Additive Theorie der Zahlkörper. I.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen[1]).

Die analytische Methode, welche Hardy, Littlewood und Ramanujan[2]) für die Untersuchung vieler Fragestellungen der „partitio numerorum“

---

[1]) Diese Arbeit ist ein Abdruck meiner Göttinger Habilitationsschrift.

[2]) Vgl. die Arbeiten:

G. H. Hardy, Asymptotic formulae in combinatory analysis; Comptes rendus du quatrième congrès des mathématiciens scandinaves à Stockholm (1916), S. 45–53.

— On the expression of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven; Proceedings of the National Academy of Sciences **4** (1918), S. 189–193.

— On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five; Transactions of the American Mathematical Society **21** (1920), S. 255–284.

G. H. Hardy und S. Ramanujan, Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n; Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **164** (1917), S. 35–38.

— Asymptotic formulae in combinatory analysis; Proceedings of the London Mathematical Society (2) **17** (1918), S. 75–115.

— On the coefficients in the expansions of certain modular functions; Proceedings of the Royal Society, London, A **95** (1918), S. 144–155.

S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their application in the theory of numbers; Transactions of the Cambridge Philosophical Society **22** (1918), S. 259–276.

G. H. Hardy und J. E. Littlewood, A new solution of Waring's problem; Quarterly Journal of Mathematics **48** (1919), S. 272–293.

— Note on Messrs. Shah and Wilson's paper entitled On an empirical formula connected with Goldbach's theorem; Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **19** (1919), S. 245–254.

— Some problems of „Partitio Numerorum“, I, A new solution of Waring's problem; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 33–54.

— Some problems of „Partitio Numerorum“, II, Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates; Math. Ztschr. **9** (1921), S. 14–27.

gefunden haben, läßt sich sinngemäß erweitern, so daß auch Probleme in der *additiven Theorie* der *algebraischen Zahlkörper* zugänglich werden. Allerdings scheinen die Sätze über die Zerlegungen natürlicher Zahlen nur in *total reellen*[3]) Zahlkörpern Analoga zu besitzen. Um die Methode klarzustellen, beschränke ich mich in dieser Arbeit auf einen in rechnerischer Durchführung besonders einfachen Fall; ich beweise nämlich asymptotische Formeln für die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahlen eines reellen *quadratischen* Zahlkörpers als Summen von *Quadraten* ganzer Zahlen desselben Körpers. Anwendungen der Methode auf allgemeinere Fragen, z. B. auf das Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern, möchte ich in weiteren Arbeiten publizieren.

Das Hauptresultat dieser Abhandlung ist: Es sei s eine natürliche Zahl $\geqq 5$, m eine quadratfreie natürliche Zahl $\geqq 2$, K der durch $\sqrt{m}$ erzeugte reelle quadratische Körper, d seine Grundzahl. Es bedeute ν eine total positive ganze Zahl aus K, welche im Falle $m \equiv 2 \pmod 4$ oder $m \equiv 3 \pmod 4$ die Form $a + b\sqrt{m}$ (a, b ganz rational) mit *geradem* b besitzt. Dann ist die Anzahl der Darstellungen von ν als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen aus K

$$(1) \qquad A_s(\nu) \sim \mathfrak{S} \frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}},$$

wo sich die asymptotische Abschätzung auf $N\nu \to \infty$ bezieht und $\mathfrak{S}$ zwar von ν abhängt, aber doch für jedes ν zwischen zwei *positiven*, nur vom Körper K abhängigen Schranken gelegen ist.

Daraus folgt speziell für $s = 5$: Es gibt eine nur von K abhängige natürliche Zahl n, so daß für *jedes* ganze total positive ν die Gleichung

$$\nu = \left(\frac{\xi_1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\xi_5}{n}\right)^2$$

eine Lösung in *ganzen* Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_5$ aus K besitzt[4]).

---

[3]) Ein Zahlkörper heißt reell, wenn alle seine Zahlen reell sind; ein algebraischer Zahlkörper heißt *total reell*, wenn auch die Konjugierten aller seiner Zahlen reell sind. In nicht reellen Zahlkörpern kann z. B. die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ *unendlich viele* Lösungen in ganzen Zahlen haben, z. B. in $K(\sqrt{-3})$, weil $x^2 - 3y^2 = 1$ unendlich viele Lösungen hat.

[4]) Der Satz „Jede total positive Zahl eines quadratischen Zahlkörpers ist Summe von vier Quadratzahlen desselben Körpers" ist von E. Landau bewiesen worden in seiner Arbeit: Über die Zerlegung total positiver Zahlen in Quadrate; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1919, S. 392–396. Ich habe mit elementaren Mitteln gezeigt, daß sich jede total positive ganze Zahl eines total reellen Körpers darstellen läßt als Summe solcher Quadratzahlen des Körpers, deren Nenner einem endlichen, nur vom Körper

§ 1 bringt den Anschluß der Untersuchung an Heckes Thetareihen. In § 2 wird eine Formel abgeleitet, welche im Körper K der Funktionalgleichung der Lipschitzschen verallgemeinerten ζ-Funktion entspricht. § 3 liefert auf Grund des Minkowskischen Satzes über lineare Formen eine für die ganze Untersuchung fundamentale Zerlegung eines zweidimensionalen Bereiches, als Verallgemeinerung der bei den englischen Forschern auftretenden Fareyschen Zerlegung. In § 4 wird der Gang des Beweises skizziert, dieser selbst, soweit er die asymptotische Formel (1) betrifft, in §§ 5 bis 7 geführt. § 8 trägt rein arithmetischen Charakter; dort wird die in (1) mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Größe, die in Gestalt einer unendlichen Reihe (als Verallgemeinerung der *„singular series“* von Hardy und Littlewood) auftritt, in geschlossener Form summiert. Für den einfachsten Fall

$$m \equiv 1 \pmod 8), \qquad s = 4\,\sigma \equiv 0 \pmod 4), \qquad (\nu, 2) = 1$$

ergibt sich dabei

$$A_{1\sigma}(\nu) \sim C \sum_{\mathfrak{t} \mid \nu} N\,\mathfrak{t}^{2\sigma-1} \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots).$$

Hierbei durchläuft $\mathfrak{t}$ alle Idealteiler von ν, die asymptotische Abschätzung bezieht sich wieder auf $N\nu \to \infty$, und C ist die *rationale* Konstante

$$C = \frac{4}{(2^{2\sigma} - 1)^2\, d^{2\sigma-1}\, \frac{h^{2\sigma}}{2\sigma} \sum\limits_{n=1}^{d} \left(\frac{d}{n}\right) S_{2\sigma-1}\left(\frac{n}{d}\right)},$$

wo $h^{2\sigma}$ die 2σ-te Bernoullische Zahl, $\left(\frac{d}{n}\right)$ das Kroneckersche Restsymbol, $S_{2\sigma-1}(x)$ das $(2\sigma-1)$-te Bernoullische Polynom bedeuten.

§ 1.

Heckes Thetaformel[5]).

Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Grundzahl d; $\mathfrak{a}$ sei ein ganzes Ideal, ϱ eine ganze Zahl dieses Körpers; es seien t und t' zwei Veränderliche, die den Bedingungen $\Im t > 0$, $\Im t' < 0$ genügen. Sind u, u' zwei Unbestimmte, α, α' konjugierte Zahlen aus K, so soll unter $S(u\alpha)$ (*„Spur* von $u\alpha$“) stets die Summe $u\alpha + u'\alpha'$ verstanden werden; entsprechend sei $S\frac{\alpha}{u} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha'}{u'}$. Diese Abkürzung wird nur so verwendet

---

abhängigen Wertevorrat angehören; vgl. meine Abhandlung: Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate; Math. Ztschr. 11 (1921), S. 246–275.

[5]) Vgl. E. Hecke, Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1917, S 299–318.

werden, daß kein Widerspruch gegen die übliche Bezeichnung $S\alpha = \alpha + \alpha'$ entsteht.

Hecke hat für die Funktion

$$\vartheta(t, t'; \varrho, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}|\mu} e^{\pi i \left\{\frac{(\mu+\varrho)^2 t}{\sqrt{d}} - \frac{(\mu'+\varrho')^2 t'}{\sqrt{d}}\right\}} = \sum_{\mathfrak{a}|\mu} e^{\pi i S \frac{(\mu+\varrho)^2 t}{\sqrt{d}}}$$

die folgende Formel bewiesen[6]):

$$(2) \qquad \vartheta(t, t'; \varrho, \mathfrak{a}) = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{t}\sqrt{t'}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}}|\lambda} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{t\sqrt{d}} + 2\pi i S \frac{\lambda\varrho}{\sqrt{d}}};$$

darin bedeutet $\sum\limits_{\mathfrak{a}|\mu}$ (wie fortan stets in analogen Fällen), daß μ alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durchläuft, und unter $\sqrt{t}$, $\sqrt{t'}$ sind die Hauptwerte zu verstehen.

Ist γ eine Zahl aus K und $\mathfrak{n}$ das ganze Ideal von kleinster Norm, für welches das Ideal $(\gamma)\mathfrak{n}$ ganz ist, so heißt $\mathfrak{n}$ der *Nenner* von γ. Die ganzen Zahlen aus K haben also den Nenner 1. Es habe nun γ speziell den Nenner $\mathfrak{a}$. Setzt man dann in der Funktion $\vartheta(t, t'; 0, \mathfrak{o}) = \vartheta(t, t')$

$$t = w + 2\gamma, \quad t' = w' + 2\gamma' \quad (\Im w > 0, \ \Im w' < 0),$$

so gilt wegen (2)

$$(3) \quad \vartheta(w + 2\gamma, w' + 2\gamma') = \sum_{\mathfrak{o}|\mu} e^{2\pi i S \frac{\mu^2\gamma}{\sqrt{d}} + \pi i S \frac{\mu^2 w}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma}{\sqrt{d}}} \sum_{\mathfrak{a}|\lambda} e^{\pi i S \frac{(\lambda+\varrho)^2 w}{\sqrt{d}}}$$

$$= \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}}|\lambda} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}} \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma + \varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

darin bedeutet $\sum\limits_{\varrho \bmod \mathfrak{a}}$ (wie fortan stets in analogen Fällen), daß ϱ ein vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{a}$ durchläuft, und es ist berücksichtigt worden, daß für $\mathfrak{a}|\lambda$ die Zahl $\lambda^2\gamma + 2\lambda\varrho\gamma$ ganz, also $S\dfrac{\lambda^2\gamma + 2\lambda\varrho\gamma}{\sqrt{d}}$ ganz rational ist.

---

[6]) Die Bezeichnung ist der bequemeren Schreibweise halber etwas anders als in loc. cit.[5]) und bei E. Hecke, Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1919, S. 265—278. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit »Hecke, R.« zitiert.

§ 2.

Aufstellung der Vergleichsfunktion.

Es seien s, w, w' drei Parameter, die den Bedingungen

$$s > 1, \quad \Im w > 0, \quad \Im w' < 0$$

genügen. Es sei ω_1, ω_2 eine Basis von K. Bedeuten dann x und y zwei reelle Variable, so setze ich

$$\xi = x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad \xi' = x\,\omega_1' + y\,\omega_2',$$

$$F(x,y) = \sum_{\mu+\xi \succ 0} N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}}; \tag{4}$$

in $\sum\limits_{\mu+\xi\succ 0}$ durchläuft μ alle ganzen Zahlen aus K, für welche $\mu+\xi$ *total positiv*, d. h. $\mu+\xi>0$, $\mu'+\xi'>0$ ist, und $N(\mu+\xi)$ ist die *Norm* $(\mu+\xi)(\mu'+\xi')$. Daß die rechte Seite von (4) konvergiert, wird sogleich bewiesen werden. Sie hat in x und y je die Periode 1. Zugleich mit der Konvergenz will ich die Entwickelbarkeit von $F(x,y)$ in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{mn}\, e^{2\pi i (mx+ny)} \tag{5}$$

beweisen.

Wegen

$$\left| e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}} \right| = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{d}} \{\Im w (\mu+\xi) + |\Im w'| (\mu'+\xi')\}}$$

gibt es zwei nur von s, w, w', K abhängige positive Zahlen L_1 und L_2 (dieselbe Bedeutung haben in diesem Paragraphen $L_3, \ldots, L_7$), so daß das allgemeine Glied in (4) absolut

$$< L_1\, e^{-L_2 S(\mu+\xi)} \tag{6}$$

ist[7]). Differentiiert man für $s > 4$ das allgemeine Glied von (4) ein-, zwei- oder dreimal nach seinen Variablen x und y, so erhält man eine Summe von 2, 4 oder 8 Gliedern, deren jedes eine Abschätzung der Form (6) gestattet. Ich darf also annehmen, daß, falls $s > 4$ ist, die Abschätzung (6) auch für die absoluten Beträge der ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen des allgemeinen Gliedes in (4) gilt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega_1 \succ 0$, $\omega_2 \succ 0$[8]), ferner

---

[7]) Das allgemeine Glied ist $\neq 0$ nur für $\mu+\xi \succ 0$.

[8]) Es genügt, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \dfrac{d-\sqrt{d}}{2}$ zu setzen.

$\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' = +\sqrt{d} > 0$. Setzt man $\mu = a\omega_1 + b\omega_2$, so folgen aus $\mu + \xi \succ 0$ die Relationen

$$(7) \qquad (a+x)\omega_1 + (b+y)\omega_2 > 0, \qquad a+x > -\frac{\omega_2}{\omega_1}(b+y),$$

$$(8) \qquad \begin{aligned}\omega_1\{(a+x)\omega_1' + (b+y)\omega_2'\} &= (b+y)(\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1') \\ &+ \omega_1'\{(a+x)\omega_1 + (b+y)\omega_2\} > (b+y)\sqrt{d}\end{aligned}$$

und

$$(9) \qquad (a+x)\omega_1' + (b+y)\omega_2' > 0, \qquad b+y > -\frac{\omega_1'}{\omega_2'}(a+x),$$

$$(10) \qquad \begin{aligned}\omega_2'\{(a+x)\omega_1 + (b+y)\omega_2\} &= (a+x)(\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1') \\ &+ \omega_2\{(a+x)\omega_1' + (b+y)\omega_2'\} > (a+x)\sqrt{d}.\end{aligned}$$

Von den beiden Zahlen $a+x$ und $b+y$ ist mindestens eine positiv. Bei festem $b+y > 0$ kommen nach (7) für $a+x$ höchstens $\left[\frac{\omega_2}{\omega_1}(b+y)\right]+1$ Werte < 0 in Betracht; nach (8) ist dann $S(\mu+\xi) > \frac{\sqrt{d}}{\omega_1}(b+y)$. Bei festem $a+x > 0$ kommen nach (9) für $b+y$ höchstens $\left[\frac{\omega_1'}{\omega_2'}(a+x)\right]+1$ Werte < 0 in Betracht; nach (10) ist dann $S(\mu+\xi) > \frac{\sqrt{d}}{\omega_2'}(a+x)$. Folglich ist der Beitrag, den zur Summe (4) bei festem $b+y > 0$ die negativen $a+x$ liefern, absolut

$$< L_3(b+y+1)\,e^{-L_4(b+y)};$$

ebenso liefern bei festem $a+x > 0$ die negativen $b+y$ zu (4) einen Beitrag vom absoluten Werte

$$< L_5(a+x+1)\,e^{-L_6(a+x)}.$$

Daher hat die Reihe (4) eine Majorante der Form

$$\sum_{a+x>0} L_5(a+x+1)\,e^{-L_6(a+x)} + \sum_{b+y>0} L_3(b+y+1)\,e^{-L_4(b+y)}$$
$$+ \sum_{a+x\geq 0}\ \sum_{b+y\geq 0} L_1\, e^{-L_2\{(a+x)S\omega_1 + (b+y)S\omega_2\}}.$$

Diese Reihe aber ist gleichmäßig konvergent für alle x, y, also auch die rechte Seite in (4). Nach der oben gemachten Bemerkung gilt dies im Falle $s > 4$ auch für die Reihen, welche aus $F(x,y)$ durch gliedweise ein-, zwei- oder dreimalige partielle Differentiation hervorgehen. Das allgemeine Glied von $F(x,y)$[9]) und (im Falle $s > 4$) seine ersten, zweiten und dritten Ableitungen sind aber stetige Funktionen von x und y; folg-

[9]) Vgl. [7]).

lich ist $F(x, y)$ stetig und hat (im Falle $s > 4$) stetige partielle Ableitungen erster bis dritter Ordnung.

Ist $s > 4$, so läßt sich demnach $F(x, y)$ in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe (5) entwickeln. Setzt man $\varepsilon_a = 0$ für $a < 0$, $= 1$ für $a \geqq 0$, so ergeben sich deren Koeffizienten aus

$$A_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_\mu \varepsilon_{\mu+\xi}\, \varepsilon_{\mu'+\xi'}\, N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}} - 2\pi i (mx+ny)}\, dx\, dy,$$

wo über *alle* ganzen μ summiert wird. Wegen der vorhin bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe darf man gliedweise integrieren. Führt man als neue Veränderliche

$$\xi = x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad \xi' = x\,\omega_1' + y\,\omega_2'$$

ein, so wird

$$x\sqrt{d} = \xi\,\omega_2' - \xi'\,\omega_2, \qquad y\sqrt{d} = -\xi\,\omega_1' + \xi'\,\omega_1,$$

$$\frac{d(x, y)}{d(\xi, \xi')} = \frac{1}{\sqrt{d}},$$

$$(11) \qquad e^{-2\pi i(mx+ny)} = e^{-2\pi i S \frac{\xi(m\omega_2' - n\omega_1')}{\sqrt{d}}} = e^{-2\pi i S \frac{(\mu+\xi)(m\omega_2' - n\omega_1')}{\sqrt{d}}},$$

$$A_{mn} = \sum_\mu \iint \varepsilon_{\mu+\xi}\, \varepsilon_{\mu'+\xi'}\, N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{(\mu+\xi)\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\}}{\sqrt{d}}}\, \frac{1}{\sqrt{d}}\, d\xi\, d\xi',$$

wo über das Bild des Einheitsquadrates der xy-Ebene in der $\xi\xi'$-Ebene integriert wird. Es folgt

$$A_{mn} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_u\, \varepsilon_{u'}\, (u u')^{s-1}\, e^{2\pi i S \left\{u \frac{w - (m\omega_2' - n\omega_1')}{\sqrt{d}}\right\}}\, du\, du'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^\infty u^{s-1}\, e^{\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\} u}\, du \int_0^\infty u'^{s-1}\, e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w' - (m\omega_2 - n\omega_1)\} u'}\, du',$$

wo beide Integrale wegen $\Im w > 0$, $\Im w' < 0$ absolut konvergieren. Also ist schließlich

$$A_{mn} = \frac{1}{\sqrt{d}}\, \Gamma(s) \left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\}\right)^{-s} \Gamma(s) \left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w' - (m\omega_2 - n\omega_1)\}\right)^{-s}$$

$$= \frac{\Gamma^2(s)}{\sqrt{d}} \left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^{2s} \frac{1}{N\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\}^s}. \quad [10]$$

[10]) Die s-ten Potenzen haben die Bedeutung

$$\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\}\right)^s = e^{s \log\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w - (m\omega_2' - n\omega_1')\}\right)},$$

(Fortsetzung der Fußnote 10 auf der nächsten Seite.)

Dies trage ich in (5) ein; dann folgt wegen (11)

$$F(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma^2(s)\,d^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2s}}\;\frac{e^{2\pi i S\frac{\xi(m\omega_2'-n\omega_1')}{\sqrt{d}}}}{N\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}^s},$$

oder, da ω_2', $-\omega_1'$ eine Basis von K ist,

$$(12)\qquad \sum_{\mu+\xi\succ 0}N(\mu+\xi)^{s-1}\,e^{2\pi i S\frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}}=\frac{\Gamma^2(s)\,d^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2s}}\sum_{\lambda}\frac{e^{2\pi i S\frac{\xi\lambda}{\sqrt{d}}}}{N(w-\lambda)^s},$$

wo λ alle ganzen Zahlen aus K durchläuft.

Die Formel (12) ist unter der Annahme $s>4$ bewiesen worden. Daß sie für jedes $s>1$ gilt, erkennt man folgendermaßen: Es sei G ein ganz im Endlichen gelegenes abgeschlossenes Gebiet der Halbebene $\Re s>1$. Dann gilt offenbar die Abschätzung (6) des allgemeinen Gliedes von (4) bei geeigneter Wahl der Konstanten L_1 und L_2 gleichmäßig für alle s aus G. Die linke Seite von (12) konvergiert also gleichmäßig für alle s des Gebietes G, stellt also eine dort reguläre analytische Funktion von s dar. Die Gleichung (12) gilt demnach sicher dann für $s>1$, wenn die rechte Seite gleichmäßig in G konvergiert. Wegen $0<\operatorname{arc}(w-\lambda)<\pi$, $-\pi<\operatorname{arc}(w'-\lambda')<0$ genügt es, gleichmäßige Konvergenz von

$$(13)\qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{(m\omega_1+n\omega_2-\Re w)^2+(\Im w)^2\}^{\frac{-\Re s}{2}}\{(m\omega_1'+n\omega_2'-\Re w')^2+(\Im w')^2\}^{\frac{-\Re s}{2}}$$

zu beweisen. Nun ist, wie geometrisch sofort einleuchtet, für jedes Paar ganzer Zahlen k, l die Anzahl der Lösungen der Ungleichungen

$$k\leqq|m\omega_1+n\omega_2-\Re w|<k+1,$$
$$l\leqq|m\omega_1'+n\omega_2'-\Re w'|<l+1$$

in ganzen rationalen m, n kleiner als L_7, so daß (13) die gleichmäßig konvergente Majorante

$$L_7\left\{|\Im w\,\Im w'|^{-\Re s}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\Re s}|\Im w'|^{-\Re s}+\sum_{l=1}^{\infty}l^{-\Re s}|\Im w|^{-\Re s}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(kl)^{-\Re s}\right\}$$

besitzt.

$$\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}\right)^s=e^{s\log\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}\right)},$$

$$N\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}^s=e^{s\log\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}+s\log\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}}$$

mit dem Hauptwert des Logarithmus.

(12) bildet die Verallgemeinerung einer wichtigen Formel von Lipschitz[11]) auf reell-quadratische Zahlkörper. Für den speziellen Fall $s = 2, 3, \ldots$, $x = 0$, $y = 0$ ergibt sie sich auch aus einer noch nicht publizierten Formel, die mir Herr F. Bernstein im Sommer 1920 mitteilte. Diese Bernsteinsche Formel hat mich zuerst zu den Untersuchungen dieses Paragraphen veranlaßt[12]).

Setzt man in (12) $x = 0$, $y = 0$ und schreibt noch $\frac{s}{2}, \frac{w}{2}, \frac{w'}{2}$ an Stelle von s, w, w', so wird für $s > 2$, $\mathfrak{J} w > 0$, $\mathfrak{J} w' < 0$

$$(14) \qquad \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S \frac{\mu w}{\sqrt{d}}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}}{\pi^s} \sum_{\lambda} \frac{1}{N(w-2\lambda)^{\frac{s}{2}}}.$$

§ 3.

Zerlegung des Fundamental-Parallelogramms.

In diesem Paragraphen schicke ich zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. Es sei ω_1, ω_2 eine Basis des reellen quadratischen Zahlkörpers von der Grundzahl d. Es seien u und u' zwei reelle Zahlen. Zu jeder Zahl $L > \sqrt{d}$ gibt es vier ganze rationale Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2, so daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$|(y_1\omega_1 + y_2\omega_2)u - (x_1\omega_1 + x_2\omega_2)| \leqq \frac{\sqrt{d}}{L},$$

$$|(y_1\omega_1' + y_2\omega_2')u' - (x_1\omega_1' + x_2\omega_2')| \leqq \frac{\sqrt{d}}{L},$$

$$|y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leqq L, \qquad |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leqq L, \qquad y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \neq 0.$$

Beweis. Die Determinante der vier linearen Formen in y_1, y_2, x_1, x_2, die in den Zeichen des absoluten Betrages auf den linken Seiten der ersten vier Ungleichungen der Behauptung stehen, ist

$$\begin{vmatrix} \omega_1 u & \omega_2 u & -\omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_1' u' & \omega_2' u' & -\omega_1' & -\omega_2' \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega_1' & \omega_2' & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')^2 = d;$$

das Produkt der rechten Seiten ist gleichfalls d. Nach Minkowskis Satz[13])

---

[11]) Vgl. R. Lipschitz, Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen; Journal für die reine und angewandte Mathematik **105** (1889), S. 127–156.

[12]) Wie mir Herr Hecke mitteilt, hat er bei den Untersuchungen über seine Zetafunktionen die Formel (12) ebenfalls gefunden.

[13]) Vgl. H. Minkowski, Geometrie der Zahlen; Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1910; § 37.

über lineare Formen gibt es vier ganze rationale Zahlen y_1, y_2, x_1, x_2. welche den ersten vier Ungleichungen genügen und nicht sämtlich 0 sind. Wäre nun $y_1\omega_1 + y_2\omega_2 = 0$, d. h. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, so wäre

$$|(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)(x_1\omega_1' + x_2\omega_2')| \leqq \frac{d}{L^2} < 1,$$

also auch $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, was nicht zutrifft. Also gilt auch die 5. Ungleichung der Behauptung.

Hilfssatz 2. Es seien γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Zahlen aus K mit den Nennern $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Man deute (γ_1, γ_1') und (γ_2, γ_2') als Koordinaten zweier Punkte in einem rechtwinkeligen Achsenkreuz. Dann ist der Abstand dieser Punkte größer als $\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2}}$.

Beweis. Es sei $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$, $\alpha_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\alpha_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2$, und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ganz. Dann ist das Quadrat des Abstandes

$$r^2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\gamma_1' - \gamma_2')^2 = \frac{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2} + \frac{(\beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1')^2}{\alpha_1'^2\alpha_2'^2}. \tag{15}$$

Nun ist

$$\mathfrak{c}_1 | \beta_1, \quad \mathfrak{c}_2 | \beta_2, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 | \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 \neq 0, \quad \mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2' | \beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1',$$

also

$$\frac{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\,\frac{(\beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1')^2}{\alpha_1'^2\alpha_2'^2} = N\left(\frac{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2}\right)^2 \frac{1}{N\mathfrak{a}_1^2 N\mathfrak{a}_2^2} \geqq \frac{1}{N\mathfrak{a}_1^2 N\mathfrak{a}_2^2}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$r^2 \geqq \frac{2}{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2} > \frac{1}{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2},$$

also die Behauptung.

Unter dem *Fundamental-Parallelogramm* E verstehe ich dasjenige Parallelogramm in der uu'-Ebene, welches durch die Substitution $u = x\omega_1 + y\omega_2$, $u' = x\omega_1' + y\omega_2'$ aus dem Quadrat

$$-\frac{1}{2} \leqq x < +\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq y < +\frac{1}{2}$$

der xy-Ebene entsteht. Von den Ecken des Parallelogramms wird nur das Bild des Punktes $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ der xy-Ebene mitgerechnet, von den Rändern nur die an jenen Punkt anstoßenden. Ich nenne zwei Punkte der uu'-Ebene kongruent (mod 1), wenn sich ihre Koordinaten um konjugierte ganze Zahlen aus K unterscheiden. Jedem Punkt der uu'-Ebene ist dann (mod 1) ein und nur ein Punkt von E kongruent.

Ich zerlege nun die uu'-Ebene folgendermaßen in Bereiche: Eine feste Zahl $M > d$ sei gegeben. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichne ich die Menge aller Punkte (γ, γ'), deren Koordinaten γ, γ' konjugierte Zahlen aus K mit Nennern $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ von einer Norm $N\mathfrak{a} \leqq M$ sind.

I. Ist (γ, γ') irgendein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$, so lege ich um ihn als Zentrum einen Kreis $\mathfrak{K}_\gamma$ vom Radius $\frac{1}{2\sqrt{MNa}}$. Zu verschiedenen Nennern a gehören also verschiedene Radien. Nach Hilfssatz 2 schneiden sich diese Kreise nicht; sie lassen also einen Teil der uu'-Ebene frei.

II. Ich betrachte die Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ derjenigen Punkte, deren Koordinaten γ, γ' in der Form

$$(17) \qquad \gamma = \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}, \qquad \gamma' = \frac{x_1\omega_1' + x_2\omega_2'}{y_1\omega_1' + y_2\omega_2'}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ ganz rational}, \; y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \neq 0),$$

$$(18) \qquad |y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leqq \sqrt{M}, \qquad |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leqq \sqrt{M}$$

dargestellt werden können; dies ist eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Da die beiden Ungleichungen (18) nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen y_1, y_2 besitzen, so gibt es für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ nur endlich viele solcher Darstellungen. Jeden Punkt (γ, γ') von $\overline{\mathfrak{M}}$ umgebe ich nun für jede der endlich vielen Arten der Darstellung in der Form (17), (18) mit dem Rechteck

$$|u - \gamma| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1 + y_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |u' - \gamma'| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1' + y_2\omega_2'|\sqrt{M}}.$$

Zu jedem (γ, γ') von $\overline{\mathfrak{M}}$ gehören also endlich viele Rechtecke $\mathfrak{R}_\gamma$. Jeder zu (γ, γ') kongruente Punkt $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ gehört ebenfalls zu $\overline{\mathfrak{M}}$, und da $\bar{\gamma} - \gamma$ eine ganze Zahl aus K ist, so sind die Rechtecke $\mathfrak{R}_{\bar{\gamma}}$ den Rechtecken $\mathfrak{R}_\gamma$ paarweise (mod 1) kongruent.

Zu jedem Punkte (u, u') sind nun nach Hilfssatz 1 vier ganze rationale Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 derart angebbar, daß

$$\left|u - \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}\right| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1 + y_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad \left|u' - \frac{x_1\omega_1' + x_2\omega_2'}{y_1\omega_1' + y_2\omega_2'}\right| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1' + y_2\omega_2'|\sqrt{M}},$$

$$0 < |y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leqq \sqrt{M}, \qquad 0 < |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leqq \sqrt{M}$$

ist. Setzt man dann $\gamma = \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}$, so gehört (γ, γ') zu $\overline{\mathfrak{M}}$, und (u, u') liegt in einem Rechtecke $\mathfrak{R}_\gamma$. Die Rechtecke überdecken daher *alle* Punkte der Ebene; eventuell zum Teil mehrfach.

Die ganze Figur von Kreisen und Rechtecken geht in sich über, wenn E in ein (mod 1) kongruentes Parallelogramm verschoben wird. Von den Rechtecken (oder Rechtecksteilen) $\mathfrak{R}_\gamma$, die in E liegen, lasse ich zunächst diejenigen Stücke fort, welche in die Kreise $\mathfrak{K}_\gamma$ fallen. Schneiden sich zwei der übrigbleibenden Teile der $\mathfrak{R}_\gamma$ in E, so lasse ich ferner bei einem von beiden das gemeinsame Stück fort. Da nur endlich viele $\mathfrak{R}_\gamma$ in E hineinfallen, so erhält man nach endlich vielen Schritten eine *einfache* Überdeckung des Fundamental-Parallelogramms.

Es sei $\mathfrak{F}$ eines der endlich vielen Stücke, in welche E bei dieser Überdeckung zerfällt. Dann ist also $\mathfrak{F}$ Teil eines Kreises oder Rechtecks, das um einen ganz bestimmten Punkt (γ, γ') der Menge $\mathfrak{M}$ oder $\overline{\mathfrak{M}}$ gelegt ist. Diesem Punkte (γ, γ') ist (mod 1) ein Punkt $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ von E kongruent; eventuell koinzidieren beide Punkte. Ich verschiebe nun das Gebiet $\mathfrak{F}$, indem ich die Koordinaten aller seiner Punkte um $\bar{\gamma} - \gamma$ und $\bar{\gamma}' - \gamma'$ vermehre; das durch diese Verschiebung entstandene, zu $\mathfrak{F}$ (mod 1) kongruente Gebiet ordne ich dem Punkte $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ von E zu. Dies führe ich für alle die endlich vielen Teile $\mathfrak{F}$ von E aus. Das *Ergebnis* ist folgendes:

$M > d$ sei gegeben. Die (endliche) Menge derjenigen Punkte von E, deren Koordinaten γ, γ' konjugierte Zahlen aus K mit Nennern $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ von einer Norm $N\mathfrak{a} \leqq M$ sind, werde mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Jedem Punkte (γ, γ') von $\mathfrak{E}$ ist ein Gebiet $\mathfrak{F}_\gamma$ zugeordnet („umbeschrieben"), welches sich aus endlich vielen Polygonen zusammensetzt, deren Seiten Strecken oder Kreisbögen sind. Zeichnet man zu allen $\mathfrak{F}_\gamma$ die ihnen (mod 1) kongruenten Teile von E, so überdecken diese Teile das Gebiet E lückenlos und einfach. $\mathfrak{F}_\gamma$ enthält den Kreis $\mathfrak{K}_\gamma$; der übrige Teil von $\mathfrak{F}_\gamma$ (wenn es einen solchen gibt) werde mit $\mathfrak{K}_\gamma^*$ bezeichnet. Irgendein Punkt (u, u') der Ebene liegt

1. entweder außerhalb von $\mathfrak{F}_\gamma$; dann hat er nach I. von (γ, γ') mindestens den Abstand $\frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}$;

2. oder in $\mathfrak{K}_\gamma$; dann ist nach I.

$$(19) \qquad |u - \gamma| \leqq \frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}, \qquad |u' - \gamma'| \leqq \frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}};$$

3. oder in $\mathfrak{K}_\gamma^*$; dann ist nach II. für vier gewisse ganze rationale Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2

$$\gamma = \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{b_1\omega_1 + b_2\omega_2}, \qquad \gamma' = \frac{a_1\omega_1' + a_2\omega_2'}{b_1\omega_1' + b_2\omega_2'},$$

$$(20) \qquad \begin{cases} |b_1\omega_1 + b_2\omega_2| \leqq \sqrt{M}, & |b_1\omega_1' + b_2\omega_2'| \leqq \sqrt{M}, \\ 1 \leqq |N(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)| \leqq M, \end{cases}$$

$$(21) \qquad |u - \gamma| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |u' - \gamma'| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt{M}}.$$

Diese Zerlegung in Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ nenne ich kurz die *F-Zerlegung*.

§ 4.

Gang des Beweises.

Es seien t und t' zwei Unbestimmte, die den Bedingungen $\mathfrak{J}t > 0$, $\mathfrak{J}t' < 0$ genügen. Dann ist für jedes natürliche s

$$(22) \qquad \vartheta^s(t, t') = \Bigl(\sum_{\mathfrak{d}|\mu} e^{\pi i S \frac{\mu^2 t}{\sqrt{d}}}\Bigr)^s = \sum_{\mathfrak{d}|\lambda} A_s(\lambda)\, e^{\pi i S \frac{\lambda t}{\sqrt{d}}},$$

wo $A_s(\lambda)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl λ als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen aus K bedeutet. Ist μ irgendeine ganze Zahl aus K, so sind $S\frac{\mu\omega_1}{\sqrt{d}}$ und $S\frac{\mu\omega_2}{\sqrt{d}}$ stets ganz rational, und zwar beide $=0$ nur für $\mu=0$. Nach (22) ist also

$$A_s(\nu)=e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta^s(t+2(x\omega_1+y\omega_2),\, t'+2(x\omega_1'+y\omega_2'))\, e^{-2\pi i S\frac{\nu(x\omega_1+y\omega_2)}{\sqrt{d}}}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\,e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\iint_E \vartheta^s(t+2u,\, t'+2u')\, e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}\,du\,du';$$

und folglich bei Benutzung der F-Zerlegung

$$(23)\quad A_s(\nu)=\frac{1}{\sqrt{d}}\,e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\sum_{\gamma}{}'\iint_{\mathfrak{F}_\gamma}\vartheta^s(t+2u,\, t'+2u')\, e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}\,du\,du',$$

wo γ alle Zahlen von $\mathfrak{C}$ durchläuft[14]).

Es sei $\mathfrak{a}$ der Nenner von γ. Setzt man

$$G(\gamma)=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\gamma}{\sqrt{d}}},$$

so ist nach (3) für $0<\mathfrak{J}w\to 0,\ 0>\mathfrak{J}w'\to 0$

$$\vartheta^s(w+2\gamma,\, w'+2\gamma')\sim\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}}\right)^s.\ ^{15)}$$

In § 5 wird dies angewendet für $w=t+2(u-\gamma)$, $w'=t'+2(u'-\gamma')$, wo (u, u') einen Punkt in $\mathfrak{F}_\gamma$ bedeutet; dort wird nämlich die Funktion $\vartheta^s(t+2u,\, t'+2u')$ aus dem Integranden bei (23) ersetzt durch $\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{t+2(u-\gamma)}\sqrt{t'+2(u'-\gamma')}}\right)^s$. In § 6 wird diese Funktion unter Benutzung von (14) ersetzt durch die Reihe

$$\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s\frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_{\mu\succ 0}N\mu^{\frac{s}{2}-1}\,e^{\pi i S\frac{\mu\{t+2(u-\gamma)\}}{\sqrt{d}}}.$$

In § 7 wird schließlich jedes $\mathfrak{F}_\gamma$ wieder durch das ganze Fundamental-Parallelogramm ersetzt und in (23) die Summe über ein vollständiges System (mod 1) inkongruenter Zahlen γ[16]), nicht nur über die Zahlen γ

[14]) Der Integrand hat in x, y die Perioden 1, 1; also darf das Integrationsgebiet E durch die Gebiete $\mathfrak{F}_\gamma$ ersetzt werden.

[15]) $\sqrt{w}$ und $\sqrt{w'}$ haben ihre Hauptwerte.

[16]) Zwei Zahlen aus K heißen inkongruent (mod 1), wenn ihre Differenz nicht ganz ist.

der Menge $\mathfrak{E}$, erstreckt. Dann tritt an Stelle von $A_s(\nu)$ bei formaler Rechnung der Ausdruck

$$B_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-\pi i S \frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \sum_{\gamma} \iint_{\mathfrak{E}} \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S \frac{\mu\{t+2(u-\gamma)\}}{\sqrt{d}}} e^{-2\pi i S \frac{\nu u}{\sqrt{d}}} du\, du$$

$$= \frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}} \sum_{\gamma} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\gamma\nu}{\sqrt{d}}}.$$

Die auf der rechten Seite auftretende Summe ist gerade die in Formel (1) mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Größe. (1) behauptet also

$$A_s(\nu) \sim B_s(\nu),$$

für jedes $s \geqq 5$, $\nu \succ 0$, $N\nu \to \infty$, wobei im Falle eines geraden (also durch 4 teilbaren) d die Zahl ν von der Form $a + b\sqrt{d}$ mit ganzen rationalen a, b ist.

§ 5.

Abschätzung von $\vartheta(t + 2u,\ t' + 2u')$ in $\mathfrak{F}_\gamma$.

Zunächst untersuche ich die in (3) auftretende Summe

$$G(\gamma, \lambda) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma + \varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

hierin ist γ vom Nenner $\mathfrak{a}$, λ irgendeine Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}}$, und ϱ durchläuft ein vollständiges Restsystem $(\bmod\ \mathfrak{a})$. Es wird

$$(24)\quad |G(\gamma,\lambda)|^2 = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{(\varrho-\sigma)\{(\varrho+\sigma)\gamma+\lambda\}}{\sqrt{d}}} = \sum_{\tau \bmod \mathfrak{a}} \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\tau\{(\tau+2\sigma)\gamma+\lambda\}}{\sqrt{d}}}$$

$$= \sum_{\tau \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\tau^2\gamma+\tau\lambda}{\sqrt{d}}} \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{2\sigma\tau\gamma}{\sqrt{d}}}.$$

In der inneren Summe hat $2\tau\gamma = \beta$ als Nenner das Ideal $\mathfrak{a}$ oder einen Teiler von $\mathfrak{a}$. Ich unterscheide drei Fälle:

1. $\mathfrak{a}$ enthalte verschiedene Primidealteiler. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1$. Es existieren zwei Hauptideale $(\alpha_1) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1$, $(\alpha_2) = \mathfrak{a}_2\mathfrak{f}_2$, so daß $(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2, \mathfrak{a}) = 1$ ist. Durchlaufen σ_1, σ_2 vollständige Restsysteme $\bmod\ \mathfrak{a}_1$, $\bmod\ \mathfrak{a}_2$, so durchläuft $\sigma = \sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_1$ alle verschiedene Reste $\bmod\ \mathfrak{a}$. Es wird

$$(25)\quad \sum_{\sigma} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{(\sigma_1\alpha_2+\sigma_2\alpha_1)\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_1} e^{2\pi i S \frac{\sigma_1\beta\alpha_2}{\sqrt{d}}} \sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{\sigma_2\beta\alpha_1}{\sqrt{d}}};$$

und die Nenner von $\beta\alpha_2$ und $\beta\alpha_1$ sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ oder Teiler dieser Ideale.

2. $\mathfrak{a}$ sei Potenz eines Primideals: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^k$, $k \geqq 2$. Es gibt ein Hauptideal $(\alpha) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$. Durchlaufen die Zahlen σ_1, σ_2 vollständige Restsysteme $\bmod \mathfrak{p}$, $\bmod \mathfrak{p}^{k-1}$, so durchläuft $\sigma = \sigma_1 \alpha^{k-1} + \sigma_2$ ein vollständiges Restsystem $\bmod \mathfrak{a}$; und es wird

$$(26)\qquad \sum_{\sigma} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{(\sigma_1\alpha^{k-1}+\sigma_2)\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{\sigma_2\beta}{\sqrt{d}}} \sum_{\sigma_1} e^{2\pi i S \frac{\sigma_1\alpha^{k-1}\beta}{\sqrt{d}}},$$

wo $\alpha^{k-1}\beta$ den Nenner $\mathfrak{p}$ oder 1 hat.

3. $\mathfrak{a}$ sei ein Primideal $\mathfrak{p}$. Dann ist $\sum\limits_{\sigma} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = 0$, wenn β den Nenner $\mathfrak{p}$ hat, $= N\mathfrak{p}$, wenn β ganz ist[17]).

Aus diesem letzten Fall 3 ergibt sich mit Rücksicht auf (25) und (26) für beliebiges $\mathfrak{a}$

$$(27)\qquad \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = 0 \text{ für nicht ganzes } \beta, \qquad = N\mathfrak{a} \text{ für ganzes } \beta.$$

Offenbar gilt dies auch für $\mathfrak{a} = 1$.

In (24) hat nun γ den Nenner $\mathfrak{a}$; die Zahl $\beta = 2\tau\gamma$ ist also ganz nur für $\mathfrak{a} \mid 2\tau$. Da τ alle Reste $\bmod \mathfrak{a}$ durchläuft, so ist $\mathfrak{a} \mid 2\tau$ höchstens für $N2 = 4$ Werte von τ. Die innere Summe bei (24) ist also für höchstens vier Werte von τ von 0 verschieden und dann $= N\mathfrak{a}$; also ist

$$(28)\qquad |G(\gamma, \lambda)|^2 \leqq 4N\mathfrak{a}, \qquad |G(\gamma, \lambda)| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}}.$$

In (3) trenne ich von der rechten Seite das Glied $\lambda = 0$ ab und schreibe

$$(29)\qquad S_1 = \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}} \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma + \varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

dann ist nach (28)

$$(30)\qquad |S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0} e^{-\Re\left(\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}\right)} = 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0} e^{-S(\lambda^2 v)},$$

wo

$$(31)\qquad -\frac{\pi}{\sqrt{d}}\Im\frac{1}{w} = v, \qquad \frac{\pi}{\sqrt{d}}\Im\frac{1}{w'} = v'$$

gesetzt ist. v und v' sind positiv wegen $\Im w > 0$, $\Im w' < 0$.

---

[17]) Vgl. Hecke, R.

Es sei $\varepsilon > 1$ die Fundamentaleinheit von K. Sind p und q irgend zwei positive Zahlen, so gibt es eine ganze rationale Zahl m derart, daß

$$L_{10} < \frac{p}{\sqrt{pq}}\,\varepsilon^{2m}, \qquad L_{10} < \frac{q}{\sqrt{pq}}\,\varepsilon'^{2m} \tag{32}$$

ist, wo L_{10} (wie auch weiterhin $L_{11}, \ldots, L_{41}$) eine positive nur von K (und weiterhin evtl. von s) abhängige Zahl bedeutet.

Bekanntlich liegt in jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine Zahl $\alpha \neq 0$ mit

$$|N\alpha| < L_{11}\, N\mathfrak{a}. \tag{33}$$

Aus (30) folgt für dieses α

$$|S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{d} \mid \lambda \neq 0} e^{-S\frac{\lambda^2 v}{\alpha^2}},$$

wo λ alle ganzen Zahlen $\neq 0$ durchläuft; also, wenn in (32) $p = \frac{v}{\alpha^2}$, $q = \frac{v'}{\alpha'^2}$ gesetzt wird, wegen (32) und (33)

$$|S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{d} \mid \lambda \neq 0} e^{-L_{12}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}} S\lambda^2}. \tag{34}$$

Es sei nun ν eine ganze total positive Zahl, für welche die Funktion $A_s(\nu)$ abgeschätzt werden soll. Offenbar ist $A_s(\varepsilon^2\nu) = A_s(\nu)$, ich darf also ohne Beschränkung der Allgemeinheit wegen (32)

$$L_{10} < \frac{\nu}{\sqrt{N\nu}}, \qquad L_{10} < \frac{\nu'}{\sqrt{N\nu}} \tag{35}$$

voraussetzen. Ferner sei $N\nu > d^2$. Ich bilde die in § 3 beschriebene F-Zerlegung mit $M = \sqrt{N\nu} > d$. Es sei (γ, γ') ein Punkt der zu dieser F-Zerlegung gehörigen Menge $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{a}$ der Nenner von γ. Liegt dann (u, u') in $\mathfrak{F}_\gamma$, so ist, wenn

$$u - \gamma = \Theta, \qquad u' - \gamma' = \Theta', \qquad \gamma = \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{b_1\omega_1 + b_2\omega_2}$$

gesetzt wird, nach (19) und (21)

$$|\Theta| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt[4]{N\nu}}, \quad |\Theta'| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt[4]{N\nu}} \qquad ((u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma^*), \tag{36}$$

$$|\Theta| \leqq \frac{1}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt[4]{N\nu}}, \qquad |\Theta'| \leqq \frac{1}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt[4]{N\nu}} \qquad ((u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma). \tag{37}$$

Es sei

$$\begin{cases} t = \dfrac{i}{\sqrt{N\nu}}, & t' = -\dfrac{i}{\sqrt{N\nu}}, \\ w = t + 2\Theta, & w' = t' + 2\Theta', \end{cases} \tag{38}$$

dann ist $\mathfrak{J} w > 0$, $\mathfrak{J} w' < 0$, und nach (31)

$$v = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \frac{\frac{1}{\sqrt{N\nu}}}{\frac{1}{N\nu} + 4\Theta^2}, \qquad v' = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \frac{\frac{1}{\sqrt{N\nu}}}{\frac{1}{N\nu} + 4\Theta'^2}.$$

Aus (36) und (37) folgt

$$\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{vv'}} \leqq L_{13} N\mathfrak{a} \sqrt{N\nu} \sqrt{\frac{1}{N\nu} + 4\Theta^2} \sqrt{\frac{1}{N\nu} + 4\Theta'^2}$$

$$\leqq \begin{cases} L_{13} \dfrac{N\mathfrak{a}}{|N(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)|} \cdot \sqrt{\dfrac{(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)^2}{\sqrt{N\nu}} + 4d} \sqrt{\dfrac{(b_1\omega_1' + b_2\omega_2')^2}{\sqrt{N\nu}} + 4d} \\ \qquad\qquad \text{für } (u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma^*, \\ L_{13} \sqrt{\dfrac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{N\nu}} + 1} \sqrt{\dfrac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{N\nu}} + 1} \quad \text{für } (u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma. \end{cases}$$

Nun ist aber $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$ und ebenfalls

$$(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)^2 \leqq \sqrt{N\nu}, \qquad (b_1\omega_1' + b_2\omega_2')^2 \leqq \sqrt{N\nu},$$

sowie

$$N\mathfrak{a} \,|\, N(b_1\omega_1 + b_2\omega_2).$$

Bei jeder der beiden Möglichkeiten für die Lage von (u, u') folgt also

(39) $$\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{vv'}} \leqq L_{14}.$$

Setzt man in (34) $\lambda = m\omega_1 + n\omega_2$, so steht rechts im Exponenten eine negativ definite quadratische Form in m und n; und mit Rücksicht auf die Abschätzung (39) folgt daher aus (34)

$$|S_1| \leqq L_{15} \sqrt{N\mathfrak{a}}\, e^{-L_{16} \frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}.$$

Aus (29) und (3) ergibt sich also: Liegt der Punkt (u, u') in $\mathfrak{F}_\gamma$, so ist

(40) $$\vartheta(t + 2u, t' + 2u') = \frac{G(\gamma, 0)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}} + H_1 \frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt{|ww'|}}, \qquad |H_1| \leqq L_{15};$$

darin ist gesetzt $t = -t' = \frac{i}{\sqrt{N\nu}}$, $w = t + 2(u - \gamma)$, $w' = t' + 2(u' - \gamma')$, $v = -\frac{\pi}{\sqrt{d}} \mathfrak{J} \frac{1}{w}$, $v' = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \mathfrak{J} \frac{1}{w'}$.

Schreibe ich $G(\gamma, 0) = G(\gamma)$, so ist nach (28)

(41) $$\left| \frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}} \right| \leqq \frac{2}{\sqrt{N\mathfrak{a}}};$$

aus (40) folgt demnach für natürliches s

$$(42)\quad \vartheta^s(t+2u, t'+2u') = \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}}\right)^s + H_2 \frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}}, \qquad |H_2| \leqq L_{17},$$

wo (u, u') irgendeinen Punkt aus $\mathfrak{F}_\gamma$ bedeutet.

Nun ist

$$\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{d}\,\sqrt{N\nu}\,N\mathfrak{a}\,|ww'|};$$

daher gilt, weil die Funktion $z^a e^{-z}$ für festes $a > 0$ im Gebiet $z \geqq 0$ beschränkt ist, für $s > 4$

$$\frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}} \leqq L_{18} \frac{N\nu^{\frac{s}{4}-1}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^2};$$

also

$$(43)\quad \iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma} \frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' \leqq L_{18}\frac{N\nu^{\frac{s}{4}-1}}{N\mathfrak{a}^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du\,du'}{\left(\frac{1}{N\nu}+4(u-\gamma)^2\right)\left(\frac{1}{N\nu}+4(u'-\gamma')^2\right)}$$

$$= L_{19}\frac{N\nu^{\frac{s}{4}}}{N\mathfrak{a}^2}.$$

Aus (23), (42), (43) folgt nun

$$A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \sum_\gamma{}' \left\{\iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\,w'^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' + H_3\frac{N\nu^{\frac{s}{4}}}{N\mathfrak{a}^2}\right\},$$

$$|H_3| \leqq L_{20},$$

wo über alle γ der F-Zerlegung summiert wird. Die Anzahl derjenigen Zahlen γ, die ein festes Ideal $\mathfrak{a}$ zum Nenner haben, ist $\varphi(\mathfrak{a}) \leqq N\mathfrak{a}$; ferner ist $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$, und daher

$$\sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^2} \leqq \sum_{N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}} < L_{21}\log N\nu.\ ^{18)}$$

Folglich gilt für $s \geqq 5$

$$(44)\quad A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \left\{\sum_\gamma{}' \iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\,w'^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' + H_4 N\nu^{\frac{s}{4}}\log N\nu\right\},$$

$$|H_4| \leqq L_{22}.$$

---

18) Dies folgt aus der bekannten Relation $\sum\limits_{N\mathfrak{a}\leqq x} 1 = O(x)$ durch partielle Summation. Es war $N\nu > d^2$.

§ 6.

Abschätzung der Vergleichsfunktion.

Es sei (γ, γ') ein Punkt der F-Zerlegung. Ich umgebe ihn mit dem Parallelogramm

$$u = \gamma + x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad u' = \gamma' + x\,\omega_1' + y\,\omega_2',$$
$$-\frac{1}{2} \leqq x < +\frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \leqq y < +\frac{1}{2}.$$

Von diesem lasse ich denjenigen Teil fort, dessen Punkte denen von $\mathfrak{F}_\gamma$ kongruent (mod 1) sind. Das übrigbleibende Gebiet werde $\mathfrak{R}_\gamma$ genannt; $\mathfrak{R}_\gamma$ und $\mathfrak{F}_\gamma$ zusammen heiße E_γ. In diesem Paragraphen soll die Reihe

$$S_3 = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{|N(w - 2\lambda)|^{\frac{s}{2}}} \qquad (s > 4), \tag{45}$$

in der λ alle ganzen Zahlen von K exkl. 0 durchläuft und

$$w = t + 2(u - \gamma) = \frac{i}{\sqrt{N\nu}} + 2\Theta, \qquad w' = t' + 2(u' - \gamma') = -\frac{i}{\sqrt{N\nu}} + 2\Theta' \tag{46}$$

gesetzt ist, für alle Wertepaare (u, u') aus E_γ abgeschätzt werden.

Nach (46) ist

$$|N(w - 2\lambda)|^2 = \left(\frac{1}{N\nu} + 4(\Theta - \lambda)^2\right)\left(\frac{1}{N\nu} + 4(\Theta' - \lambda')^2\right). \tag{47}$$

Ich werde zunächst beweisen: Für jeden Punkt (u, u') aus E_γ und jedes ganze $\lambda \neq 0$ ist

$$\max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > L_{23}. \tag{48}$$

1. (u, u') liege in $\mathfrak{R}_\gamma$. Für jedes ganze $\lambda = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 \neq 0$ ist mindestens eine der beiden Zahlen $|l_1|, |l_2| \geqq 1$, also mindestens eine der beiden Differenzen $|x - l_1|, |y - l_2| \geqq \frac{1}{2}$; wegen

$$\Theta - \lambda = (x - l_1)\,\omega_1 + (y - l_2)\,\omega_2, \qquad \Theta' - \lambda' = (x - l_1)\,\omega_1' + (y - l_2)\,\omega_2'$$

ist demnach $\max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > L_{24}$.

2. (u, u') liege in dem Teil $\mathfrak{R}_\gamma$ von $\mathfrak{F}_\gamma$. Dann ist nach (19)

$$|\Theta - \lambda| \geqq |\lambda| - \frac{1}{2\sqrt{Na}\sqrt{M}} > |\lambda| - \frac{1}{2}, \qquad |\Theta' - \lambda'| > |\lambda'| - \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Nun ist λ ganz und $\neq 0$, also $|\lambda\lambda'| \geqq 1$, $\max(|\lambda|, |\lambda'|) \geqq 1$ und nach (49) $\max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > \frac{1}{2}$.

3. (u, u') liege in dem Teil $\mathfrak{R}_\gamma^*$ von $\mathfrak{F}_\gamma$. Dann ist nach (21)

$$|\Theta - \lambda| \geqq |\lambda| - \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |\Theta' - \lambda'| \geqq |\lambda'| - \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt{M}},$$

also nach (20)

$$|\Theta-\lambda|+|\Theta'-\lambda'| \geqq |\lambda|+|\lambda'| - \frac{\sqrt{d}\,2\sqrt{M}}{N\mathfrak{a}\sqrt{M}} \geqq |\lambda|+|\lambda'|-2\sqrt{d}.$$

Für $|\lambda+|\lambda'| \geqq 2\sqrt{d}+1$ folgt hieraus $\max(|\Theta-\lambda|, |\Theta'-\lambda'|) \geqq \frac{1}{2}$; ferner sind wegen $|\Theta\Theta'| \leqq \frac{d}{M} < 1$ die Differenzen $\Theta-\lambda$ und $\Theta'-\lambda'$ nicht zugleich 0, so daß für die endlich vielen λ mit $|\lambda|+|\lambda'| < 2\sqrt{d}+1$ eine Ungleichung $\max(|\Theta-\lambda|, |\Theta'-\lambda'|) > L_{25}$ gilt.

In jedem der drei betrachteten Fälle galt eine Ungleichung der Form (48); also gilt (48) allgemein.

Die Anzahl der Lösungen der Ungleichungen

$$k \leqq |\Theta-\lambda| < k+1, \qquad l \leqq |\Theta'-\lambda'| < l+1$$

in konjugierten ganzen Zahlen λ, λ' ist nun kleiner als L_{26} (vgl. den Schluß von § 2). Mit Rücksicht auf (47) und (48) folgt

$$(50)\quad S_2 \leqq L_{26}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2L_{23}\right)^{\frac{s}{2}}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2k\right)^{\frac{s}{2}}} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2l\right)^{\frac{s}{2}}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(4kl)^{\frac{s}{2}}}\right\}$$

$$< L_{27}\,N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

Aus (14), (45), (50) folgt

$$(51)\quad \frac{1}{w^{\frac{s}{2}}w'^{\frac{s}{2}}} = \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_{\mu\succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1}e^{\pi i S\frac{\mu w}{\sqrt{d}}} + H_5\,N\nu^{\frac{s}{4}}, \qquad |H_5| < L_{27},$$

für (u, u') in E_γ.

§ 7.

Schluß des Beweises.

Durch die Substitution $u = \gamma+\Theta$, $u' = \gamma'+\Theta'$ führe ich in (44) Θ und Θ' als Integrationsveränderliche ein. Dadurch gehen die Gebiete $\mathfrak{F}_\gamma$, $\mathfrak{R}_\gamma$, E_γ der uu'-Ebene in Gebiete $\mathfrak{F}'_\gamma$, $\mathfrak{R}'_\gamma$, E'_γ der $\Theta\Theta'$-Ebene über. Dann sind die Punkte von E'_γ denen des Fundamental-Parallelogramms E kongruent (mod 1). Jeder äußere oder Rand-Punkt von $\mathfrak{F}'_\gamma$ hat von dem Nullpunkt $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ nach den Eigenschaften der F-Zerlegung mindestens den Abstand $\frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{N\nu}\sqrt{N\mathfrak{a}}}$. Folglich ist nach (41) und (46)

(52) $$\left|\iint\limits_{\mathfrak{R}'_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}} w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'\right| \leqq L_{28} N\mathfrak{a}^{-\frac{s}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\frac{1}{4\sqrt[4]{N\nu}\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{+\infty} \frac{d\Theta\, d\Theta'}{\left\{\left(\frac{1}{N\nu}+4\Theta^2\right)\left(\frac{1}{N\nu}+4\Theta'^2\right)\right\}^{\frac{s}{4}}}$$

$$\leqq L_{29} N\mathfrak{a}^{-\frac{s}{2}} N\nu^{\frac{s}{2}-1} \int\limits_{\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{s}{4}}}.$$

Für $s > 2$ ist aber mit Rücksicht auf $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$

(53) $$\int\limits_{\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{s}{4}}} \leqq L_{30}\left(\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{\sqrt{N\mathfrak{a}}}\right)^{1-\frac{s}{2}}.$$

(52) und (53) liefern

(54) $$\left|\sum_\gamma{}' \iint\limits_{\mathfrak{R}'_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}} w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'\right| < L_{31} N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)} \sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}}.$$

Nun ist aber für $s \geqq 5$

(55) $$\sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}} \leqq \sum_{N\mathfrak{a}<\sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{3}{4}}} < L_{32} N\nu^{\frac{1}{8}};$$ [19])

es folgt also aus (44) wegen (54), (55) die Gleichung

(56) $$A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\left\{\sum_\gamma{}' \iint\limits_{E'_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}} w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta' \right.$$
$$\left. + H_4 N\nu^{\frac{s}{4}} \log N\nu + H_5 N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)+\frac{1}{8}}\right\},$$
$$|H_4| \leqq L_{23}, \quad |H_5| \leqq L_{33}.$$

Ich trage nun im Integranden die rechte Seite von (51) ein und erhalte

(57) $$\iint\limits_{E'_\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}} w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'$$
$$= \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \iint\limits_{E'_\gamma} \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S\frac{\mu(\beta+2\Theta)}{\sqrt{d}}} e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}\, d\Theta\, d\Theta'$$
$$+ H_7 \left|\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right|^s N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

---

[19]) Vgl. [18]).

Der Integrand auf der rechten Seite dieser Gleichung konvergiert gleichmäßig für alle Θ, Θ'; ich darf also gliedweise integrieren. Er ändert sich ferner nicht, wenn (Θ, Θ') durch einen (mod 1) kongruenten Punkt ersetzt wird; ich darf also über E an Stelle von E'_γ integrieren. Es ist aber

$$(58)\qquad \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S\frac{\mu t}{\sqrt{d}}} e^{-2\pi i S\frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}} \iint_E e^{2\pi i S\frac{(\mu-\nu)\Theta}{\sqrt{d}}}\, d\Theta\, d\Theta'$$

$$= \sqrt{d}\, e^{\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} N\nu^{\frac{s}{2}-1} e^{-2\pi i S\frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}$$

und nach (41) für $s \geqq 5$

$$(59)\qquad \sum_\gamma{}' \left|\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right|^s < L_{34} \sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{s}{2}}} < L_{34} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{3}{2}}} = L_{35}\,.$$

Aus (56), (57), (58), (59) folgt für $s \geqq 5$

$$(60)\qquad A_s(\nu) = \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}} N\nu^{\frac{s}{2}-1} \sum_\gamma{}' \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}$$

$$+ H_8\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)+\frac{1}{8}} \log N\nu,$$

$$|H_8| < L_{36}\,.$$

In der Summe $\sum\limits_\gamma{}'$ durchläuft γ ein System solcher (mod 1) inkongruenten Zahlen aus K, deren Nenner $\mathfrak{a}$ eine Norm $N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{N\nu}$ haben. Hebt man letztere Beschränkung auf, so ändert sich die rechte Seite von (60) um eine Größe vom absoluten Betrage

$$(61)\qquad < L_{37}\, N\nu^{\frac{s}{2}-1} \sum_{N\mathfrak{a} > \sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{s}{2}-1}} < L_{38}\, N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

Ferner ist nach (35)

$$\frac{\nu}{\sqrt{N\nu}} < \frac{1}{L_{10}}, \qquad \frac{\nu'}{\sqrt{N\nu}} < \frac{1}{L_{10}},$$

also nach (38)

$$(62)\qquad \left| e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \right| = \left| e^{-\pi i \left(\frac{\nu i}{\sqrt{d}\,\sqrt{N\nu}} + \frac{\nu' i}{\sqrt{d}\,\sqrt{N\nu}}\right)} \right| < L_{39}\,.$$

Da nun für $s \geqq 5$

$$\frac{s}{4} < \frac{s}{2} - 1, \qquad \frac{3}{4}\left(\frac{s}{2} - 1\right) + \frac{1}{8} < \frac{s}{2} - 1$$

gilt, so folgt aus (60), (61), (62)

$$(63)\qquad A_s(\nu)=\frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_\gamma\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}+o\left(N\nu^{\frac{s}{2}-1}\right);$$

in der Summe durchläuft γ ein vollständiges System (mod 1) inkongruenter Zahlen aus K, d. h. ein vollständiges System von solchen Zahlen des Körpers, deren Differenzen nicht ganz sind. Diese unendliche Summe nenne ich die $\mathfrak{S}$-*Reihe*; sie soll im folgenden Paragraphen näher untersucht werden.

§ 8.

Summation der $\mathfrak{S}$-Reihe.

Zunächst wird die $\mathfrak{S}$-Reihe als unendliches Produkt geschrieben. Setzt man für festes ganzes ν und natürliches s

$$H(\mathfrak{a})=\sum_\delta\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}},$$

wo $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal bedeutet und δ ein vollständiges System von $\varphi(\mathfrak{a})$ mod 1 inkongruenten Brüchen mit dem Nenner $\mathfrak{a}$ durchläuft, so ist für $s\geqq 5$

$$\mathfrak{S}=\sum_{\mathfrak{a}} H(\mathfrak{a});$$

hierin durchläuft $\mathfrak{a}$ alle (ganzen) Ideale.

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei teilerfremde Ideale. Durchläuft $\varkappa$ ein vollständiges System mod 1 verschiedener Brüche vom Nenner $\mathfrak{a}$, λ ein vollständiges System mit dem Nenner $\mathfrak{b}$, so durchläuft $\mu=\varkappa+\lambda$ ein vollständiges System mit dem Nenner $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Folglich ist

$$(64)\qquad H(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=\sum_\mu\left(\frac{G(\mu)}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\mu}{\sqrt{d}}}=\sum_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{G(\varkappa+\lambda)}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{\sqrt{d}}}.$$

In

$$G(\varkappa+\lambda)=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2(\varkappa+\lambda)}{\sqrt{d}}}$$

setze ich $\varrho=\sigma+\tau$, wo σ ein vollständiges System mod $\mathfrak{a}$ inkongruenter durch $\mathfrak{b}$ teilbarer Zahlen und τ ein vollständiges System mod $\mathfrak{b}$ inkongruenter durch $\mathfrak{a}$ teilbarer Zahlen durchläuft; dann wird

$$(65)\qquad G(\varkappa+\lambda)=\sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}}\ \sum_{\tau \bmod \mathfrak{b}} e^{2\pi i S\frac{\sigma^2\varkappa+\tau^2\lambda}{\sqrt{d}}}=G(\varkappa)\,G(\lambda).$$

Aus (64), (65) folgt

$$H(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \sum_{\varkappa} \left(\frac{G(\varkappa)}{N\mathfrak{a}}\right)^{s} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa}{\sqrt{d}}} \sum_{\lambda} \left(\frac{G(\lambda)}{N\mathfrak{b}}\right)^{s} e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda}{\sqrt{d}}} = H(\mathfrak{a})\, H(\mathfrak{b}).$$

Demnach gestattet (für $s \geqq 5$) die $\mathfrak{S}$-Reihe die Produktzerlegung

$$\mathfrak{S} = \prod_{\mathfrak{p}} J(\mathfrak{p}), \qquad J(\mathfrak{p}) = 1 + H(\mathfrak{p}) + H(\mathfrak{p}^2) + \ldots,$$ [20])

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale aus K durchläuft.

Bei der Berechnung von $J(\mathfrak{p})$ behandele ich zunächst den Fall $\mathfrak{p} \nmid 2$. Es sei a eine natürliche Zahl und δ eine Zahl aus K vom Nenner $\mathfrak{p}^a$. Ist dann $\varkappa$ ganz und nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist [21])

$$G(\varkappa\delta) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{a} G(\delta),$$

wo $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)$ das quadratische Restsymbol bedeutet, und daher

$$H(\mathfrak{p}^a) = \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^{s} \sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}}; \tag{66}$$

hierin durchläuft $\varkappa$ ein System von $\varphi(\mathfrak{p}^a)$ mod $\mathfrak{p}^a$ inkongruenten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen. Ist $a \geqq 2$, so durchlaufe ϱ ein vollständiges System von $N\mathfrak{p}^{a-1}$ mod $\mathfrak{p}^{a-1}$ inkongruenten Zahlen, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{p}$; ferner sei π eine genau durch $\mathfrak{p}^1$ teilbare Zahl und $\varkappa = \varkappa_1 + \pi\varrho$, dann ist

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\pi\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.$$

Nach (27) ist nun $\sum\limits_{\varrho} = 0$ für $\mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu$, [22]) $= N\mathfrak{p}^{a-1}$ für $\mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu$; also

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu, \quad = N\mathfrak{p}^{a-1} \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \tag{67}$$

für $\mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu$. Dies gilt auch für $a = 1$.

---

[20]) Nach (41) ist

$$|H(\mathfrak{a})| \leqq \left(\frac{2}{\sqrt{N\mathfrak{a}}}\right)^{s} N\mathfrak{a},$$

also

$$|J(\mathfrak{p}) - 1| \leqq \frac{2^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1} - 1},$$

so daß $\prod\limits_{\mathfrak{p}} J(\mathfrak{p})$ für $s \geqq 5$ absolut konvergiert.

[21]) Vgl. Hecke, R.

[22]) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus K, so bedeutet das Symbol $\mathfrak{a} \nmid \mathfrak{b}$, daß $\mathfrak{b}$ nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, also das Gegenteil von $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$. Geht ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{b}$ genau zur k-ten Potenz auf, so wird dies (nach Hardy und Littlewood) durch $\mathfrak{p}^k \| \mathfrak{b}$ bezeichnet.

Im Falle $\mathfrak{p}^{a-1} | \nu$ (der für $a=1$ stets vorliegt) ist noch $\sum\limits_{\varkappa_1}$ zu berechnen. Ist auch noch $\mathfrak{p}^a | \nu$, so ist $\nu\varkappa_1\delta$ ganz und daher

$$\sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as}, \tag{68}$$

also $=0$ für ungerades as, $=N\mathfrak{p}-1$ für gerades as [23]); ist dagegen $\mathfrak{p}^a \nmid \nu$, so hat $\nu\varkappa_1\delta$ den Nenner $\mathfrak{p}$ und es ist

$$\sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \begin{aligned}[t] &= G(-\nu\delta) \text{ für ungerades } as, \\ &= -1\text{ [24]) für gerades } as. \end{aligned} \tag{69}$$

Aus (66), (67), (68), (69) folgt

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{p}^a) &= 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu, \\ &= N\mathfrak{p}^{a-1}\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s G(-\nu\delta) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} | \nu,\ as \text{ ungerade}, \\ &= -N\mathfrak{p}^{a-1}\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} | \nu,\ as \text{ gerade}, \\ &= 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^a | \nu,\ as \text{ ungerade}, \\ &= N\mathfrak{p}^{a-1}(N\mathfrak{p}-1)\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s \quad \text{für } \mathfrak{p}^a | \nu,\ as \text{ gerade}. \end{aligned} \tag{70}$$

Nun ist für gerades a die Gaußsche Summe $G(\delta) = N\mathfrak{p}^{\frac{a}{2}}$. Ferner ist für ungerades a, wenn λ_1 eine genau durch $\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}}$ teilbare ganze Zahl bedeutet und λ_2 ein Bruch mit dem Nenner $\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}}$ ist,

$$G(\delta) = N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} G(\lambda_1^2\delta) \text{ [25])}$$

und

$$G(-\nu\delta) = G(-\nu\lambda_1^2\lambda_2^2\delta) = \left(\frac{\lambda_2^2\nu}{\mathfrak{p}}\right) G(-\lambda_1^2\delta) \qquad (\mathfrak{p}^{a-1} | \nu),$$

also für ungerades as und $\mathfrak{p}^{a-1} | \nu$

$$\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s G(-\nu\delta) = \left(\frac{\lambda_2^2\nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} G(\lambda_1^2\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^{s-1} \frac{N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^a} \text{ [26])}; \tag{71}$$

---

[23]) Es gibt $\frac{N\mathfrak{p}-1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{N\mathfrak{p}-1}{2}$ Nichtreste mod $\mathfrak{p}$.

[24]) Wegen $\mathfrak{p} \nmid \varkappa_1$ und (27).

[25]) Vgl. Hecke, R.

[26]) Nach (24), (27) ist

$$G(-\lambda_1^2\delta)\, G(\lambda_1^2\delta) = |G(\lambda_1^2\delta)|^2 = N\mathfrak{p}.$$

Mit Rücksicht auf (71) geht (70) über in

$$(72)\quad H(\mathfrak{p}^a) = 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu \text{ und für } \mathfrak{p}^a \mid \nu,\ as \text{ ungerade},$$

$$= \left(\frac{\lambda_2^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s-1} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)+1}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ as \text{ ungerade},$$

$$= -\left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ a \text{ ungerade, } s \text{ gerade},$$

$$= -N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ a \text{ gerade},$$

$$= \left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1}(N\mathfrak{p}-1) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a} \mid \nu,\ a \text{ ungerade, } s \text{ gerade},$$

$$= N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1}(N\mathfrak{p}-1) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a} \mid \nu,\ a \text{ gerade}.$$

Nun ist, wenn kurz $\lambda_1^2\delta = \delta_1$ gesetzt wird, δ_1 vom Nenner $\mathfrak{p}$ und

$$G(\delta_1) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{p}} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\delta_1}{\sqrt{d}}}, \qquad \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) G(\delta_1) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{p}} e^{-2\pi i S\frac{\varrho^2\delta_1}{\sqrt{d}}},$$

also

$$(73)\qquad \left(\frac{G(\delta_1)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^2 = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\frac{|G(\delta_1)|^2}{N\mathfrak{p}} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right).$$

Für *gerades* s folgt aus (72), (73): Geht das Primideal $\mathfrak{p} \nmid 2$ in ν genau zur n-ten Potenz auf, so ist

$$(74)\quad J(\mathfrak{p}) = 1 + \sum_{a=1}^{\infty}{}' H(\mathfrak{p}^a)$$

$$= 1 + \frac{N\mathfrak{p}-1}{N\mathfrak{p}} \sum_{a=1}^{n}{}' \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{a\frac{s}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}} - \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{(n+1)\frac{s}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{(n+1)(s-2)}{2}-1}$$

$$= \left(1 - \frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}}}\right) \sum_{a=0}^{n} \left(\frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^{a}.$$

Für *ungerades* s folgt aus (72), (73): Geht $\mathfrak{p}$ in ν genau zu einer *ungeraden* Potenz $n = 2k+1$ auf, so ist

$$(75)\qquad J(\mathfrak{p}) = 1 + \sum_{b=1}^{k}{}' N\mathfrak{p}^{-b(s-2)-1}(N\mathfrak{p}-1) - N\mathfrak{p}^{-(k+1)(s-2)-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}}\right)\sum_{b=0}^{k} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{b(s-2)}};$$

geht aber $\mathfrak{p}$ in ν genau zu einer *geraden* Potenz $n = 2k$ auf, so ist

$$(76)\quad J(\mathfrak{p}) = 1 + \sum_{b=1}^{k} N\mathfrak{p}^{-b(s-2)-1}(N\mathfrak{p}-1) + \left(\frac{\lambda_2^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s-1}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{(2k+1)(s-2)+1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}}\right)\sum_{b=0}^{k-1}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{b(s-2)}} + \left\{1 + \left(\frac{\lambda_2^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s-1}{2}}\right\}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{k(s-2)}},\text{[27]}$$

wo λ_2 einen Bruch mit dem Nenner $\mathfrak{p}^k$ bedeutet.

Für gerades $s \geqq 6$ ist nach (74)

$$J(\mathfrak{p}) > \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^2,$$

also, wenn ζ_K die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers K bedeutet,

$$(77)\quad \prod_{\mathfrak{p}+2} J(\mathfrak{p}) > \prod_{\mathfrak{p}+2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^2 > \zeta_K^{-2}\left(\frac{s}{2}-1\right) \geqq \zeta_K^{-2}(2);$$

und für ungerades $s \geqq 5$ ist nach (75), (76)

$$J(\mathfrak{p}) \geqq 1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}},$$

$$(78)\quad \prod_{\mathfrak{p}+2} J(\mathfrak{p}) \geqq \prod_{\mathfrak{p}+2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}}\right) > \zeta_K^{-1}\left(\frac{s-1}{2}\right) \geqq \zeta_K^{-1}(2).$$

Wegen (77), (78) liegt die $\mathfrak{S}$-Reihe dann und nur dann zwischen zwei positiven von ν unabhängigen Schranken, wenn dies für $J(\mathfrak{l})$ gilt, wo $\mathfrak{l}$ einen Primidealteiler von 2 bedeutet. Ferner ist nach (74), (75), (76) $J(\mathfrak{p})$ stets *rational* und für $\mathfrak{p} + \nu$

$$(79)\quad J(\mathfrak{p}) = 1 - \frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}}} \qquad \text{für gerades } s,$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}\nu}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}} \qquad \text{für ungerades } s.$$

Führt man zur Abkürzung die folgenden Zetafunktionen mit Charakteren ein:

$$\zeta_1(s) = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \zeta_2(s) = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{\left(\frac{\nu}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \zeta_3(s) = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{\left(\frac{-\nu}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s},$$

---

[27]) Für $k = 0$ ist $\lambda_2 = 1$ und $J(\mathfrak{p})$ gleich dem Ausdruck in der geschweiften Klammer rechts.

so ist nach (79), wenn c_1, c_2, c_3, c_4 *rationale* Zahlen bezeichnen, die zwischen zwei positiven von ν unabhängigen Schranken liegen,

$$\prod_{\mathfrak{p}\neq 2} J(\mathfrak{p}) = \frac{c_1}{\zeta_K\left(\frac{s}{2}\right)} \quad \text{für} \quad s \equiv 0 \pmod 4, \tag{80}$$

$$= \frac{c_2}{\zeta_1\left(\frac{s}{2}\right)} \quad \text{für} \quad s \equiv 2 \pmod 4,$$

$$= \frac{c_3 \zeta_2\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\zeta_K(s-1)} \quad \text{für} \quad s \equiv 1 \pmod 4,$$

$$= \frac{c_4 \zeta_3\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\zeta_K(s-1)} \quad \text{für} \quad s \equiv 3 \pmod 4.$$

Die Summation der $\mathfrak{S}$-Reihe ist damit zurückgeführt auf die Ermittlung der Werte der Zetafunktionen und die Summation von $J(\mathfrak{p})$ für $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \mid 2$.

Das Primideal $\mathfrak{l}$ gehe in 2 genau zur c-ten Potenz auf, in ν genau zur k-ten. Es sei a eine natürliche Zahl, und zwar $> k+2c+1$ für gerades k, $> k+2c$ für ungerades k; ferner sei λ_1 eine genau durch $\mathfrak{l}^{\left[\frac{a}{2}\right]-c}$ teilbare ganze Zahl und δ eine Zahl mit dem Nenner $\mathfrak{l}^a$. Dann ist

$$G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\left[\frac{a}{2}\right]-c} G(\lambda_1^2 \delta).\text{[28]} \tag{81}$$

Es sei λ_2 ganz und genau durch $\mathfrak{l}^{a-k-1}$ teilbar; ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}^{k+1}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{l}^{a-k-1}$; dann durchläuft $\varkappa = \lambda_2\varrho + \varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{l}^a$, und es gilt nach (81)

$$H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa} \left(\frac{G(\varkappa\delta)}{N\mathfrak{l}^a}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1}\sum_{\varrho} \left(\frac{G(\lambda_1^2(\lambda_2\varrho+\varkappa_1)\delta)}{N\mathfrak{l}^{a-\left[\frac{a}{2}\right]+c}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu(\lambda_2\varrho+\varkappa_1)\delta}{\sqrt{d}}}$$

$$= \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^{a-\left[\frac{a}{2}\right]+c}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.\text{[29]}$$

Die Zahl $\nu\lambda_2\delta$ hat den Nenner $\mathfrak{l}$; folglich ist $\sum\limits_{\varrho} = 0$ und

$$H(\mathfrak{l}^a) = 0 \quad \text{für} \quad a > \begin{cases} k+2c+1, & k \text{ gerade}, \\ k+2c, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{82}$$

---

[28]) Vgl. Hecke, R.

[29]) Es ist $2\left[\frac{a}{2}\right] - 2c + a - k - 1 - a \geq 0$, also $\lambda_1^2\lambda_2\delta$ ganz und
$$G(\lambda_1^2(\lambda_2\varrho+\varkappa_1)\delta) = G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta).$$

Daher ist $J(\mathfrak{l})$ eine *endliche* Summe; und da ferner $H(\mathfrak{l}^a)$ für jedes a rational ist, so ist $J(\mathfrak{l})$ selbst *rational*.

Nach (41) ist

$$(83)\qquad |H(\mathfrak{l}^a)| \leqq \varphi(\mathfrak{l}^a)\left(\frac{2}{N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}}}\right)^s = 2^s\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{l}}\right)N\mathfrak{l}^{-a\left(\frac{s}{2}-1\right)}.$$

Nun ist $N\mathfrak{l}=2$ oder $=4$, und nach (83) für $s\geqq 5$, $N\mathfrak{l}=2$

$$(84)\qquad \left|\sum_{a=3}^{\infty} H(\mathfrak{l}^a)\right| \leqq 2^{s-1}\sum_{a=3}^{\infty}\frac{1}{2^{a\left(\frac{s}{2}-1\right)}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-2}\left(2^{\frac{s}{2}-1}-1\right)} \leqq \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}-1} < \sqrt{2},$$

und für $N\mathfrak{l}=4$

$$(85)\qquad \left|\sum_{a=2}^{\infty} H(\mathfrak{l}^a)\right| \leqq 2^s\frac{3}{4}\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{2^{a(s-2)}} = \frac{3\cdot 2^{s-2}}{2^{s-2}(2^{s-2}-1)} \leqq \frac{3}{7}.$$

Durchläuft ϱ ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}$, so gilt das gleiche von ϱ^2, denn aus $\varrho_1^2 \equiv \varrho_2^2 \pmod{\mathfrak{l}}$ folgt $\varrho_1 \equiv \pm\varrho_2 \equiv \varrho_2 \pmod{\mathfrak{l}}$. Hat δ den Nenner $\mathfrak{l}$, so ist also nach (27)

$$G(\delta) = \sum_{\varrho} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varrho} e^{2\pi i S\frac{\varrho\delta}{\sqrt{d}}} = 0$$

und daher auch

$$(86)\qquad H(\mathfrak{l}) = 0.$$

Zur Bestimmung von $H(\mathfrak{l}^2)$, $H(\mathfrak{l}^3)$, ... erscheint es notwendig, auf arithmetische Eigenschaften der *Basis* von K einzugehen. Der Körper K werde erzeugt durch die Quadratwurzel aus einer quadratfreien natürlichen Zahl $m>1$. Ist dann $m\equiv 1 \pmod 4$, so ist $\left(1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ eine Basis des Körpers $K(\sqrt{m})$ mit der Grundzahl $d=m$; ist aber $m\equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$, so hat der Körper $K(\sqrt{m})$ die Basis $(1, \sqrt{m})$ und die Grundzahl $d=4m$.

Ich unterscheide drei Fälle:

1. $m\equiv 5 \pmod 8$. Dann ist $\mathfrak{l}=2$ Primideal in $K(\sqrt{m})$ und nach (85), (86)

$$(87)\qquad J(\mathfrak{l}) \geqq 1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}.$$

2. $m\equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$. Dann ist $2=\mathfrak{l}^2$ Quadrat des Primideals $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{m})$. Die Zahlen $\varrho = 0, 1, \sqrt{m}, 1+\sqrt{m}$ bilden ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}^2$, und es ist $\varrho^2\equiv 0, 1, 0, 1$ oder $\equiv 0, 1, 1, 0 \pmod 2$. Ferner bilden die Zahlen $\delta=\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$ oder $\delta=\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}$ ein vollständiges System von $\varphi(\mathfrak{l}^2)$ mod 1 inkongruenten Brüchen vom Nenner $\mathfrak{l}^2$, und es ist

$$\varrho^2\delta \equiv 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \equiv 0, \frac{1+\sqrt{m}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{m}}{2} \pmod 1$$

oder

$$\varrho^2\delta \equiv 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \quad \text{und} \quad \equiv 0, \frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}, 0 \pmod 1.$$

Folglich ist

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad G\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) = 0, \quad G\left(\frac{\sqrt{m}}{2}\right) = 0,$$

also

$$H(\mathfrak{l}^2) = e^{-2\pi i S \frac{\nu\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{d}}} = e^{-\frac{\pi i}{2} S \frac{\nu}{\sqrt{m}}}.$$

Die Zahl $H(\mathfrak{l}^2)$ ist also $= +1$ oder $= -1$, je nachdem in

$$\nu = n_1 + n_2\sqrt{m}$$

der Koeffizient $n_2 \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 2$ ist. Für *gerades* n_2 ist daher nach (84), (86)

(88) $$J(\mathfrak{l}) \geqq 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Für *ungerades* n_2 läßt sich aber ν garnicht als Summe von Quadraten ganzer Zahlen darstellen[30]). Dann geht ferner $\mathfrak{l}$ in ν überhaupt nicht oder nur in der ersten Potenz auf. Wegen (82) liefern daher alle zu $\nu \pmod{\mathfrak{l}^5}$ kongruenten Zahlen $\bar{\nu}$ denselben Wert von $J(\mathfrak{l})$. Durchläuft $\bar{\nu}$ eine Folge total positiver Zahlen mit $N\bar{\nu} \to \infty$, so folgt aus (63) wegen $A_s(\bar{\nu}) = 0$

$$\mathfrak{S} = J(\mathfrak{l}) \prod_{\mathfrak{p} \neq 2} J(\mathfrak{p}) \to 0,$$

also nach (77), (78)

$$J(\mathfrak{l}) = 0 \quad (\text{für ungerades } n_2).$$

Dasselbe folgt natürlich bei direkter Berechnung von $J(\mathfrak{l})$.

3. $m \equiv 1 \pmod 8$. Dann ist $2 = \mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ Produkt von zwei verschiedenen Primidealen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}'$. In diesem Fall 3 ist die Berechnung von $H(\mathfrak{l}^a)$ $(a = 2, 3, \ldots)$ einfacher als in den beiden vorhergehenden Fällen; ich will sie daher wirklich ausführen.

Zunächst sei $a > 2$ und gerade, λ_1 genau durch $\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1}$ teilbar, λ_2 genau durch $\mathfrak{l}^2$. ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^{a-2}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^2$, also $\varkappa = \lambda_2\varrho + \varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^a$. Dann ist, wenn δ den Nenner $\mathfrak{l}^a$ hat, nach (81)

$$G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1} G(\lambda_1^2\delta),$$

[30]) In $(a + b\sqrt{m})^2 = a^2 + b^2 m + 2ab\sqrt{m}$ hat nämlich $\sqrt{m}$ einen *geraden* Koeffizienten; das gleiche gilt also von jeder Summe ganzer Quadratzahlen.

also[31])

$$H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa}\left(\frac{G(\varkappa\delta)}{N\mathfrak{l}^a}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1}\left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}+1}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}}\sum_{\varrho} e^{-2\pi i S\frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.$$

Hierin ist $\sum\limits_{\varrho} = 0$ außer für $\mathfrak{l}^{a-2}\mid\nu$, und dann $= N\mathfrak{l}^{a-2}$; im letzteren Fall wird

$$H(\mathfrak{l}^a) = 2^{-(a-2)\left(\frac{s}{2}-1\right)}\sum_{\varkappa_1}\left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^2}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \qquad (\mathfrak{l}^{a-2}\mid\nu). \tag{89}$$

Nun sei $a=2$ und δ vom Nenner $\mathfrak{l}^2$. Dann ist

$$G(\delta) = \sum_{k=0}^{3} e^{2\pi i S\frac{k^2\delta}{\sqrt{d}}} = 2\left(1+e^{2\pi i S\frac{\delta}{\sqrt{d}}}\right),\quad G(3\delta) = 2\left(1+e^{-2\pi i S\frac{\delta}{\sqrt{d}}}\right),$$

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{l}^2) &= \left(\frac{1+e^{2\pi i S\frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}} + \left(\frac{1+e^{-2\pi i S\frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2}\right)^s e^{2\pi i S\frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}} \\ &= 2\cos^s\left(\pi S\frac{\delta}{\sqrt{d}}\right)\cos\left\{2\pi S\frac{\left(\nu-\frac{s}{2}\right)\delta}{\sqrt{d}}\right\}. \end{aligned} \tag{90}$$

Aus (89), (90) folgt für gerades $a \geqq 2$, wenn δ und δ_1 die Nenner $\mathfrak{l}^2$ und $\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1}$ besitzen,

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{l}^a) &= 0 \quad \text{für } \mathfrak{l}^{a-2}\nmid\nu, \\ &= 2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)}\left\{\sqrt{2}\cos\left(\pi S\frac{\delta}{\sqrt{d}}\right)\right\}^s\cos\left\{2\pi S\frac{\left(\nu\delta_1^2-\frac{s}{2}\right)\delta}{\sqrt{d}}\right\} \\ &\qquad \text{für } \mathfrak{l}^{a-2}\mid\nu. \end{aligned} \tag{91}$$

Jetzt sei $a>3$ und ungerade, λ_1 genau durch $\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}}$ teilbar, λ_2 genau durch $\mathfrak{l}^3$. ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem $\operatorname{mod}\mathfrak{l}^{a-3}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\operatorname{mod}\mathfrak{l}^3$, also $\varkappa=\lambda_2\varrho+\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\operatorname{mod}\mathfrak{l}^a$. Dann ist, wenn δ den Nenner $\mathfrak{l}^a$ hat, nach (81)

$$G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}}G(\lambda_1^2\delta);$$

folglich

$$H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa_1}\left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^{\frac{a+3}{2}}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}}\sum_{\varrho} e^{-2\pi i S\frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}}, \tag{92}$$

also $=0$ für $\mathfrak{l}^{a-3}\nmid\nu$, $= 2^{-(a-3)\left(\frac{s}{2}-1\right)}\sum\limits_{\varkappa_1}\left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^3}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}}$ für $\mathfrak{l}^{a-3}\mid\nu$.

---

31) Vgl. die Ableitung von (82).

Endlich sei $a=3$ und δ vom Nenner $\mathfrak{l}^3$. Dann ist

$$G(\delta)=\sum_{k=0}^{7} e^{2\pi i S\frac{k^2\delta}{\sqrt{d}}}=4\,e^{2\pi i S\frac{\delta}{\sqrt{d}}},$$

$$(93)\quad H(\mathfrak{l}^3)=\sum_{n=1,3,5,7}\left(\frac{e^{2\pi i n S\frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2}\right)^{s} e^{-2\pi i n S\frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}}=2^{-s}e^{2\pi i S\frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}}\sum_{m=0}^{3}e^{4\pi i m S\frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}}$$

$$=0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^2 \nmid (s-\nu), \qquad =2^{2-s}e^{2\pi i S\frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^2 \mid (s-\nu).$$

Aus (92), (93) folgt für ungerades $a \geqq 3$, wenn δ und δ_1 die Nenner $\mathfrak{l}^3$ und $\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}}$ besitzen,

$$(94)\qquad H(\mathfrak{l}^a)=0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3}\nmid \nu,$$

$$=0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3}\mid \nu, \quad \mathfrak{l}^2 \nmid (s-\nu\delta_1^2),$$

$$=2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)}e^{2\pi i S\frac{(s-\nu\delta_1^2)\delta}{\sqrt{d}}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3}\mid \nu, \quad \mathfrak{l}^2 \mid (s-\nu\delta_1^2).$$

In (91) kann $\delta=\left(\frac{1+\sqrt{m}}{4}\right)^2=\frac{1+m+2\sqrt{m}}{16}$ gesetzt werden; dann ist $\sqrt{2}\cos\left(\pi S\frac{\delta}{\sqrt{d}}\right)=1$. Nach (91), (94) gilt daher für jedes natürliche $a \geqq 2$

$$H(\mathfrak{l}^a) \geqq -2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)};$$

also mit Rücksicht auf (86) für $s \geqq 5$

$$(95)\qquad J(\mathfrak{l}) > 1-\sum_{a=2}^{\infty}2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)}=1-\frac{1}{2^{\frac{s}{2}-1}-1}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus (87), (88), (95) folgt für jede der drei in Betracht gezogenen Möglichkeiten für m die Ungleichung $J(\mathfrak{l})>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$; dabei ist in den Fällen $m\equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ die Zahl ν in der Form $a+b\sqrt{m}$ mit geradem b anzunehmen. Wegen (80) existiert also ein nur von K abhängiges positives L_{40}, so daß für alle total positiven ganzen ν[32]) die $\mathfrak{S}$-Reihe $\geqq L_{40}$ ist. Aus (63) folgt nun Formel (1).

Zu jedem $s \geqq 5$ gibt es daher ein nur von K und s abhängiges natürliches L_{41} derart, daß sich alle total positiven ganzen durch 2 teilbaren Zahlen, deren Norm $> L_{41}$ ist, als Summen von s Quadraten ganzer Zahlen darstellen lassen. Folglich ist für *jedes* ganze $\nu \succ 0$ die Zahl

---

[32]) $\nu=a+b\sqrt{m}$ mit geradem b im Falle $m\equiv 2, 3 \pmod 4$.

$4L_{41}^2\nu$ Summe von s Quadraten ganzer Zahlen, also ν Summe von s Quadraten *ganzer* oder *solcher gebrochener* Zahlen, deren Nenner in $2L_{41}$ aufgehen. Für $s=5$ ist dies der in der Einleitung genannte zweite Satz.

Die Berechnung der $\mathfrak{S}$-Reihe ist im Vorhergehenden auf die Bestimmung der Werte einer ζ-Funktion[33]) für gewisse natürliche Argumente zurückgeführt worden. Diese Bestimmung werde ich für den besonders einfachen Fall $s \equiv 0 \pmod 4$ ausführen; dabei mache ich noch die Einschränkung $m = d \equiv 1 \pmod 8$, da nur für diesen Fall die Größe $J(\mathfrak{l})$ ausgerechnet worden ist. Es sei $s = 4\sigma$.

Nach (74) ist für $\mathfrak{p} \nmid 2$, $\mathfrak{p}^n | \nu$

$$J(\mathfrak{p}) = \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right)\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma-1}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(2\sigma-1)}} + \cdots + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{n(2\sigma-1)}}\right);$$

ferner ist nach (91), (94) für $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} | 2$, $\mathfrak{l}^n | \nu$ [34])

$$J(\mathfrak{l}) = 1 + (-1)^\sigma \left(\sum_{a=2}^{n} 2^{-(a-1)(2\sigma-1)} - 2^{-n(2\sigma-1)}\right) \quad \text{für} \quad n > 0,\text{[35])}$$
$$= 1 \quad \text{für} \quad n = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{S} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right) \prod_{\mathfrak{p}^n | \nu}\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma-1}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{n(2\sigma-1)}}\right) \prod_{\mathfrak{l}^n | \nu}\left(1 + \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{2\sigma-1}} + \cdots + \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{(n-1)(2\sigma-1)}} - \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{n(2\sigma-1)}}\right).$$

Wegen

$$\prod_{\mathfrak{p} \nmid 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 \zeta_K(2\sigma)}$$

folgt also

(96)
$$N\nu^{2\sigma-1}\mathfrak{S} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 \zeta_K(2\sigma)} \sum_{\mathfrak{t} | \nu} \pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1},$$

wo $\mathfrak{t}$ alle Idealteiler von ν durchläuft und sich das Vorzeichen von $N\mathfrak{t}$ aus der folgenden Tabelle bestimmt: Es sei $\mathfrak{l}^a = \mathfrak{L}_1 | \nu$, $\mathfrak{l}'^{a'} = \mathfrak{L}_2 | \nu$, $(\nu) = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{n}$;[36]) dann ist für[37])

---

[33]) In den Fällen $s \not\equiv 0 \pmod 4$ tritt eine Zetafunktion mit Charakteren auf.

[34]) Vgl. die analoge Rechnung in der bei [5]) an dritter Stelle zitierten Arbeit von Hardy.

[35]) Für $n = 1$ ist $\sum_{a=2}^{n} = 0$.

[36]) In den Fällen $\mathfrak{l} \nmid \nu$ oder $\mathfrak{l}' \nmid \nu$ sind $\mathfrak{L}_1$ oder $\mathfrak{L}_2$ durch 1 zu ersetzen.

[37]) Ist $\mathfrak{l} \nmid \nu$ oder $\mathfrak{l}' \nmid \nu$, so sind die Fälle 6. oder 7. auszuschließen.

1. $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
2. $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
3. $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
4. $\mathfrak{L}_1 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$; $\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma}$;
5. $\mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma}$;
6. $\mathfrak{L}_1 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma+1}$;
7. $\mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma+1}$;
8. $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $-$;
9. $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $-$.

Ist insbesondere $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = 1$, also ν zu 2 teilerfremd, so ist das Vorzeichen stets positiv; in (96) steht dann rechts die Summe der $2\sigma - 1$-ten Potenzen der Normen aller Idealteiler von ν.

Es bleibt noch $\zeta_K(2\sigma)$ zu bestimmen[38]). Nun ist

$$\zeta_K(2\sigma) = \zeta(2\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) \frac{1}{n^{2\sigma}}, \tag{97}$$

$$\zeta(2\sigma) = (-1)^{\sigma-1} \frac{h^{2\sigma}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma)!}, \tag{98}$$

wo $h^{2\sigma}$ die 2σ-te Bernoullische Zahl[39]) bedeutet. Ferner gilt für das Bernoullische Polynom $S_{2\sigma-1}(x)$ [40]) die Fouriersche Reihenentwicklung

$$\frac{(-1)^{\sigma-1}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma-1)!} \left\{ S_{2\sigma-1}(x) + \frac{h^{2\sigma}}{2\sigma} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\sigma}} \qquad (0 \leqq x \leqq 1);\text{[41])} \tag{99}$$

und es ist

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n'=1}^{d} \left(\frac{d}{n'}\right) \cos \frac{2 n n' \pi}{d}. \text{ [42])} \tag{100}$$

---

[38]) Vgl. H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen **1**, S. 134.

[39]) Die Bernoullischen Zahlen werden durch die symbolische Formel

$$h^0 = 1, \quad (h+1)^n = h^n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

bestimmt.

[40]) Für natürliches x ist

$$S_k(x) = 0^k + 1^k + \ldots + (x-1)^k = \frac{(x+h)^{k+1} - h^{k+1}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

[41]) Vgl. z. B. De la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale 2, 2. Aufl., Louvain-Paris (1912), S. 371.

[42]) Vgl. z. B. D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **4** (1897), S. 320.

Ich benutze (99) für $x=\frac{n'}{d}$ $(n'=1,\ldots,d)$; dann folgt wegen (100)

$$(101)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)\frac{1}{n^{2\sigma}}=\sum_{n=1}^{d}\left(\frac{d}{n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+kd)^{2\sigma}}$$

$$=\sum_{n'=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\frac{d}{n'}\right)\sum_{n=1}^{d}\cos\frac{2nn'\pi}{d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+kd)^{2\sigma}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n'=1}^{d}\left(\frac{d}{n'}\right)\frac{(-1)^{\sigma-1}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma-1)!}\left\{S_{2\sigma-1}\left(\frac{n'}{d}\right)+\frac{h^{2\sigma}}{2\sigma}\right\}.$$

Es ergibt sich also schließlich aus (1), (96), (97), (98), (101) (für $d\equiv 1 \pmod 8$)

$$(102)\quad A_{4\sigma}(\nu)\sim\frac{\pi^{4\sigma}\,2(2\sigma)!\,2(2\sigma-1)!\,\sqrt{d}\sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu}\pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1}}{\{(2\sigma-1)!\}^2 d^{2\sigma-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 h^{2\sigma}(2\pi)^{2\sigma}(2\pi)^{2\sigma}\sum\limits_{n'=1}^{d}\left(\frac{d}{n'}\right)S_{2\sigma-1}\left(\frac{n'}{d}\right)}$$

$$=\frac{4\sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu}\pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1}}{(2^{2\sigma}-1)^2 d^{2\sigma-1}\frac{h^{2\sigma}}{2\sigma}\sum\limits_{n=1}^{d}\left(\frac{d}{n}\right)S_{2\sigma-1}\left(\frac{n}{d}\right)},$$

wo in $\sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu}$ das Zeichen $\pm$ die oben erklärte Bedeutung hat. In (102) steht rechts eine *rationale* Zahl.

Göttingen, 15. September 1921.

(Eingegangen am 15. 9. 1921.)