# 11.

# Beweise einiger geometrischen Sätze.

(Von Herrn *Th. Scheerer*, Stud. math.)

---

I. **Lehrsatz.** *Jede Ebene welche durch die Mittelpuncte zweier gegenüberstehender Kanten eines beliebigen Tetraëders gelegt wird, halbirt dasselbe.* (Gergonne's Annalen.)

Beweis. $ABCD$ (Taf. I. Fig. 11.) sei ein beliebiges Tetraëder, $E$ und $F$ seien die Mitten zweier gegenüberstehender Kanten. Legt man durch die Kante $AD$ und den Punct $E$ eine Ebene, so wird, weil sie durch den Scheitel $A$ geht, und die Grundfläche $BCD$ halbirt, das Tetraëder durch dieselbe in zwei Hälften getheilt:

$$1.\quad ACDE = ABDE = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Wird eine Ebene durch den Punct $F$ und die Kante $BC$ gelegt, so ist aus demselben Grunde: $\quad 2.\quad BCDF = ABCF = \tfrac{1}{2} ABCD.$

Aus (1. und 2.) folgt: $\quad 3.\quad ACDE = ABCF.$

Da aber $ACDE$ und $ABCF$ das Tetraëder $ACEF$ gemein haben, so ergiebt sich aus (3.): $\quad 4.\quad CDEF = ABEF.$

Jetzt lege man eine beliebige Ebene $EGFH$ durch $E$ und $F$, und fälle aus den vier Ecken des Tetraëders die vier Lothe $a$, $b$, $c$ und $d$ auf dieselbe, so ist:

$$a \times EFH + d \times EFH = CDEF,$$
$$b \times EFG + c \times EFG = ABEF,$$

und deshalb nach (4.):

$$5.\quad (a+d)EFH = (b+c)EFG.$$

Da die Ebene $EGFH$ die Kanten $AD$ und $BC$ in der Mitte schneidet, und die Neigungswinkel dieser Kanten unterhalb und oberhalb jener Ebene gleich sind, so ist $a = c$ und $d = b$, woraus folgt:

$$6.\quad EFH = EFG,$$
$$7.\quad d \times EFH = b \times EFG,$$
$$8.\quad DEFH = AEFG.$$

Aus (1. und 8.) aber folgt:

$$9.\quad ACHEGF = BDHEGF.$$

II. **Lehrsatz.** *Zieht man in einem convexen Vieleck alle möglichen Diagonalen, und verlängert alle Seiten, daſs alle diese Geraden einander wo möglich paarweise schneiden: so entstehen, im Allgemeinen,*

Brought to you by | New York University Bobst Library Technical Services
Authenticated
Download Date | 5/24/15 4:27 AM

*innerhalb des Vielecks gerade halb so viele Durchschnittspuncte als aufserhalb, z. B. beim Zwanzigeck innerhalb* 4845, *aufserhalb* 9690. (Gegenw. Journal, Band III. Heft 2. S. 209.)

**Beweis.** Bei einem beliebigen $n$ Eck werden, bei Verlängerung der Seiten und Diagonalen, im Allgemeinen nur solche Durchschnittspuncte entstehen, die von zwei Geraden gebildet werden. Nun kann man bekanntlich durch vier Puncte sechs Gerade legen, und diese schneiden sich paarweise in drei Puncten, von denen einer innerhalb und zwei aufserhalb der beiden Puncte liegen. Zu je vier Ecken eines $n$ Ecks werden also ebenfalls ein Durchschnittspunct in dem Polygon, und zwei aufserhalb desselben gehören. So viel mal, wie man also vier verschiedene Ecken zusammenstellen kann, so viel Durchschnittspuncte wird es innerhalb, und noch einmal so viel aufserhalb geben. Es lassen aber $n$ Elemente, zu vieren geordnet verbunden, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ verschiedene Verbindungen zu. Daher giebt es $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Durchschnittspuncte im $n$ Ecke, und $2\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ aufserhalb desselben. Beim Zwanzigeck würden dies z. B. innerhalb $\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=4845$, und aufserhalb $2\times\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=9690$ sein.

**III. Aufgabe.** *Drei in einer Ecke zusammenstofsende Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben: man soll die der Ecke gegenüberliegende Seitenfläche so bestimmen, dafs der Inhalt der Pyramide ein Maximum sei.* (Gegenw. Journal, Band V. Heft. 3. Seite 318.)

**Auflösung.** Da die Gröfse einer dreiseitigen Pyramide von ihrer Grundfläche und Höhe abhängig ist, so werden die drei gegebenen Kanten nothwendig so zusammengefügt werden müssen, dafs die möglichst gröfste Grundfläche und Höhe entstehet. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn zwei Kanten auf einander senkrecht stehen, und die dritte auf beiden senkrecht ist. Denn sobald die dritte Kante mit den andern keine rechte Winkel mehr bildet, ist die Höhe, und sobald die beiden übrigen Kanten nicht mehr senkrecht zu einander sind, die Grundfläche kleiner als vorher. Sind $a$, $b$, $c$ die drei gegebenen Kanten, so müfste also, für das Maximum des aus ihnen zusammengefügten Tetraëders, nach einem bekannten Lehrsatze, die gegenüberliegende Fläche $=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}$ sein *).

*) Die nemliche Auflösung ist auch von dem ungenannten Herrn Verfasser des Aufsatzes Nr. 7. in diesem Journal gefunden und dem Herausgeber fast zu derselben Zeit mitgetheilt worden, als er die gegenwärtige erhielt. Anm d. Herausg.



Brought to you by | New York University Bobst Library Technical Services
Authenticated
Download Date | 5/24/15 4:27 AM