

12.

Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoïds.

(Von Hrn. Dr. Joachimsthal zu Berlin.)

1.

Die Aufgabe, von einem beliebigen Punkte in der Ebene einer Ellipse Normalen an dieselbe zu ziehen, läßt keine Lösung durch den Kreis und die gerade Linie zu, da sie von einer nicht reducibaren Gleichung vierten Grades abhängt. Einige der Beziehungen zwischen den vier Normalen, welche von einem Punkte aus im Allgemeinen an die Curve möglich sind, sind in dem Folgendem enthalten.

Wir beweisen zuerst nachstehenden Hülfsatz:

Sind durch einen Hyperbelpunct b zwei Gerade den Asymptoten parallel und durch einen andern Hyperbelpunct a eine Transversale gezogen, welche die Hyperbel noch in c , jene Geraden in d und e schneidet, so bleibt das Verhältniß $\frac{cd}{ce}$ unverändert, während die Transversale sich um a bewegt. (Taf. II. Fig. 4.)

Schneiden ab und ad die Asymptoten in β , β' , γ , γ' , so ist bekanntlich $\gamma'c = \gamma a$, $\beta'b = \beta a$ und man hat

$$\frac{\gamma'd}{\gamma'a} = \frac{\beta'b}{\beta'a} \quad \text{oder} \quad cd = \frac{\beta'b}{\beta'a} \gamma'a - \gamma'c = \frac{\beta'b}{\beta'a} (\gamma'a - \gamma'c \frac{\beta'a}{\beta'b}).$$

Ferner ist

$$\gamma'c \frac{\beta'a}{\beta'b} = \gamma'c + \gamma'c \frac{ba}{\beta'b} = \gamma'c + \frac{\gamma a}{\beta a} ba = \gamma'c + ae,$$

also

$$cd = \frac{\beta'b}{\beta'a} (\gamma'a - \gamma'c - ae) = \frac{\beta'b}{\beta'a} ce \quad \text{oder} \quad \frac{cd}{ce} = \frac{\beta'b}{\beta'a}.$$

Die rechte Seite der Gleichung hängt nur von den festen Punkten b und a ab, ist also unveränderlich, und hiermit ist der Satz erwiesen. Umgekehrt hat man den Satz:

Bewegt sich um den festen Punkt a eine Transversale, welche zwei feste Gerade in d und e schneidet, und man bestimmt in jeder ihrer Lagen einen Punkt c dergestalt auf ihr, daß das Verhältniß $\frac{cd}{ce}$ einen constanten Werth erhält, so ist der Ort von c eine Hyperbel, welche durch a und den Durchschnittspunct b der festen Geraden geht; ihre Asymptoten sind letzteren parallel.

Ist nun b ein Punct einer Ellipse (Fig. 5.), sind bu , bs die Tangente und die Normale an demselben, os , ot die Richtungen der grossen und der kleinen Axe $2A$ und $2B$, und ou und bg auf der Tangente und der grossen Axe senkrecht, so hat man

$$\frac{bs}{bg} = \frac{ov}{ou},$$

oder, da $bg \cdot ov = B^2$ ist,

$$bs = \frac{B^2}{ou}$$

und, ähnlich,

$$bt = \frac{A^2}{ou},$$

also

$$\frac{bs}{bt} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Bewegt man daher um einen Punct l eine Transversale, deren Durchschnitte mit den Haupt-Axen s und t sein mögen, und bestimmt auf ihr in jeder ihrer Lagen einen Punct b dergestalt, daß $\frac{bs}{bt} = \frac{A^2}{B^2}$ ist, so wird die Transversale eine Normale der Ellipse, so oft b auf dem Umfange der Curve liegt. Nimmt man den vorhergehenden Satz zu Hülfe, so erhält man folgenden Satz:

Die Puncte, nach welchen man von einem gegebenen Puncte l Normalen an eine Ellipse ziehen kann, liegen mit l und dem Mittelpuncte der Curve in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten den Axen der Ellipse parallel sind.

Analytisch folgt der Satz unmittelbar aus der Gleichung der Normale.

2.

Sind 2 Puncte a und b der Ellipse gegeben, so wird man zwei andere Ellipsenpuncte α , β finden können, deren Normalen mit denen von a und b sich in einem Puncte treffen. In der That ist dazu nur erforderlich, die Durchschnitte der Ellipse mit derjenigen gleichseitigen Hyperbel zu construiren, welche durch a , b und den Mittelpunct der Ellipse geht, und deren Asymptoten den Axen der Ellipse parallel sind; oder auch die zweite gemeinschaftliche Secante beider Curven; die erste ist ab . Diese Aufgabe ist ein specieller Fall der andern: „Wenn von zwei Kegelschnitten zwei Durchschnittspuncte und ausserdem von jedem irgend 3 Puncte gegeben sind, ihre übrigen Durchschnittspuncte zu finden,“ für welche eine aus dem *Pascalschen Satze* sich ergebende Lösung bekannt ist. (Vergl. *Steiner*, „geometrische Constructionen“ pag. 102.) Wendet man dieselbe auf den vorliegenden Fall an, so würde die Construction etwa folgende sein:

Man bestimme den Ellipsenpunct B (Fig. 6.), b diametral gegenüber, ziehe von a eine Parallele mit einer Axe, welche die Ellipse in h treffen mag; die Gerade Bh treffe jene Axe in e , so ist e ein Punct der zweiten gemeinschaftlichen Secante; einen zweiten Punct f derselben Linie erhält man, wenn dieselbe Operation in Bezug auf die andere Axe gemacht wird. Ist A der a diametral gegenüberliegende Ellipsenpunct, so ist der Durchschnitt der beiden Perpendikel, welche man in e und f auf den Axen errichtet, der Pol der Sehne AB . Ist nämlich $e\varepsilon$ das eine dieser Perpendikel, welches BA in ε schneidet, und sind a' , b' die Schnittpuncte der Axen mit AB , so sind b' und ε , A und B conjugirte harmonische Puncte; denn die Gerade Ae (welche in der Figur nicht gezogen ist) bildet mit Be einen Winkel, der von $e\varepsilon$ und eb' halbirt wird, $e\varepsilon$ ist daher die Polare von b' , und ebenso würde das durch f gehende Perpendikel die Polare von a' sein. Der Pol von AB ist demnach der Durchschnitt beider Lothe; und analog ist der Pol von ef derjenige Punct, in welchem die beiden in a' und b' auf den Axen errichteten Lothe sich schneiden.

3.

Diese Betrachtungen geben unmittelbar folgende Sätze: (Fig. 7.)

I. Es seien a und b zwei Ellipsenpuncte; der Mittelpunct der Curve sei o ; c der Durchschnitt der Tangenten an a und b , oder der Pol von ab ; c' liege c diametral gegenüber, so daß $oc' = oc$ ist. Fället man von c' Perpendikel auf die Haupt-Axen, so wird die Gerade durch ihre Fußspuncte den Kegelschnitt in zwei solchen Puncten α , β treffen, daß die Normalen von a , b , α , β in einem Puncte sich schneiden.

II. Es schneide die Sehne ab die Axen in a' , b' , und es seien $a'\gamma$, $b'\gamma$ auf ihnen senkrecht, γ' der dem Puncte γ diametral gegenüberliegende Punct. Legt man von γ' Tangenten an die Ellipse, so werden die Berührungspuncte α , β die Eigenschaft haben, daß die Normalen von a , b , α , β in einem Puncte sich schneiden.

Der Durchmesser, welcher $\alpha\beta$ parallel ist, ist demjenigen gleich, auf dessen Verlängerung c und c' liegen; denn sie schließsen gleiche Winkel mit den Axen ein. Liegt β' dem Puncte β diametral gegenüber, so ist die Richtung $\alpha\beta'$ der Richtung $\alpha\beta$ conjugirt, und wenn man erwägt, daß der zuletzt erwähnte Durchmesser der Sehne ab conjugirt ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß die Sehnen ab und $\alpha\beta'$ gleiche Winkel mit

den Axen bilden. Nach einem bekannten Satze liegen aber dann die vier Punkte in einem Kreise; also hat man Folgendes:

III. Sind a, b, α, β vier Ellipsenpunkte, an welche man von einem Punkte l aus Normalen ziehen kann, so liegen je drei von ihnen, z. B. a, b, α mit dem Ellipsenpunkte β' , der β diametral gegenüber liegt, in einem Kreise.

Läßt man in (I.) a und b zusammen fallen, so erhält man folgenden speciellen Satz:

IV. Es seien α und α' diametral gegenüberliegende Ellipsenpunkte. Fället man von α' Perpendikel auf die Haupt-Axen, so wird die Gerade durch ihre Fußpunkte den Kegelschnitt in zwei Punkten α und β treffen, deren Normalen durch den zu c gehörigen Krümmungsmittelpunct gehen. (Fig. 8.)

Ferner erhält man folgende Construction für die allgemeinste Aufgabe, auf welche noch der Kreis angewendet werden kann:

V. Es sei lb eine Normale eines Kegelschnittes am Punkte b desselben: man will von l noch alle übrigen möglichen Normalen an den Kegelschnitt ziehen. Zu diesem Ende errichte man Perpendikel auf die Axen, wo diese von der Normale lb geschnitten werden; ihr Durchschnitt sei p ; π und β seien die den Punkten p und b diametral gegenüberliegenden Punkte, und u die Mitte zwischen π und l . Ein Kreis, dessen Mittelpunkt u ist, und welcher durch β geht, wird die Ellipse in noch 3 Punkten schneiden, deren Normalen in l sich treffen. (Fig. 9.)

4.

Wie viele reelle Normalen von irgend einem Punkte aus an die Ellipse gezogen werden können, oder, was dasselbe ist, wie viele von den Durchschnitten der obigen Hyperbel mit der Ellipse reell bleiben, hat *Legendre* analytisch auf höchst elegante Weise angegeben (*Traité des Fonct. ellipt. T. I. p. 348*). Doch muß schon *Apollonius* im fünften Buche seiner Kegelschnitte ähnliche Untersuchungen angestellt haben, wie aus der Inhalts-Angabe zu ersehen, die *Chasles* in seiner Geschichte der neuern Geometrie von diesem Werke giebt. Vermittels der Sätze II. und IV. läßt sich die Frage sehr anschaulich erledigen, indem man den Weg verfolgt, den der Durchschnittspunct einer beweglichen Normale mit einer festen auf dieser nimmt. Es bedarf dazu folgender einfacher Hilfsbetrachtung.

Ist eine Curve C von einer Geraden G umhüllt, die sich stetig und in demselben Drehungssinne bewegt hatte, so wird der Durchschnitt D die-

ser beweglichen Tangente G mit einer festen Geraden G' auf dieser continuirlich fortrücken; mit der einzigen Ausnahme (welche in der neuern Geometrie kaum mehr als solche gilt), daß G der Geraden G' parallel geworden ist. D geht in diesem Falle von der einen Seite durch den unendlich entfernten Punct nach der andern Seite von G' . Es ist aber nicht nöthig, daß die Richtung von D beständig dieselbe sei. Denn wird die Curve C von G' in P geschnitten, so wird D nach P gelangen, und dann einen Theil der durchlaufenen Strecke zurückwandern. Nur wenn C von G' berührt wird, bleibt auch die Stetigkeit der Richtung; was nicht als Ausnahme zu betrachten ist; denn G' ist durch zwei unendlich nahe Puncte gegangen, und D hat dadurch eine zweimalige Aenderung seiner Richtung erfahren. Umgekehrt: findet eine Richtungsänderung für D statt, so kann dies nur in einem Puncte von C selbst sein. Für die Curve C sind nach den oben angegebenen Bedingungen auch Spitzen erster Art nicht ausgeschlossen, wo die beiden Zweige der Curve eine gemeinschaftliche Tangente haben, welche zwischen ihnen liegt. Die Evolute der Ellipse ist nach Art der Curve C entstanden. Will man also den Weg verfolgen, den der Durchschnitt einer beweglichen Normale mit einer festen am Puncte a durchläuft, so ist zu untersuchen, ob und wo diese letztere die Evolute schneide, oder welche Krümmungsmittelpuncte, aufer dem zu A selbst gehörigen, auf ihr liegen. Soll dies stattfinden, so muß der Punct, welchen wir in Satz II. durch γ bezeichnet haben, in die Peripherie der Ellipse fallen. Dies ist, wie eine einfache Betrachtung lehrt, unmöglich, so lange b in demselben Ellipsenquadranten liegt wie a , oder in den beiden nebenan liegenden (Fig. 8.). Entfernt sich b von dem Axen-Endpuncte o nach u hin, so muß es eine Lage p von b geben, für welche γ in die Peripherie der Ellipse nach μ fällt. In der That tritt γ in die Ellipse hinein, und kommt sogar nach dem Mittelpunct der Ellipse, wenn b nach a' , a diametral gegenüber, gekommen ist. Zwischen a' und u giebt es wieder eine Lage q , für welche jener Punct γ in die Peripherie nach λ fällt; von da tritt er wieder aus der Ellipse heraus. Man überzeugt sich leicht, daß dies zwischen p und q nicht schon geschehen sein kann. Liegen die Puncte m und l den Puncten μ und λ diametral gegenüber, so befinden sich die zu ihnen gehörigen Krümmungsmittelpuncte auf der Normale von a ; wir wollen sie mit M und L bezeichnen und den zu a gehörigen Krümmungsmittelpunct mit A . Construiren wir nach (IV.) auferdem die Puncte α und β , deren

Normalen durch A gehen, so können wir deutlich übersehen, welche Lage der Durchschnitt D jener Normalen am beweglichen Punkte b mit der festen Normale in a hat. Bewegt sich nemlich

b von a nach l ,	so bewegt sich D von A nach L ,
--- l --- β ,	- - - - - L - - A ,
--- β --- p ,	- - - - - A - - M ,
--- p durch a' nach q ,	- - - - - M durch d. unendl. entf. P nach L ,
--- q nach α ,	- - - - - L nach A ,
--- α --- m ,	- - - - - A - - M ,
--- m --- a ,	- - - - - M - - A .

Der Punkt β kann nicht zwischen a und l liegen, denn sonst fände zwischen a und β noch eine Richtungs-Aenderung für D statt, oder es läge zwischen a und β ein neuer Punkt, dessen Krümmungscentrum auf der Normale im Punkte a sich befände; was unmöglich ist. Es ergibt sich auch, daß A zwischen L und M liegen muß. Fassen wir das Obige zusammen, so sehen wir, daß die Normale am Punkte a in L , A und M von zwei andern Normalen, sonst aber zwischen L und M von drei, und auf der außerhalb LAM liegenden Strecke nur von einer andern Normale getroffen wird. Da die Evolute eine geschlossene Curve ist, so liegt also das Stück LAM innerhalb derselben. Erwägt man noch außerdem, daß von irgend einem beliebigen Punkte immer doch zwei Normalen möglich sein müssen, (da es nothwendigerweise eine kürzeste und eine längste Entfernung des Punktes von der Ellipse giebt, welche bekanntlich immer senkrecht auf der Curve stehen), so kann man das vorhin erhaltene Resultat wie folgt aussprechen:

„Liegt ein Punkt innerhalb der Evolute, so gehen durch ihn vier Normalen

„der Ellipse: liegt er auf der Evolute selbst, drei: liegt er außerhalb, zwei.“

Dies ist das von *Legendre* gegebene Resultat.

5.

Einige metrische Relationen haben vielleicht noch Interesse, weil sie eine Ausdehnung des bekannten Ausdrucks für den Krümmungsradius sind.

Es seien n, n' die Stücke zweier Normalen einer Ellipse, von den Punkten a, b der Curve bis zu ihrem Durchschnitte l ; p, p' seien die Abstände der Tangenten an a und b vom Mittelpunkte und $2d$ der Durchmesser, welcher der Sehne ab parallel ist, so hat man

$$pn + p'n' = 2d^2.$$

Denn bezeichnet man ca und cb (Fig. 5.) mit t, t' , co mit z , do mit x , $ad=db$ mit y , so würde man, wenn cl gezogen würde,

$$cl = \frac{ab}{\sin acb} = \frac{2y}{\sin acb}$$

haben, und demnach, zufolge des Ptolemäischen Lehrsatzes:

$$t'n + t'n = \frac{4y^2}{\sin acb}.$$

Drückt man das Dreieck acb auf zwei verschiedene Arten aus, so erhält man

$$tt' \sin acb = 2y(z-x) \sin adc.$$

Dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{n}{t} + \frac{n'}{t'} = \frac{2y}{\sin adc(z-x)}.$$

Es ist aber

$$tp = z.y \sin adc, \quad t'p' = z.y \sin adc;$$

substituirt man diese Werthe von t und t' , so erhält man

$$np + n'p' = 2y^2 \frac{z}{z-x}.$$

Nach bekannten Sätzen ist aber $\frac{z}{z-x} = \frac{d^2}{y^2}$, also

$$np + n'p' = 2d^2.$$

Läfst man a und b zusammenfallen, so wird n der Krümmungsradius, und $n' = n$, $p = p'$, also

$$n = \frac{d^2}{p};$$

wo d den Halbmesser bedeutet, welcher der Tangente an a parallel ist.

Da die Sehnen ab und $\alpha\beta$ Durchmesser parallel sind, welche die Größe zweier zusammengehöriger conjugirter Durchmesser haben, so erhält man folgenden Satz:

„Schneiden sich die Normalen der vier Punkte a, b, α, β einer Ellipse „im Punkte l , und bezeichnet man die Abstände der Tangenten an „diesen Punkten vom Mittelpunkte durch p, p', p'', p''' , die Normal- „längen $la, lb, l\alpha, l\beta$ durch n, n', n'', n''' , so ist

$$np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 2(A^2 + B^2),$$

„wo A und B die Halb-Axen der Curve bedeuten.

Alle diese Sätze gelten fast gleichmäßig für die Hyperbel; für die Parabel sind wesentliche Aenderungen nöthig.

6.

Die Behandlung der Normalen auf dem Ellipsoïde ist weniger einfach, weil sich die Normalen in zwei beliebigen Punkten f und g im All-

gemeinen nicht schneiden. Soll dies stattfinden, so muß der Durchschnitt der Tangential-Ebenen von f und g mit der Sehne fg im Raume rechte Winkel bilden; was die einfachste stereometrische Betrachtung lehrt; oder mit andern Worten:

Soll eine Gerade eine Fläche zweiten Grades in zwei solchen Punkten schneiden, daß deren Normalen im Raume sich treffen, so ist erforderlich und genügend, daß sie mit ihrer Polare im Raume rechte Winkel bilde.

Dieser höchst einfache Satz erlaubt eine Menge Folgerungen, wenn man die Eigenschaften polarer Graden als bekannt voraussetzt. Da z. B. zwei polare Grade zweien conjugirten Durchmessern parallel sind, und wenn die eine die Fläche berührt, die andre es ebenfalls thut, so ergibt sich zuerst der für alle krumme Flächen geltende Satz, daß, wenn man von einem Punkte der Fläche a ausgeht, man nur in zwei Richtungen einen unendlich nahen Punkt b findet, so daß die Normalen von a und b sich treffen, und daß diese Richtungen zu einander senkrecht sind. Für Flächen zweiten Grades insbesondere folgt, daß diese beiden Richtungen (die sogenannten Haupttangenten) den Haupt-Axen des Durchmesserschnitts parallel sind, welcher parallel mit der Tangential-Ebene vom Punkte a gelegt ist. Dieser Satz ist von *Dupin*. Verfolgt man eine jener beiden Richtungen, so erhält man bekanntlich die Krümmungslinien.

In jedem Punkte eines Ellipsoides lassen sich nun vier Tangenten hervorheben: a und b die Haupttangenten und c und d die Kreisschnitttangenten, in deren Richtung (und außerdem senkrecht auf die Ebene der größten und kleinsten Axe der Fläche) man schneiden muß, um die beiden Kreise zu erhalten, welche durch den gegebenen Punkt gehen.

Zieht man zwei Durchmesser c' und d' mit den Kreistangenten c und d parallel, so werden diese untereinander und der mittleren Axe gleich sein; denn sie liegen in den beiden Kreisen, welche durch die mittlere Axe gehen. Sind die Durchmesser a' und b' mit den Haupttangenten parallel, so liegen a' , b' , c' und d' in einer Durchmesser-Ebene, und a' , b' sind die Haupt-Axen der in ihr liegenden Ellipse; folglich müssen die gleichen Durchmesser c' , d' mit ihnen gleiche Winkel einschließen, oder, auf die Tangenten übertragen:

„Die Haupttangenten sind die Halbirungslinien der Winkel, welche die „Kreistangenten bilden.“

Ich hielt diesen Satz für neu, fand aber später, daß *Chasles* in einem Bande der von *Quetelet* herausgegebenen *Correspondence mathématique* ohne Beweis ihn mitgetheilt hat. Mit Hilfe desselben kann man einen andern Satz von Krümmungslinien beweisen, den ich in einer früheren Abhandlung aufgestellt und analytisch verificirt habe.

Man denke sich aufser dem Ellipsoid irgendwo eine Kugel, so kann man bekanntlich jeder Ebene einen grössten Kreis und jeder unbegrenzten Geraden zwei Punkte der Kugel entsprechen lassen, indem man parallele Gebilde durch den Mittelpunkt der Kugel legt. Bewegt sich eine Tangential-Ebene eines Ellipsoides längs einer Krümmungslinie, so bildet sie eine abwickelbare Oberfläche, deren Kanten diejenigen Haupttangenten der Fläche sind, welche auf jener Krümmungslinie senkrecht stehen. Das entsprechende Gebilde auf der Kugel wird eine geschlossene Curve C sein, deren sphärische Tangenten jenen Tangential-Ebenen des Ellipsoides, deren einzelne Punkte den Kanten der abwickelbaren Oberfläche, oder, wie schon erwähnt, einem Systeme von Haupttangenten, entsprechen. Sämmtlichen Kreisschnitt-tangenten werden Punkte entsprechen, die in den beiden grössten Kreisen K, K' liegen, deren Ebenen den Richtungen der Kreisschnitte parallel sind. Tragen wir den vorhergehenden Lehrsatz auf die Curve C über, so sehen wir, sie hat die Eigenschaft, daß, wenn man in einem ihrer Punkte o die sphärische Tangente zieht, welche zwei feste Kreise K, K' in k und k' schneidet, die beiden Bogen ko und $k'o$ gleich sind. Die Curve C ist demnach ein sphärischer Kegelschnitt, dessen Asymptoten die Kreise K und K' sind. (Vergl. *Steiner* „über die Verwandlung sphärischer Figuren,“ gegenwärtiges Journ. Bd. 2. pag. 59.) Es bleibt also auch das sphärische Dreieck zwischen K, K' und einer beliebigen Tangente von C von constantem Inhalte, und da dieses von der Summe der Winkel abhängt, deren einer zwischen K und K' constant ist, so muß es auch die Summe der beiden andern sein. Ueberträgt man dies auf das Ellipsoid, und erwägt, daß, wenn man statt des einen Winkels den Nebenwinkel nimmt, für die Summe die Differenz gesetzt werden muß, so erhält man folgenden Satz:

„Wenn sich eine Tangential-Ebene eines Ellipsoides so bewegt, daß
 „der Berührungspunkt eine Krümmungslinie beschreibt, so bleibt die
 „Summe oder Differenz der Winkel, welche sie mit den Richtungen
 „der Kreisschnitte bildet, unverändert.“

Berlin im Juni 1843.