

Tafeln zur bequemen Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Von *Gustav Witt.*

Es existieren zwar Tafeln der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung; abgesehen davon aber, daß sie nicht jedem Rechner ohne weiteres zugänglich sind, wird die Interpolation in ihnen wegen der reichlich groß bemessenen Intervalle, in denen das Argument fortschreitet, mühsam, sodaß die direkte Berechnung mindestens ebenso rasch, häufig sogar schneller zum Ziele führen wird, zumal wenn man sich der wenig umfangreichen Tafel bedient, die diesem Aufsätze angefügt ist.

Gelegentlich einer Untersuchung über die absoluten Störungen, welche der Planet (433) Eros durch die Erde erleidet, hatte ich elliptische Integrale auszuwerten, deren

Modulwinkel fast bis auf 87° stieg. Da in diesem Falle die Tafeln versagten, so hatte ich mir, um eine Kontrolle für die Rechnung zu erhalten, ein Rechnungsverfahren zurecht gemacht, bei dem die Bestimmung der Hilfswinkel ganz umgangen werden konnte. Indem ich ferner einer Andeutung folgte, die Tietjen beiläufig in einer Vorlesung über die Berechnung der Säkularstörungen nach Gauß' Methode im Wintersemester 1887/88 gab, hat sich schließlich eine Form der Berechnung herausgebildet, die ich mir nachstehend auseinanderzusetzen erlaube.

Bezeichnet man, um die verschiedenen gebräuchlichen Bezeichnungen zu umfassen:

$$F(1/2\pi, k) = F_1(k) = K = 1/2\pi \mathfrak{R} = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

so läßt sich \mathfrak{R} bekanntlich in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen des Moduls k fortschreitet, für die Praxis aber nur einer sehr beschränkten Anwendung fähig ist. Viel bequemer ist das Verfahren, dieses Integral in ein solches zu transformieren, dessen Modul gleich null gesetzt werden

kann. Führt man nämlich den Modulwinkel θ durch

$$\sin \theta = k$$

ein und bestimmt eine Reihe Hilfswinkel θ_i mit Hilfe der Gleichungen

$$k_1 = \sin \theta_1 = \operatorname{tg}^2 1/2 \theta, \quad k_2 = \sin \theta_2 = \operatorname{tg}^2 1/2 \theta_1, \quad k_3 = \sin \theta_3 = \operatorname{tg}^2 1/2 \theta_2$$

u. s. w., so ergibt sich:

$$\mathfrak{R} = (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)(1 + k_4) \dots \\ = \sec^2 1/2 \theta \cdot \sec^2 1/2 \theta_1 \cdot \sec^2 1/2 \theta_2 \cdot \sec^2 1/2 \theta_3 \dots,$$

oder auch

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\sec \theta \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 \dots} \quad (1)$$

Letztere Form ist die bequemste, und die praktische Verwendung zeigt, daß selbst in Fällen, wo θ Werte nicht weit von 90° annimmt, θ_4 verschwindet, also $\cos \theta_4$ gleich 1 gesetzt werden darf.

Betrachten wir deshalb \mathfrak{R} in der Form (1) als den vollständigen Ausdruck des Integralwertes, brechen wir ihn also bei $\cos \theta_3$ ab, so darf $\cos \theta_4$ einen gewissen Wert nicht überschreiten. Für eine strenge zehnstellige Rechnung findet man z. B., da $\log \cos 4''$ gleich -0.8 Einheiten der zehnten Dezimale ist, durch Rückwärtsrechnung, indem man $\theta_4 = 4''$ annimmt, daß bis $\theta = 80^\circ 55'$ einschließlich

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\sec \theta \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3}$$

um weniger als eine halbe Einheit der zehnten Stelle von dem strengen Werte abweicht und für eine siebenstellige Rechnung sogar bis $\theta = 87^\circ 5'$ ausreicht.

Ebenso überzeugt man sich, daß der Faktor

$$\sqrt{\cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3}$$

nur sehr langsam veränderlich ist. Man wird so darauf geführt, \mathfrak{R} in folgender Form zu schreiben:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\sec \theta \cdot \cos \theta_1} \cdot \sqrt{\cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3}$$

oder $\mathfrak{R} = \sqrt{\sec \theta \cdot \cos \theta_1} \cdot C' \quad (2)$

und die Größe C' , die nur wenig von der Einheit abweicht, zu tabulieren. Auf diese Weise wird, da

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 1/2 \theta} = \sec^2 1/2 \theta \sqrt{\cos \theta}$$

ist, also \mathfrak{R} auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{R} = \sec 1/2 \theta \sqrt{\sec \theta \cdot C'}, \quad (3)$$

die Ermittlung der Hilfswinkel gänzlich umgangen und eine durchaus direkte Rechnung erlangt.

Es kommt nun darauf an, C' als Funktion von θ darzustellen. Zu diesem Ende beachten wir die Relationen

$$\sqrt{\cos \theta_{i+1}} = \sec 1/2 \theta_i \sqrt{\cos \theta_i}$$

und

$$\sec \frac{1}{2} \theta_i = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \theta_i}},$$

womit wir finden:

Nach einigen leichten Umformungen ergibt sich schließlich:

$$C' = (\sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta})^{3/4} \cdot \left(\frac{2}{1 + \sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}} \right)^{1/4} \cdot \frac{2}{1 + \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}}, \quad (4)$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$C' = (\sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta})^{3/4} \cdot \frac{2}{1 + \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}} \cdot \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\cos \theta}} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Man gelangt übrigens zu demselben Ausdruck für \mathfrak{K} , wenn man sich der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels bedient, also \mathfrak{K} in die Form bringt:

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$m_1 = \frac{1}{2}(m+n) = \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

$$n_1 = \sqrt{\cos \theta},$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(\cos^2 \frac{1}{2} \theta + \sqrt{\cos \theta}),$$

$$n_2 = \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta},$$

$$m_3 = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \theta (1 + \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}),$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{1}{2} \theta (1 + \sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta})^{1/2}} (\cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta})^{1/2}$$

u. s. w. Hier nähern sich sehr schnell die m_i und n_i einer Grenze μ , dem Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittel, sodaß

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\mu}$$

wird. Bleibt man bei n_4 stehen, so erhält man genau den früheren Ausdruck für \mathfrak{K} wieder, und $\frac{1}{n_2}$ gibt einen genäherten

Wert für \mathfrak{K} , der mit $\sqrt{\sec \theta \cos \theta_1}$ identisch ist. In dieser Weise scheint Tietjen nach den flüchtigen Andeutungen, die er s. Z. gemacht, vorgegangen zu sein. In seinem Nachlaß, den ich mit freundlicher Erlaubnis des Herrn Professors Bauschinger daraufhin durchgesehen habe, konnte ich indessen keine Aufzeichnungen darüber auffinden; nur ein kleines

$$\sqrt{\cos \theta_2} = (\sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta})^{1/2} \left(\frac{2}{1 + \sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}} \right)^{1/2}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für $\sqrt{\cos \theta_3}$.

wo $m = 1$ und $n = \cos \theta$ zu setzen ist. Bestimmt man nämlich eine Reihe von Werten m_i und n_i so, daß allgemein

$$m_{i+1} = \frac{1}{2}(m_i + n_i), \quad n_{i+1} = \sqrt{m_i \cdot n_i}$$

wird, dann erhält man sofort:

Blättchen ist vorhanden, das eine Tafel der Werte von $\log C'$ enthält.

Die Werte von $\log C'$ habe ich zehnstellig von Grad zu Grad berechnet und auf acht Stellen abgekürzt in Tafel I wiedergegeben, für hinreichend enge Intervalle des Argumentes θ von 0° bis 60° interpoliert. Ein erster Versuch, $\log C'$ direkt durch Interpolation aus Vega's Thesaurus abzuleiten, erwies sich als zu zeitraubend und unsicher. Es boten sich dafür zwei andere Wege dar, um mit siebenstelligen Logarithmen die zehnstelligen Werte von $\log C'$ zu finden, wobei etwaige Unsicherheiten der Tafelwerte des Thesaurus gänzlich ohne Einfluß blieben.

Setzt man nämlich abkürzend $\sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta} = z$, so erhält man mittels der logarithmischen Reihen:

$$\begin{aligned} \log C' = & -\frac{3}{2} \text{ Mod. } \left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 + \dots \right] \\ & + 2 \text{ Mod. } \left[\frac{1}{3} \frac{1-z}{1+\frac{1}{3}z} + \frac{1}{3^3} \left(\frac{1-z}{1+\frac{1}{3}z} \right)^3 + \dots \right] \\ & + \frac{1}{2} \text{ Mod. } \left[\frac{1}{3} \frac{1-z^2}{1+\frac{1}{3}z^2} + \frac{1}{3^3} \left(\frac{1-z^2}{1+\frac{1}{3}z^2} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

Ich habe diesen Ausdruck in folgender Form zur Rechnung verwendet:

$$\begin{aligned} \log C' = & -\frac{1}{3} \text{ Mod. } z(1+z) \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 \frac{\frac{2}{3} \frac{1-\frac{1}{3}z}{1+\frac{1}{3}z} + 1}{1+\frac{1}{3}z^2} - \frac{1}{2} \text{ Mod. } \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^3 \\ & + \frac{1}{2 \cdot 3^4} \text{ Mod. } \left(\frac{1-z^2}{1+\frac{1}{3}z^2} \right)^3 + \frac{2}{3^4} \text{ Mod. } \left(\frac{1-z}{1+\frac{1}{3}z} \right)^3 - \frac{3}{10} \text{ Mod. } \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 + \dots \end{aligned}$$

Die Glieder sind hier nach der Größe geordnet; das letzte Glied beginnt erst am Ende der Tafel merklich zu werden. Für die Berechnung des ersten Gliedes wurde zur Vorsicht, soweit dies sich als nötig erwies, $1-z$ durch Inter-

polation aus dem Thesaurus so genau ermittelt, daß die siebente Stelle des Logarithmus richtig erhalten wurde, wozu die Zechschen Tafeln der Subtraktionslogarithmen nicht ausreichten.

Ein zweiter, vielleicht etwas bequemerer Weg, auf den ich aber erst aufmerksam wurde, nachdem die Tafel bereits gerechnet war, ist der folgende. Berücksichtigt man, daß

$$\sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \theta}$$

$$\begin{aligned} \log C' &= \log \left[1 - \frac{1}{64} \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} \theta (1 + \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \theta) \right] \dots \\ &= \log \left[1 - \frac{1}{64} \cdot \frac{\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} \theta}{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \theta} \right] \dots \\ &= \log \left[1 - \frac{1}{64} \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} \theta \cos^4 \frac{1}{2} \theta \sec \theta \right] \dots = -\frac{1}{64} \operatorname{Mod.} \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} \theta \cos^4 \frac{1}{2} \theta \sec \theta \dots \end{aligned}$$

Hier sind nur die 16. und die höheren Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$ vernachlässigt; außerdem sind diese weiteren Glieder so klein, daß ihre Berechnung nur wenige Dezimalen erfordert. Berücksichtigt man die achte Dezimale der Angaben des The-saurus, um die siebente Ziffer des Logarithmus des Haupt-gliedes scharf zu erhalten, so reicht die siebenstellige Tafel vollständig aus, um $\log C'$ auf zehn Dezimalen sicher zu finden; es entfällt also jede Interpolation in der zehnstelligen Tafel.

Damit ist die Berechnung von \mathfrak{R} bzw. K auf eine sehr bequeme Form zurückgeführt, denn man hat sofort, wenn

$$\frac{1}{2} \pi \cdot C' = C$$

gesetzt wird,

$$F_1(k) = K = \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\sec \theta} C. \quad (6)$$

Die Logarithmen von C findet man gleichfalls auf acht Stellen in Tafel I.

Obwohl, wie bereits bemerkt, die entwickelte Formel weit über die in der Tafel gewählte Grenze für θ streng richtig und in der Anwendung bequem ist, habe ich doch aus später anzugebenden Gründen davon abgesehen, sie auf die Fälle $\theta > 60^\circ$ auszudehnen. K bzw. \mathfrak{R} lassen sich aber unter Benutzung von Tafel I auch dann, freilich mit einer geringen Mehrleistung an direkter Rechnung, noch schnell genug auswerten. Da nämlich immer

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1 + k_1) F_1(k_1) \\ &= \sec^2 \frac{1}{2} \theta F_1(k_1) \end{aligned}$$

$$F_1(k) = K_0 = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{\cos \theta}} \right)^2 \cdot \sec \frac{1}{2} \theta_2 \sqrt{\sec \theta_2} \cdot C_{\theta_2} \quad (9)$$

und entsprechend \mathfrak{R}_0 . Für Werte von θ , die sehr nahe an 90° liegen, würde aber selbst dieser Ausdruck noch nicht ausreichen; ich habe deshalb nicht erst versucht, ihn auf eine bequemere Form zu bringen, was allerdings nicht schwierig wäre. Die bekannte Reihenentwicklung

$$K = \mathfrak{R}' \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) - \frac{1}{4} k'^2 \left[1 + \frac{21}{32} k'^2 \left(1 + \frac{185}{252} k'^2 + \dots \right) \right],$$

wo \mathfrak{R}' das komplementäre Integral und k' den komplementären Modul bezeichnen, leistet in diesem Falle mit weniger Mühe dasselbe, weil die Berechnung von \mathfrak{R}' besonders ein-

ist, so kann man C' in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von $\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \theta$ fortschreitet. Es erübrigt sich, hier die Entwicklung im einzelnen durchzuführen; ich begnüge mich mit der Anführung der ersten Glieder.

Es wird nämlich

ist, so kann für $\theta > 60^\circ$ die Berechnung von $F_1(k)$ leicht auf diejenige von $F_1(k_1)$ zurückgeführt werden. Bestimmt man zu diesem Zweck θ_1 aus

$$\sin \theta_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta,$$

so erhält man sofort:

$$\mathfrak{R}_0 = \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \sec \frac{1}{2} \theta_1 \sqrt{\sec \theta_1} C_{\theta_1}', \quad (7)$$

$$K_0 = \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \sec \frac{1}{2} \theta_1 \sqrt{\sec \theta_1} C_{\theta_1}, \quad (8)$$

wo selbstverständlich C und C' nun zum Argument θ_1 der Tafel I zu entnehmen sind. Auf diese Weise erledigen sich die Fälle, wo $60^\circ \leq \theta \leq 85^\circ 52'$.

Sobald θ noch größer wird, wird man zwar schneller als mit der Berechnung von vier oder fünf Hilfswinkeln zum Ziele kommen, wenn man das vorgelegte Integral auf $F_1(k_2)$ zurückführt; indessen scheint es mir ratsamer, sich dann der Reihenentwicklung zu bedienen. Immerhin will ich die erforderlichen Formeln hierhersetzen, weil man sich ihrer gelegentlich zur Kontrolle bedienen kann. Zunächst bestimmt man θ_2 aus einem der beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sqrt{\cos \theta}} \right)^2 \\ &= \frac{1 - \sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sec^2 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\cos \theta}} \end{aligned}$$

und findet dann:

$$K = \sec (45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\operatorname{cosec} \theta} \log \operatorname{nat} (4 \sec \theta) \cdot C_3, \quad (10)$$

wo C_3 leicht ersichtliche Bedeutung hat und ohne Mühe tabuliert werden kann. In Tafel III habe ich $\log C_3$ auf acht Stellen für $\theta = 85^\circ 30'$ bis $\theta = 90^\circ$ aufgenommen. Da in diesem Falle die Kenntnis von \mathfrak{R} für astronomische Zwecke selten erforderlich sein wird, ist $\log \left(\frac{2}{\pi} C_3 \right)$ nicht besonders aufgeführt.

Für die Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$E_1(k) = E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

lassen sich gleichfalls, wenigstens für einen ziemlich ausgedehnten Bereich des Argumentes θ , sehr bequeme Vorschriften

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{1}{2}k^2 \left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \frac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \dots\right) \quad (12)$$

definiert ist. Nach früheren Darlegungen kann dieser Ausdruck in den praktisch wichtigsten Fällen wieder bei k_3 abgebrochen werden. Führen wir statt der Moduln ihre trigonometrischen Funktionen ein, so wird

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \theta - \frac{1}{4}\sin^2 \theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_1 \left[1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2\right]\right).$$

Hill*) ersetzt hier, für seine Zwecke mit hinreichender Genauigkeit, die letzte Klammergröße $1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2$ durch $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2} = \sec \frac{1}{2}\theta_2$. Indessen wird dadurch an Be-

geben. Hier wird der Vorteil gegenüber dem gewöhnlichen Verfahren sogar noch deutlicher in die Augen fallen.

Aus der Transformation der elliptischen Integrale ergibt sich für E folgender Ausdruck:

$$E = \frac{1}{2}\pi \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L}, \quad (11)$$

wo \mathfrak{L} durch die Reihe

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{1}{2}k^2 \left(1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{4}k_1 k_2 + \frac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \dots\right) \quad (12)$$

definiert ist. Nach früheren Darlegungen kann dieser Ausdruck in den praktisch wichtigsten Fällen wieder bei k_3 abgebrochen werden. Führen wir statt der Moduln ihre trigonometrischen Funktionen ein, so wird

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \theta - \frac{1}{4}\sin^2 \theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_1 \left[1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2\right]\right).$$

Hill*) ersetzt hier, für seine Zwecke mit hinreichender Genauigkeit, die letzte Klammergröße $1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2$ durch $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2} = \sec \frac{1}{2}\theta_2$. Indessen wird dadurch an Be-

quemlichkeit wenig gewonnen; ich habe deshalb die strengere Form beibehalten. Führt man in \mathfrak{L} durchgängig die Funktionen der halben Winkel ein, so folgt:

$$\mathfrak{L} = (\cos^2 \frac{1}{2}\theta + \sin^2 \frac{1}{2}\theta)^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta - \sin^4 \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2} \sin^4 \frac{1}{2}\theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_1 \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2\right)$$

oder schließlich:

$$\mathfrak{L} = \cos^4 \frac{1}{2}\theta \cdot C_2, \quad (13)$$

wo

$$C_2 = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\theta \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_1 \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2\right).$$

Nun ergibt sich aber leicht:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_1 = \frac{1 - \cos \theta_1}{1 + \cos \theta_1} = \frac{1 - \sec^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sec^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sqrt{\cos \theta}}\right)^2$$

und entsprechend:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta_2 = \left(\frac{1 - \sec \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sec \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}\right)^2,$$

womit schließlich wird:

$$C_2 = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\theta \frac{1 - \sec^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sec^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \sec \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}{1 + \sec \frac{1}{2}\theta \sqrt{\cos \theta}}\right)^2\right]. \quad (14)$$

Dieser Ausdruck kann wieder in eine Reihe entwickelt werden, die nach Potenzen von $\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\theta$ fortschreitet. Die ersten Glieder bis zur 12. Potenz von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$ einschließlich erhält man leicht, und da

$$C_2 = 1 - \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\theta \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\sec \theta} \dots$$

oder genähert

$$\log C_2 = -\frac{1}{8} \operatorname{Mod.} \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\sec \theta} \dots$$

wird, so überzeugt man sich durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem für

$$\log C' = -\frac{1}{64} \operatorname{Mod.} \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\theta \cos^4 \frac{1}{2}\theta \sec \theta \dots,$$

daß $\log C_2$ nahe achtmal größer ist als $\log C'$.

$\log C_2$ habe ich gleichfalls, zumeist mit siebenstelligen Logarithmen, auf zehn Stellen gerechnet und auf acht Stellen abgekürzt in Tafel I aufgenommen; von $\theta = 48^\circ$ bis zum Ende der Tafel mußten acht und teilweise neun Stellen berücksichtigt und wegen der großen Differenzen die Werte von $\log C_2$ von $30'$ zu $30'$ gerechnet werden, um die achte Stelle der Zwischenwerte bei der Interpolation richtig zu erhalten.

Bei der Entnahme der Tafelwerte kommt man überall mit Berücksichtigung der zweiten Differenzen aus; für $\theta > 60^\circ$

würden dagegen die dritten Differenzen bald merklichen Einfluß ausüben können. Darin liegt auch der Grund, weshalb ich die Tafel nicht weiter gerechnet habe, wiewohl dies bezüglich $\log C'$ und $\log C$ sehr wohl angängig wäre, ohne daß die Differenzen übermäßig groß werden.

Die auftretende Schwierigkeit könnte zwar dadurch wesentlich behoben werden, daß man setzt

$$C_2 = (1 - \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\theta) C_2'$$

und nur C_2' tabuliert, also die Berechnung von $1 - \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\theta$ von Fall zu Fall ausführt; ich habe aber ein anderes Verfahren bevorzugt, obwohl es noch eine Operation mehr erfordert.

Ehe ich dasselbe auseinandersetze, soll noch der schließliche Ausdruck für E hierher gesetzt werden. Da

$$E = \frac{1}{2}\pi \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{L}$$

geschrieben war, erhält man mit Berücksichtigung von (2) bzw. (6), wenn man

$$\log C_1 = \log C + \log C_2$$

einführt:

$$E = \cos^3 \frac{1}{2}\theta \sqrt{\sec \theta} C_1. \quad (15)$$

$\log C_1$ und außerdem $\log C_1' = \log C' + \log C_2$ sind gleichfalls in Tafel I aufgenommen.

*) On Gauss' Method of computing secular perturbations in Astronomical Papers, Vol. I.

Um nun den Fall zu erledigen, daß $\theta > 60^\circ$ wird, gehe ich aus von der leicht herzuleitenden Reduktionsformel:

$$(1 + k_{i+1}) E_1(k_i) = 2 E_1(k_{i+1}) - k_{i+1}'^2 F_1(k_{i+1}).$$

Setzt man hierin $i = 0$, so folgt, wenn der Index 0 überhaupt nicht geschrieben wird:

$$E_1(k) = \frac{2}{1 + k_1} E_1(k_1) - \frac{k_1'^2}{1 + k_1} F_1(k_1)$$

oder mit Berücksichtigung früherer Entwicklungen:

$$E_1(k) = \cos^2 \frac{1}{2} \theta \cdot F_1(k_1) [2 \mathfrak{L}_{k_1} - \cos^2 \theta_1]. \quad (16)$$

θ_1 bestimmt sich hier wie früher aus

$$\sin \theta_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta.$$

Die Berechnung von E nach (16) kann bis $\theta = 85^\circ 52'$ ausgeführt werden. Ist θ größer, so könnte man zwar versuchen, ähnlich wie bei der Berechnung von $F_1(k)$ auf die Integrale $F_1(k_2)$ und $E_1(k_2)$ überzugehen. Der entstehende Ausdruck würde aber recht unbequem werden, und ich gehe deshalb nicht weiter darauf ein.

Es liegt dafür nahe, in diesem Falle die Transformation in umgekehrter Richtung vorzunehmen, sodaß die Moduln dem Grenzwerte 1 zustreben, weil $E_1(1) = 1$ wird. Zu dem Ende schreiben wir die oben benutzte Reduktionsformel folgendermaßen:

$$2 E_1(k_i) = (1 + k_i) E_1(k_{i-1}) + k_i'^2 F_1(k_i)$$

und setzen darin für i nacheinander die Zahlen 0, -1 und -2 ein.

Da hier gefunden wird

$$E_1(k) = \frac{1+k}{2} \frac{1+k_{-1}}{2} \frac{1+k_{-2}}{2} + \frac{1}{2} F_1(k) \left[k'^2 + \frac{(1+k)^2}{2} k_{-1}'^2 + \frac{(1+k)^2 (1+k_{-1})^2}{2} k_{-2}'^2 \right].$$

Beachten wir, daß

$$k_{-1}' = \frac{k'^2}{(1+k)^2} \quad \text{und} \quad k_{-2}' = \frac{k_{-1}'^2}{(1+k_{-1})^2},$$

aber auch

$$\frac{1+k_{-1}}{2} = \frac{\sqrt{k_{-1}}}{k_{-2}},$$

mithin

$$\frac{1+k_{-1}}{2} \frac{1+k_{-2}}{2} = \sqrt{k_{-1}} \frac{1+k_{-2}}{2 k_{-2}} = \sqrt{k_{-1}} \frac{1}{C'},$$

wie sich leicht zeigen läßt, so ergibt sich:

$$E_1(k) = \frac{1+k}{2} \sqrt{k_{-1}} \frac{1}{C'} + \frac{1}{2} k'^2 F_1(k) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{k'^2}{(1+k)^2} + \frac{1}{4} \frac{k'^6}{(1+k)^6 (1+k_{-1})^2} \right].$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} k' &= \sin(90 - \theta) = 2 \sin(45 - \frac{1}{2} \theta) \cos(45 - \frac{1}{2} \theta), \\ 1+k &= 2 \cos^2(45 - \frac{1}{2} \theta), \\ k_{-1} &= \sec^2(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Führen wir diese Relationen in den Ausdruck für $E_1(k)$ ein, so nimmt derselbe folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} E_1(k) &= \cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta} \cdot \frac{1}{C'} \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cdot F_1(k) \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta) + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^6(45 - \frac{1}{2} \theta) \left(\frac{1}{1 + \sec^2(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Die Klammergröße in dem zweiten Gliede läßt sich noch etwas einfacher so schreiben:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_{-1} = \sqrt{\sin \theta}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_{-2} = \sqrt{\sin \theta_{-1}}$$

u. s. w., so überzeugt man sich durch direkte Rechnung, daß selbst für $\theta = 60^\circ$ schon θ_{-3} so wenig von 90° abweicht, daß in aller Strenge $E_1(k_{-3})$ gleich 1 gesetzt werden kann. Es folgt daraus, daß die nachstehende Entwicklung eigentlich für den ganzen Bereich von θ von 60° bis 90° gültig ist. In der Tat erhält man $\log E_1(\sin 60^\circ)$ auf 10 Stellen genau übereinstimmend mit dem nach (15) berechneten Werte.

Eliminieren wir aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E_1(k) &= \frac{1}{2} (1+k) E_1(k_{-1}) + \frac{1}{2} k'^2 F_1(k) \\ E_1(k_{-1}) &= \frac{1}{2} (1+k_{-1}) E_1(k_{-2}) + \frac{1}{2} k_{-1}'^2 F_1(k_{-1}) \\ E_1(k_{-2}) &= \frac{1}{2} (1+k_{-2}) E_1(k_{-3}) + \frac{1}{2} k_{-2}'^2 F_1(k_{-2}) \end{aligned}$$

$E_1(k_{-1})$ und $E_1(k_{-2})$, setzen wir ferner $E_1(k_{-3}) = 1$ und führen statt $F_1(k_{-1})$ und $F_1(k_{-2})$ wieder $F_1(k)$ ein, so erhalten wir:

$$1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta) + \frac{1}{16} \operatorname{tg}^6(45 - \frac{1}{2} \theta) \left(\frac{2}{1 + \sec^2(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}} \right)^2.$$

Nun folgt aus der bekannten Reihenentwicklung

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta)} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta) - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^4(45 - \frac{1}{2} \theta) \dots,$$

daß genähert

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta)} &= [1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta)] [1 - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^4(45 - \frac{1}{2} \theta)] \dots \\ &= [1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta)] \sqrt[3]{1 - \operatorname{tg}^4(45 - \frac{1}{2} \theta)} \dots \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Wir erhalten daraus:

$$1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(45 - \frac{1}{2} \theta) = \frac{1}{[\cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}]^{1/2}} \dots$$

Man kann demnach obigen Klammerausdruck auf die Form bringen:

$$\frac{1}{[\cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}]^{1/2}} \cdot \beta,$$

wo β einen wenig von der Einheit abweichenden Faktor bedeutet.

So wird schließlich erhalten:

$$E_1(k) = \cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta} \cdot \frac{1}{C'} + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{[\cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}]^{1/2}} \beta \cdot K. \quad (17)$$

Entwickelt man β , so findet man bis zur 12. Potenz von $\operatorname{tg}(45 - \frac{1}{2} \theta)$ inkl.

$$\beta = 1 - \frac{1}{16} \operatorname{tg}^6(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \cos^2(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\operatorname{cosec} \theta}} - \frac{3}{512} \operatorname{tg}^{10}(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt[3]{\cos(45 - \frac{1}{2} \theta)},$$

wo das letzte Glied für $\theta = 60^\circ$ gerade merklich zu werden anfängt.

In Tafel II ist $\log \beta$ für alle Werte von θ von 60° bis 90° auf acht Stellen gegeben; als Argument ist $90^\circ - \theta$ angesetzt, weil damit auch C' aus Tafel I entnommen werden muß.

Wird im vorliegenden Falle nicht gleichzeitig neben $E_1(k)$ die Kenntnis von $F_1(k)$ erfordert, so kommt man vielleicht noch etwas bequemer mit der Reihenentwicklung für $E_1(k)$ zum Ziele. Bekanntlich ist

$$E = 1 + \frac{1}{2} \beta_2 k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} \beta_4 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{5}{6} \beta_6 k'^6 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{7}{8} \beta_8 k'^8 + \dots$$

Die β_i -Koeffizienten haben folgende Bedeutung:

$$\beta_2 = \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) - \frac{1}{2}, \quad \beta_4 = \beta_2 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \beta_6 = \beta_4 - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6}, \quad \beta_8 = \beta_6 - \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8}$$

u. s. w. Setzen wir diese Ausdrücke ein und ordnen nach Potenzen von k' , so wird

$$E = 1 - \frac{1}{4} k'^2 - \frac{13}{64} k'^4 - \frac{9}{64} k'^6 - \dots + \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) \cdot \frac{1}{2} k'^2 \left[1 + \frac{3}{8} k'^2 + \frac{15}{64} k'^4 + \frac{175}{1024} k'^6 + \dots \right].$$

Beachtet man, daß k' eine kleine Größe ist, so läßt sich dieser Ausdruck folgendermaßen schreiben:

$$E = \sqrt{\sin \theta} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta \sqrt{\sin^3 \theta} \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) \right] \left(1 - \frac{7}{64} k'^4 \cdot \varphi(k') \right).$$

$\varphi(k')$ ist zwar etwas verwickelt gebaut, läßt sich aber für den vorliegenden Zweck mit hinreichender Genauigkeit berechnen, sodaß der Tabulierung von

$$C_4 = 1 - \frac{7}{64} k'^4 \cdot \varphi(k')$$

nichts im Wege steht. Man findet nämlich:

$$\varphi(k') = \frac{1 + \frac{11}{14} k'^2 \left(1 + \frac{1559}{4224} k'^2 \right) + \frac{3}{28} k'^2 \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) \left(1 + \frac{17}{12} k'^2 \right)}{\sqrt{\sin \theta} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta \sqrt{\sin^3 \theta} \log \operatorname{nat} \left(\frac{4}{k'} \right) \right]} \dots$$

In dieser Form habe ich $\varphi(k')$ direkt siebenstellig für eine Reihe von Werten des Argumentes θ berechnet und demnächst C_4 ermittelt. $\log C_4$ ist neben $\log C_3$ in Tafel III auf acht Stellen abgekürzt aufgenommen. Damit erhält man endlich:

$$E = E_1(k) = \sqrt{\sin \theta} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta \sqrt{\sin^3 \theta} \log \operatorname{nat} (4 \sec \theta) \right] \cdot C_4. \quad (18)$$

Es lag zwar nahe, direkt $C_4 \sqrt{\sin \theta}$ zu tabulieren, doch müßte dann diese Größe für sehr enge Intervalle tabuliert werden, um die Interpolation nicht zu erschweren.

Ich verzichte darauf, an einem Zahlenbeispiel zu zeigen,

daß in der Tat das hier auseinandergesetzte Verfahren alles leistet, was man verlangen kann. Dagegen lasse ich eine Zusammenstellung der Formeln folgen, um ihre Anwendung zu erleichtern.

I. $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. $K = F_1(k) = \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\sec \theta} \cdot C$ $\mathfrak{K} = \sec \frac{1}{2} \theta \sqrt{\sec \theta} \cdot C'$

$E = E_1(k) = \cos^3 \frac{1}{2} \theta \sqrt{\sec \theta} \cdot C_1$ $\mathfrak{L} = \cos^4 \frac{1}{2} \theta \cdot C_2$

C, C', C_1, C_2 aus Tafel I zum Argument θ .

II. $60^\circ < \theta \leq 85^\circ 52'$. $\sin \theta_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta$.

$K = \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \sec \frac{1}{2} \theta_1 \sqrt{\sec \theta_1} \cdot C_{\theta_1}$ $\mathfrak{K} = \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cdot \sec \frac{1}{2} \theta_1 \sqrt{\sec \theta_1} \cdot C_{\theta_1}'$

$\mathfrak{L}_{\theta_1} = \cos^4 \frac{1}{2} \theta_1 \cdot C_2(\theta_1)$ $E = \cos^4 \frac{1}{2} \theta \cdot K [2 \mathfrak{L}_{\theta_1} - \cos^2 \theta_1]$

C, C', C_2 aus Tafel I zum Argument θ_1 .

III. $85^\circ 30' \leq \theta \leq 90^\circ$. $K = \sec(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\operatorname{cosec} \theta} \log \operatorname{nat}(4 \sec \theta) \cdot C_3$

$E = \sqrt{\sin \theta} [1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta \sqrt{\sin^3 \theta} \log \operatorname{nat}(4 \sec \theta)] \cdot C_4$

C_3 und C_4 aus Tafel III,

oder überhaupt für $\theta \geq 60^\circ$

$E = \cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta} \cdot \frac{1}{C'} + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{[\cos(45 - \frac{1}{2} \theta) \sqrt{\sin \theta}]^{1/2}} \cdot \beta \cdot K$

C' aus Tafel I zum Argument $90^\circ - \theta$, β aus Tafel II.

Tafel I. ($\log C', \log C_1', \log C_2$ in Einheiten der achten Dezimale).

θ	$\log C$	$\log C'$	$\log C_1$	$\log C_1'$	$\log C_2$
13°	0.19611988	— 0 0	0.19611988	— 0 0	— 0 0
14	11988	0 0	11987	0 1	0 0
15	11988	0 0	11987	1 0	0 1
16	11988	0 0	11987	1 1	1 0
17	11988	1 0	11986	2 0	1 1
18	11987	0 0	11985	2 2	2 1
19	11987	0 1	11984	4 2	3 2
20	11987	1 0	11982	6 2	5 2
21	11987	1 0	11979	9 3	8 3
22	11986	1 1	11975	12 3	11 3
23	11986	2 1	11970	18 6	16 5
24	11985	3 1	11962	25 7	23 7
25	11984	4 1	11952	36 11	32 9
26	11982	5 1	11938	49 13	44 12
27	11980	8 3	11920	68 19	60 16
28	11978	10 2	11896	91 23	81 21
29	11974	14 4	11865	123 32	109 28
30	11970	18 4	11825	163 40	145 36
31	11964	24 6	11773	214 51	191 46
32	11956	31 7	11708	280 66	249 58
33	11947	41 10	11624	364 84	323 74
34	11935	52 11	11519	468 104	416 93
35	0.19611921	— 67 15	0.19611388	— 600 132	— 533 117
36.0	0.19611902	— 85 18	0.19611224	— 763 163	— 678 145
.5	11892	96 11	11128	859 96	763 85
37.0	11880	108 12	11021	966 107	858 95
.5	11866	121 13	10903	1085 119	963 105
38.0	11852	136 15	10771	1216 131	1080 117
.5	11835	152 16	10626	1362 146	1210 130
39.0	11817	170 18	10464	1524 162	1353 143
.5	11797	191 21	10286	1702 178	1512 159
40.0	11775	213 22	10088	1900 198	1687 175
.5	11750	237 24	09870	2117 217	1880 193
41.0	11723	264 27	09630	2358 241	2094 214
.5	0.19611694	— 294 30	0.19609365	— 2623 265	— 2329 235

θ	$\log C$	$\log C'$	$\log C_1$	$\log C_1'$	$\log C_2$
41°5	0.19611694	— 294	0.19609365	— 2623	— 2329
42.0	11661	327	09073	2915	2588
.5	11625	363	08752	3236	2872
43.0	11585	403	08399	3588	3185
.5	11541	447	08011	3976	3529
44.0	11493	48	07586	4402	3907
.5	0.19611440	53	0.19607119	4869	4321
45° 0'	0.19611382	58	0.19606607	512	454
20	11340	606	06239	5381	4775
40	11296	648	05847	5749	5102
46 0	11249	692	05432	6140	5448
20	11198	739	04991	6556	5817
40	11145	789	04522	6997	6208
47 0	11089	842	04025	7465	6623
20	11029	899	03498	7962	7063
40	10965	959	02938	8490	7531
48 0	10897	1023	02345	9049	8026
20	10825	1090	01716	9642	8552
40	10749	1162	01050	10271	9109
49 0	10669	1238	0.19600343	10938	9700
20	10583	1319	0.19599595	11645	10325
40	10492	1405	98802	12393	10988
50 0	10396	1496	97962	13186	11690
10	10345	1592	97524	14026	12434
20	10294	1642	97073	14464	12822
30	10240	1694	96609	14915	13221
40	10186	1747	96132	15379	13631
50	10129	1802	95641	15856	14054
51 0	10071	1859	95136	16347	14488
10	10011	1917	94616	16852	14935
20	09950	1976	94082	17371	15395
30	09886	2038	93532	17906	15868
40	09821	2101	92967	18456	16354
50	09754	2167	92385	19021	16855
52 0	09685	2234	91787	19603	17369
10	09614	2303	91172	20201	17898
20	09541	2374	90539	20816	18442
30	09466	2447	89889	21448	19002
40	09388	2522	89220	22099	19577
50	09309	2599	88532	22768	20168
53 0	09227	2679	87825	23455	20776
10	09143	2761	87098	24162	21402
20	09056	2845	86351	24889	22044
30	08967	2932	85582	25637	22705
40	08875	3021	84793	26405	23384
50	08781	3113	83980	27195	24083
54 0	08684	3207	83146	28007	24800
10	08584	3304	82288	28842	25538
20	08481	3404	81406	29700	26296
30	08376	3507	80499	30582	27075
40	08267	3612	79567	31489	27876
50	08155	3721	78610	32420	28700
55 0	0.19608040	3833	0.19577626	33378	29545
		3947		34362	30415

θ	$\log C$	$\log C'$	$\log C_1$	$\log C_1'$	$\log C_2$
55° 0'	0.19608040	-3947	0.19577626	-34362	-30415
10	07922	4066	76614	35374	31308
20	07801	4187	75575	36413	32226
30	07676	4312	74506	37481	33169
40	07547	4441	73409	38579	34138
50	07415	4573	72281	39707	35134
56 0	07279	4709	71122	40866	36157
10	07139	4849	69931	42057	37208
20	06995	4992	68707	43281	38288
30	06848	5140	67450	44538	39398
40	06696	5292	66158	45830	40537
50	06539	5448	64831	47157	41708
57 0	06379	5609	63468	48520	42911
10	06214	5774	62067	49921	44147
20	06044	5944	60628	51360	45416
30	05869	6119	59149	52838	46720
40	05689	6298	57631	54357	48059
50	05505	6483	56071	55917	49434
58 0	05315	6673	54468	57520	50847
10	05120	6868	52822	59166	52298
20	04919	7069	51131	60857	53788
30	04713	7275	49394	62594	55319
40	04501	7487	47610	64378	56891
50	04283	7705	45778	66210	58505
59 0	04058	7929	43896	68092	60163
10	03828	8160	41963	70025	61865
20	03591	8397	39977	72010	63614
30	03347	8640	37938	74050	65409
40	03097	8891	35844	76144	67253
50	02839	9148	33693	78295	69146
60 0	0.19602575	-9413	0.19531484	-80504	-71090

Tafel II. (Einh. 8. Dez.)

$90^\circ - \theta$	$\log \beta$
30°	-990
29	801
28	644
27	514
26	406
25	319
24	248
23	191
22	145
21	109
20	81
19	59
18	43
17	30
16	21
15	14
14	9
13	6
12	4

 $90^\circ - \theta$ $\log \beta$

12°	-4
11	2
10	1
9	1
8	0
7	-0

Tafel III. (Einheit 8. Dez.)

θ	$\log C_3$	$\log C_4$
85° 30'	-17046	-179
40	15656	154
50	14333	132
86 0	13076	112
10	11884	95
20	10756	79
30	9691	66
40	8688	54
50	7747	44
87 0	-6866	-36

θ	$\log C_3$	$\log C_4$
87° 0'	-6866	-36
10	6045	28
20	5282	22
30	4576	17
40	3926	13
50	3331	10
88 0	2790	7
10	2302	5
20	1866	3
30	1480	2
40	1143	1
50	853	1
89 0	609	0
10	409	0
20	252	0
30	135	0
40	56	0
50	13	0
90 0	0	0