und Zentralkörper des Saturn.

Von E. Hertzsprung.

In Zusammenhang mit einer Arbeit von Herrn Prof. E. Schoenberg betreffend die *Seeligersche* Theorie des Saturnringes habe ich mit dem visuellen 50 cm-Refraktor des Potsdamer Observatoriums bei Gelegenheit der Opposition 1914-15 in 12 Nächten 22 Platten mit 215 Expositionen des Saturnsystems aufgenommen.

Ein vom Kastellan *Fischer* hergestelltes Gitter bestehend aus 2.007 mm dicken Eisenstäben getrennt durch Zwischenräume derselben Weite wurde vor das Objektiv gesetzt. Der Sterngrößenunterschied zwischen Zentralbild und Nebenbild beträgt dann 0<sup>m</sup>.98. Die Aufnahmen geschahen auf Erythrosin Silberplatten (2 erste Platten Perutz-Perxanto, alle übrigen Schleußner Viridin) durch eine wässrige Lösung von Kaliummonochromat hindurch, sodaß nur Licht in der Nähe des scharfen Empfindlichkeitsmaximums im Gelbgrün zur Wirkung gelangte. Hierdurch wurde erreicht, daß die Nebenbilder erster Ordnung noch keine störende Dispersion zeigten. Die effektive Wellenlänge betrug etwa 547  $\mu\mu$ , sodaß Haupt- und Nebenbild, wie es die beistehende Figur zeigt, gut getrennt auf der Platte erscheinen. Die Skala der Aufnahmen war 1 mm = 16<sup>m</sup>.39. Die gewöhnliche Expositionszeit war 2<sup>m</sup>. Die Aufnahme einer Platte dauerte durchschnittlich 22<sup>m</sup>.



$4\frac{1}{3}$ malige Vergrößerung einer Exposition der Platte 140.

Die Platten wurden von Frau Geheimrat E. Schwarzschild und mit einem anderen Mikrophotometer zum Teil auch von Frl. H. Mattenklodt ausgemessen, wobei von dem Saturnbild ein Kreis von 0.15 mm = 2<sup>m</sup>.5 Durchmesser ausgeblendet wurde. Eingestellt wurde auf den Zentralkörper in der Nähe seiner Mitte und auf den beiden Ringhälften östlich und westlich an der breitesten Stelle des projizierten Bildes. Leider zeigen die meisten Aufnahmen so verwaschene Bilder, daß die Resultate

unzuverlässig werden. Eine Trennung zwischen innerem und äußerem Ring war sogar nur möglich auf der kleineren Hälfte der Platten. In diesem Falle wurde nur die hellste Stelle des Gesamtringes gemessen. Die schlechtesten Platten können nur zeigen, in welchem Maße das Resultat von der Unschärfe des Bildes beeinflusst wird. Ich habe deshalb das Aussehen der Bilder mit Zahlen bezeichnet, und zwar in einer Skala von 0 bis 20, steigend