Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen.

(Erste Mitteilung.)

Von

E. Hecke in Basel.

Einige sehr verschiedenartige Fragen aus der Funktionen- und Zahlentheorie haben mich zu der Erkenntnis geführt, daß die bisher eingeführten Zeta- und L-Funktionen noch nicht ausreichen, um die Theorie in vollem Umfange angreifen zu können. Vielmehr muß noch eine Erweiterung in neuer Richtung eintreten, welche dem Vorhandensein von Einheiten in den algebraischen Körpern gerecht wird. Ich setze den Grundgedanken am reellen quadratischen Körper auseinander.

Sei h die Klassenzahl, ε die Grundeinheit. Alsdann ordnen wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine Größe $\lambda(\mathfrak{a})$ zu vermöge der Gleichung

$$\lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{\frac{\pi i}{\log|\varepsilon|} \log\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\}, \qquad (\exp x = e^x)$$

worin die Zahl α (α' ist die Konjugierte) sich aus

$$\alpha = \mathfrak{a}^h$$

bestimmt. Ersichtlich hängt $\lambda(\mathfrak{a})$ nicht davon ab, welche der assoziierten Zahlen man für α wählt. λ hat den Betrag 1 und es gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}) \cdot \lambda(\mathfrak{b}).$$

Daher ist die Reihe

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

worin $\mathfrak{r}$ alle Ideale des Körpers durchläuft, konvergent für $\Re(s) > 1$ und hier gilt auch noch die Produktzerlegung

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

(über die Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstrecken). Daraus geht hervor, daß $f(s)$ mit der Verteilung der Primideale zusammenhängt. Dieser Ansatz läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man an Stelle von λ eine Potenz von λ mit ganzen rationalen, oder sogar mit gebrochenen Exponenten einsetzt. Alle diese unendlich vielen verschiedenen Funktionen lassen sich nach meiner von der Zetafunktion her bekannten Methode behandeln. Insbesondere zeigt sich, daß alle $f(s)$ ganze transzendente Funktionen sind, die einer Funktionalgleichung des bekannten Typus genügen, und im Punkte $s=1$ (wie auch auf der ganzen Geraden $\Re(s)=1$) nicht verschwinden. Letzteres liefert einen Existenzsatz etwa derart, daß eine indefinite quadratische Form auch dann noch unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn man die ganzzahligen Variabeln x, y in der x-y-Ebene auf einen beliebigen *Winkelraum* einschränkt, der durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen gebildet wird.

Zur obigen Definition von $\lambda(\alpha)$ gelangt man ganz naturgemäß, wenn man sich die Aufgabe stellt, eine Funktion $\lambda(x)$ des positiven Argumentes x zu bestimmen, so daß

$$\lambda(\varepsilon x)=\lambda(x),$$

$$\lambda(x \cdot y)=\lambda(x) \cdot \lambda(y).$$

In der vorliegenden Arbeit bringe ich in § 1 für einen beliebigen Körper die Definition der λ, welche ich Charaktere nach den Einheiten nenne. In § 2 führe ich die neuen Zetafunktionen ein und beweise unter Vorwegnahme der Tatsache, daß sie in der ganzen Ebene regulär sind, ihr Nichtverschwinden auf der Geraden $\Re(s)=1$; sodann gebe ich in § 3 den Existenzbeweis für Primideale, deren Charaktere in einen beliebig vorgeschriebenen Bereich fallen. Die Dirichletsche Methode ist hier, wo man *unendlich viele* Funktionen mit Charakteren hat, erst nach einer Modifikation anwendbar. In § 4 endlich, der nur formaler Natur ist und keinen neuen Gedanken bringt, führe ich diese Zetafunktionen auf die Thetafunktionen zurück, woraus sich ergibt, daß sie ganze transzendente Funktionen sind. Schließlich behandle ich in § 5 einige Modifikationen am Beispiel des reellen quadratischen Körpers, wo ich auch den Zusammenhang dieser Theorie mit dem oben angeführten Satze über Primzahlen in indefiniten quadratischen Formen erörtere. In einer zweiten Mitteilung beabsichtige ich, eine Erweiterung der Definition der λ vorzunehmen, worin dann die konjugierten Größen nicht nur mit ihrem absoluten Betrag auftreten.

§ 1.

Charaktere eines Ideals nach den Einheiten.

Sei k ein algebraischer Zahlkörper von n-tem Grade; unter den Konjugierten seien

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \ldots\ k^{(r_1)} \quad \text{reell},$$

$$k^{(r_1+1)},\ \ldots\ k^{(r_1+r_2)} \quad \text{imaginär}$$

und $k^{(r_1+p)}$ konjugiert imaginär mit $k^{(r_1+r_2+p)}$ für $p = 1, 2, \ldots, r_2$.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner Note über die L-Funktionen (Göttinger Nachrichten 1917, S. 299–318).

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten, so hat die Matrix von $(r+1)^2$ Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(2)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(2)}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(r+1)}| & \ldots & \log|\varepsilon_r^{(r+1)}| \end{pmatrix}$$

eine von Null verschiedene Determinante und die reziproke Matrix möge sein:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n}e_1 & \frac{1}{n}e_2 & \ldots & \frac{1}{n}e_{r+1} \\ e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \ldots & e_{r+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^{(r)} & e_2^{(r)} & \ldots & e_{r+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Es bestehen also die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{e_q}{n} + \sum_{k=1}^{r} e_q^{(k)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{pq}, \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, r+1)$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{q=1}^{r+1} e_q = 1, \qquad \sum\limits_{q=1}^{r+1} e_q^{(p)} = 0, \\ \sum\limits_{q=1}^{r+1} e_q \log|\varepsilon_p^{(q)}| = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, r) \end{cases}$$

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{kq}. \qquad (k, q = 1, 2, \ldots, r)$$

Hierbei ist $\delta_{pq} = 1$, wenn $p = q$, sonst gleich Null.

Unter dem log ist hier, wie auch späterhin, der reelle Wert zu verstehen.

Aus (2) entnimmt man noch die Werte von e_q

$$e_q = 1 \quad \text{für} \quad q = 1, 2, \ldots, r_1,$$
$$e_q = 2 \quad \text{für} \quad q \geqq r_1 + 1.$$

Wir ordnen nun jeder von 0 verschiedenen Zahl μ des Körpers k in folgender Weise eine Zahl vom absoluten Betrage 1 zu, die mit $\lambda(\mu)$ bezeichnet werde:

Seien $m_1, m_2, \ldots m_r$ beliebige ganze rationale Zahlen, so setzen wir

$$(4) \qquad \lambda(\mu) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\mu^{(p)}|\right\}.$$

Für jedes feste System m ist so eine zahlentheoretische Funktion $\lambda(\mu)$ definiert, welche ein *Charakter der Zahl μ nach den Einheiten* heiße und folgende Eigenschaften hat:

1) Für eine beliebige Einheit η des Körpers ist wegen (3)

$$\lambda(\eta\mu) = \lambda(\mu).$$

Also ist $\lambda(\mu)$ dem *Ideal* (μ) zugeordnet.

2) $|\lambda(\mu)| = 1$,

3) $\lambda(\alpha\cdot\beta) = \lambda(\alpha)\cdot\lambda(\beta)$ für beliebige von Null verschiedene Körperzahlen α, β.

4) Ist $\lambda(\mu)$ für alle ganzen Körperzahlen, also für alle Körperzahlen, gleich 1, so ist notwendig $m_1 = m_2 = \ldots m_r = 0$. Denn setzt man dann $1 + t\mu^{(p)}$ an Stelle von $\mu^{(p)}$ und läßt t über rationale Werte gegen Null konvergieren, so folgt $\sum_{p=1}^{r} m_q e_p^{(q)} = 0$ für $p = 1, \ldots r+1$ und hieraus $m_1 = \ldots = m_r = 0$.

Um die Funktion λ auch für Ideale zu erklären, welche nicht Hauptideale sind, verfahren wir folgendermaßen: Das System der Idealklassen des Körpers k (im gewöhnlichen weiteren Sinne genommen) denken wir uns durch eine Basis dargestellt, deren Elemente Primzahlpotenzgrad haben, aus jeder Basisklasse dann ein für allemal fest ein Ideal $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ gewählt; endlich seien $c_1, c_2, \ldots$ ihre Grade, also

$$\varrho_i = \mathfrak{r}_i^{c_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Körperzahlen, vermittels deren wir die positiven Zahlen $\tau_i^{(p)}$ definieren

$$\tau_i^{(p)} = \left|\sqrt[c_i]{\varrho_i^{(p)}}\right|. \quad (p = 1, 2, \ldots n;\ i = 1, 2, \ldots)$$

Diese τ gehören natürlich nicht mehr dem Körper an. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so gibt es ganze rationale Exponenten a_i (die mod. c_i eindeutig bestimmt sind), so daß

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}_1^{a_1}\mathfrak{r}_2^{a_2}\ldots = \alpha$$

eine Körperzahl ist. Alsdann setzen wir

$$(5)\qquad \lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\,\tau_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\}.$$

Daß diese Zahl, wenn die τ und m einmal fest angenommen sind, nur von dem Ideal $\mathfrak{a}$ abhängt, erkennt man daraus, daß der Ausdruck sich nicht ändert, wenn man α durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und daß er sich auch nicht ändert, wenn man die ganzen Zahlen a_i irgendwie anders wählt, also mod. c_i verändert. In dieser Arbeit denken wir uns die τ den Bedingungen gemäß auf irgendeine Art fest gewählt; die Zahlen m lassen wir dagegen noch willkürlich.

Die idealtheoretische Funktion $\lambda(\mathfrak{a})$ mag ein *Charakter von* $\mathfrak{a}$ *nach den Einheiten* heißen. Es gilt wieder:

$$|\lambda(\mathfrak{a})| = 1,$$

$$\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot\lambda(\mathfrak{b}) \quad \text{für irgend zwei Ideale } \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \text{ des Körpers.}$$

Jeder Charakter läßt sich ersichtlich aus r *Grundcharakteren*

$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\,\tau_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\} \qquad (q = 1, \ldots, r)$$

zusammensetzen, welche entstehen, wenn man eine der Zahlen $m = 1$, die andern gleich Null nimmt, und zwar ist

$$(6)\qquad \lambda(\mathfrak{a}) = \lambda_1^{m_1}(\mathfrak{a})\,\lambda_2^{m_2}(\mathfrak{a})\ldots\lambda_r^{m_r}(\mathfrak{a}).$$

Einem jeden System von Grundeinheiten des Körpers entspricht natürlich eine bestimmte Art von Grundcharakteren.

Die Werte der r Charaktere $\lambda_q(\mathfrak{a})$ in Verbindung mit der Zahl $N(\mathfrak{a})$ bestimmen das Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig, indem offenbar der Satz gilt:

Wenn zwei Ideale dieselben Grundcharaktere und die gleiche Norm besitzen, so sind sie identisch.

Der Satz ist für zwei Hauptideale unmittelbar aus der Formel (1) und Gl. (4) abzulesen, und daraus ergibt sich seine Richtigkeit auch für zwei beliebige Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, indem man die Potenzen $\mathfrak{a}^h$, $\mathfrak{b}^h$ (h die Klassenzahl) betrachtet.

Die Charaktere allein ohne Hinzunahme der Norm bestimmen dagegen das Ideal nicht völlig. Denn es gibt Zahlen μ, wofür alle $\lambda(\mu) = 1$ sind, nämlich alle μ, unter deren Potenzen (μ^k) rationale Ideale vorkommen.

§ 2.

Die Zetafunktionen mit Charakteren.

Mit Hilfe eines Charakters $\lambda(\mathfrak{a})$ nach den Einheiten bilde man die analytische Funktion der komplexen Variabeln s, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\zeta(s;\,\lambda) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}$$

(zu summieren über alle ganzen Ideale $\mathfrak{r}$ des Körpers) dargestellt wird. Entsprechend definieren wir, wenn $\mathfrak{f}$ ein beliebiges ganzes Ideal und $\chi(\mathfrak{a})$ ein Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist,

$$L(s;\lambda,\chi) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}.$$

Beide Funktionen gestatten überdies wegen der Multiplikationsregel für λ und χ eine *Produktdarstellung* für $\Re(s) > 1$:

$$(7)\qquad \begin{cases} \zeta(s;\lambda) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}, \\ L(s;\lambda,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda(\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1} \end{cases}$$

und stehen daher mit der Verteilung der Primideale in Zusammenhang ($\mathfrak{p}$ durchläuft in dem Produkte alle Primideale).

Ist λ identisch 1, so haben wir es mit den gewöhnlichen ζ- und L-Funktionen zu tun. Im andern Falle ist so zu jedem Körper, der unendlich viele Einheiten enthält, eine unendliche Serie neuer Funktionen definiert, welche von Bedeutung für das Studium verborgenerer Eigenschaften des Körpers sind. Ich werde hier meine von den ζ- und L-Funktionen bekannten Methoden auf diese Funktionen anwenden, ohne wesentliche Modifikation läßt sich die Rechnung wie bei jenen durchführen. Sie findet sich im vorletzten Paragraphen dieser Arbeit.

Für die Anwendung auf die Verteilung der Primideale ist, wie zu erwarten, das Verhalten der Funktionen im Punkte $s = 1$ ausschlaggebend, sowie weiter auf der vertikalen Geraden durch 1. In dieser Hinsicht will ich in diesem Paragraphen unter Vorwegnahme der Tatsache, daß für $\lambda \neq 1$ die Funktionen auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg regulär sind, folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $\zeta(s;\lambda)$ und $L(s;\lambda,\chi)$ sind für $\lambda \neq 1$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg von Null verschieden.

Zunächst wird, um den Gedanken möglichst klar hervortreten zu lassen, der Punkt $s = 1$ für sich erledigt, und zwar auf Grund einer

Methode, wie sie Herr de la Vallée Poussin zum Beweise des Nichtverschwindens der Riemannschen ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(s) = 1$ ersonnen hat, in Kombination mit bereits bekannten Sätzen über die gewöhnlichen ζ- und L-Funktionen.

Sei $s = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, so ist

$$\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\Re(\lambda(\mathfrak{p})^m)}{N(\mathfrak{p})^{(1+\varepsilon)m}}.$$

Da nun λ eine Zahl vom absoluten Betrage 1 ist, so ist auf Grund der Kosinus-Ungleichung

$$(8)\qquad \begin{cases} 3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \geqq 0, \\ 3 + 4\Re(\lambda) + \Re(\lambda^2) \geqq 0, \end{cases}$$

also

$$3\log|\zeta(1+\varepsilon)| + 4\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| + \log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 0,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1,$$

oder

$$(9)\qquad |\varepsilon\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot \left|\frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon}\right|^4 \varepsilon \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1.$$

Wäre nun $\zeta(1;\lambda) = 0$, wo λ nicht identisch 1, so wäre, weil $\zeta(s;\lambda)$ regulär, der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon} = \zeta'(1;\lambda)$$

endlich, während $\lim\limits_{\varepsilon=0} \varepsilon\zeta(1+\varepsilon)$ eine endliche von Null verschiedene Zahl ist, da die ζ-Funktion in 1 einen einfachen Pol hat. Lassen wir daher in (9) ε gegen Null konvergieren, so müßte, da auch der letzte Faktor regulär ist, die linke Seite gegen Null konvergieren, im Widerspruch mit der Ungleichung.

Also ist

$$\zeta(1;\lambda) \neq 0.$$

Die entsprechende Tatsache für $L(1;\lambda,\chi)$ wird in ähnlicher Weise bewiesen, indem wir uns auf den früher von mir bewiesenen Satz stützen, daß $L(1,\chi) \neq 0$.

Bilden wir nämlich

$$(10)\qquad F(s;\lambda) = \prod_{\chi} L(s;\lambda,\chi),$$

worin das Produkt über sämtliche Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist, so wird bekanntlich

$$F(s;\lambda) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda^f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-fs}]^{-e}, \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = 1$$

worin e, f ganze rationale von $\mathfrak{p}$ abhängige Zahlen sind, deren Produkt gleich der Anzahl $h(\mathfrak{f})$ der Klassen mod. $\mathfrak{f}$ ist.

Ist nun λ identisch 1, so hat, wie schon erwähnt, $F(s;1)$ bei $s=1$ einen einfachen Pol. Ist λ nicht identisch 1, so sind alle Faktoren in (10) also auch $F(s;\lambda)$ regulär bei $s=1$.

Auf Grund dieser beiden Tatsachen gestattet die wie oben zu beweisende Ungleichung

$$|F(1+\varepsilon;1)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1$$

offenbar den gleichen Schluß zu machen, daß für $\lambda \not\equiv 1$

$$F(1;\lambda) \neq 0.$$

ist. Derselbe Gedanke ergibt auch den Nachweis des Nichtverschwindens dieser Funktionen auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$. Denn offenbar gelten für beliebiges reelles t auf Grund der Produktdarstellung und der Ungleichung (8) wieder für $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$
$$|F(1+\varepsilon)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$

und wegen des regulären Verhaltens der zweiten und dritten Faktoren bei $\varepsilon = 0$ kann daher der zweite Faktor nicht Null werden.

§ 3.

Die Verteilung der Charaktere für Primideale.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie das Nichtverschwinden unserer ζ- und L-Funktionen wieder zu einem Satz über die Existenz unendlich vieler Primideale von bestimmten Eigenschaften führt.

Die Werte der r Grundcharaktere

$$\lambda_1(\mathfrak{a}),\ \lambda_2(\mathfrak{a}),\ \ldots\ \lambda_r(\mathfrak{a})$$

sind komplexe Zahlen vom Betrage 1. Natürlich gibt es nicht zu einem beliebigen System komplexer Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ vom Betrage 1 ein Ideal $\mathfrak{a}$, dessen Charaktere $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ diese Werte haben. Wohl aber gibt es Ideale $\mathfrak{a}$, deren Charaktere mit beliebiger Genauigkeit mit $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ übereinstimmen, und zwar kann man sogar für $\mathfrak{a}$ Primideale einer beliebig vorgeschriebenen Klasse mod. $\mathfrak{f}$ wählen. Das ist der in Aussicht genommene Satz, der also genauer so formuliert werden mag:

I. *Sind $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ beliebige Zahlen vom Betrage 1, δ eine beliebige positive Größe, so gibt es in jeder Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$ unendlich viele Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$, wofür die r Ungleichungen*

$$|\lambda_q(\mathfrak{p}) - \varkappa_q| < \delta \qquad (q = 1, 2, \ldots, r)$$

bestehen.

Da
$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\tau_2^{(p)a_2}\cdots}\right|\right\},$$
so können wir unsern Satz auch so aussprechen:

II. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein festes Ideal, prim zu* $\mathfrak{f}$, *und lassen wir* $\mathfrak{p}$ *alle Primideale, wofür*
$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \ (\textit{mod. } \mathfrak{f}), \textit{ also } \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \alpha \textit{ eine Zahl ist,}$$
durchlaufen, so liegen im r*-dimensionalen Raume die Punkte mit den Koordinaten*
$$(11) \qquad c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a}) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\alpha^{(p)}| \qquad (q = 1, \ldots, r)$$
überall dicht mod. 1.

Reduktion von $c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a})$ mod. 1 bedeutet offenbar Übergang von α zu einer geeigneten assoziierten Zahl. Nimmt man zu (11) noch die Gleichung
$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p \log|\alpha^{(p)}| = \log\sqrt[n]{N(\alpha)}$$
und löst das so entstehende Gleichungssystem nach $\log|\alpha^{(p)}|$ auf, so kommt
$$\log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}}\right| = \sum_{q=1}^{r} c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) \log|\varepsilon_q^{(p)}| \qquad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Läßt man daher $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ sämtliche Zahlen (auch die assoziierten) durchlaufen, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$) ist, so liegen die r Zahlen
$$x_1 = \left|\frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}}\right|, \ldots, x_r = \left|\frac{\alpha^{(r)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}}\right|$$
im Bereich der positiven x überall dicht.

Dafür endlich läßt sich auch sagen: Sind a_p, b_p $(p = 1, \ldots, r)$ r Paare positiver Zahlen und $a_p < b_p$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{a}$ (prim zu $\mathfrak{f}$) unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, derart, daß
$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f}), \quad \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \alpha$$
und
$$a_p < \left|\frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}}\right| < b_p \qquad (p = 1, \ldots, r).$$

In der Formulierung II will ich den Satz jetzt beweisen.

Sei also $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal, λ ein Charakter nach den Einheiten, welcher nicht identisch 1 ist, dann erkennt man zunächst, daß die Funktion

$$P(s;\lambda,\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathfrak{f})}} \frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s}$$

regulär im Punkte $s=1$ (sogar auf der Vertikalen $\Re(s)=1$) ist.

In der Tat ist nach (7)

$$\log L(s;\lambda,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\lambda(\mathfrak{p})\,\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g(s),$$

wo $g(s)$ für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär. Aus der bekannten Eigenschaft der Gruppencharaktere mod. $\mathfrak{f}$:

$$\sum_{\chi} \chi(\mathfrak{m}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{m} \not\sim 1 \text{ (mod. } \mathfrak{f}), \\ h(\mathfrak{f}), & \text{wenn } \mathfrak{m} \sim 1 \text{ (mod. } \mathfrak{f}) \end{cases}$$

folgt daher durch Summation über alle $h(\mathfrak{f})$ Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$

$$\lambda(\mathfrak{a}) \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{a}) \log L(s;\lambda,\chi) = h(\mathfrak{f}) \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathrm{mod.}\,\mathfrak{f})}} \frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_1(s),$$

worin die Summe rechts über die Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$) zu erstrecken ist, $g_1(s)$ wieder für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär ist. Da nun nach dem vorigen Paragraphen die $L(s;\lambda,\chi)$ auf der Geraden $\Re(s)=1$ regulär und von Null verschieden sind, sobald $\lambda \neq 1$, so folgt unsere Behauptung über $P(s;\lambda,\mathfrak{a})$.

Dagegen wird $P(s;1,\mathfrak{a})$ bei Annäherung an den Punkt 1 unendlich wie $-\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\log(s-1)$.

Um nun zu zeigen, daß in dem Einheitswürfel

$$0 \leqq x_q \leqq 1 \qquad (q=1,\ldots,r) \tag{12}$$

die mod. 1 genommenen Punkte

$$c_q(\alpha) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\alpha^{(p)}| \qquad (q=1,\ldots,r)$$

für $\alpha=\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ überall dicht liegen, konstruieren wir uns eine *endliche* Fouriersche Reihe nach $x_1,\ldots,x_r$

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r) = a_0 + \sum_{m_1,\ldots,m_r} a(m_1,\ldots,m_r)\, e^{2\pi i(m_1 x_1+\cdots+m_r x_r)},$$

welche folgende Eigenschaften haben soll:

1. Sei J ein beliebiges Gebiet im Innern des Würfels (12), etwa selbst ein kleiner Würfel, A sei der übrige Teil des Würfels (12), der nicht zu J gehört; φ soll nun durchweg reell sein und

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r) < 0 \quad \text{in } A. \tag{13}$$

2. Das konstante Glied von φ sei

$$a_0 > 0.$$

Eine derartige Reihe kann man sich leicht verschaffen, wenn man die Fourierentwicklung einer Funktion, die in A negativ ist, während sie in J große positive Werte haben soll, an einer geeigneten Stelle abbricht.

Wir bezeichnen weiter mit $\varphi(\mathfrak{p})$ den Wert der Reihe φ, den sie im Punkte $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ hat, und ferner mit $\mathfrak{p}_J$ und $\mathfrak{p}_A$ die Primideale, deren Zahlen $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ entsprechend mod. 1 in J und A liegen. Dann gilt offenbar die Identität (für $\Re(s) > 1$)

$$(14)\quad a_0 P(s;1,\mathfrak{a}) + \sum_{m_1,\ldots,m_r}{}' a(m_1,\ldots,m_r) P(s;\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\ldots\lambda_r^{m_r},\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathfrak{f})}{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}.$$

Auf der linken Seite steht eine endliche Summe, die wegen $a_0 > 0$ positiv unendlich groß wird, wenn wir s über reelle Werte abnehmend gegen 1 konvergieren lassen. Die rechte Seite dagegen ist wegen (13)

$$\sum{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s} + \sum{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p}_A)}{N(\mathfrak{p}_A)^s} \leqq \sum{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}.$$

Also wächst

$$\sum_{\mathfrak{p}_J}{}' \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}$$

über alle Grenzen, wenn s an 1 heranrückt, die Reihe muß also unendlich viele Elemente enthalten, und insbesondere muß auch

$$\sum_{\mathfrak{p}_J}{}' \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)}$$

divergieren.

Zum Beweise der beiden naheliegenden Vermutungen

$$\sum{}' \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)^s} = \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \log \frac{1}{s-1} + g(s),$$

$$\pi_J(x) \text{ asymptotisch gleich } \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \frac{x}{\log x},$$

wo bedeutet: V_J das Volumen von J, $g(s)$ eine bei $s = 1$ endlich bleibende Funktion, $\pi_J(x)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}_J$, deren Norm $\leqq x$ ist, reichen die Hilfsmittel allein nicht aus, welche man bei den bisher behandelten Problemen über die Verteilung der Primideale benutzt. Denn zum Beweise der genannten Behauptungen hätte man an Stelle von φ diejenige *unendliche* Fourierreihe zu nehmen, die in A gleich 0, in J gleich 1 ist, und in der Identität (14) hätten wir auf der linken Seite dann eine Reihe, deren analytischer Charakter erst durch eine besondere Untersuchung festgestellt werden müßte.

§ 4.

Das analytische Verhalten der Zetafunktionen mit Charakteren und ihre Funktionalgleichung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die oben eingeführten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen sind und einer Funktionalgleichung genügen, was nun genau nach der Methode geschehen soll, die ich bei der Dedekindschen Zetafunktion angewandt habe.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner früheren Arbeit, nur daß ich die Grundeinheiten jetzt mit ε statt mit η bezeichne. Ist μ eine Körperzahl, $\lambda(\mu)$ ein Charakter nach den Einheiten (der als nicht identisch 1 angenommen wird), so setzen wir unter Benutzung der Größen e_p aus § 1 ($e_p = 1$, wenn $k^{(p)}$ reell, sonst $= 2$) zunächst das einzelne Glied der Zetareihe in die Form

$$\frac{\lambda(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \prod_{p=1}^{r+1} |\mu^{(p)}|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}},$$

sodann führen wir mit Hilfe eines nachher zu definierenden positiven c für den einzelnen Faktor des Produktes das Γ-Integral ein, und zwar für reelle Körper $k^{(p)}$:

$$\left|c^{\frac{1}{2}} \mu^{(p)}\right|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-c|\mu^{(p)}|^2 t_p}\, t_p^{\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \frac{d t_p}{t_p},$$

für imaginäre Körper den entsprechenden Ausdruck, aber mit $2c$ an Stelle von c. In dem Produkt über die Indizes p treten dann die Größen auf:

$$(15) \qquad \Gamma(s;\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right),$$

$$\gamma(\lambda) = \exp\left\{\pi i \log 2 \sum_{p=r_1+1}^{r+1} \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right\}.$$

Letztere Größe, von dem Faktor 2 bei imaginären $k^{(p)}$ herrührend, ist von s, μ unabhängig und hat den Betrag 1. Wenn $r_2 = 0$, ist natürlich $\gamma = 1$ zu setzen.

Sei nun $\mathfrak{f}$ irgendein ganzes Ideal des Körpers $\neq 1$, $\chi(\mathfrak{x})$ ein *eigentlicher* Charakter mod. $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{c}$ ein festes Hilfsideal, so daß

$$\mathfrak{c}\mathfrak{f} = \omega$$

eine Zahl ist, so definieren wir für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ die Thetafunktion

$$(16)\qquad \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mu\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{c})} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) \exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n} \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\},$$

worin

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt[n]{d\,N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c})}}$$

und die Summe über sämtliche Zahlen μ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ zu erstrecken ist. Die Definition (16) soll für $\mathfrak{f}=1$ durch folgende ersetzt werden:

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right) \sum_{\mu\equiv 0(\mathfrak{a})} \exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p\right\} \qquad (\mathfrak{c}=1,\ \omega=1),$$

in der Summe tritt hier das Glied mit dem Exponenten 0 auf, und es ist in meiner früheren Bezeichnung für $\mathfrak{f}=1$

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right)\vartheta(t;\mathfrak{a}).$$

In *jedem* Falle gilt die dort bewiesene Transformationsformel

$$(17)\qquad \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{t_1\ldots,t_n}}\,\vartheta\left(\frac{1}{t};\chi,\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right)$$

mit

$$W(\chi)\,W(\bar\chi) = 1,$$

speziell ist

$$W(\chi) = \chi(\mathfrak{d}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{f}=1.$$

Nachdem so der Anschluß an die Formeln meiner früheren Arbeit hergestellt ist, nehme ich $\mathfrak{c}=\mathfrak{f}^{-1}$, also $\omega=1$, eine Vereinfachung, die ich damals übersehen habe.

Wir betrachten nun die Teilsumme

$$\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}\sim 1} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\,\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

welche über alle Ideale $\mathfrak{r}\,(\neq 0)$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist, und erhalten auf dem alten Wege

$$(18)\qquad \gamma(\lambda)\,\lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}\right) A^s\,\Gamma(s;\lambda)\,\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) =$$

$$= \frac{2^{r_1-1}nR}{w}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}\!\!\cdots\!\int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})\,u^{\frac{ns}{2}} \exp\left\{2\pi i\sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\} dx_1\ldots dx_r\,\frac{du}{u}.$$

Die neuen Veränderlichen $u, x_1, \ldots, x_r$ hängen dabei mit den alten $t_1, \ldots, t_{r+1}$ durch

$$(19)\qquad t_p = u\exp\left\{2\sum_{q=1}^{r} x_q \log|\varepsilon_q^{(p)}|\right\} \qquad (p=1,\ldots,r+1)$$

zusammen, und A ist die positive Zahl

$$A = (dN(\mathfrak{f})\pi^{-n}2^{-2r_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Die Integration über $x_1, \ldots, x_r$ bringt, da nicht alle m Null sind, das Glied der Thetareihe mit dem Exponenten Null zum Wegfall, wenn ein solches in der Reihe auftritt.

Das Integral über u wird zerlegt in die beiden Integrale über u von 0 bis 1 und von 1 bis ∞, im ersten $\frac{1}{u}$ als neue Variable eingeführt, die Transformationsformel (17) angewandt und endlich berücksichtigt, daß der Integrationsbereich der x symmetrisch zum Nullpunkt liegt. So ergibt sich

$$(20)\quad \begin{cases} \gamma(\lambda)A^s\Gamma(s;\lambda)\,\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}), \\ \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) + W(\chi)\,g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right), \end{cases}$$

worin gesetzt ist

$$g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{2^{r_1-1}nR}{w}\int\limits_{u=1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\!\!\ldots\!\int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})\,u^{\frac{ns}{2}}\exp\left\{2\pi i\sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\}dx_1\ldots dx_r\frac{du}{u}.$$

Daraus folgt

$$\lambda\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) + W(\bar{\chi})\,g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}),$$

das heißt

$\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a})$ ist eine ganze transzendente Funktion von s, wenn λ nicht identisch 1 ist, und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = W(\bar{\chi})\,\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\,\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}).$$

Nach seiner Definition hängt ξ nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Idealklasse $\mathfrak{a}$ ab. Durch Summation über die sämtlichen Idealklassen folgt daher:

Die Funktion

$$(21)\qquad \xi(s;\lambda,\chi) = \gamma(\lambda)A^s\Gamma(s;\lambda)L(s;\lambda,\chi)$$

ist eine ganze transzendente Funktion von s und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi}) = W(\bar{\chi})\,\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\,\xi(s;\lambda,\chi).$$

Voraussetzung hierbei ist nur, daß λ nicht identisch 1 und daß χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist, sobald $\mathfrak{f} \neq 1$.

Die „trivialen" Nullstellen von $L(s;\lambda,\chi)$, den Polen von $\Gamma(s;\lambda)$ entsprechend, liegen auf $(r+1)$ Geraden, die parallel zur reellen Achse der s-Ebene verlaufen. Es wäre von Interesse, festzustellen, ob diese $(r+1)$ Geraden alle voneinander verschieden sein müssen, wie es z. B. beim quadratischen Körper der Fall ist.

Die *Bedeutung dieser Funktionen* liegt, abgesehen von den Anwendungen auf die Theorie der Verteilung der Primideale, zunächst auf dem Gebiet der *Funktionentheorie*. Bei festem $\mathfrak{f}$ bildet nämlich erst die Gesamtheit aller $L(s; \lambda, \chi)$ für alle Charaktere ein *Äquivalent für die Thetareihe*, mit der sie durch (20) verknüpft sind. Denn ersichtlich sind die $\xi(s; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ nichts anderes als die *Fourierkoeffizienten* von

$$(22)\qquad G(s; x_1, \ldots, x_r) = \int_0^\infty \vartheta(t; \chi, \mathfrak{a})\, u^{\frac{ns}{2}} \frac{du}{u},$$

als Funktion von $x_1, \ldots, x_r$ betrachtet. (Für die t sind unter dem Integralzeichen die u, x nach (19) einzutragen.) Übrigens ist G, wie durch gliedweise Integration der Thetareihe folgt, ein spezieller Fall der „Zetafunktionen n-ter Ordnung", die bereits aus Untersuchungen der Herren Lerch, Epstein u. a. bekannt sind. Aus (21) folgt aber weiter nach dem Fourierschen Integraltheorem die Umkehrung

$$\vartheta(t; \chi, \mathfrak{a}) = \frac{n}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(s; x_1, \ldots, x_r)\, u^{-\frac{ns}{2}}\, ds,$$

eine Schlußweise, deren Durchführung im Gebiet der analytischen Funktionen wir den schönen Untersuchungen von Herrn Mellin[1]) verdanken. Setzen wir hier für G die Fourierentwicklung mit den Koeffizienten $\xi(s; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ ein, so erhält man eine Darstellung der Funktion ϑ von $(r+1)$ Variabeln durch die Gesamtheit der ξ, aus welchen dann hervorgeht, daß die Funktionalgleichung der ξ ihrerseits die Transformationsformel der Thetafunktion zur Folge hat — wie es bekanntlich bei der Riemannschen Zetafunktion der Fall ist.

Eine ähnliche Verwendung der Funktionen ξ hat mich nun dazu geführt, für jeden algebraischen Zahlkörper eine ihm zugehörige Gattung analytischer Funktionen von n (oder weniger) Variabeln zu konstruieren, die eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften besitzen und als ein Analogon zur Exponentialfunktion und den elliptischen Modulfunktionen im rationalen Körper bezeichnet werden können. Besonders evident ist die Analogie, wenn es sich um einen total reellen Körper handelt, für diesen haben die in Rede stehenden Funktionen eine nahe Beziehung zu den

---

[1]) Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen, Math. Ann. 68 (1910), S. 305—337.

Modulfunktionen von n Veränderlichen, die bereits öfter untersucht worden sind. Meine Theorie liefert in dieser Hinsicht als wichtigstes Resultat die *Existenz und die Transformationsgleichung derjenigen Funktion von n Variabeln, welche der Funktion* $\log \eta(\omega)$ *entspricht*, was ich mit den bisher bekannten Hilfsmitteln vergeblich zu beweisen versucht habe.

Eine ganz besondere Bedeutung aber gewinnen die Funktionen mit λ-Charakteren für die Theorie der Reziprozitätsgesetze und der relativ Abelschen Zahlkörper, wenn man in Verallgemeinerung bekannter Gedankengänge den Zusammenhang studiert, der zwischen den Funktionen eines Grundkörpers und denen eines Oberkörpers besteht. Ich komme hierauf bei einer andern Gelegenheit ausführlich zurück.

Es ist nun noch eine — mit einem engeren Äquivalenzbegriff zusammenhängende — Ergänzung notwendig, die ich für reelle quadratische Körper im folgenden Paragraphen entwickle.

§ 5.

Reelle quadratische Zahlkörper.

Für solche Körper, unter deren Konjugierten auch reelle Körper vorkommen, lassen sich unter Umständen noch die Quadratwurzeln aus den Charakteren $\lambda(\mu)$ derart als Funktionen von μ definieren, daß die Produktregel in Gültigkeit bleibt. Im reellen quadratischen Körper mit der Grundeinheit ε $(\varepsilon > 1)$ z. B. lautet zunächst das Schema der Größen $\frac{e_p}{n}$, $e_p^{(q)}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\log|\varepsilon|}, & \frac{-1}{2\log|\varepsilon|} \end{pmatrix}.$$

Alle Charaktere sind Potenzen von

$$\lambda(\mu) = \exp\left\{\pi i \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{\log|\varepsilon|}\right\},$$

und die Funktion

$$\Gamma(s; \lambda^m) = \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right).$$

Nunmehr nehmen wir an, daß die Norm der Grundeinheit gleich -1 sei. Setzen wir dann für jede Körperzahl $\mu\ (\neq 0)$

$$\lambda_0(\mu) = \exp\left\{\pi i m \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\} \operatorname{sgn}(\mu\mu')^m,$$

wo m ganz rational, so ändert sich $\lambda_0(\mu)$ nicht, wenn man μ durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und es ist wieder

$$\lambda_0(\alpha\beta) = \lambda_0(\alpha) \cdot \lambda_0(\beta).$$

Für gerade m stimmt λ_0 mit den Charakteren $\lambda^{\frac{m}{2}}$ überein. Wir wollen die Funktionalgleichung für die Funktion L ableiten, welche mit ungeradem m bei λ_0 gebildet sind.

Zu diesem Zwecke entnehmen wir aus den Beziehungen, welche ich als Gl. (6)—(10) in meiner Arbeit über die L-Funktionen bewies, folgende Formel:

$$(23)\qquad \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})} \exp\{-c[(\mu+v)^2 t+(\mu'+v')^2 t']\}\cdot\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)=$$

$$=\frac{W(\chi)}{\sqrt{t\,t'}}\sum_{\nu\equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)}\exp\left\{-c'\left(\frac{\nu^2}{t}+\frac{\nu'^2}{t'}\right)+2\pi i(\nu v+\nu' v')\right\}\chi(\nu\mathfrak{a}\mathfrak{d}).$$

Hierbei bedeuten v, v' irgendwelche Größen, χ ist ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ (falls $\mathfrak{f}\neq 1$), und

$$c=c(\mathfrak{a})=\frac{\pi}{\sqrt{d N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})}},\qquad c'=c\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

Differentiiert man die Relation (23) nach v und dann nach v', setzt nachher $v=v'=0$, so ergibt sich eine Transformationsgleichung für die Funktion

$$(24)\qquad \vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})=\frac{1}{N(\mathfrak{a})}\sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\exp\{-c(\mu^2 t+\mu'^2 t')\}\,\mu\mu'\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

nämlich

$$(25)\qquad \vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})=\frac{-W(\chi)}{(tt')^{\frac{3}{2}}}\,\vartheta'\left(\frac{1}{t},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

Nun ist für *ungerades* m

$$\frac{\lambda_0(\mu)}{|N(\mu)|^s}=\exp\left\{\pi i m\,\frac{\log|\mu|-\log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\}\frac{\operatorname{sgn}(\mu\mu')}{|N(\mu)|^s}=$$

$$=\exp\left\{\pi i m\,\frac{\log|\mu|-\log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\}\frac{\mu\mu'}{|N(\mu)|^{s+1}}=$$

$$=\mu\mu'\,|\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}\,|\mu'|^{-(s+1)-\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}.$$

Auf den dritten und vierten Faktor dieses Produktes wenden wir die Umformung mit dem Γ-Integral an, führen zur Abkürzung für λ_0 mit ungeraden m ein:

$$(26)\qquad \Gamma(s;\lambda_0)=\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right).$$

Damit wird für ungerade m

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d}{N(\mathfrak{f})}}\cdot\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\,A^s\sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}\sim 1}\frac{\lambda_0(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \pi^{-(s+1)}\left(dN(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})\right)^{\frac{1}{2}(s+1)}\frac{1}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\frac{\lambda_0(\mu)\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)}{|N(\mu)|^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{c^{-(s+1)}}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)\mu\mu'\cdot|\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}|\mu'|^{-(s+1)-\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{4R}{w}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{x=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx$$

und folglich wegen (25)

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) - W(\chi)\,g\left(1-s;\bar\lambda_0,\bar\chi,\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

worin

$$g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{4R}{w}\int\limits_{u=1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx.$$

Für ξ resultiert daher bei ungeradem m die Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar\lambda_0,\bar\chi,\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = -W(\bar\chi)\,\bar\lambda_0(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\,\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}).$$

Ganz dieselbe Funktionalgleichung finden wir für quadratische Körper, deren Grundeinheit die Norm $+1$ hat, sofern wir den engeren Äquivalenzbegriff zugrunde legen: Zwei Ideale heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn ihr Quotient gleich einer Körperzahl gesetzt werden kann, die $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{f}$ ist und positive Norm besitzt. Wir haben in den vorangehenden Formeln nur m durch eine gerade Zahl zu ersetzen und $\chi(\mu)$ durch $\chi_0(\mu) = \chi(\mu)\operatorname{sgn}(\mu\mu')$ (χ_0 ist dann ein Charakter dieser engeren Klassengruppe).

Das Nichtverschwinden und das reguläre Verhalten auf der Geraden $\Re(s) = 1$ ergibt sich dann wörtlich wie früher nun auch für die mit λ_0 bzw. χ_0 gebildeten L-Funktionen, woraus dann ebenso der Existenzsatz für Primideale folgt:

Sind α_1, α_2 Basiszahlen von $\mathfrak{a}$, so liegen die Zahlen

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{4\log|\varepsilon|}\qquad(\text{wenn } N(\varepsilon) = -1),$$

bzw.

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{2\log|\varepsilon|}\qquad(\text{wenn } N(\varepsilon) = +1)$$

überall dicht mod. 1, wenn man

$$\omega = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

nur diejenigen Zahlen positiver Norm in $\mathfrak{a}$ durchlaufen läßt, wofür

$$\frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal}$$

und

$$\omega - \text{Einheit (mod. } \mathfrak{f});$$

$\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}$ sind hierbei teilerfremd vorausgesetzt.

Für $\mathfrak{f} = 1$ ergibt sich hieraus eine sehr elegante geometrische Formulierung: Durch Multiplikation von ω mit einer geeigneten Potenz von ε^2 im ersten Fall, von ε im zweiten Fall lassen sich die obigen Quotienten auf eine einzige Art in das Intervall $0 \ldots 1$ bringen, wenn überdies noch verlangt wird:

$$\omega > 0, \quad \omega' > 0$$

Für beliebiges positives $\vartheta_1 < \vartheta_2$ gibt es daher unendlich viele ω mit

$$\vartheta_1 < \frac{\omega}{\omega'} < \vartheta_2, \quad \frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal.}$$

Diese Ungleichung stellt aber in der x-y-Ebene einen beliebigen Winkelraum W dar, der durch zwei Halbstrahlen vom Nullpunkt aus begrenzt wird. Somit ergibt sich:

Ist $a x^2 + b x y + c y^2$ eine indefinite, ganzzahlige Form, wo $b^2 - 4ac$ Diskriminante eines quadratischen Körpers ist, so stellt sie unendlich viele Primzahlen dar, auch wenn man die ganzzahligen Variabeln auf einen Winkelraum W einschränkt.

Um den Satz in dieser Form auch für allgemeine Diskriminanten zu beweisen, ist es nötig, den engeren Begriff der Äquivalenz mod. $\mathfrak{f}$ heranzuziehen:

Zwei zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn man $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ gleich einer Zahl α setzen kann, wo α total positiv, $\alpha \equiv 1 (\text{mod. } \mathfrak{f})$. Dabei ist dann in den Charakteren λ an Stelle von ε die „Grundeinheit ε^n mod. $\mathfrak{f}$" zu setzen, wo ε^n die kleinste Potenz, welche $\equiv 1 (\text{mod. } \mathfrak{f})$ ist. Die so entstehenden L-Funktionen lassen sich, wie man sofort sieht, prinzipiell nach den gleichen Methoden behandeln wie oben. Auf diese Weise ergibt sich:

Sei $f(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2$ eine indefinite, ganzzahlige primitive quadratische Form, $b^2 - 4ac$ kein Quadrat, d die Diskriminante des Körpers $K(\sqrt{b^2 - 4ac})$, ferner k, m, n ganze Zahlen. Alsdann stellt der Ausdruck

$$f(kx + m,\ ky + n)$$

unendlich viele Primzahlen dar, wenn x, y die ganzen Zahlen eines vorgegebenen Winkelraumes W durchlaufen. Hierbei gilt für k, m, n noch die Bedingung:

$$f(m, n) \text{ prim zu } \frac{k}{d} \cdot (b^2 - 4ac).$$

In diesem Zusammenhange ist noch zu erwähnen, daß derartige Funktionen wie $\sum\limits_{x, y} f(x, y)^{-s}$, wo x, y auf W eingeschränkt ist, bereits in den klassischen Untersuchungen von Herrn de la Vallée Poussin sowie in späteren von Herrn Landau auftreten[2]), wo sie indes mit ganz anderen Mitteln behandelt werden. Unter anderem ist bekannt, daß diese Funktionen bei $s = 1$ einen einfachen Pol besitzen, was ich mit meinen Methoden nicht unmittelbar schließen kann.

Basel, Februar 1918.

---

[2]) Ch. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, t. 20/21, 1896/97, insbesondere 4. partie. — E. Landau, Neuer Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 250–278.

(Eingegangen am 14. Februar 1918.)