

# Su una classe di equazioni a radici reali.

(Di ONORATO NICCOLETTI, a Pisa.)

---

L'equazione cubica per la ricerca degli assi di una superficie del 2.<sup>o</sup> ordine ha, come è noto, tutte le radici reali. Una delle più semplici dimostrazioni di questo teorema è fondata sull'ortogonalità di due direzioni principali, corrispondenti a radici diverse dell'equazione stessa. Questa proprietà, convenientemente estesa, vale in altri casi e conduce ad una classe di equazioni e di sistemi di equazioni, a radici reali, di cui l'equazione ricordata è caso particolarissimo. Queste equazioni sono note soltanto in parte, ed anche per queste note, dalla proprietà ricordata insieme con alcuni semplici teoremi della teoria dei determinanti, seguono in guisa affatto elementare e puramente algebrica le loro principali proprietà.

Allo studio di tali equazioni, secondo il metodo ora accennato, è dedicato il presente lavoro: gli enunciati dei teoremi relativi furono già comunicati alla R. Accademia dei Lincei nell'agosto del presente anno, in una Nota dallo stesso titolo del presente lavoro.

## I.

1. Una forma bilineare in  $2n$  variabili  $x_1 x_2 \dots x_n, y_1 y_2 \dots y_n$

$$A = \sum_{\mu, \nu}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} \quad (1)$$

si dice di *Hermite* e di  $\begin{cases} \text{prima} \\ \text{seconda} \end{cases}$  specie quando per tutti i valori degli in-

dici  $\mu$  e  $\nu$ , i coefficienti  $a_{\mu\nu}$ ,  $\pm a_{\nu\mu}$  son numeri complessi coniugati, quando cioè (indicando con  $\bar{\alpha}$  il numero complesso coniugato di  $\alpha$ ) si ha, per tutti i valori degli indici  $\mu$  e  $\nu$ :

$$a_{\mu\nu} = \pm a_{\nu\mu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n). \quad (2)$$

Una forma di HERMITE di prima specie si muta in una di seconda, e inversamente, quando si moltiplichi per un immaginario puro: se alle variabili  $x_\mu$ ,  $y_\mu$  si danno valori complessi coniugati assume un valore reale o puramente immaginario, secondochè essa è di prima o di seconda specie. La forma stessa (a meno del moltiplicatore  $i$ , ove sia di seconda specie) diventa allora una particolare forma quadratica a coefficienti reali in  $2n$  variabili reali. E per le forme di HERMITE valgono appunto teoremi e proprietà affatto simili a quelli delle forme quadratiche reali. Ricordiamone i più importanti:

a) Una forma di HERMITE di prima specie (di quelle di seconda è evidentemente inutile dire) dicesi *riduttibile* od *irriduttibile*, secondochè è o no possibile, mediante una sostituzione lineare omogenea sulle  $x_1 \dots x_n$ , e la complessa coniugata sulle  $y_1 \dots y_n$ , trasformarla in un'altra forma ancora di HERMITE e di prima specie con un numero minore di variabili. Perchè una forma di HERMITE sia riducibile è necessario e sufficiente che il suo *discriminante*:

$$|a_{ik}| = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \quad (3)$$

sia nullo; e, dettane  $r$  la caratteristica, la forma stessa può ridursi ad una forma di HERMITE in  $2r$  variabili, irriducibile in queste variabili (\*).

b) Una forma di HERMITE di prima specie si dice *definita*, quando essa non si annulla *mai* per valori complessi coniugati, *non tutti nulli*, delle variabili  $x_\mu$ ,  $y_\mu$ ; per questi valori essa assume tutti valori reali di uno stesso segno; e secondochè questo segno è positivo o negativo, la forma stessa si dice *positiva* o *negativa*; una forma di HERMITE è invece *indefinita*, quando, per valori complessi coniugati delle variabili, essa può assumere anche valori di segno contrario; dicesi infine *semidefinita* quando essa può annullarsi per valori complessi coniugati (non tutti nulli) delle variabili, ma i suoi valori

---

(\*) Cf. RICCI, *Algebra*, pag. 131 e seg. — CHRISTOFFEL, *Giornale di Crelle*. Vol. 63; pag. 255; LOEWY, *ibid.* Vol. 120, pag. 53-72.

reali, non nulli, hanno tutti il medesimo segno, positivo o negativo, secondochè la forma è *positiva* o *negativa* (\*).

2. a) Diremo che una forma di HERMITE di prima specie è *parzialmente definita rispetto alle variabili*  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (ed alle coniugate) *quando il suo annullarsi* (per valori complessi coniugati delle variabili  $x_\mu, y_\mu$ ) *porti di necessità l'annullarsi delle variabili*  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

È subito visto che una forma definita lo è anche parzialmente rispetto a qualsiasi gruppo delle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ; una indefinita non può esserlo rispetto a nessuna tra esse; basterà dunque considerare il caso di una forma semidefinita.

Il suo discriminante  $|a_{ik}|$  è allora uguale allo zero; e, dettane  $r$  la caratteristica, è possibile con una trasformazione lineare sulle  $x$  (e la coniugata sulle  $y$ ):

$$x_\mu = \sum_{\rho}^n c_{\mu\rho} x'_\rho \quad (4)$$

trasformarla in una forma  $B$ , irriducibile e definita in  $r$  variabili  $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$  (e nelle  $y'_1, y'_2, \dots, y'_r$ ); è perciò necessario e sufficiente che nella (4) i coefficienti  $c_{\mu\rho}$ , pei quali è  $\rho > r$ , soddisfino alle  $n$  equazioni lineari:

$$\sum_{\mu}^n a_{\mu\nu} c_{\mu\rho} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \rho = r+1, \dots, n) \quad (5)$$

e (dovendo essere il determinante delle  $c$  diverso da zero) costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni delle equazioni stesse: gli altri coefficienti  $c_{\mu\rho}$ , per  $\rho \leq r$ , sono invece affatto arbitrari, colla sola condizione che il modulo  $|c_{\mu\nu}|$  della trasformazione lineare sia diverso da zero (\*\*). L'annullarsi della forma  $A$ , e quindi della equivalente  $B$ , porta allora che sian nulle le  $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ ; cioè, per le (4), perchè la  $A$  si annulli, è necessario e sufficiente si abbia:

$$x_\mu = \sum_{\rho=r+1}^n c_{\mu\rho} x'_\rho; \quad (6)$$

ed in queste relazioni le  $x'_\rho$  ( $\rho = r+1, \dots, n$ ) possono riguardarsi come  $n-r$  parametri arbitrari. Perchè dunque la  $A$  sia parzialmente definita rispetto

(\*) Daremo più oltre i criterî per riconoscere se una forma di HERMITE di prima specie è definita, indefinita o semidefinita.

(\*\*) Cf. RICCI, *Algebra*, pag. 131 e seg.

alle  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , dalle (6) deve seguire sempre  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ ; cioè nella sostituzione (5) deve essere:

$$c_{1\rho} = c_{2\rho} = \dots = c_{m\rho} = 0 \quad (\rho = r+1, r+2 \dots n).$$

Le equazioni (5) sono adunque tali che per qualunque loro soluzione  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , si ha  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ ; e quindi la matrice che si ottiene dal discriminante (3) sopprimendovi le prime  $r$  righe, deve aver la caratteristica  $r - m$  (\*). E poichè il ragionamento si può invertire, ne segue:

*Perchè una forma di HERMITE di prima specie:*

$$A = \sum a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

sia definita parzialmente rispetto alle  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , è necessario e sufficiente che essa sia non indefinita e che la caratteristica del suo discriminante diminuisca di  $m$  unità sopprimendovi le prime  $m$  righe (o colonne).

b) Siano  $A = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k$ ,  $B = \sum_{ik} b_{ik} x_i y_k$  due forme di HERMITE (di 1.<sup>a</sup> specie) riducibili (\*\*); ed i loro discriminanti abbian le caratteristiche  $r$  ed  $s$ , e sia ad es.:  $r \geq s$ .

(\*) Si osservi infatti il teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè in ogni soluzione  $(x_1 x_2 \dots x_n)$  del sistema di  $m$  equazioni lineari omogenee in  $n$  incognite:*

$$U_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\alpha)$$

si abbia  $x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$ , è che la caratteristica della matrice del sistema diminuisca di  $l$  unità, sopprimendovi le prime  $l$  colonne.

Perchè infatti in ogni soluzione delle ( $\alpha$ ) si abbia  $x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0$ , è necessario e sufficiente che le equazioni:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_l = 0 \quad (\beta)$$

siano una conseguenza delle ( $\alpha$ ), e quindi che, aggiungendo alla matrice delle ( $\alpha$ ) le  $l$  righe dei coefficienti delle ( $\beta$ ), la sua caratteristica rimanga immutata. Ma nelle ultime  $l$  righe della nuova matrice vi è un minore di ordine  $l$  (ed uno solo) diverso da zero, quello formato dalle prime  $l$  colonne; quindi la matrice

$$\| a_{\mu\nu} \| \quad (\mu = 1, 2, \dots, m, \nu = l+1, \dots, n) \quad (\gamma)$$

che si ottiene, sopprimendo dalla matrice delle ( $\alpha$ ) le prime  $l$  colonne, deve avere una caratteristica non superiore ad  $r - l$ , e, poichè d'altra parte la matrice delle ( $\alpha$ ) ha la caratteristica  $r$ , uguale ad  $r - l$ . Inversamente, se questo accade, sia la matrice delle ( $\alpha$ ), sia quella delle ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) insieme han la caratteristica  $r$ , donde segue la verità della nostra asserzione.

(\*\*) Qvè le due forme non siano ambedue riducibili, la questione non ha luogo a farsi.

Proponiamoci di vedere quando sarà possibile con una stessa sostituzione lineare trasformarle simultaneamente in due altre forme in  $r$  variabili soltanto. È perciò necessario e sufficiente che la matrice di  $n$  righe e  $2n$  colonne che si ha riunendo i due discriminanti  $|a_{ik}|$ ,  $|b_{ik}|$  abbia ancora la caratteristica  $r$ . Che sia necessario, si vede immediatamente supponendo le due forme già ridotte a contenere soltanto  $r$  variabili ed osservando che la caratteristica della relativa matrice non cambia per sostituzioni lineari (non degeneri) sulle variabili; per dimostrare che è sufficiente, osserviamo che quando questo accada, le  $n$  equazioni lineari omogenee nelle  $c_{\mu\rho}$

$$\sum_{\mu}^n b_{\mu\nu} c_{\mu\rho} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \rho = r + 1, \dots, n) \quad (7)$$

sono una conseguenza delle (5), e quindi il sistema delle (5) e (7) ammette ancora  $n - r$  soluzioni fondamentali.

3. Insieme colla forma  $A$  è utile considerare le forme associate (\*).

Nel discriminante della  $A$  sia  $a_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho}$  il minore di ordine  $\rho$  formato colle righe  $i_1, i_2, \dots, i_\rho$ , colle colonne  $k_1 \dots k_\rho$  (con  $i_1 < i_2 < \dots < i_\rho$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_\rho$ ). Indichiamo ancora con  $x_{i_1 i_2 \dots i_\rho} y_{k_1 \dots k_\rho}$  due serie di  $\binom{n}{\rho}$  variabili, corrispondenti alle  $\binom{n}{\rho}$  combinazioni della classe  $\rho$  dei numeri  $1, 2, \dots, n$ . La forma bilineare:

$$A^{(\rho)} = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_\rho) \\ (k_1 \dots k_\rho)}}^{(n)} a_{i_1 \dots i_\rho, k_1 \dots k_\rho} x_{i_1 \dots i_\rho} y_{k_1 \dots k_\rho} \quad (8)$$

(dove la somma è estesa a tutte le coppie di combinazioni, uguali o distinte, della classe  $\rho$  dei numeri  $1, 2, \dots, n$ ) si dirà *associata della  $A$  di rango  $\rho$* ; essa è covariante alla  $A$ , quando, operando sulle  $x$  (o sulle  $y$ ) una qualunque sostituzione lineare, sulle  $x_{i_1 \dots i_\rho} (y_{k_1 \dots k_\rho})$  si eseguisca la sostituzione lineare associata (\*).

Relazioni molto semplici legano la forma  $A$  alle sue associate.

a) La forma  $A$  si dice di *classe  $r$* , quando il suo discriminante abbia la caratteristica  $r$ ; tutte le associate  $A^{(\rho)}$ , per le quali è  $\rho > r$ , sono allora identicamente nulle; le altre  $A^{(\rho)}$ , per cui  $\rho \leq r$ , hanno la classe  $\binom{r}{\rho}$ . In

---

(\*) Cf. NICCOLETTI, *Sulle matrici associate ad una matrice data*. (Atti dell'Accademia di Torino, 15-6-1902.)

particolare la  $A^{(r)}$  ha la classe *uno*; è quindi decomponibile nel prodotto di due forme lineari, l'una sulle  $x_{i_1 \dots i_r}$ , l'altra sulle  $y_{k_1 \dots k_r}$ .

b) Mediante sostituzioni lineari sulle variabili è possibile, ed in infiniti modi, ridurre la forma  $A$  alla forma normale

$$A = \sum_i^r \alpha_i X_i Y_i; \quad (1^*)$$

le associate  $A^{(\rho)}$  si riducono, per le sostituzioni associate, alla forma normale:

$$A^{(\rho)} = \sum_{(i_1 \dots i_\rho)}^{(r)} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_\rho} X_{i_1 \dots i_\rho} Y_{i_1 \dots i_\rho}, \quad (8^*)$$

essendo la somma estesa alle continuazioni  $(i_1 \dots i_\rho)$  della classe  $\rho$  dei numeri  $1, 2, \dots, r$ .

c) Se la  $A$  è una forma di HERMITE di prima (seconda) specie, tutte le associate  $A^{(\rho)}$  sono anche esse forme di HERMITE (di prima specie per  $\rho$  pari, di seconda per  $\rho$  dispari); se la forma  $A$  di prima specie è inoltre definita, tali sono anche tutte le associate, e tutte positive quando la  $A$  sia definita positiva; quando invece la  $A$  sia definita negativa, le  $A^{(\rho)}$  sono positive per  $\rho$  pari, negative per  $\rho$  dispari, ecc. (\*).

## II.

4. Siano ora :

$$A(x y) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu} x_\mu y_\nu, \quad B(x y) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} x_\mu y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

due forme bilineari sulle variabili  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$ ; e si consideri l'equazione in  $\omega$ :

$$D(\omega) = |a_{\mu, \nu} - b_{\mu, \nu} \omega| = 0, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

che si ottiene annullando il discriminante della forma generica  $A$  del fascio determinato dalle due forme  $A$  e  $B$  (\*\*). I coefficienti di questa equazione sono gli invarianti simultanei delle due forme; le sue radici sono quindi in-

---

(\*) Tutte queste proprietà si verificano subito nelle forme normali della (1\*), (8\*) della  $A$  e delle associate.

(\*\*) Naturalmente supponiamo che il determinante  $D(\omega)$  non sia identicamente nullo.

varianti *assoluti* e perciò rimangono inalterate per sostituzioni lineari arbitrarie sulle  $x$  e sulle  $y$ . Detta inoltre  $\omega_r$  una qualunque radice della (2), essa rende il determinante  $D(\omega)$  di caratteristica minore di  $n$ ; se quindi si considera il sistema di equazioni lineari omogenee:

$$(X_r) \quad \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) x_{\mu}^{(r)} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

si potrà soddisfare ad esso con  $n$  quantità  $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}$ , non tutte uguali allo zero.

Affatto analogamente, se ancora  $\omega_s$  è una radice della (2), al sistema di  $n$  equazioni lineari omogenee:

$$(Y_s) \quad \sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} - \omega_s b_{\mu\nu}) y_{\nu}^{(s)} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

si può soddisfare con  $n$  quantità  $y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \dots, y_n^{(s)}$ , pure non tutte nulle.

Le equazioni (3) e (4) possono scriversi anche:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu}^{(r)} &= \omega_r \sum_{\mu=1}^n b_{\mu\nu} x_{\mu}^{(r)}, \\ \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} y_{\nu}^{(s)} &= \omega_s \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} y_{\nu}^{(s)}; \end{aligned}$$

moltiplichiamo allora la prima per  $y_{\nu}^{(s)}$  e sommiamo rispetto a  $\nu$  da 1 ad  $n$ , moltiplichiamo la seconda per  $x_{\mu}^{(r)}$  e sommiamo rispetto a  $\mu$  da 1 ad  $n$ ; sottraendo i risultati, otteniamo:

$$(\omega_r - \omega_s) \sum_{\mu,\nu=1}^n b_{\mu\nu} x_{\mu}^{(r)} y_{\nu}^{(s)} = 0.$$

Se dunque  $\omega_r, \omega_s$  sono due radici diverse della equazione (2), si ha la relazione fondamentale:

$$B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \sum_{\mu,\nu=1}^n b_{\mu\nu} x_{\mu}^{(r)} y_{\nu}^{(s)} = 0. \quad (5)$$

5. Siano le  $A$  e  $B$  due forme di HERMITE di prima specie (ove fossero tutte due di seconda specie, basterà moltiplicarle per  $i$ , il che non altera l'equazione (2)); l'equazione (2) ha allora i coefficienti reali; supponendosi infatti  $\omega$  reale e cambiando  $i$  in  $-i$ , nel determinante  $D(\omega)$  le righe si permutano colle colonne; le radici complesse di essa equazione, ove esistano, son quindi a coppia coniugate. Siano allora, se è possibile,  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  due tali radici complesse coniugate della (2) (sarà perciò anche  $\omega_1 = \overline{\omega_2}$ );

poniamo nelle (3) e (4) rispettivamente  $r = 1$ ,  $s = 2$ . Avremo i due sistemi:

$$\left. \begin{aligned} (X_1) \quad & \sum_1^n (a_{\mu\nu} - \omega_1 b_{\mu\nu}) x_{\mu}^{(1)} = 0, \\ (Y_2) \quad & \sum_1^n (a_{\mu\nu} - \omega_2 b_{\mu\nu}) y_{\nu}^{(2)} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

cambiando in queste equazioni  $i$  in  $-i$ , esse diventano rispettivamente:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{X}_1) \quad & \sum_1^n (a_{\mu\nu} - \omega_1 b_{\mu\nu}) \bar{x}_{\mu}^{(1)} = 0, \\ (\bar{Y}_2) \quad & \sum_1^n (a_{\mu\nu} - \omega_2 b_{\mu\nu}) \bar{y}_{\nu}^{(2)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\bar{6})$$

Le relazioni (6) e ( $\bar{6}$ ) dimostrano che, indicando con  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$  due *qualunque* sistemi di soluzioni delle equazioni (3) e (4) (fattori  $r = s = 1$ ), si può soddisfare alle equazioni analoghe, per  $r = s = 2$ , prendendo  $x_{\nu}^{(2)}$ ,  $y_{\nu}^{(2)}$  rispettivamente *complesse coniugate* di  $y_{\nu}^{(1)}$ ,  $x_{\nu}^{(1)}$ . La relazione fondamentale (5), fattovi allora  $r = 1$ ,  $s = 2$  diventa:

$$B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu} x_{\mu}^{(1)} \bar{x}_{\nu}^{(1)} = 0. \quad (7)$$

Supponiamo ora che la  $B$  contenga le sole variabili  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (e le coniugate) e sia *definita* in queste variabili. La (7) dimostra allora che deve essere:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \dots = x_m^{(1)} = 1$$

per *qualunque* soluzione delle equazioni ( $X_1$ ). Ne segue (\*) che, ove la radice complessa  $\omega_1$  renda il determinante  $D(\omega)$  di caratteristica  $r < n$ , essa deve render di caratteristica  $r - m$  la matrice formata dalle ultime  $n - m$  righe (o colonne) del determinante stesso. Ora questo è impossibile nelle nostre ipotesi; la matrice delle ultime  $n - m$  righe di  $D(\omega)$  è infatti indipendente da  $\omega$  e, poichè il determinante stesso non è identicamente nullo, ha la caratteristica  $n - m$ ; nelle ipotesi fatte non può dunque l'equazione (2) avere radici complesse. D'altra parte, se la forma  $B$  non è indefinita, essa può sempre ridursi con una sostituzione lineare ad una forma di HERMITE definita nelle variabili che essa contiene, nè per una tale trasformazione cambiano le radici della equazione (2). Ne segue il teorema fondamentale:

---

(\*) Cf. la nota (\*) a pag. 4.



I. Se  $A$  e  $B$  sono due forme di HERMITE di prima specie, di cui una, ad es.: la  $B$  non sia indefinita (nè identicamente nulla), l'equazione (non identica) in  $\omega$ :

$$|a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

ha tutte le radici reali (\*).

6. Nelle stesse ipotesi si ha ancora il teorema:

II. Una radice della equazione (2), multipla di ordine  $\rho$ , rende il determinante del primo membro di caratteristica  $n - \rho$  ed inversamente.

Possiamo evidentemente supporre anche qui che la  $B$  dipenda soltanto dalle variabili  $x_1 \dots x_m$  (e dalle coniugate) e sia definita rispetto a queste; una sostituzione lineare, non degenera, sulle variabili non muta infatti la caratteristica del determinante  $D(\omega)$ . Indichiamo allora con  $d_{i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s}$  il minore di  $D(\omega)$  formato colle righe  $i_1 \dots i_s$ , colle colonne  $k_1 \dots k_s$ ; con  $D_{i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s}$  l'aggiunto. Avremo:

$$\frac{d^s D(\omega)}{d\omega^s} = (-1)^s \sum_{(i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s)}^{(1, 2, \dots, m)} b_{i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s} D_{i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s}(\omega), \quad (8)$$

(dove il simbolo  $\sum_{(i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s)}^{(1, 2, \dots, m)}$  sta ad indicare che la somma è estesa a tutte le combinazioni  $(i_1 \dots i_s) (k_1 \dots k_s)$  della classe  $s$  dei numeri  $1, 2, \dots, m$ ) e di qui segue manifestamente che, ove  $\omega$  renda il determinante  $D(\omega)$  di caratteristica  $n - \rho$ , essa è radice multipla della (2) di un ordine uguale o maggiore di  $\rho$ , e per contrario, che una radice multipla di ordine  $\rho$  della (2) non può rendere il primo membro di una caratteristica minore di  $n - \rho$ . Per dimostrare che la caratteristica di  $D(\omega)$  è proprio uguale ad  $n - \rho$  osserviamo che il teorema è vero per  $\rho = 1$ ; una radice *semplice* della (2) annulla infatti  $D(\omega)$  e quindi, per ciò che precede, lo rende di caratteristica  $n - 1$ ; potremo perciò procedere per induzione ed ammesso il teorema per le radici multiple fino all'ordine  $\rho$ , lo dimostreremo per le radici multiple dell'ordine  $\rho + 1$ . Sia dunque  $\omega$  una tale radice; poichè essa è anche radice multipla dell'ordine  $\rho$ , la caratteristica del determinante (2) sarà uguale o minore di  $n - \rho$ ; quindi, se consideriamo la forma bilineare *associata di*

(\*) Cf. GUNDELFINDER, *Analytische Geometrie des Raumes von OTTO HESSE*. — III<sup>te</sup> Auflage, 1876, Supp. IV-S. 515).

rango  $n - \rho$  della forma  $A - \omega B$ , cioè la forma bilineare nelle  $\binom{2n}{\rho}$  variabili  $X_{i_1 \dots i_\rho}$ ,  $Y_{k_1 \dots k_\rho}$ :

$$(A - \omega B)^{(n-\rho)} = \sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots n)} D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) X_{i_1 \dots i_\rho} \cdot Y_{k_1 \dots k_\rho},$$

questa, ove non sia identicamente nulla, si decompone (n.º 3, a) nel prodotto di due forme lineari; si ha cioè:

$$(A - \omega B)^{(n-\rho)} = \left( \sum_{(i_1 \dots i_\rho)}^{(n)} p_{i_1 i_2 \dots i_\rho} X_{i_1 \dots i_\rho} \right) \left( \sum_{(k_1 \dots k_\rho)}^{(n)} q_{k_1 \dots k_\rho} Y_{k_1 \dots k_\rho} \right);$$

e quindi:

$$D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) = p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot q_{k_1 \dots k_\rho}. \quad (9)$$

Osserviamo ora che due minori coniugati del determinante  $D(\omega)$

$$D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega), \quad D_{k_1 \dots k_\rho; i_1 \dots i_\rho}(\omega)$$

hanno, per  $\omega$  reale, valori complessi coniugati; le due forme lineari superiori sono quindi, a meno del segno, complesse coniugate (\*); si ha cioè:

$$q_{i_1 \dots i_\rho} = \pm \bar{p}_{i_1 \dots i_\rho}$$

ed anche

$$D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) = \pm p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot \bar{p}_{k_1 \dots k_\rho}. \quad (10)$$

Si ricordi ora che  $\omega$  è radice multipla della (2) di ordine  $\rho + 1$ ; fatto quindi nella (8)  $s = \rho$ , si avrà:

$$\frac{d^\rho D(\omega)}{d\omega^\rho} = (-1)^\rho \sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots m)} b_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) = 0,$$

essendo la somma  $\Sigma^{(1 \dots m)}$  estesa alle combinazioni  $i_1 \dots i_\rho$ ,  $k_1 \dots k_\rho$  dei numeri  $1, 2, \dots m$ . Ne segue per le (10):

$$\sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)}^{(1 \dots m)} b_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot \bar{p}_{k_1 \dots k_\rho} = B^{(\rho)}(p, \bar{p}) = 0;$$

e, poichè la  $B^{(\rho)}$  è definita, se ne deduce:

$$p_{i_1 \dots i_\rho} = 0 \quad (11)$$

per tutte le combinazioni  $i_1, \dots, i_\rho$  della classe  $\rho$  dei numeri  $1, 2, \dots m$ . So-

---

(\*) Cf. GLEBSCH, *Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reellen Wurzeln besitzen*. (Grelle, vol. 62, pag. 232 e ss.)

stituendo nelle (10), si ha che son nulli tutti i minori  $D_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega)$  di ordine  $n - \rho$  del determinante (2) che contengono un qualsiasi minore di ordine  $n - m$  dedotto dalla matrice delle ultime  $n - m$  righe (o colonne) di  $D(\omega)$ ; e poichè questa matrice non è nulla, ne segue (per un noto teorema di KRONECKER) (\*) che la caratteristica di  $D(\omega)$  non può superare  $n - \rho - 1$ , e quindi, se  $\omega$  è radice multipla dell'ordine  $\rho + 1$  soltanto, è uguale ad  $n - \rho - 1$ , c. d. d.

7. Abbiamo già osservato che due minori coniugati del determinante (2) hanno, per  $\omega$  reale, valori complessi coniugati; *il loro prodotto, che è reale, non può dunque esser mai negativo*; un qualunque minore principale  $D_{i_1 \dots i_k; i_1 \dots i_k}(\omega)$ , o come anche scriveremo più brevemente,  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$ , è poi reale per  $\omega$  reale. Consideriamo allora l'identità (che esprime una nota proprietà della teoria dei determinanti) (\*\*):

$$\begin{aligned} & \Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega) \Delta_{i_1 \dots i_k; i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) = \\ & = \Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega) \Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega) - D_{i_1 \dots i_k i_{k+1}; i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega) \cdot D_{i_1 \dots i_k i_{k+2}; i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega), \end{aligned} \quad (12)$$

nella quale  $i_1 \dots i_{k+2}$  sono indici diversi da 1 ad  $n$ ; ne segue evidentemente (posto  $\rho = n - k$ ):

*Se un valore reale di  $\omega$  annulla un minore principale di ordine  $\rho$  del determinante (2), due qualunque minori principali di ordine  $\rho - 1$  in esso contenuti, che non siano nulli per quel valore di  $\omega$  (\*\*\*), hanno valori (reali e) del medesimo segno.*

Se inoltre un valore reale di  $\omega$  annulla ad es.:  $\Delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega)$ , i due minori  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$ ,  $\Delta_{i_1 \dots i_k; i_{k+1} i_{k+2}}(\omega)$ , se per quel valore di  $\omega$  sono ambedue diversi da zero, hanno valori di segno contrario. Indichiamo allora con  $i_1, i_2, \dots, i_n$  una determinata permutazione dei numeri  $1, 2, \dots, n$  e consideriamo la successione di  $n + 1$  funzioni

$$D(\omega), \Delta_{i_1}(\omega), \Delta_{i_1 i_2}(\omega), \dots, \Delta_{i_1 \dots i_n}(\omega) = 1; \quad (13)$$

(\*) Cf. KRONECKER, *Bemerkungen zur Determinantentheorie* (Gesammelte Werke, Bd. I, s. 236).

(\*\*) Cfr. ad es.: CESARO, *Analisi algebrica*, pag. 28.

(\*\*\*) Questo accadrà in generale; se infatti un valore (reale) di  $\omega$  annulla un minore principale di ordine  $n - k$   $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$  e tutti i minori *principali* di ordine  $n - k - 1$  in esso contenuti, si annullano anche, per quel valore di  $\omega$ , *tutti* i minori di ordine  $n - k - 1$  di  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$ ;  $\omega$  è quindi radice *doppia* della equazione  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega) = 0$  (cf. n.° 8,  $\alpha$ ).

i suoi termini sono funzioni razionali intere in  $\omega$ , ed, ove alcune tra esse non siano identicamente nulle, nè due consecutive si annullino per uno stesso valore reale di  $\omega$ , quando un valore reale di  $\omega$  annulla alcuna tra esse, quelle che la comprendono hanno, per ciò che precede, valori di segno contrario. Questa proprietà delle funzioni (13) le ricollega al teorema di STURM sulle radici reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali; ed è facile infatti dedurre dalle (13) una *successione di STURM* per la equazione (2). Se invero  $\omega$  è una radice semplice (e reale) della (2), si ha, colle notazioni del numero precedente:

$$\Delta_{i_1}(\omega) = \pm p_{i_1} \cdot \bar{p}_{i_1}, \quad \text{ed insieme} \quad D'(\omega) = \mp B(p, \bar{p});$$

e quindi  $D'(\omega)$  e  $\Delta_{i_1}(\omega)$  hanno ugual segno o segno contrario, secondochè la  $B$  è negativa o positiva (\*). Indichiamo allora con  $\tau$  l'unità negativa o positiva, secondochè  $B$  è positiva o negativa, e poniamo:

$$\Delta'_{i_1 \dots i_k}(\omega) = \tau^k \cdot \Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega); \quad (14)$$

possiamo allora enunciare il teorema:

III. *Se tra le  $n + 1$  funzioni:*

$$D(\omega), \Delta'_{i_1}(\omega), \Delta'_{i_1 i_2}(\omega), \dots, \Delta'_{i_1 \dots i_n}(\omega) \quad (15)$$

*non ve ne sono delle identicamente nulle, la successione (15) è una successione di STURM per la equazione (2); quindi il numero delle radici reali della equazione stessa comprese in un intervallo  $(\alpha \beta)$  (ciascuna contata col suo ordine di molteplicità) (\*\*) è uguale al numero delle variazioni che la successione stessa perde nell'intervallo  $(\alpha \beta)$ .*

8. a) Consideriamo un minore principale  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$  del determinante  $D(\omega)$ . Esso può pensarsi come il discriminante della forma bilineare in  $2(n - k)$  variabili che si ottiene dalla forma generica  $A - \omega B$ , ponendovi uguali a zero le  $x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_k}, y_{i_1}, y_{i_2} \dots y_{i_k}$ .

La forma  $B$  si riduce in tal guisa ad una forma di HERMITE in  $2(n - k)$  variabili, che come la  $B$  è non indefinita ed ha di più il medesimo segno. Se quindi il minore che si considera non è identicamente nullo, nè indipendente da  $\omega$ , l'equazione:

$$\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega) = 0$$

*ha tutte le radici reali.*

(\*) Cf. anche n.° 8, l).

(\*\*) Cf.: WEBER, *Algebra*. Bd. I, p. 276 (I. Auf.).

b) Sia ora  $\omega$  una radice della (2) multipla di ordine  $\rho$ ; per il teorema II essa sarà multipla di ordine  $\rho - 1$  per un qualunque minore principale di ordine  $n - 1$ ,  $\Delta_\lambda(\omega)$ .

Indicando quindi con  $h$  un numero reale sufficientemente piccolo in valore assoluto, si avrà:

$$D(\omega + h) = \frac{h^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho D(\omega)}{d\omega^\rho} + \frac{h^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \frac{d^{\rho+1} D(\omega)}{d\omega^{\rho+1}} + \dots;$$

ma colle notazioni del n.º 6 è:

$$\frac{d^\rho D(\omega)}{d\omega^\rho} = (-1)^\rho \sum_{i_1, \dots, i_\rho; k_1, \dots, k_\rho} b_{i_1, \dots, i_\rho; k_1, \dots, k_\rho} D_{i_1, \dots, i_\rho; k_1, \dots, k_\rho}(\omega) = \pm (-1)^\rho B^{(\rho)}(p, \bar{p})$$

e quindi anche:

$$D(\omega + h) = (-1)^\rho \frac{h^\rho}{\rho!} B^{(\rho)}(p, \bar{p}) + \frac{h^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \frac{d^{\rho+1} D(\omega)}{d\omega^{\rho+1}} + \dots$$

e sarà  $B^{(\rho)}(p, \bar{p})$  diverso da zero.

Affatto analogamente, con notazioni evidenti, si avrà:

$$\Delta_\lambda(\omega + h) = \pm (-1)^{\rho-1} \frac{h^{\rho-1}}{(\rho-1)!} B_\lambda^{(\rho-1)}(p, \bar{p}) + \frac{h^\rho}{\rho!} \frac{d^\rho \Delta_\lambda(\omega)}{d\omega^\rho} + \dots;$$

e quindi, nell'intorno di  $h = 0$ , sarà:

$$\frac{D(\omega + h)}{\Delta_\lambda(\omega + h)} = - \frac{h}{\rho} \frac{B^{(\rho)}(p, \bar{p})}{B_\lambda^{(\rho-1)}(p, \bar{p})} + \dots \quad (16)$$

e nelle ipotesi fatte, il coefficiente di  $h$  è finito e diverso da zero. Si ricordi ora che insieme colla  $B$ , anche la  $B^{(\rho)}$  e la  $B_\lambda^{(\rho-1)}$  sono non indefinite, e detto  $\eta$  il segno della  $B$ , il loro segno è rispettivamente  $\eta^\rho$ ,  $\eta^{\rho-1}$ . Ne segue allora:

*Se  $\omega$  è una radice della (2) ed  $h$  è un numero reale, sufficientemente piccolo in valore assoluto, il rapporto  $\frac{D(\omega + h)}{\Delta_\lambda(\omega + h)}$  ha il segno di  $h$  o il segno contrario secondochè la  $B$  è negativa o positiva; per  $h = 0$ , lo stesso rapporto è nullo.*

Ciò posto, un ragionamento affatto analogo a quello che si trova in una dimostrazione del teorema di ROLLE dimostra che tra due radici consecutive della equazione (2) vi è un numero dispari di radici reali della  $\Delta_\lambda = 0$ . Questo risultato si può ancora più precisare, osservando che la relazione tra

il determinante  $D(\omega)$  ed un suo qualunque minore principale si può, in un determinato senso, *invertire* (cf. n.° 13, *b*); ne segue che anche tra due radici reali consecutive della equazione  $\Delta_\lambda(\omega) = 0$  deve cadere un numero dispari di radici reali della  $D(\omega) = 0$ ; e quindi di necessità *le radici reali delle due equazioni  $D(\omega) = 0$ ,  $\Delta_\lambda(\omega) = 0$  si separano a vicenda*. Un risultato del tutto analogo vale evidentemente per un qualunque minore principale del determinante  $D(\omega)$  ed un minore principale dell'ordine immediatamente inferiore in quello contenuto. Possiamo quindi enunciare il teorema:

IV. *Qualunque minore principale del determinante  $D(\omega)$ , uguagliato a zero, ha tutte radici reali; se due minori principali son tali che i loro ordini differiscano di una unità ed uno sia contenuto nell'altro, le loro radici reali si separano a vicenda.*

### III.

9. Ci sia permessa ora una breve digressione.

Se nella equazione (2) poniamo  $\omega = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$  e ne moltiplichiamo il primo membro per  $\omega_1^n$ , essa si scrive in forma omogenea:

$$D(\omega_1, \omega_2) = |a \omega_1 + b \omega_2| = 0, \quad (2^*)$$

ed anche per disteso:

$$\left. \begin{aligned} D(\omega_1, \omega_2) = (A) \omega_1^n + (A B)_1 \omega_1^{n-1} \omega_2 + \dots + (A B)_r \omega_1^{n-r} \omega_2^r + \dots + \\ + (A B)_{n-1} \omega_1 \omega_2^{n-1} + (B) \omega_2^n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

essendo

$$\left. \begin{aligned} (A B)_r = (B A)_{n-r} = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r)}^{(1 \dots n)} b_{\alpha_1 \dots \alpha_r; \beta_1 \dots \beta_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r; \beta_1 \dots \beta_r} \\ (r = 0, 1, 2 \dots n-1) \quad (A B)_0 = (B A)_n = (A) = |a_{ik}| \\ (A B)_n = (B A)_0 = |b_{ik}| = (B) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gli invarianti simultanei delle due forme  $A$  e  $B$ .

I teoremi I e II dei n.° 5 e 6 possono allora evidentemente riunirsi nel teorema seguente:

(\*\*) Cf. NICCOLETTI, *Alcuni teoremi sui determinanti*. (Annali di Matematica, Tom. VIII della Serie III, p. 290.)

esso può scriversi:

$$(-1)^s M = \sum_{(i_1 \dots i_s; k_1 \dots k_s)}^{(r+1 \dots n)} \sum_{(\mu_1 \dots \mu_s; \nu_1 \dots \nu_s)}^{(1 \dots r)} A_{1,2 \dots r; i_1 \dots i_s; 1,2 \dots r; k_1 \dots k_s} \cdot \left. \begin{aligned} & B_{\mu_1 \dots \mu_s; \nu_1 \dots \nu_s} a_{i_1 \dots i_s; \nu_1 \dots \nu_s} a_{\mu_1 \dots \mu_s; k_1 \dots k_s} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Si ricordi ora che il determinante  $A_{1,2 \dots r; 1,2 \dots r}$  ha la caratteristica  $n - r - s$  e che due minori coniugati del determinante  $(A)$  hanno valori complessi coniugati; ne segue, con considerazioni affatto analoghe a quelle del n.º 6, che può porsi:

$$A_{1,2 \dots r; i_1 \dots i_s; 1,2 \dots r; k_1 \dots k_s} = \pm p_{i_1 \dots i_s} \cdot \overline{p_{k_1 \dots k_s}} \quad (6)$$

(essendo le  $p_{i_1 \dots i_s} \binom{n-r}{s}$  opportune costanti non tutte uguali allo zero); se allora si pone

$$q_{\nu_1 \dots \nu_s} = \sum_{i_1 \dots i_s}^{(r+1 \dots n)} a_{i_1 \dots i_s; \nu_1 \dots \nu_s} p_{i_1 \dots i_s}, \quad (7)$$

per le (6) e (7) la (5) diventa:

$$(-1)^s M = \sum_{(\mu_1 \dots \mu_s; \nu_1 \dots \nu_s)}^{(1,2 \dots r)} B_{\mu_1 \dots \mu_s; \nu_1 \dots \nu_s} q_{\nu_1 \dots \nu_s} \overline{q_{\mu_1 \dots \mu_s}} = B^{(s)}(q, \overline{q}). \quad (5^*)$$

È facile ora dimostrare che  $M$  è diverso da zero; poichè infatti la  $B^{(s)}$  è definita, basterà dimostrare che *non tutte* le  $q_{\nu_1 \dots \nu_s}$  possono essere uguali allo zero, essendo  $\nu_1 \dots \nu_s$  una qualunque combinazione della classe  $s$  dei numeri  $1, 2 \dots r$ .

A questo scopo, supponiamo che nelle (7) gli indici  $\nu_1 \dots \nu_s$  possano essere scelti non più solo tra i numeri  $1, 2 \dots r$ , ma tra tutti i numeri  $1, 2 \dots n$ ; è facile allora vedere che qualunque  $q_{\nu_1 \dots \nu_s}$  in cui un indice  $\nu_i$  almeno è preso tra i numeri  $r+1, \dots, n$ , è *identicamente nulla*. In tale ipotesi infatti moltiplichiamo la (7) per una qualsiasi  $\overline{p_{k_1 \dots k_s}}$  non nulla; si avrà per la (6)

$$\overline{p_{k_1 \dots k_s}} q_{\nu_1 \dots \nu_s} = \pm \sum_{i_1 \dots i_s}^{(r+1 \dots n)} a_{i_1 \dots i_s; \nu_1 \dots \nu_s} A_{1,2 \dots r; i_1 \dots i_s; 1,2 \dots r; k_1 \dots k_s}$$

ed è quindi uguale ad un determinante di ordine  $n - r$ , che contiene almeno  $n - r - s + 1$  colonne (uguali o diverse) di  $A_{1,2 \dots r; 1,2 \dots r}$ ; ed è quindi identicamente nullo, il che dimostra la nostra asserzione.

Se dunque  $M$  potesse annullarsi, dovrebbero essere nulle *tutte* le quantità (7), in cui  $(\nu_1 \dots \nu_s)$  rappresenta una combinazione qualunque della classe  $s$  degli indici  $1, 2 \dots n$ ; si avrebbero quindi  $\binom{n}{s}$  equazioni lineari omogenee



nelle  $\binom{n-r}{s}$  quantità  $p_{i_1 \dots i_s}$ . Si noti ora che la matrice del sistema così ottenuto non è che l'associata di rango  $s$  della matrice delle ultime  $n-r$  righe di  $A$  (che ha la caratteristica  $n-r$ ) (cf. n.º 5) ed ha quindi la caratteristica  $\binom{n-r}{s}$ ; l'annullarsi delle  $q_{\nu_1 \dots \nu_s}$  porta dunque con sé l'annullarsi di tutte le  $p_{i_1 \dots i_s}$ , il che è contro l'ipotesi che il determinante  $A_{1,2 \dots r, 1,2 \dots r}$  abbia una caratteristica non minore di  $n-r-s$ .

È dunque  $M \neq 0$  e possiamo enunciare il risultato:

*Il determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  ammette il fattore  $\omega_1$  solo quando la forma  $(B)$ , non indefinita, è riducibile. Se la forma stessa si suppone ridotta a contenere il minimo numero di variabili  $x_1, x_2 \dots x_r, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_r$  ed  $n-r-s$  è la caratteristica del minore  $A_{1,2 \dots r, 1,2 \dots r}$  di  $(A)$ , sono allora nulli, oltre  $(B)$ , tutti gli invarianti simultanei  $(AB)_\rho$  delle due forme  $A$  e  $B$ , pei quali è  $n-1 \geq \rho > r-s$ ; l'invariante  $(AB)_{r-s}$  è invece (per  $r \geq s$ ) diverso da zero; e si ha quindi:*

$$D(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{n-r+s} \cdot \omega_2^{r-s} (AB)_{r-s} + \omega_1^{n-r+s+1} \omega_2^{r-s-1} (AB)_{r-s-1} + \dots + \omega_1^n (A). \quad (8)$$

11. È facile ora procedere oltre. Supponiamo sempre che la  $B$  contenga soltanto le variabili  $x_1, x_2 \dots x_r, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots, \bar{x}_r$  e consideriamo un minore qualunque di ordine  $k \geq r$  (\*) del determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$ . Questo minore conterrà un certo numero  $\mu$  di righe, e  $\nu$  di colonne dalla  $(r+1^{\text{ma}})$  alla  $n^{\text{ma}}$ ; e saranno evidentemente  $\mu$  e  $\nu$  compresi (i limiti inclusi) tra  $k-r$  ed  $n-r$ ; detta inoltre  $\sigma$  la caratteristica della matrice di queste  $\mu$  righe e  $\nu$  colonne, sviluppando il minore stesso, secondo il teorema di HESSE generalizzato, per i minori di questa matrice, esso avrà come fattore  $\omega_1$  con un esponente non minore di  $\mu + \nu - \sigma$  (\*\*). Volendo adunque, per un determinato ordine  $k$ , ricercare la minima potenza di  $\omega_1$  che divide un qualunque minore di ordine  $k$  di  $D(\omega_1, \omega_2)$ , convien innanzi tutto cercare quale è, per esso valore di  $k$ , il minimo valore che l'espressione  $\mu + \nu - \sigma$  può avere.

Convien perciò distinguer due casi:

a) Sia dapprima  $k \geq n-s$ . Per render minima l'espressione  $\mu + \nu - \sigma$  convien cercare di combinare i minimi valori possibili di  $\mu$  e  $\nu$  col massimo pos-

(\*) È inutile supporre  $k < r$ ; in questo caso infatti si hanno subito dalle prime  $r$  righe e colonne di  $D(\omega_1, \omega_2)$  dei minori di ordine  $k$ , che non ammettono il fattore  $\omega_1$ .

(\*\*) NICCOLETTI, *Alcuni teoremi sui determinanti*. (Annali di Matematica, Tomo VIII della Serie III, pag. 289.)

sibile per  $\sigma$ ; si noti ora che evidentemente è  $\sigma \leq n - r - s$ , ma, inoltre poichè  $k \geq n - s$ , si possono togliere dal determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  certe  $n - k$  tra le ultime  $n - r$  righe e colonne, in guisa che il minore di  $A_{12 \dots r, 12 \dots r}$  che rimane abbia ancora la caratteristica  $n - r - s$ : il minimo valore che può dunque assumere  $\mu + \nu - \sigma$  si ottiene per  $\mu = \nu = k - r$ ,  $\sigma = n - r - s$ . Ne segue che *tutti i minori di ordine  $k \geq n - s$  del determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  sono divisibili per una potenza di  $\omega_1$ , il cui esponente non è minore di  $2k - n - r + s$* . Ma di più: *esiste sempre un minore di ordine  $k$  del determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  che ha il divisore  $\omega_1$  ad una potenza uguale e non superiore a  $2k - n - r + s$* . Consideriamo infatti un minore *principale* di ordine  $k$  che si ottenga sopprimendo le stesse  $n - k$  righe e colonne di  $A_{12 \dots r, 12 \dots r}$  in guisa che il minore residuo di ordine  $k - r$  di  $A_{12 \dots r, 12 \dots r}$  abbia ancora la caratteristica  $n - r - s$ : un tal minore di ordine  $k$  può pensarsi allora come il discriminante del fascio di forme che si ha dal fascio  $A\omega_1 + B\omega_2$ , annullando quelle tra le variabili  $x_{r+1} \dots x_n$  ( $\bar{x}_{r+1} \dots \bar{x}_n$ ) che corrispondono alle righe e colonne sopprese: si può dunque ripetere per esso il ragionamento del n.º 10, e quindi esso minore ammette il fattore  $\omega_1$  con un esponente non maggiore di  $2k - n - r + s$ .

b) Sia invece  $k < n - s$ . Perchè l'espressione  $\mu + \nu - \sigma$  abbia il minimo valore possibile, si vede facilmente che conviene ancora fare  $\mu = \nu = k - r$  (\*); non è però allora più possibile dare a  $\sigma$  il valore  $n - r - s$ : quando infatti  $\mu = \nu = k - r$ , noi veniamo a sopprimere  $n - k > s$  delle ultime  $n - r$  righe e colonne: la matrice residua non può avere adunque una caratteristica maggiore di  $n - r - (n - k) = k - r$ . D'altra parte è anche possibile far in modo che  $\sigma$  abbia questo massimo valore; il minimo valore di  $\mu + \nu - \sigma$  è quindi uguale a  $k - r$ ; cioè *per  $k < n - s$ , tutti i minori di ordine  $k$  del determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  ammettono il divisore  $\omega_1$  con un esponente non minore di  $k - r$* , e, come sopra, si vedrà che *esiste certamente qualche minore di  $D$  di ordine  $k$  che è divisibile per  $\omega_1^{k-r}$  e non per una potenza superiore*.

Riassumendo, si ha dunque che *il massimo comun divisore dei minori di ordine  $k \geq r$  del determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  ammette il fattore  $\omega_1$  ad una potenza  $l_k$ , tale che si ha:*

$$\begin{aligned} l_k &= 2k - n - r + s && \text{per } k \geq n - s \\ l_k &= k - r && \text{per } k < n - s. \end{aligned} \quad (9)$$

(\*) Basta osservare che diminuendo  $\mu$  o  $\nu$  di uno,  $\sigma$  o rimane invariato o diminuisce di uno;  $\mu + \nu - \sigma$  diminuisce dunque di uno o rimane invariato.

Se quindi si pone:

$$e_\rho = l_{n-\rho+1} - l_{n-\rho}, \quad (10)$$

si ottiene:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_s = 2; \quad e_{s+1} = e_{s+2} = \dots = e_{n-r} = 1, \quad (11)$$

cioè nel determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  vi sono  $s$  divisori elementari uguali ad  $\omega_1^2$ ,  $n - r - s$  uguali ad  $\omega_1$ . Possiamo quindi enunciare il teorema:

VI. *Se il discriminante della forma  $B$  (non indefinita) ha la caratteristica  $r$ , il determinante  $D(\omega_1, \omega_2)$  ha  $n - r$  divisori elementari uguali ad una potenza di  $\omega_1$ ; e più precisamente se si annullano (identicamente o no) tutti gli invarianti simultanei  $(AB)_\rho$  per cui  $\rho > r - s$  (con  $s \geq 0$ ), ma non l'invariante  $(AB)_{r-s}$ , i primi  $s$  divisori elementari hanno l'esponente 2, gli altri  $n - r - s$  l'esponente 1 (\*).*

Otteniamo in tal guisa, per via puramente algebrica ed elementare e con maggiore determinatezza, un risultato dedotto già per le forme quadratiche a coefficienti reali dal sig. GUNDELFINDER coi metodi trascendenti, introdotti dal WEIERSTRASS per lo studio dell'equivalenza di due fasci di forme bilineari (\*\*).

#### IV.

12. Torniamo alla equazione non omogenea (2) del n.º 4, per notarne alcuni casi importanti.

La forma  $B$  sia la forma unità  $\sum_1^n x_i \bar{x}_i$ , che è evidentemente definita positiva.

Si ha: Se  $A = \sum_{\mu, \nu}^n a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$  è una forma di HERMITE di prima specie nelle  $2n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ , l'equazione di grado  $n$  in  $\omega$ :

$$\left. \begin{aligned} E(\omega) &= |a_{\mu\nu} - \omega \varepsilon_{\mu\nu}| = 0 \\ (\mu, \nu &= 1, 2, \dots, n; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \text{ per } \mu \neq \nu; \quad \varepsilon_{\mu\mu} = 1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(\*) Cf. MUTH, l. c., § 1.

(\*\*) Cf. HESSE (GUNDELFINDER), *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes—Dritte Auflage*. Supp. IV. (Leipzig, Teubner, 1876.)

a) ha tutte le radici reali; b) una radice multipla di ordine  $\rho$  rende il determinante del primo membro di caratteristica  $n - \rho$ ; c) indicando con  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$  il minore principale che si ha dal determinante (1) sopprimendovi le righe e le colonne  $i_1 i_2 \dots i_k$ , l'equazione  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega) = 0$  ha tutte le radici reali; d) le radici di due minori principali consecutivi, di cui uno sia contenuto nell'altro, si separano a vicenda; e) se  $i_1 i_2 \dots i_n$  è una permutazione degli indici  $1, 2, \dots, n$ , la serie degli  $n + 1$  minori principali

$$E(\omega), -E_{i_1}(\omega), E_{i_1 i_2}(\omega), \dots, (-1)^k E_{i_1 \dots i_k}(\omega), \dots, (-1)^n E_{i_1 i_2 \dots i_n}(\omega) \quad (2)$$

costituisce per la equazione (1) una successione di STURM.

L'equazione (1) si ottiene appunto quando si ricerca il carattere di una forma di HERMITE, se essa sia cioè definita, indefinita, semidefinita. Se ci proponiamo infatti il problema di trovare il massimo ed il minimo dei valori che assume la forma  $A$ , quando tra le sue variabili  $x, \bar{x}$  si ponga la condizione  $\sum x_i \bar{x}_i = 1$ , (il che, come è evidente, non limita la generalità) dal metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE siamo condotti alle equazioni:

$$\sum_{\mu}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} - \omega \cdot x_{\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

(ed alle altre:

$$\sum_{\nu}^n a_{\mu\nu} \bar{x}_{\nu} - \omega \bar{x}_{\mu} = 0)$$

ed, eliminando le  $x$  (o le  $\bar{x}$ ) all'equazione (1). Moltiplicando poi per  $\bar{x}_{\nu}$  il primo membro della (3) e sommando rispetto a  $\nu$  da 1 ad  $n$ , vediamo subito che il massimo e minimo cercati sono dati dalla maggiore e minore tra le radici reali della (1). Ove adunque queste radici sian tutte diverse da zero e del medesimo segno, la  $A$  sarà definita; sarà invece indefinita, quando la (1) abbia radici di segno contrario: se infine la (1) ha  $r$  radici nulle e le altre di un segno costante, la  $A$  sarà semidefinita e potrà ridursi ad una forma definita in  $n - r$  variabili (e le complesse coniugate).

La (1) dicesi perciò l'equazione caratteristica della forma  $A$ ; i suoi coefficienti si dicono i suoi invarianti ortogonali: e il risultato che precede può enunciarsi:

*Perchè una forma di HERMITE  $A = \sum a_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu}$  sia definita positiva (negativa) è necessario e sufficiente che i suoi invarianti ortogonali sian tutti*

diversi da zero ed abbian segni alternati (abbian tutti il medesimo segno); perchè la  $A$  sia semidefinita, è invece necessario e sufficiente che i suoi invarianti ortogonali non nulli, abbian segni alternati (o il medesimo segno). In ogni altro caso la forma  $A$  è indefinita (\*).

13. a) La forma  $B$  si supponga definita, ma del resto affatto arbitraria: la (2) è allora l'equazione di CHRISTOFFEL (\*\*); se inoltre la  $B$  ha i coefficienti reali, ed è quindi una forma quadratica definita, si ha l'equazione di CLEBSCH (\*\*); se infine anche la  $A$  è reale (ed è quindi una forma quadratica) si ha l'equazione secolare (\*\*\*\*) sotto la sua forma più generale.

b) La forma  $B$  contenga solo  $m$  variabili  $x_1, x_2 \dots x_m$  (e le coniugate) e sia in esse non indefinita; manchino nella  $A$  i prodotti di una qualunque tra le  $x_{m+1} \dots x_n$  per una delle  $\bar{x}_{m+1} \dots \bar{x}_n$ . Si ha dalla (2) l'equazione:

$$F(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik} \omega & a_{ir} \\ a_{sk} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (*****) } \quad (i, k = 1, 2 \dots m; r, s = m+1 \dots n) \quad (4)$$

(\*) Cf. n.° 1, b).

(\*\*) Cf. CHRISTOFFEL, *Verallgemeinerung einiger Theoreme der H. Weierstrass*, (Crelle, Bd. 63, § 255.)

(\*\*\*) Cf. CLEBSCH, *Giornale di Crelle*. Vol. 62; m. c.

(\*\*\*\*) Cf. ad es.: RICCI, *Algebra*, pag. 435.

(\*\*\*\*\*) Ora e nel seguito col simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & b_{ir} \\ c_{sk} & d_{sr} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2 \dots \mu; k = 1, 2 \dots \nu; r = 1, 2 \dots \rho; s = 1, 2 \dots \sigma)$$

indichiamo la matrice di  $p + \sigma$  righe e  $\nu + \rho$  colonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1\nu} & b_{11} & b_{12} \dots b_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2\nu} & b_{21} & b_{22} \dots b_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \dots a_{\mu \nu} & b_{\mu 1} & b_{\mu 2} \dots b_{\mu \rho} \\ c_{11} & c_{12} \dots c_{1\nu} & d_{11} & d_{12} \dots d_{1\rho} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2\nu} & d_{21} & d_{22} \dots d_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\sigma 1} & c_{\sigma 2} \dots c_{\sigma \nu} & d_{\sigma 1} & d_{\sigma 2} \dots d_{\sigma \rho} \end{vmatrix}$$

e se  $\mu + \sigma = \nu + \rho$  anche il relativo determinante.

di cui in particolare è ben noto il significato geometrico ed analitico nel caso particolare che le  $a$  e  $b$  si suppongano reali (e quindi  $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ;  $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$ ).

Sia in particolare  $n = m + k$ , con  $k < m$  e detti  $i_1, i_2 \dots i_k$   $k$  valori da 1 ad  $m$ , poniamo nel primo membro delle (4)

$$a_{i_1, m+1} = a_{i_2, m+2} = \dots = a_{i_k, n} = a_{m+1, i_1} = a_{m+2, i_2} = \dots = a_{n, i_k} = 1;$$

facciamo invece uguali a zero tutte le altre  $a_{\mu\nu}$  per cui uno degli indici  $\mu$  o  $\nu$  supera  $m$ . La  $F(\omega)$  si riduce allora, a mezzo del segno, al minore principale  $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega)$  del determinante  $D(\omega)$  (in cui sia fatto  $n = m$ ). Poichè questo a sua volta può pensarsi come l'aggiunto in  $F(\omega)$  del minore delle ultime  $k$  righe e colonne, ne segue che la relazione che lega il determinante  $D(\omega)$  ad uno qualunque dei suoi minori principali, può dirsi *reciproca*, nel senso preciso indicato dal ragionamento che precede (cf. n.º 8) (\*).

c) La  $B$  contenga solo parte delle variabili  $x_1 \dots x_n$ , ( $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ ), ad es.: le  $x_1, x_2 \dots x_m$  e sia in esse non indefinita.

Con lievi cambiamenti di notazione, avremo l'equazione:

$$G(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\omega & p_{ir} \\ q_{sk} & h_{sr} \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, 2 \dots n; r, s = 1, 2 \dots m) \quad (5)$$

(dove  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ,  $b_{ik} = \bar{b}_{ki}$ ;  $p_{ir} = \bar{q}_{ri}$ ,  $h_{rs} = \bar{h}_{sr}$ ). Si sviluppi ora il determinante (5) per la matrice delle ultime  $m$  righe e colonne, secondo il teorema di HESSE generalizzato; si avrà indicando con  $[m, n]$  il minore dei due numeri  $m$  ed  $n$ :

$$G(\omega) = \sum_0^{[m, n]} (-1)^p \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_p; \beta_1 \dots \beta_p)}^{(1 \dots n)} \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_p; \delta_1 \dots \delta_p)}^{(1 \dots m)} D_{\alpha_1 \dots \alpha_p; \beta_1 \dots \beta_p}(\omega) \cdot \left. \begin{aligned} & H_{\gamma_1 \dots \gamma_p; \delta_1 \dots \delta_p} p_{\alpha_1 \dots \alpha_p; \delta_1 \dots \delta_p} q_{\gamma_1 \dots \gamma_p; \beta_1 \dots \beta_p} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

cioè  $G(\omega)$  è un aggregato lineare intero dei minori del determinante (2), tale che uguagliato allo zero dà un'equazione con tutte radici reali (che hanno di più relazioni speciali colle radici di  $D(\omega) = 0$ ). Si ha così un risultato, di cui il teorema IV del n.º 8 è un caso particolarissimo. Facendo ad es.: nella (5)  $m = 1$ , e ponendo per semplicità di scrittura  $p_{is} = p_i$ ,  $h_{ii} = -h$ , si ha che: *l'equazione a coefficienti reali*:

$$H(\omega) = h D(\omega) + \sum_{i=1}^n D_{ik}(\omega) p_i \bar{p}_k = 0 \quad (7)$$

*ha tutte radici reali, che si separano a vicenda con quelle della  $D(\omega) = 0$  ecc.*

(\*) In particolare, ne segue che: Una radice multipla di ordine  $\rho$  per un minore principale  $\Delta_{i_1 \dots i_k}(\omega)$  di ordine  $n - k$  è multipla per  $D(\omega)$  dell'ordine  $\rho - k$  almeno.

d) La forma  $B$  si decomponga nella somma di due, una nelle variabili  $x_1, x_2 \dots x_m$ , l'altra nelle  $x_{m+1} \dots x_n$ , ambedue non indefinite, nè definite di segno contrario. Portando anche qui dei lievi cambiamenti di notazione, avremo l'equazione:

$$K(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik} \omega & p_{ir} \\ q_{sk} & \alpha_{sr} - \beta_{sr} \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, 2 \dots n; r, s = 1, 2 \dots m) \quad (8)$$

dove  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ,  $b_{ik} = \bar{b}_{ki}$ ,  $\alpha_{sr} = \bar{\alpha}_{rs}$ ,  $\beta_{sr} = \bar{\beta}_{rs}$ ;  $p_{ir} = \bar{q}_{ri}$ ; sviluppando ancora il determinante del primo membro secondo la matrice delle ultime  $m$  righe e colonne, si ha:

$$K(\omega) = \sum_0^{[m,n]} (-1)^p \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_p; \beta_1 \dots \beta_p)}^{(1 \dots n)} \sum_{(\gamma_1 \dots \gamma_p; \delta_1 \dots \delta_p)}^{(1 \dots m)} D_{\alpha_1 \dots \alpha_p; \beta_1 \dots \beta_p}(\omega) \cdot \left. \begin{aligned} & \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_p; \delta_1 \dots \delta_p}(\omega) p_{\alpha_1 \dots \alpha_p; \delta_1 \dots \delta_p} q_{\gamma_1 \dots \gamma_p; \beta_1 \dots \beta_p} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

avendo indicato con  $\Delta(\omega)$  il determinante di ordine  $m$ :

$$|\alpha_{sr} - \omega \beta_{sr}| = \Delta(\omega) \quad (10)$$

con  $\Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_p; \delta_1 \dots \delta_p}$  i suoi aggiunti. Cioè:

Se  $D(\omega) = 0$ ,  $\Delta(\omega) = 0$  sono due equazioni della forma (2) con radici tutte reali, tali che le due forme  $B$ ,  $(\beta)$  ad esse relative non siano indefinite, nè abbiano segno contrario (ed a questo ci si può sempre ridurre, cambiando al più il segno della incognita in una delle due equazioni) l'espressione bilineare intera  $K(\omega)$  nei due determinanti  $D(\omega)$ ,  $\Delta(\omega)$  e nei loro minori, data dalla (9), uguagliata allo zero dà una equazione che ha ancora tutte le radici reali (ed in particolari relazioni con quelle delle due equazioni  $D(\omega) = 0$ ,  $\Delta(\omega) = 0$ ).

e) Risultati affatto analoghi evidentemente si avrebbero, supponendo che nel determinante (2) la forma  $B$  si spezzasse nella somma, non di due sole, ma di più forme, tutte non indefinite nelle loro variabili e del medesimo segno; a tale ovvia estensione del risultato che precede basti avere appena accennato.

f) Poniamo infine nella (8)  $m = n$ ;  $b_{ik} = \beta_{ik} = \varepsilon_{ik}$ ;  $\alpha_{rs} = -\alpha_{rs}$ ; e le  $a$ ,  $p$  si suppongano reali.

Avremo l'equazione a radici tutte reali:

$$L(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - \varepsilon_{ik} \omega & p_{ir} \\ -p_{ks} & \alpha_{rs} + \omega \varepsilon_{rs} \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k, r, s = 1, 2 \dots n) \quad (10)$$

la quale s'incontra nell'integrazione, mediante il metodo di D'ALEMBERT, del

sistema canonico :

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (11)$$

essendo :

$$2H = \sum_1^n p_{ik} x_i x_k + 2 \sum_1^n a_{ik} x_i y_k + \sum_1^n p_{ik} y_i y_k \quad (12)$$

una forma quadratica a coefficienti costanti, ecc., ecc.

g) Se nel primo membro della (8) le due forme  $B = \sum_1^n b_{ik} x_i \bar{x}_k$ ,  $\beta = \sum_1^m \beta_{rs} \xi_r \bar{\xi}_s$  si suppongono tutte due non indefinite, ma di segno contrario, la (8) stessa non avrà più in generale tutte le sue radici reali; si può però ancora in questo caso *assegnare un limite superiore del numero delle sue radici complesse*. La dimostrazione di questa asserzione, insieme con un risultato ancora più generale, risulterà dalla osservazione seguente.

14. Se nel fascio  $A - \omega B$  (per  $\omega$  reale) non sono contenute forme non indefinite, l'equazione  $D(\omega) = 0$  relativa al fascio stesso, può non aver più tutte le sue radici reali: quando però si conosca la caratteristica  $\rho$  di una delle forme del fascio, si può assegnare per essa equazione un limite superiore del numero delle sue radici complesse: *queste non possono essere in numero maggiore di  $2\rho$* .

Ricordiamo (\*) chiamarsi *caratteristica* di una forma di HERMITE il minore  $\rho$  dei due numeri  $p$  e  $q$  che si hanno quando la forma stessa si riduca (con sostituzioni complesse coniugate sulle variabili  $x, \bar{x}$ ) alla forma normale *irriducibile* :

$$\sum_1^p \xi_a \bar{\xi}_a - \sum_1^q \xi'_\beta \bar{\xi}'_\beta;$$

(è allora anche  $p$  il numero delle radici positive,  $q$  il numero delle radici negative della equazione *caratteristica* della forma considerata (cf. n.º 12) ed  $r = p + q$  sarà la sua classe (cf. n.º 3 a))

Sia allora ad es.:  $\rho$  la caratteristica della forma  $B$ ; si potrà, ed in infiniti modi, con sostituzioni complesse coniugate sulle variabili  $x, \bar{x}$ , trasformare la  $B$  nella somma di due forme di HERMITE, l'una non indefinita in

---

(\*) Cf. A. LOEWY, *Ueber Schaaren reeller quadratischer und Hermitescher Formen*. (Giornale di Crelle, Vol. 122; pag. 67, 1900.)



$2(n-\rho)$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-\rho}$ , l'altra *definita* e di segno *contrario* alla precedente nelle rimanenti  $2\rho; x_{n-\rho+1}, \dots, x_n; \bar{x}_{n-\rho+1}, \dots, \bar{x}_n$  (sarà insieme anche:  $\rho \leq n-\rho$ ). L'equazione  $D(\omega) = 0$  relativa al fascio  $A - \omega B$  si scriverà allora:

$$M(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\omega & a_{ir} \\ a_{sk} & a_{sr} - b_{sr}\omega \end{vmatrix} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i, k = 1, 2, \dots, n-\rho \\ r, s = n-\rho+1, \dots, n \end{matrix} \right). \quad (13)$$

Consideriamo ora il determinante di ordine  $n+\rho$ :

$$N(\omega) = \begin{vmatrix} a_{ik} - b_{ik}\omega & a_{ir} & 0 \\ a_{sk} & a_{sr} - b_{sr}\omega & \eta'_{sv} \\ 0 & \eta_{\mu r} & 0 \end{vmatrix}, \quad \left( \begin{matrix} i, k = 1, 2, \dots, n-\rho \\ r, s = n-\rho+1, \dots, n \\ \mu, v = 1, 2, \dots, \rho \end{matrix} \right) \quad (14)$$

nel quale si è posto:

$$\eta_{\mu r} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } \begin{cases} \mu = r - (n-\rho) \\ \mu \neq r - (n-\rho) \end{cases}; \quad \eta'_{sv} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } \begin{cases} v = s - (n-\rho) \\ v \neq s - (n-\rho) \end{cases}; \quad (15)$$

sviluppendolo secondo i minori delle ultime  $\rho$  righe e colonne, si ha:

$$N(\omega) = (-1)^\rho |a_{ik} - b_{ik}\omega|; \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-\rho) \quad (16)$$

inoltre un procedimento del tutto analogo dimostra che un minore *qualunque* dell'ordine  $n+\rho-s$  (con  $s < n-\rho$ ) del determinante (14) è una funzione lineare omogenea dei minori di ordine  $n-\rho-s$  e di ordine superiore del determinante (16). Ricordando le ipotesi fatte, ne segue:

a) L'equazione  $N(\omega) = 0$  (il cui grado è minore od uguale ad  $n-\rho$ ) ha tutte le radici reali.

b) Una radice  $\omega$  multipla di essa equazione di ordine  $\mu$  (evidentemente  $< n-\rho$ ) ne rende il primo membro di caratteristica  $n+\rho-\mu$ .

Un ragionamento affatto analogo a quello del n.º 7 dimostra anche:

c) Si può coi minori principali del determinante  $N(\omega)$ , (non identicamente nulli) costruire una successione di STURM per l'equazione stessa.

In particolare si potrà costruire una tale successione, in guisa che in essa figuri come termine  $(\rho+1)^{\text{mo}}$  il determinante (13). Se quindi indichiamo con  $\mu$  il grado della equazione  $N(\omega) = 0$ , la  $M(\omega) = 0$  avrà almeno  $\mu - \rho$  radici reali (\*); ma il suo grado è uguale a  $\mu + \rho$ ; quindi, come si era affermato, essa non può avere più di  $2\rho$  radici complesse (\*\*).

(\*) È questa, come si riconosce facilmente, una proprietà di qualsiasi successione di STURM per equazioni a radici tutte reali.

(\*\*) Cf. A. LOEWY, l. c., pag. 69.

## V.

15. Se sulle due forme bilineari:

$$A = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu} x_{\mu} y_{\nu}; \quad B = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu, \nu} x_{\mu} y_{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

non si fa alcuna ipotesi particolare, l'equazione

$$D(\omega) = |a_{ik} - b_{ik} \omega| = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

avrà in generale coefficienti e radici complesse: potrà però in casi speciali avere ancora coefficienti reali o tale ridursi moltiplicandone il primo membro per un'opportuna costante. Questo in particolare avverrà quando ogni elemento

$$e_{\mu, \nu} = a_{\mu, \nu} - \omega b_{\mu, \nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

del determinante  $D(\omega)$ , suppostovi  $\omega$  reale, per lo scambio di  $i$  in  $-i$ , si muti in una combinazione lineare omogenea degli elementi primitivi, tale che il nuovo determinante sia uguale all'antico, moltiplicato per un fattore non nullo; e queste condizioni saranno evidentemente soddisfatte, quando, indicando con  $\lambda_{rs}, \rho_{\sigma\tau}$  ( $r, s, \sigma, \tau = 1, 2, \dots, n$ ) 2  $n^2$  quantità, tali che i due determinanti

$$\Lambda = |\lambda_{rs}|; \quad P = |\rho_{\sigma\tau}| \quad (4)$$

sian diversi da zero, si abbiano le relazioni:

$$\bar{e}_{ik} = \sum_{\mu, \nu} \lambda_{i\mu} \rho_{k\nu} e_{\mu, \nu}, \quad (i, k, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (5 a)$$

o le altre:

$$\bar{e}_{ik} = \sum_{\mu, \nu} \lambda_{i\nu} \rho_{k\mu} e_{\mu, \nu}; \quad (i, k, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (5 b)$$

in ambedue i casi infatti, indicando con  $\bar{D}$  il determinante delle  $\bar{e}_{\mu, \nu}$ , si ha la relazione:

$$\bar{D} = \Lambda \cdot P \cdot D$$

(ed i due gruppi di formule corrispondono a due modi diversi di moltiplicazione dei determinanti del secondo membro) (\*). Quando adunque valgano

---

(\*) Si osservi che le (5) rimangono inalterate, moltiplicando le  $\lambda$ , e dividendo le  $\rho$  per un numero arbitrario  $\alpha$ , diverso da zero; di tale arbitrarietà conviene tener conto nel seguito.

per gli elementi  $e_{\mu\nu}$ , le relazioni (5 a) o (b), l'equazione (2) potrà ridursi ad avere i coefficienti reali e quindi, ove ammetta una radice complessa, ammetterà anche la complessa coniugata. *Le equazioni che in tal guisa si ottengono sono essenzialmente diverse da quelle già considerate?*

Per rispondere a tale questione, discutiamo più da vicino le relazioni (5), e noi studieremo le (5 b) che sole presentano un vero interesse; ma una discussione del tutto analoga può farsi sulle (5 a).

Risolviamo le (5 b) rispetto alle  $e_{\mu\nu}$ ; indicando con  $\Lambda_{ik}$ ,  $P_{ik}$  gli aggiunti in  $\Lambda$ ,  $P$  degli elementi  $\lambda_{ik}$ ,  $\rho_{ik}$ , divisi per  $\Lambda$ ,  $P$ , abbiamo:

$$e_{ik} = \sum_{\mu\nu} \Lambda_{\mu k} \cdot P_{\nu i} \cdot \bar{e}_{\mu\nu},$$

e cambiando in questa relazione ogni elemento nel complesso coniugato:

$$\bar{e}_{ik} = \sum_{\mu\nu} \bar{\Lambda}_{\mu k} \cdot \bar{P}_{\nu i} \cdot e_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Se, come supponiamo, le  $e_{\mu\nu}$  non soddisfano ad altre relazioni, distinte dalle (5 b), devono le (6) coincidere con queste; deve aversi cioè, per tutti i possibili valori degli indici  $i$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ :

$$\lambda_{i\nu} \rho_{k\mu} = \bar{\Lambda}_{\mu k} \cdot \bar{P}_{\nu i}, \quad (7)$$

e quindi anche, indicando con  $\eta$  un'opportuna costante;

$$\rho_{k\mu} = \eta \cdot \bar{\Lambda}_{\mu k}; \quad \lambda_{i\nu} = \eta^{-1} \bar{P}_{\nu i}. \quad (8 a)$$

Da queste relazioni poi si ha:

$$P = \eta^n \cdot \bar{\Lambda}^{-1}, \quad \Lambda = \eta^{-n} \cdot \bar{P}^{-1}$$

e cambiando in quest'ultima  $i$  in  $-i$ :

$$P^{-1} = \bar{\eta}^n \cdot \bar{\Lambda}$$

donde infine

$$(\eta \bar{\eta})^n = 1;$$

cioè la costante  $\eta$  ha il modulo 1: quindi si può porre, indicando con  $\alpha$  un numero reale:

$$a) \quad \rho_{k\mu} = e^{i\alpha} \cdot \bar{\Lambda}_{\mu k}; \quad b) \quad \lambda_{i\nu} = e^{-i\alpha} \cdot \bar{P}_{\nu i}. \quad (8^*)$$

Le (8\*) possono ancora semplificarsi; poniamo infatti, il che non altera le (5 b):

$$\lambda'_{i\nu} = e^{i\alpha} \lambda_{i\nu}; \quad \rho'_{k\mu} = e^{-i\alpha} \rho_{k\mu};$$

sarà allora :

$$\bar{\Lambda}'_{\mu k} = e^{i\alpha} \cdot \bar{\Lambda}_{\mu k}; \quad \bar{P}'_{vi} = e^{-i\alpha} \cdot \bar{P}_{vi}$$

e per le (8\*):

$$\rho'_{k\mu} = \bar{\Lambda}'_{\mu k}, \quad \lambda'_{iv} = \bar{P}'_{vi}$$

o, tornando per semplicità ad omettere gli indici:

$$a) \quad \rho_{h\mu} = \bar{\Lambda}_{\mu k}; \quad b) \quad \lambda_{iv} = \bar{P}_{vi}. \quad (8^{**})$$

Ricordiamo ora che l'equazione (2) è invariante per trasformazioni lineari sulle  $x$  e sulle  $y$ ; è quindi naturale proporsi il problema di ridurre mediante tali trasformazioni le relazioni (5 b) alla forma la più semplice possibile. Indichiamo per questo con  $g_{rs}$   $n^2$  quantità perfettamente arbitrarie, colla sola condizione che il loro determinante  $G$  sia diverso da zero, e determiniamo poi altre  $n^2$  quantità  $h_{pq}$  dalle relazioni lineari:

$$a) \quad \bar{h}_{\beta s} = \sum_{\mu}^n \rho_{s\mu} g_{\beta\mu} \quad (\beta, s = 1, 2 \dots n); \quad (9)$$

siano allora anche, in virtù delle (8\*\*):

$$b) \quad \bar{g}_{\alpha r} = \sum_{\nu}^n \lambda_{r\nu} h_{\alpha\nu}, \quad (\alpha, r = 1, 2 \dots n) \quad (9)$$

ed il determinante  $H = |h_{\beta s}|$  sarà anche esso diverso da zero. Eseguiamo allora sulle  $x$  e sulle  $y$  le trasformazioni lineari:

$$a) \quad x'_\alpha = \sum_r^n g_{\alpha r} x_r; \quad b) \quad y'_\beta = \sum_s^n h_{\beta s} y_s \quad (\alpha, \beta = 1, 2 \dots n); \quad (10)$$

la forma  $E = \sum e_{ik} x_i y_k$  si muterà con ciò nella  $E' = \sum c'_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta$ , dove, con notazioni usate, si ha:

$$e'_{\alpha\beta} = \sum_{ik}^n G_{ki} H_{\beta k} e_{ik} \quad (\alpha, \beta = 1, 2 \dots n). \quad (11)$$

Mutiamo nella (11) ogni elemento nel suo coniugato; tenendo allora conto delle 5 b) e risolvendo le (11) rispetto alle  $e_{ik}$ , abbiamo:

$$\bar{e}'_{\sigma\beta} = \sum_{ikrs\mu\nu}^n \lambda_{iv} \rho_{k\mu} g_{r\mu} h_{sv} \bar{G}_{\alpha i} \bar{H}_{\beta k} e'_{rs}$$

e per le (9) a) b) semplicemente:

$$\bar{e}'_{\alpha\beta} = e'_{\beta\alpha}; \quad (12)$$

cioè: la forma  $E' = \sum e'_{\alpha\beta} x'_\alpha \bar{y}'_\beta$  è una forma di HERMITE di prima specie.

Quelle equazioni dunque per cui hanno luogo le relazioni (5 b) non sono essenzialmente distinte da quelle che abbiamo già considerato (\*).

16. Nella equazione (2) una delle due forme, la  $B$ , si supponga di HERMITE, di prima specie, e (totalmente) definita (\*\*); la  $A$  sia invece qualunque. La equazione (2) avrà allora in generale coefficienti e radici complesse, le quali però soddisfano a particolari limitazioni.

Sia infatti  $\omega = p + iq$  una radice della (2): le equazioni

$$\sum_{\mu} (a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}) x_{\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n) \quad (13)$$

ammetteranno allora delle soluzioni  $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$  non tutte nulle. Cambiamo in queste relazioni ogni elemento nel suo complesso coniugato e l'indice  $\mu$  in  $\nu$ ; avremo:

$$\sum_{\nu} (\bar{a}_{\nu\mu} - \bar{\omega} b_{\nu\mu}) \bar{x}_{\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n). \quad (13^*)$$

Moltiplichiamo allora la (13) per  $\bar{x}_{\nu}$  e sommiamo rispetto all'indice  $\nu$  da 1 ad  $n$ ; moltiplichiamo la (13\*) per  $x_{\mu}$  e sommiamo rispetto a  $\mu$  da 1 ad  $n$ : sommando e sottraendo i due risultati abbiamo:

$$(a) \quad p \cdot B(x, \bar{x}) = H(x, \bar{x}) \quad (b) \quad q \cdot B(x, \bar{x}) = K(x, \bar{x})$$

essendo:

$$\left. \begin{aligned} H(x, \bar{x}) &= \sum_{\mu\nu} h_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} x_{\mu} \bar{x}_{\nu} \\ K(x, \bar{x}) &= \sum_{\mu\nu} k_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} x_{\mu} \bar{x}_{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(\*) Una discussione affatto analoga può evidentemente farsi sulle (5 a); ne seguirebbe facilmente che le equazioni che in questo modo si ottengono non differiscono essenzialmente da quelle in cui tutti gli elementi  $e_{\mu\nu}$  sono numeri reali, del resto, come è ben naturale, affatto arbitrari. Ci sia permesso anche ricordare qui un'altra classe di equazioni algebriche della forma (2) a radici reali, considerate per la prima volta dal sig. GUNDELINDER<sup>1</sup>, per osservare che esse non sono essenzialmente distinte da quelle già da noi studiate, a cui si riducono moltiplicandone il primo membra per un particolare determinante simmetrico e diverso da zero.

(\*\*) (oppure tale si riduca con opportune sostituzioni lineari sulle variabili (cf. n. 15). Queste sostituzioni si supporranno allora già eseguite sulla  $B$  e sulla  $A$ ).

<sup>1</sup> Cf. DINGELDEY, *Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung*. (Giornale di Crelle, Vol. 122, pag. 188, nota 4.)

due particolari forme di HERMITE di prima specie, dedotte dalla  $A$ . Se quindi indichiamo con  $\rho$  e  $\sigma$  due indeterminate affatto arbitrarie, avremo anche:

$$(\rho p + \sigma q) B(x, \bar{x}) = \rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x}). \quad (15)$$

Dalla (15) si possono trarre in due modi diversi delle limitazioni per la radice  $\omega = p + iq$ .

a) Indichiamo con  $\varepsilon$  quella radice della equazione caratteristica della forma  $B$  che ha il minimo valore assoluto; sarà, poichè la  $B$  è definita,  $|\varepsilon| > 0$ . Dividiamo allora la (20) per la quantità  $\sum x_\mu \bar{x}_\mu$  evidente non nulla; avremo immediatamente la disuguaglianza:

$$|\rho p + \sigma q| \cdot |\varepsilon| < E_{\rho\sigma} \cdot \frac{\sum |x_\mu| \cdot |x_\nu|}{\sum x_\mu \bar{x}_\mu} \quad (*) \quad (21)$$

dove abbiamo indicato con  $E_{\rho\sigma}$  il massimo modulo dei coefficienti della forma bilineare

$$E^{(\rho,\sigma)}(x, \bar{x}) = \rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x}).$$

Ma dalla disuguaglianza tra quantità reali:

$$\{k_1 + k_2 + \dots + k_m\}^2 \leq m \{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2\} \quad (**)$$

segue immediatamente:

$$\sum |x_\mu| |x_\nu| = \{\sum |x_\mu|\}^2 < n \sum x_\mu \bar{x}_\mu$$

e quindi anche, per la (16), si ha la disuguaglianza:

$$|\rho p + \sigma q| < n \cdot \frac{E_{\rho\sigma}}{|\varepsilon|},$$

che è appunto una delle limitazioni cercate. Adunque:

Se la  $B$  è una forma definita di HERMITE, indicando con  $E_{\rho\sigma}$  il massimo modulo delle  $n^2$  quantità

$$e_{\mu\nu}^{(\rho,\sigma)} = \rho \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} \quad (17)$$

(dove  $\rho$  e  $\sigma$  sono due indeterminate affatto arbitrarie) chiamando inoltre con  $\varepsilon$  la minima, in valore assoluto, delle radici della equazione caratteristica della  $B$ ,

(\*) È infatti  $|\varepsilon| \cdot \sum x_\mu \bar{x}_\mu < |B(x, \bar{x})|$ .

(\*\*) La disuguaglianza in questione è equivalente all'altra evidente  $\sum_{(i,j)} (k_i - k_j)^2 \geq 0$ .

si ha per una qualunque radice  $\omega = p + iq$  della equazione (2) la limitazione:

$$|\rho p + \sigma q| < n \cdot \frac{E\rho_1}{|\varepsilon|}. \quad (18)$$

Facendo nella (18) successivamente  $\rho = 1, \sigma = i; \rho = 1, \sigma = 0; \rho = 0, \sigma = 1$  si ha la prima parte di un teorema enunciato dal sig. HIRTSCH (\*), nel caso particolare che la  $B$  sia la forma unità  $\sum_{\mu} x_{\mu} \bar{x}_{\mu}$ .

b) Se le indeterminate  $\rho$  e  $\sigma$  si suppongono *reali*, la forma:

$$\rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x})$$

è una forma di HERMITE di *prima specie*, e tale è anche l'altra:

$$s B(x, \bar{x}) - \rho H(x, \bar{x}) - \sigma K(x, \bar{x}) \quad (19)$$

in cui  $s$  è una variabile reale affatto arbitraria. Per i valori di  $s$  sufficientemente grandi in valore assoluto la (19) è una forma di HERMITE *definita* e tale resta, finchè  $s$  è *esterno* all'intervallo tra la massima e minima radice dell'equazione in  $\omega$  (con radici tutte reali):

$$|\rho h_{\mu\nu} + \sigma k_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n). \quad (20)$$

Questa asserzione si può dimostrare, sia deducendola da un noto teorema di WEIERSTRASS sulle forme quadratiche (che immediatamente si estende alle

(\*) Cf. A. HIRTSCH, *Sur les racines d'une équation fondamentale*. (Acta Mathematica, Tom. 25, fasc. 3.º e 4.º, pag. 367. Settembre 1902.) Non sarebbe difficile completare il risultato antecedente in guisa da ottenere anche la seconda parte del teorema ricordato (1.º della nota) di HIRTSCH. Si supponga infatti che per un particolare valore  $\frac{\rho_1}{\sigma_1}$  del rapporto  $\frac{\rho}{\sigma}$  la forma

$$\rho H(x, \bar{x}) + \sigma K(x, \bar{x})$$

sia una forma *emisimmetrica* nelle variabili  $x_{\mu}, \bar{x}_{\mu}$ . Con metodo analogo all'antecedente (cf. HIRTSCH, l. c., pag. 370) la disuguaglianza (18) può sostituirsi coll'altra più ristretta:

$$|\rho_1 p + \sigma_1 q| < \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{E\rho_1\sigma_1}{|\varepsilon|}.$$

Cf. anche: BEDINXON I. *Sur les racines d'une équation fondamentale*. *Ofversigt af Kongl. Veterskaps. Akademiens Förhandlingar* 1900. N. 95 Stockholm, (ristampata negli Acta Mathematica. Tom. 25º, pag. 319).

forme di HERMITE (\*)), sia direttamente al modo seguente: Consideriamo, con  $s$  reale, l'equazione

$$\left| -\frac{e_{\mu\nu}}{s} + b_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \omega \right| = 0; \quad (e_{\mu\nu} = \rho h_{\mu\nu} + \sigma k_{\mu\nu}) \quad (21)$$

essa ha tutte le radici reali e funzioni continue della variabile reale  $s$ , che per  $s$  sufficientemente grande in valore assoluto sono prossime a quelle della equazione

$$|b_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \omega| = 0$$

tanto quanto si vuole, son quindi tutte diverse da zero e del medesimo segno. Perchè ora la forma (19) non sia più definita è necessario che una almeno delle radici della equazione (21) si annulli o acquisti un segno contrario a quello di prima: ma, trattandosi di funzioni reali e continue della variabile reale  $s$ , deve per questo necessariamente passar per lo zero; ora perchè la (21) abbia una radice nulla, è necessario che sia

$$\left| -\frac{e_{\mu\nu}}{s} + b_{\mu\nu} \right| = 0,$$

$s$  deve cioè soddisfare alla equazione (20). Ne segue immediatamente l'affermazione superiore.

Ciò posto, si osservi che per la (15) la forma (19) non è certo definita quando sia  $s = \rho p + \sigma q$ . Se ne deduce il teorema:

*Se la  $B$  è una forma definita di HERMITE, ed, essendo  $\rho$  e  $\sigma$  due indeterminate reali affatto arbitrarie, si dicono  $m_{\rho\sigma}$ ,  $M_{\rho\sigma}$  la minima e massima radice della equazione:*

$$\left| \rho \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0, \quad (20)$$

*per una qualunque radice  $\omega = p + iq$  della equazione (2) si ha la limitazione:*

$$m_{\rho\sigma} \leq \rho p + \sigma q \leq M_{\rho\sigma}.$$

Poniamo in particolare  $\rho = 1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\sigma = 1$ ; abbiamo:

*Nelle stesse ipotesi, la parte reale  $p$  di una radice  $\omega$  della equazione (2) è compresa tra la massima e minima radice della equazione:*

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0, \quad (20 p)$$

---

(\*) Cf. WEIERSTRASS, Werke. Bd. I. Seite 242-243.



il coefficiente  $q$  dell'immaginario tra la massima e minima radice dell'altra equazione:

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0. \quad (20\ q)$$

La prima parte di questo teorema è dovuta, in casi particolari, ai signori IVAR BEDINXON e A. HIRTSCH (\*).

Osservando inoltre che si ha:

$$\left| |p| - |q| \right| \leq |p + iq| \leq |p| + |q|,$$

e prendendo nella (20) in modo opportuno  $\rho$  e  $\sigma$  uguali all'unità positiva o negativa, si hanno da essa anche delle altre limitazioni per il modulo  $|p + iq|$  di una radice qualunque della equazione (2).

Se, infine, in particolare si fa  $a_{\mu\nu} = \bar{a}_{\nu\mu}$ , si ha di nuovo il teorema I, nel caso particolare che la forma  $B$  sia totalmente definita; supponendo invece che si abbia  $a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu} = 0$  (e quindi la forma  $A$  sarà ancora di HERMITE, ma di seconda specie, la  $B$  di prima e totalmente definita) si ottiene per la (20 p) un'equazione con tutte radici immaginarie pure (\*\*).

17. Convieni studiar direttamente quest'ultimo caso, che conduce a risultati interessanti. Siano dunque ancora  $A$  e  $B$  due forme di HERMITE nelle  $2n$  variabili  $x_\nu, \bar{x}_\nu$ ; e la  $B$  sia di prima specie e non indefinita; la  $A$  sia invece di seconda specie. Ci riduciamo subito al caso già studiato, in cui le  $A$  e  $B$  sono ambedue di prima specie, cambiando nella (2)  $\omega$  in  $i\theta$ , e quindi dividendo per  $i^n$  il primo membro. Infatti in tal guisa la  $B$  rimane immutata, la  $A$  si cambia nella  $\frac{1}{i} A$  che è di prima specie; donde appunto segue che l'equazione  $D(\omega) = 0$  ha tutte le radici immaginarie pure.

Se inoltre le due forme  $A$  e  $B$  si suppongono a coefficienti reali, cioè la  $A$  si suppone reale ed emisimmetrica, la  $B$  reale, simmetrica e non inde-

(\*) BEDINXON ed HIRTSCH, (note citate. Teorema II' e II). Non è forse inutile osservare a questo proposito che il teorema superiore fu pubblicato da me nella nota ricordata ai Lincei del luglio 1902.

(\*\*) Più generalmente, ove sia  $a_{\mu\nu} = e^{i\theta} \cdot \bar{a}_{\nu\mu}$  con  $\theta$  reale, le radici della (2) sono situate sulla retta che fa coll'asse reale un angolo uguale a  $\frac{\theta}{2}$ .

finita, la (2) avrà i coefficienti reali; e quindi, dividendone eventualmente il primo membro per  $\omega$  quando il suo grado sia dispari, e ponendo:

$$\omega^2 = -u, \quad (21)$$

si ottiene da essa un'equazione  $H(u) = 0$  con radici tutte reali e positive (o nulle).

Questa equazione  $H(u) = 0$  gode di proprietà notevoli, che si hanno immediatamente dalle proprietà già dimostrate per l'equazione in  $\theta$ .

Consideriamo ad es. il caso più semplice, che la forma  $B$  sia irriducibile e quindi totalmente definita; (risultati affatto identici si hanno anche negli altri casi, solo richiedono una discussione più minuta) e sia  $u$  una radice, positiva e diversa da zero, della  $H(u) = 0$ , multipla per essa di ordine  $\rho$ . Ciascuno dei due valori  $\pm \sqrt{u} (\pm i \sqrt{u})$  è allora una radice multipla di ordine  $\rho$  dell'equazione in  $\theta(\omega)$  e quindi rende il determinante del primo membro di caratteristica  $n - \rho$ . Si osservi ora che un qualunque minore principale del determinante  $D(\omega)$ , diviso per  $\omega$  quando il suo grado sia dispari, è una funzione razionale intera in  $u$  a coefficienti reali, e tale è anche, come subito si riconosce, il prodotto di due minori coniugati. Ne segue che la radice considerata  $u$  soddisfa con determinata molteplicità a tutte le equazioni in  $u$  che si hanno, nel modo ora detto, dai minori del determinante  $D(\omega)$  fino all'ordine  $n - \rho + 1$ , non soddisfa invece a tutte quelle dell'ordine  $n - \rho$ : e inversamente tali proprietà sono caratteristiche perchè la radice  $u$  considerata della  $H(u) = 0$  sia per essa multipla dell'ordine  $\rho$ . È facile vedere come tali risultati si modificano per la radice zero, che la  $H(u) = 0$  eventualmente può ammettere.

Consideriamo un qualunque minore principale di  $D(\omega)$ ; se  $n - k$  è il suo ordine (ed il suo grado in  $\omega$ ), poniamo colle solite notazioni:

$$D_{i_1 \dots i_k}(\omega) = \frac{\omega^{n-k-\varepsilon}}{\omega^\varepsilon} \cdot G_{i_1 \dots i_k}(u) \quad \begin{cases} \varepsilon = 1, & \text{per } n - k \equiv 1 \pmod{2} \\ \varepsilon = 0, & \text{per } n - k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (22)$$

per due qualunque minori coniugati, poniamo invece:

$$D_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}(\omega) \cdot D_{j_1 \dots j_k i_1 \dots i_k}(\omega) = (-1)^{n-k} G_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}(u); \quad (22')$$

passando per la equazione in  $\theta$ , si riconosce subito che  $G_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}(u)$  è una funzione razionale intera in  $u$  a coefficienti reali, che non è mai negativa per  $u$  positivo.

Con queste notazioni l'uguaglianza (12) del n.º 7 si traduce in un'ugua-

gianza della forma :

$$\begin{aligned} u^\eta G_{i_1 \dots i_k}(u) G_{i_1 \dots i_k, i_{k+1} i_{k+2}}(u) &= u^\zeta G_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}}(u) G_{i_1 \dots i_k, i_{k+2}}(u) - \\ &- G_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}; i_1 \dots i_k i_{k+2}}(u) \quad (\eta, \zeta = 1, 0) \end{aligned} \quad (23)$$

e quindi :

Se un valore positivo  $u$  annulla una delle  $G_{i_1 \dots i_k}(u)$ , due qualunque  $G_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}}(u)$ ,  $G_{i_1 \dots i_k, i_{k+2}}(u)$  (in essa contenute) hanno per quel valore di  $u$  segni uguali; due qualunque che la comprendono hanno invece valori di segno contrario.

Indichiamo con  $G_{i_1}(u)$  una delle funzioni  $G$  corrispondente ad un minore principale di ordine  $n-1$ .

Si ha facilmente (cf. n.º 8, 6) che per ogni radice positiva  $u$  della  $H(u) = 0$ , il rapporto  $\frac{H'(u)}{G_{i_1}(u)}$  ha il segno contrario a quello della forma  $B$ . Se quindi indichiamo con  $\eta$  l'unità negativa o positiva, secondochè la  $B$  è positiva o negativa, e poniamo

$$\eta^k G_{i_1 \dots i_k}(u) = H_{i_1 \dots i_k}(u), \quad (24)$$

la successione di funzioni

$$H(u), H_{i_1}(u), H_{i_1 i_2}(u) \dots H_{i_1 \dots i_n}(u) \quad (25)$$

(dove  $i_1 \dots i_n$  è una determinata permutazione degli indici  $1, 2, \dots, n$ ) costituisce per la  $H(u) = 0$  una successione di STURM per le sue radici diverse da zero (e positive).

Un ragionamento del tutto identico a quello del teorema IV (n.º 8) dimostra infine che :

Due qualunque equazioni

$$G_{i_1 \dots i_k}(u) = 0, \quad G_{i_1 \dots i_k, i_{k+1}}(u) = 0$$

che risultano da due minori principali del determinante (2) di cui l'uno sia contenuto nell'altro, hanno radici tutte reali e che si separano a vicenda.

Se infine la forma  $B$  è indefinita e  $\rho$  è la sua caratteristica, l'equazione  $H(u) = 0$  non può avere più di  $\rho$  radici che non siano reali e positive.

## VI.

18. I risultati che precedono possono estendersi (almeno in parte) in due sensi diversi, sia rimanendo nel caso di una sola equazione, sia passando a sistemi di equazioni. Ci limiteremo, in quel che segue, allo studio dei casi più semplici che si presentano nell'una e nell'altra estensione.

Consideriamo perciò tre forme bilineari in  $2n$  variabili  $x_1 x_2 \dots x_n$ ;  $y_1 y_2 \dots y_n$ :

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu; & B &= \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu; & C &= \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu; \\ &(\mu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

e l'equazione algebrica in  $\omega$ :

$$E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2\omega b_{\mu\nu} + \omega^2 c_{\mu\nu}| = 0. \quad (2)$$

Questa equazione è ancora essa invariante per trasformazioni lineari omogenee sulle  $x$  e sulle  $y$ ; e se  $\omega_r$  è una sua radice, ai due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite  $x^{(r)}$  ( $y^{(r)}$ ):

$$\left. \begin{aligned} (a_r) \quad & \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \\ (b_r) \quad & \sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} + 2\omega_r b_{\mu\nu} + \omega_r^2 c_{\mu\nu}) y_\nu^{(r)} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

si può soddisfare con  $n$  quantità  $x^{(r)}$  ( $y^{(r)}$ ) *non tutte nulle*; ed ancora, se  $\omega_r$  ed  $\omega_s$  sono due radici *diverse* della equazione stessa, e con  $x^{(r)}$ , ( $y^{(r)}$ );  $x^{(s)}$ , ( $y^{(s)}$ ) si indicano delle *soluzioni* dei corrispondenti sistemi di equazioni (3), procedendo come al n.º 4, si hanno le *tre* relazioni:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) + (\omega_r + \omega_s)C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \\ (b) \quad & A(x^{(r)}, y^{(s)}) - \omega_r \omega_s C(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \\ (c) \quad & \left(\frac{1}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_s}\right)A(x^{(r)}, y^{(s)}) + 2B(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

delle quali la prima e la terza seguono l'una dall'altra cambiando  $\omega$  in  $\frac{1}{\omega}$ .

19. Siano ora le  $A, B, C$  tre forme di HERMITE di *prima* specie: l'equazione (2) avrà allora i coefficienti reali; e se  $\omega_1 = p + iq$ ,  $\omega_2 = p - iq$  ne sono due radici complesse coniugate, come al n.º 5, si vedrà che nelle corrispondenti equazioni (3) le  $x_\mu^{(1)}, y_\mu^{(2)}; y_\mu^{(1)}, x_\mu^{(2)}$ , possono suppersi complesse coniugate: le (4)  $a), b), c)$  danno allora, fattovi  $r = 1, s = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) + p C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0, \\ (b) \quad & A(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) - (p^2 + q^2) C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0, \\ (c) \quad & p A(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) + (p^2 + q^2) B(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Sia invece  $\omega$  una radice reale della (2); derivando abbiamo, con notazioni analoghe a quelle del § 6:

$$E'(\omega) = 2 \sum_{\mu\nu}^n (b_{\mu\nu} + \omega c_{\mu\nu}) E_{\mu\nu}(\omega) \quad (6)$$

ma, come al n.º 6, si può porre:

$$E_{\mu\nu}(\omega) = \pm p_\mu \cdot \bar{p}_\nu \quad (7)$$

e quindi anche sarà:

$$E'(\omega) = \pm 2 \{ B(p, \bar{p}) + \omega C(p, \bar{p}) \}. \quad (6')$$

Poichè infine per  $\omega$  reale, un qualunque minore principale del determinante  $E(\omega)$  è ancora reale, due minori coniugati sono complessi coniugati, dalla uguaglianza:

$$\left. \begin{aligned} E_{i_1 i_2 \dots i_k}(\omega) \cdot E_{i_1 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) &= E_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega) \cdot E_{i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega) - \\ &- E_{i_1 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) \cdot E_{i_1 \dots i_k i_{k+2} i_{k+1}}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

seguono delle proprietà affatto analoghe a quelle del n.º 7.

20. Consideriamo ora alcuni casi particolari.

a) Una delle forme *estreme*, ad es.: la  $C$  sia definita, (ove lo sia la  $A$ , basta cambiare  $\omega$  in  $\frac{1}{\omega}$ ); le (5)  $(a) (b)$  danno allora immediatamente (cf. anche n.º 16).

*La parte reale di una radice complessa della equazione (2) è sempre compresa tra la massima e minima radice dell'equazione in  $\lambda$  (a radici tutte*

reali):

$$|b_{\mu\nu} + \lambda c_{\mu\nu}| = 0;$$

il quadrato del modulo tra la massima e minima della equazione in  $\sigma$  (ancora a radici tutte reali):

$$|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0.$$

b) Sia definita la forma intermedia  $B$ ; un teorema affatto analogo si ha dalle (5) a) c) per le quantità  $\frac{1}{p}, \frac{p}{r^2}$ .

c) Due consecutive delle forme  $A, B, C$ , ad es.:  $B$  e  $C$  siano *parzialmente* definite rispetto a due gruppi di variabili complementari; cioè se la  $B$  è definita rispetto alle  $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_l}$ , la  $C$  rispetto alle  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ , tra le  $x_{h_1} \dots x_{h_l}, x_{k_1} \dots x_{k_m}$  si trovino tutte le  $x_1 x_2 \dots x_n$ ; dalla (5 a) si ha allora:

*Le radici complesse della (2), non immaginarie pure, hanno la parte reale di un medesimo segno (quello di  $-\frac{B}{C}$ ).*

Se inoltre, nella stessa ipotesi è  $p = 0$ , cioè si ha una radice della equazione (2), immaginaria pura, deve essere per essa  $B(x^{(i)}, \bar{x}^{(i)}) = 0$ ; e quindi  $x_{h_1} = x_{h_2} = \dots = x_{h_l} = 0$ : una tale radice deve quindi (cf. la nota al n.° 2) annullare la matrice che si ha dalla (2) sopprimendovi le righe (o le colonne)  $h_1, h_2, \dots, h_l$ . Ne segue che la (2) può esser liberata, con procedimenti razionali, dalle sue radici immaginarie pure; e per l'equazione così ottenuta varrà allora il teorema superiore per qualsiasi radice complessa.

Ancora nelle stesse ipotesi, dalle (6') ed (8) si ha:

*Una radice reale e multipla della equazione (2) o ha il segno di  $-\frac{B}{C}$  o rende il determinante  $E(\omega)$  di caratteristica minore di  $n - 1$ .*

*Se la  $B$  e  $C$  hanno ugual segno (segno contrario) e si indica con  $\varepsilon$  l'unità positiva o negativa, secondochè il segno di  $B$  è positivo o negativo, posto:*

$$E_{i_1 \dots i_k}(\omega) = \varepsilon^k \cdot E_{i_1 \dots i_k}(\omega) \quad (9)$$

la successione

$$E(\omega), E_{i_1}(\omega), E_{i_1 i_2}(\omega), \dots, E_{i_1 \dots i_n}(\omega) \quad (10)$$

*è una successione di STURM per le radici reali e positive (negative) della equazione (2).*

Ne segue in particolare che il loro numero non può superare  $n$ .

d) Le forme estreme  $A$  e  $C$  sian parzialmente definite e di segno contrario rispetto a due gruppi complementari di variabili: la (5 b) non può allora aver luogo se non per  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , il che è assurdo. Allo stesso risultato si perviene quando le  $A$  e  $C$ , ancora parzialmente definite e di segno contrario, possono ridursi con una *stessa* sostituzione lineare sulle  $x$  (e la complessa coniugata sulle  $y$ ) a contenere le stesse variabili  $x_1, x_2, \dots, x_k$  e rispetto a *tutte* queste l'una o l'altra delle due forme  $A$  e  $C$  sia (totalmente) definita.

Supponiamo infatti, come evidentemente si può, eseguita una tale riduzione; per la (5 b) una radice complessa (e quindi *non nulla*) della equazione (2) dovrebbe dare  $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \dots = x_k^{(1)} = 0$ , e quindi annullare la matrice delle ultime  $n - k$  righe (o colonne) del determinante  $E(\omega)$ : ma questa matrice, a meno del fattore  $\omega^{n-k}$  è indipendente da  $\omega$  ed il suo annullarsi porterebbe di necessità l'annullarsi *identico* del determinante  $E(\omega)$ , il che naturalmente escludiamo. Adunque:

*Se le due forme estreme  $A$  e  $C$  sono parzialmente definite e di segno contrario rispetto a due gruppi complementari delle variabili  $x_1, \dots, x_n$  oppure (ancora non indefinite e di segno contrario) son riducibili a contenere le stesse  $k$  variabili, l'equazione (2) ha tutte le radici reali.*

e) Sian soddisfatte le condizioni antecedenti, e di più la forma intermedia  $B$  sia anche essa definita totalmente o parzialmente. I risultati che precedono possono allora precisarsi ancora di più. Da c) segue allora infatti che la successione (11) è in questo caso una successione di STURM per le radici positive (o negative, secondo il segno di  $\frac{B}{C}$ ) della equazione (2); ma cambiando  $\omega$  in  $\frac{1}{\omega}$ , poichè le  $C$  ed  $A$  hanno per ipotesi segno contrario, una successione del tutto analoga può costruirsi per le sue radici negative (positive). Adunque:

*Nelle ipotesi precedenti, se anche la  $B$  è definita, l'equazione (2) ha tutte le radici reali ed  $n$  positive ed  $n$  negative. — È inoltre possibile costruire dai minori principali del determinante  $E(\omega)$  due successioni di STURM, l'una per le radici positive, l'altra per le negative della equazione stessa.*

f) Le forme estreme  $A$  e  $C$  siano ancora di HERMITE e di prima specie, la  $B$  sia invece di seconda specie; ponendo  $\omega = i\theta$ , la  $B$  si cambia in una forma  $iB$  di prima specie, la  $C$  in  $-C$ . Ne segue in particolare (cf. d):

Se le forme estreme  $A$  e  $C$  sono parzialmente definite (nelle ipotesi  $d$ ) ed hanno ugual segno, la  $B$  è invece una forma di seconda specie, l'equazione (2) ha tutte radici immaginarie pure.

Se in particolare le  $A$ ,  $B$ ,  $C$  hanno coefficienti reali e quindi è  $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ,  $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ ,  $b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = 0$ , la equazione (2) ha i coefficienti reali: ponendovi quindi

$$\omega^2 = -u,$$

si ha da essa un'equazione  $H(u) = 0$  che ha radici tutte reali e positive. In questo caso inoltre ogni minore principale è una funzione razionale intera in  $u$ ; e tale è ancora, e sempre positiva per  $u$  reale e positivo, il prodotto di due qualsiasi minori coniugati; ne segue (cf. n.° 17) che la successione (10) (fattori  $\omega^2 = -u$ ) costituisce per l'equazione  $H(u) = 0$  quella che si dice una *successione generalizzata di STURM*.

21. A risultati degni di nota conducono ancora le considerazioni seguenti, per quanto affatto diverse da quelle che precedono.

Essendo ancora  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tre forme di HERMITE di prima specie, si supponga la  $C$  definita (totalmente), ma non si pongano altre limitazioni. Se allora  $p + iq$  è una radice qualunque della equazione (2), potremo determinare  $n$  quantità  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , non tutte nulle, tali che valgano le (3 a), cioè le equazioni:

$$\sum_{\mu=1}^n \{ a_{\mu\nu} + 2(p + iq) b_{\mu\nu} + (p + iq)^2 c_{\mu\nu} \} x_{\mu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

In queste equazioni cambiamo  $i$  in  $-i$ ; esse diventano:

$$\sum_{\mu=1}^n \{ a_{\mu\nu} + 2(p - iq) b_{\mu\nu} + (p - iq)^2 c_{\mu\nu} \} \bar{x}_{\mu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (\bar{11})$$

Moltiplichiamo allora le (11) per  $\bar{x}_{\nu}$  e sommiamo rispetto a  $\nu$  da 1 ad  $n$ , moltiplichiamo la (11) per  $x_{\mu}$  e sommiamo rispetto a  $\mu$  da 1 ad  $n$ ; sommando e sottraendo i due risultati, abbiamo le due relazioni:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & A(x, \bar{x}) + 2p B(x, \bar{x}) + (p^2 - q^2) C(x, \bar{x}) = 0 \\ (b) \quad & 2q \{ B(x, \bar{x}) + p C(x, \bar{x}) \} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Sia ora  $q \neq 0$ , cioè si consideri una radice complessa della equazione (2);



ne segue insieme:

$$p = \frac{-B}{C}; \quad q^2 = \frac{A C - B^2}{C^2}. \quad (13)$$

La prima delle (13) non dà nulla di nuovo, non così la seconda; essa infatti è assurda quando per *qualunque* sistema di valori delle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  si abbia sempre:

$$A C - B^2 = A(x, \bar{x}) C(x, \bar{x}) - \{B(x, \bar{x})\}^2 \leq 0. \quad (14)$$

Ne segue il teorema:

a) *Se le  $A, B, C$  sono forme di HERMITE, l'ultima delle quali definita, che soddisfano alla condizione*

$$A C - B^2 \leq 0, \quad (14)$$

*l'equazione  $E(\omega) = 0$  ha tutte le radici reali.*

*Sia invece  $q = 0$ , cioè si consideri una radice reale della equazione (2), la prima delle (12) dà allora:*

$$A + 2 p B + p^2 C = 0$$

risultato assurdo, quando sia  $B^2 - A C < 0$ , per *tutti* i possibili valori delle  $x_1 \dots x_n$ . Adunque:

b) *Se nelle ipotesi superiori, si ha invece:*

$$A C - B^2 > 0, \quad (15)$$

*l'equazione  $E(\omega) = 0$  non ha radici reali.*

In ogni caso poi le (13) dimostrano che:

c) *La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una qualunque radice della (2) possono sempre limitarsi.*

Dal teorema a), segue come caso particolare quello del n.º 20 d). Più generalmente si osservi che la disuguaglianza (14), (la (15)) varrà certamente quando la massima (minima) radice della equazione  $|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0$  sia inferiore od uguale (maggiore) del quadrato della minima (massima) radice dell'altra equazione  $|b_{\mu\nu} - \psi c_{\mu\nu}| = 0$ .

## VII.

22. Volendo trattare di un sistema di due equazioni con due incognite, consideriamo due reti proiettive di forme bilineari in  $2n$  e  $2m$  variabili rispettivamente:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \xi A + \eta B + \zeta C &= \sum_{\mu=1}^n (\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}) x_{\mu} y_{\nu} \\ &\quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \\ (b) \quad \xi D + \eta E + \zeta F &= \sum_{r=1}^m (\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}) u_r v_s \\ &\quad (r, s = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

corrispondendosi nelle due reti due forme con uguali (proporzionali) valori delle  $\xi, \eta, \zeta$ . Due forme corrispondenti saranno ambedue *specializzate*, quando le  $\xi, \eta, \zeta$  soddisfino insieme alle due equazioni (che in generale avranno i gradi  $n$  ed  $m$ ):

$$\left. \begin{aligned} g(\xi, \eta, \zeta) &= |a_{\mu\nu} \xi + b_{\mu\nu} \eta + c_{\mu\nu} \zeta| = 0 & (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \\ h(\xi, \eta, \zeta) &= |d_{rs} \xi + e_{rs} \eta + f_{rs} \zeta| = 0 & (r, s = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sia  $\omega_{\alpha} \equiv (\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \zeta_{\alpha})$  una radice del sistema di equazioni (2): ciascuno dei quattro sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite  $x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$  rispettivamente:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu\nu} \xi_{\alpha} + b_{\mu\nu} \eta_{\alpha} + c_{\mu\nu} \zeta_{\alpha}) x_{\mu}^{(\alpha)} &= 0, & (\nu = 1, 2, \dots, n) \\ (b) \quad \sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} \xi_{\alpha} + b_{\mu\nu} \eta_{\alpha} + c_{\mu\nu} \zeta_{\alpha}) y_{\nu}^{(\alpha)} &= 0, & (\mu = 1, 2, \dots, n) \\ (c) \quad \sum_{r=1}^m (d_{rs} \xi_{\alpha} + e_{rs} \eta_{\alpha} + f_{rs} \zeta_{\alpha}) u_r^{(\alpha)} &= 0, & (s = 1, 2, \dots, m) \\ (d) \quad \sum_{s=1}^m (d_{rs} \xi_{\alpha} + e_{rs} \eta_{\alpha} + f_{rs} \zeta_{\alpha}) v_s^{(\alpha)} &= 0, & (r = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ammette allora delle *soluzioni non identicamente nulle*.

Se  $\omega_{\beta} \equiv (\xi_{\beta}, \eta_{\beta}, \zeta_{\beta})$  è ancora una radice del sistema (2), procedendo

come al n.º 4, si hanno le due relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(\alpha)} y_\nu^{(\beta)} + (\xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha) \Sigma_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu^{(\alpha)} y_\nu^{(\beta)} = 0, \\ (\mu, \nu = 1, 2, \dots n) \\ (\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha) \Sigma_{rs} e_{rs} u_r^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} + (\xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha) \Sigma_{rs} f_{rs} u_r^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} = 0, \\ (r, s = 1, 2, \dots m) \end{array} \right.$$

e quindi, se le due radici  $\omega_\alpha$  ed  $\omega_\beta$  sono diverse, cioè se i due determinanti:

$$\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha \quad \xi_\alpha \zeta_\beta - \xi_\beta \zeta_\alpha$$

non sono tutti due uguali allo zero, deve aversi la relazione fondamentale:

$$B(x^{(\alpha)} y^{(\beta)}) F(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) - C(x^{(\alpha)} y^{(\beta)}) E(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = 0. \quad (4)$$

23. Supponiamo ora che le sei forme date sian tutte di HERMITE e di prima specie, (ugualmente sarebbe ove fosser tutte di seconda): le equazioni (2) hanno allora i coefficienti reali e quindi le loro radici complesse sono a coppia coniugate. Siano allora  $\omega_1 \equiv (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $\omega_2 \equiv (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  due tali radici complesse coniugate: dalle (3), fattovi successivamente  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$ , si ha subito che può prendersi:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_\mu^{(2)} = y_\mu^{(1)}; \quad y_\mu^{(2)} = \bar{x}_\mu^{(1)}; \quad u_r^{(2)} = \bar{v}_r^{(1)}; \quad v_r^{(2)} = \bar{u}_r^{(1)} \\ (\mu = 1, 2, \dots n; \quad r = 1, 2, \dots m); \end{array} \right\} \quad (5)$$

ponendo quindi nella (4)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e sostituendo i valori precedenti, si ha:

$$B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}) - C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) E(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}) = 0. \quad (6)$$

Supponiamo ora che due forme corrispondenti, ad es.: la  $B$  e la  $E$ , sian definite e scriviamo la (6) al modo seguente:

$$\frac{F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})}{E(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})} = \frac{C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}{B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}; \quad (6')$$

se invece vi sono due forme dei due sistemi definite, ma non corrispondenti, ad es.: la  $B$  e la  $F$ , scriviamo invece la (6) sotto la forma:

$$\frac{C(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})}{B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)})} \cdot \frac{E(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})}{F(u^{(1)}, \bar{u}^{(1)})} = 1. \quad (6'')$$

Consideriamo ora le due equazioni (a radici tutte reali):

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad |c_{\mu\nu} + \sigma b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n) \\ (b) \quad |f_{rs} + \tau e_{rs}| = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots m). \end{array} \right\} \quad (7)$$

Se l'intervallo compreso tra la massima e minima radice della (7 a) è completamente esterno all'analogo intervallo per la (7 b), la (6'), la (6'') e quindi la (6) non possono mai aver luogo, anche quando in essa le  $x$  e le  $u$  si prendano affatto arbitrariamente, purchè (le une e le altre) non tutte nulle. In questa ipotesi deve esser dunque necessariamente:

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0; \quad \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1 = 0. \quad (8)$$

In particolare questo accadrà, quando tutte quattro le forme  $B, C, E, F$ , sian definite e tre abbiano un segno, una il segno contrario: in tal caso infatti le radici di una delle (7) son tutte positive, quelle dell'altra tutte negative, il che evidentemente soddisfa le condizioni superiori (\*).

Poniamo ora:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi' + i \xi''; & \eta_1 &= \eta' + i \eta''; & \zeta_1 &= \xi' + i \xi''; \\ \xi_2 &= \xi' - i \xi''; & \eta_2 &= \eta' - i \eta''; & \zeta_2 &= \xi' - i \xi''; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

dalle (8) si ottiene:

$$\xi' \eta'' - \xi'' \eta' = 0; \quad \xi' \zeta'' - \xi'' \zeta' = 0. \quad (10)$$

Facciamo in queste successivamente:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad \xi' &= 1, \xi'' = 0; & \text{ne segue} \quad \eta' &= \zeta' = 0, & \text{e ponendo} \quad \eta &= \omega, \zeta = \theta, \\ b) \quad \eta' &= 1, \eta'' = 0; & \text{"} \quad \xi'' &= 0, \xi' \zeta'' = 0, & \text{"} \quad \xi &= \omega, \zeta = \theta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

otteniamo i due teoremi:

*Se le forme  $A, B, C, D, E, F$  sono forme di HERMITE di prima specie, le prime tre nelle  $2n$  variabili  $x, \bar{x}$ , le altre nelle  $2m$   $u, \bar{u}$ ; se due tra esse forme, ad es.: la  $B$  e la  $E$ , (la  $B$  e la  $F$ ) sono definite; se sono infine soddisfatte le condizioni relative alle equazioni (7 a), (7 b):*

a) Il sistema di due equazioni dei gradi  $n$  ed  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\omega, \theta) &= |a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu} \omega + c_{\mu\nu} \theta| = 0 & (\nu, \nu &= 1, 2, \dots, n) \\ \psi(\omega, \theta) &= |d_{rs} + e_{rs} \omega + f_{rs} \theta| = 0 & (r, s &= 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

nelle due incognite  $\omega, \theta$  ha tutte le radici reali.

(\*) La relazione (6) porta ancora di necessità l'annullarsi di tutte le  $x$ , o di tutte le  $u$ , quando una di esse quattro forme, ad es.: la  $C$ , sia identicamente nulla e le due  $B, F$  sian definite; ma come subito si riconosce, non si ottiene così niente di essenzialmente nuovo.

b) Indicando con  $(\omega, \theta)$  una soluzione del sistema :

$$\left. \begin{aligned} \chi(\omega, \theta) &= |a_{\mu\nu}\omega + b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu}\theta| = 0 & (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \\ \sigma(\omega, \theta) &= |d_{rs}\omega + e_{rs} + f_{rs}\theta| = 0 & (r, s = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

la  $\omega$  è reale, ed ove non sia nulla, anche  $\theta$  è reale.

24. Le forme  $B, C, E, F$  siano ancora di HERMITE e di prima specie; le  $A$  e  $D$  siano invece di seconda. Ci riduciamo al caso antecedente, cambiando  $\xi$  in  $i\xi$ , o ciò che fa lo stesso,  $\eta$  e  $\zeta$  in  $i\eta, i\zeta$ .

Adunque :

Se le forme  $B, C, E, F$  sono di HERMITE e di prima specie, le  $A$  e  $D$  di seconda, e le  $B, C, E, F$  soddisfano alle condizioni del n.º 23, si ha :

a) Le due equazioni

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}(\omega, \theta) &= |a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}\omega + c_{\mu\nu}\theta| = 0 \\ \bar{\psi}(\omega, \theta) &= |d_{rs} + e_{rs}\omega + f_{rs}\theta| = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

hanno tutte le radici immaginarie pure.

b) Se  $(\omega, \theta)$  è una soluzione del sistema :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\chi}(\omega, \theta) &= |a_{\mu\nu}\omega + b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu}\theta| = 0 \\ \bar{\sigma}(\omega, \theta) &= |d_{rs}\omega + e_{rs} + f_{rs}\theta| = 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

la  $\omega$  è un immaginario puro; ed ove non sia nulla,  $\theta$  è reale.

Ancor più particolarmente supponiamo che le sei forme date abbiano coefficienti reali, e quindi le  $A$  e  $D$  siano emisimmetriche, le  $B, C, E, F$  simmetriche; e sian sempre soddisfatte le condizioni del n.º 23.

Le equazioni (2) hanno allora i coefficienti reali e rimangono immutate cambiando  $\xi$  in  $-\xi$  (o, ciò che è lo stesso,  $\eta$  e  $\zeta$  in  $-\eta, -\zeta$ ).

Poniamo allora :

$$\xi = 1, \quad \eta = \omega, \quad \zeta = \omega\theta; \quad (16)$$

cambiare il segno di  $\eta$  e  $\zeta$  equivale a cambiare il segno di  $\omega$ : ciascuna di esse equazioni contiene dunque le potenze pari di  $\omega$ : posto dunque  $\omega^2 = -u$ , e divisa eventualmente alcuna di esse equazioni per  $\omega$ , si ottengono così due

equazioni :

$$G(u, \theta) = 0, \quad H(u, \theta) = 0, \quad (17)$$

tali che, a causa delle (16) e del teorema che precede, in *qualunque loro soluzione*  $(u, \theta)$ ,  $u$  e  $\theta$  sono reali ed inoltre  $u$  è positivo.

Oppure poniamo :

$$\xi = \omega, \quad \eta = 1, \quad \zeta = \theta \quad (18)$$

e facciamo ancora  $\omega^2 = -u$  ; si otterranno due equazioni :

$$M(u, \theta) = 0, \quad N(u, \theta) = 0 \quad (19)$$

tali che in *una loro soluzione*  $(u, \theta)$   $u$  è reale e non negativo e, ove  $u$  sia diverso da zero,  $\theta$  è reale.

Pisa, Dicembre del 1902.

---