Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach *Laplace*schen Functionen höherer Ordnung.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

Die beiden Sätze, auf welche man bei der Entwicklung einer Function von zwei Variablen nach Kugelfunctionen die Bestimmung des allgemeinen Gliedes zu gründen pflegt, sind von Herrn *Cayley* *) auf die von ihm definirten allgemeineren, von beliebig vielen Variablen abhängigen *Laplace*schen Functionen übertragen worden. Auf ganz anderem Wege sind diese Sätze später von Herrn *Heine* in der Arbeit „Die speciellen *Lamé*schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung" **) abgeleitet, worin man ausserdem eine Reihe von interessanten Eigenschaften der speciellen Functionen findet, welche in der allgemeinen Theorie die Stelle der Kugelfunction $P_n(\cos\gamma)$ und ihrer Zugeordneten vertreten. Schon vor dem Erscheinen der soeben genannten Arbeit war ich durch Uebertragung der Eigenschaften des Potentials einer Flächenbelegung auf ein vielfaches Integral zu einer Verallgemeinerung der *Laplace*schen Reihen gelangt. In dem zu Ostern 1864 ausgegebenen Programme der Realschule zu St. Johann in Danzig habe ich die Form der Reihen für beliebig viele Variablen aufgestellt und den Fall dreier Variablen einer speciellen Discussion unterworfen. Ich sprach dort zugleich meine Absicht aus, in einer späteren Bearbeitung auf die Erörterung der Convergenz der allgemeinen Reihenentwicklungen einzugehen, sowie auch auf die Betrachtung gewisser neuer Reihen, welche aus jenen dadurch hervorgehen, dass man die Zahl der Variablen unendlich gross werden, die zu entwickelnde Function aber nur von einer beschränkten Anzahl derselben in passender Weise abhängen lässt. Die letzteren Reihen, bei welchen die Variablen nicht auf ein bestimmtes Intervall beschränkt sind, sondern alle möglichen reellen Werthe annehmen können, erwiesen sich mir später als ein besonderer Fall der von Herrn *Hermite* ***) schon am Anfange des Jahres 1864 veröffentlichten Ent-

---

*) Sur les fonctions de *Laplace*. *Liouvilles* Journal Bd. 13.

**) Bd. 62, S. 110—141 dieses Journals.

***) Sur un nouveau développement en série des fonctions. Comptes Rendus, Bd. 58, S. 93—100 und 266—273.

wicklungen, indem sie sich aus denselben durch Specialisirung der darin auftretenden quadratischen Form ergeben. Da mir der Nachweis der Verwandtschaft der Reihen des Herrn *Hermite* mit den verallgemeinerten *Laplace*schen Reihen und die Untersuchung der Convergenz der letzteren nicht ohne Wichtigkeit zu sein scheint, so glaube ich, dass die nachfolgenden Mittheilungen auch neben den genannten Arbeiten noch Manches bieten werden, was der Beachtung werth ist. Verschiedene, ohne den gewünschten Erfolg gebliebene Versuche, den auftretenden Convergenzbedingungen allgemein eine einfachere Gestalt zu geben, haben mich von einer früheren Veröffentlichung zurückgehalten.

§. 1.

Definition der *Laplace*schen Functionen n^{ter} Ordnung.

Die partielle Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n+1}^2} = 0$$

hat, wie bekannt, den reciproken Werth des Ausdruckes

$$R = [(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_{n+1}-a_{n+1})^2]^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

zum particulären Integral. Es genügt ihr also, wenn unter K' eine beliebige endliche Function der a verstanden wird, auch das $(n+1)$fache Integral

$$v = \int\frac{K'\,da_1\,da_2\dots da_{n+1}}{R} = \int\frac{K'\,dt'}{R},$$

vorausgesetzt, dass R für keinen innerhalb der Integrationsgrenzen gelegenen Werth der a verschwindet. Führt man nun statt der x die Variablen ϱ, φ_1, φ_2, ... φ_n ein vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho\cos\varphi_1,\\
x_2 &= \varrho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_n &= \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,\\
x_{n+1} &= \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_n,
\end{aligned}$$

so geht (1.) über in:

$$(2.)\qquad \frac{1}{\varrho^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^n\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{q_s\sin^{n-s}\varphi_s}\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s\frac{\partial v}{\partial\varphi_s}\right) = 0,$$

worin $q_1 = 1$, und für $s > 1$:

$$q_s = (\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{s-1})^2;$$

und wenn man der obigen Substitution entsprechend

$$a_1 = l\cos\lambda_1,$$
$$a_2 = l\sin\lambda_1\cos\lambda_2, \quad \text{etc.}$$

und ausserdem

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n+1}x_{n+1} = l\varrho\,.\cos\omega$$

setzt, so wird

$$R = (l^2-2l\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$dt' = l^n\sin^{n-1}\lambda_1\ldots\sin^1\lambda_{n-1}\,dl\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}\,d\lambda_n.$$

Die Function v soll jetzt so specialisirt werden, dass sie für $n=2$ mit dem Potential einer auf einer Kugel vom Halbmesser 1 vertheilten Massenschicht zusammenfällt. Zu dem Zwecke verwandeln wir K' in $k':\varepsilon$, verstehen unter k' eine von l unabhängige Function der λ, unter ε eine unendlich kleine Grösse, integriren nach l von 1 bis $1+\varepsilon$ und nehmen 0 und π als Integrationsgrenzen von $\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$, dagegen 0 und 2π als die von λ_n. Indem wir noch zur Abkürzung

$$r = (1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$d\sigma' = \sin^{n-1}\lambda_1\ldots\sin^1\lambda_{n-1}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}\,d\lambda_n$$

setzen, erhalten wir

$$(3.)\qquad v = \int\frac{k'd\sigma'}{r}.$$

Bezeichnet nun $R_m(\cos\omega)$ den Coefficienten von ϱ^m in der Entwicklung von r^{-1} nach aufsteigenden, oder, was dasselbe ist, den von ϱ^{-m-n+1} in der Entwicklung von r^{-1} nach absteigenden Potenzen von ϱ, und setzt man

$$(4.)\qquad X_m = \int k'R_m(\cos\omega)\,d\sigma',$$

dann gilt für v, je nachdem $\varrho<1$ oder >1, die erste oder die zweite der beiden folgenden Reihenentwicklungen:

$$(3'.)\qquad v = \sum_{m=0}^{m=\infty}\varrho^m X_m,$$

$$(3''.)\qquad v = \sum_{m=0}^{m=\infty}\varrho^{-m-n+1}X_m,$$

und durch Einführung der einen oder der anderen in (2.) ergiebt sich für X_m die (schon von Herrn *Heine* aufgestellte) partielle Differentialgleichung

$$(5.)\qquad m(m+n-1)X_m+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{q_s\sin^{n-s}\varphi_s}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\Big(\sin^{n-s}\varphi_s\,\frac{\partial X_m}{\partial\varphi_s}\Big) = 0.$$

Eine jede Lösung Z_m dieser Differentialgleichung, welche, wie es mit X_m der Fall ist, eine ganze rationale Function (m^{ten} Grades) der Grössen $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ etc. ist, möge eine *Laplace*sche Function n^{ter} Ordnung heissen: unsere Aufgabe besteht dann darin, eine Function von n Variablen φ, welche für alle Werthe von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ zwischen 0 und π und für alle Werthe von φ_n zwischen 0 und 2π gegeben ist, in eine Reihe $Z_0+Z_1+Z_2+\cdots$ von *Laplace*schen Functionen n^{ter} Ordnung zu entwickeln.

§. 2.

Ableitung der Reihenentwicklungen.

Für $n=2$ kann die Form der Reihe bekanntlich sehr leicht durch Anwendung des Satzes erhalten werden, dass die zur Kugelfläche normale Attractionscomponente beim Durchgange durch die Fläche eine plötzliche Aenderung um eine Grösse erfährt, die der Dichtigkeit der Massenschicht an der Durchgangsstelle proportional ist. Dem analog suchen wir in dem allgemeinen Falle den Grenzwerth zu ermitteln, welchen die Differenz

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho=1+\varepsilon)}-\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho=1-\varepsilon)} = D$$

für ein unendlich kleines positives ε annimmt. Diese Differenz stellt sich vermöge (3.) als der Unterschied zweier vielfachen Integrale dar, deren entsprechende Elemente sich unendlich wenig von einander unterscheiden, mit Ausnahme derjenigen, für welche r der Null sehr nahe liegt. Da dies aber nur für kleine Werthe von ω stattfindet, so ist es zweckmässig, es so einzurichten, dass ω eine der Integrationsvariablen wird. Indem wir deshalb von den Variablen λ für den Augenblick wieder zu den a zurückgehen, ersetzen wir diese durch $n+1$ neue Variablen $b, b_1, \ldots b_n$ durch die folgende orthogonale Substitution:

$$(6.)\quad \begin{cases} a_1 &= \cos\varphi_1 b - \sin\varphi_1 b_1 \\ a_2 &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 b + \cos\varphi_1\cos\varphi_2 b_1 - \sin\varphi_2 b_2 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n &= \sin\varphi_1\ldots\cos\varphi_n b + \cdots\cdots\cdots - \sin\varphi_n b_n \\ a_{n+1} &= \sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_n b + \cdots\cdots\cdots + \cos\varphi_n b_n, \end{cases}$$

worin die Coefficienten von b_i aus denen von b durch partielle Differentiation nach φ_i, unter Fortlassung des gemeinsamen Factors $\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{i-1}$, hervorgehen. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$b = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cdots = l\cos\omega,$$

und setzt man ausserdem

$$b_1 = l\sin\omega\cos\omega_1, \quad \ldots, \quad b_n = l\sin\omega\ldots\sin\omega_{n-1},$$

so wird (3.) transformirt in:

$$v = \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(\varrho)\sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin^1\omega_{n-2}\, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1},$$

wenn

$$F(\varrho) = \int_0^{\pi} \frac{k' \sin^{n-1}\omega\, d\omega}{(1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

so dass es sich jetzt nur um die Werthbestimmung der Differenz $F'(1+\varepsilon)-F'(1-\varepsilon)$ handelt. Differentiirt man nun $F(\varrho)$ nach ϱ, setzt dann $\varrho = 1+\varepsilon$, und zugleich

$$\cos\omega = 1-\tfrac{1}{2}z^2, \qquad \frac{1-n}{2}\left(1-\tfrac{1}{4}z^2\right)^{\frac{1}{2}n-1}.\, k' = h',$$

so erhält man:

$$F'(1+\varepsilon) = \int_0^2 \frac{h'dz}{\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}} + \int_0^2 \frac{2\varepsilon h'\, dz}{z^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Das erste dieser Integrale ändert sich, wie leicht zu sehen, unendlich wenig, wenn ε in $-\varepsilon$ verwandelt wird. Es kommt also nur das zweite in Betracht, welches wir in zwei Theilintegrale mit den Grenzen 0 und δ, δ und 2 zerlegen, während wir δ mit ε zugleich gegen Null hin abnehmen lassen, jedoch so, dass der Quotient $\varepsilon : \delta$ stets unendlich klein bleibt. Das zweite Theilintegral ist, wenn H einen gewissen endlichen Werth bezeichnet, gleich

$$H\int_{\delta}^{2} \frac{2\varepsilon\, dz}{z^2} = H\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}-\varepsilon\right),$$

verschwindet also zugleich mit ε, und das erste ist, wenn (h') den Werth des h' für einen gewissen zwischen 0 und δ gelegenen Werth z_1 des z bedeutet, gleich

$$(h')\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon^2}{z_1^2}}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}. \int_0^{\delta} \frac{2\varepsilon\, dz}{z^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Aber der Factor von (h') vor dem Integralzeichen ist unendlich wenig von 1 verschieden, und das Integral geht durch die Substitution $z = \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}$ über in:

$$\int_{\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2}^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-1}dt}{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-1}dt}{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Das Doppelte dieses Werthes mit (h') oder $\frac{1}{2}(1-n)(k')$ multiplicirt ist gleich der Differenz $F'(1+\varepsilon)-F'(1-\varepsilon)$, und daher ist:

$$(7.)\qquad D = -\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{2\pi}(k')\sin^{n-2}\omega_1\ldots\sin^1\omega_{n-2}\,d\omega_1\ldots d\omega_{n-1}.$$

Es bedeutete (k') den Werth des k' für ein unendlich kleines ω. Aber für $\omega=0$ folgt aus (6.), dass $\cos\lambda_1=\cos\varphi_1$, $\sin\lambda_1\cos\lambda_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ u. s. w., und hieraus gehen unter der Voraussetzung, dass die φ keinen ihrer Grenzwerthe 0 und π (resp. 0 und 2π) besitzen, für die λ die bestimmten Auflösungen $\lambda_1=\varphi_1$, $\lambda_2=\varphi_2$ u. s. w. hervor, von denen sich die für ein unendlich kleines ω geltenden nur unendlich wenig unterscheiden. Wenn also die Function $k'=f(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$ für das besondere Werthsystem $\lambda_1=\varphi_1$, $\lambda_2=\varphi_2$ etc. nicht vieldeutig ist, so nähert sich (k') der von ω_1, ω_2 etc. unabhängigen Grenze $k=f(\varphi_1,\ldots\varphi_n)$, und die Gleichung (7.) kann dann durch die folgende ersetzt werden:

$$(7'.)\qquad D=\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_{1+\varepsilon}-\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_{1-\varepsilon}=-\frac{4\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}k.$$

In Betreff der Grenzwerthe der Variablen wird die Bemerkung genügen, dass D für $\varphi_i=0$ und $\varphi_i=\pi$ von φ_{i+1}, φ_{i+2} etc. unabhängig, und dass für $\varphi_n=0$ und $\varphi_n=2\pi$ an Stelle von k das arithmetische Mittel der diesen beiden Werthen entsprechenden Functionalwerthe zu setzen ist.

Indem man (7'.) mit (3''.) und (3'.) verbindet, darauf $\varrho=1$ und für X_m den in (4.) befindlichen Werth setzt, erhält man:

$$(\mathrm{I.})\qquad k = \frac{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}{4\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sum_{m=0}^{m=\infty}(2m+n-1)\int k'R_m(\cos\omega)\,d\sigma',$$

aber die Gültigkeit dieser Entwicklung bleibt zweifelhaft, weil ihre Ableitung auf der Annahme beruht, dass die angewandten nach Potenzen von ϱ fortschreitenden Reihen, welche für $\varrho=1+\varepsilon$, resp. $\varrho=1-\varepsilon$, allerdings sicher convergent sind, ihre Convergenz auch noch für $\varrho=1$ beibehalten.

Die in dem allgemeinen Gliede auftretende specielle *Laplace*sche Function $R_m(\cos\omega)$ hat, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist, einen wesentlich verschiedenen Charakter; es ist nämlich, wenn man z statt $\cos\omega$ schreibt,

für $n=2\mu+1$, $\mu>0$:

$$R_m(z) = \frac{1}{(m+\mu)2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}\frac{d^\mu\cos(m+\mu)\omega}{dz^\mu},$$

und für $n = 2\mu+2$, $\mu \geqq 0$:

$$R_m(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu},$$

in Betreff welcher Ausdrücke ich auf die oben angeführte Arbeit des Herrn *Heine* verweise. Die Reihe in (I.) führt also auf die beiden folgenden Reihen:

$$(\mathrm{I}^a.) \qquad S = \frac{2}{(2\pi)^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+1}) \frac{d^\mu \cos(m+\mu)\omega}{dz^\mu} d\tau,$$

$$d\tau = \sin^{2\mu}\lambda_1 \dots \sin^1\lambda_{2\mu} d\lambda_1 \dots d\lambda_{2\mu+1},$$

$$z = \cos\omega = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 + \sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos\varphi_2\cos\lambda_2 + \cdots$$
$$+ \sin\varphi_1\sin\lambda_1 \dots \sin\varphi_{2\mu}\sin\lambda_{2\mu}\cos(\varphi_{2\mu+1}-\lambda_{2\mu+1}).$$

$$(\mathrm{I}^b.) \qquad S = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} (m+\mu+\tfrac{1}{2}) \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+2}) \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu} d\tau.$$

Die Ausdrücke für $d\tau$ und z in der letzten Gleichung gehen aus den voranstehenden durch Verwandlung von 2μ in $2\mu+1$ hervor.

§. 3.

Ueber die Convergenz der Reihenentwicklungen.

Die wichtigen Arbeiten *Dirichlets* über die trigonometrischen und die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen (im 4ten und 17ten Bande dieses Journals) bieten die hauptsächlichsten Hülfsmittel dar, um auch die erhaltenen allgemeineren Reihen zu untersuchen. Bezeichnet man durch S_m die Summe der $m-\mu+1$ ersten Glieder der Reihe ($\mathrm{I}^a.$), in welcher die Function f als endlich vorausgesetzt werde, und bemerkt man, dass

$$\cos(\mu\omega) + \cos(\mu+1)\omega + \cdots + \cos(m\omega) = \frac{1}{2}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} - G,$$

wo G eine ganze Function von z vom $\mu-1^{\text{ten}}$ Grade, so findet man:

$$S_m = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+1}) \frac{d^\mu}{dz^\mu}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right) d\tau,$$

und wenn man dieses Integral durch die Substitution (6.) transformirt und

$$\Psi(\omega) = \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(\lambda_1, \dots, \lambda_{2\mu+1}) \sin^{2\mu-1}\omega_1 \dots \sin^1\omega_{2\mu-1} d\omega_1 \dots d\omega_{2\mu}$$

setzt, so wird:

$$(A.) \qquad S_m = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \int_0^\pi \Psi(\omega) \sin^{2\mu}\omega \frac{d^\mu}{dz^\mu}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right) d\omega.$$

Wenn nun die Function $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und ihre nach $z=\cos\omega$ genommenen $\mu-1$ ersten Differentialquotienten innerhalb der Integrationsgrenzen continuirlich bleiben und an den Grenzen selbst verschwinden, so ist es nicht allein erlaubt, μ mal hinter einander theilweise zu integriren, sondern es verschwinden auch die vom Integralzeichen freien Glieder, so dass man, indem man zur Abkürzung

$$X(\omega) = \frac{(-1)^{\mu-1}}{2(2\pi)^\mu}\,\frac{d}{d\omega}\left[\frac{d^{\mu-1}\,\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega}{dz^{\mu-1}}\right]$$

setzt, für S_m den Ausdruck erhält:

$$(B.)\qquad S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\,\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,X(\omega)\,d\omega.$$

Für ein unendlich grosses m nähert sich derselbe, wie *Dirichlet* gezeigt hat, sicher dann dem Werthe $X(+0)$, wenn dieser Werth endlich ist und $X(\omega)$ in dem Intervalle von 0 bis π weder unendlich viele Stetigkeitsunterbrechungen erleidet noch unendlich viele Maxima und Minima besitzt*). Betrachtet man nun $\Psi(\omega)$ als den Quotienten von $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und $\sin^{2\mu-1}\omega$, so ist, weil diese Grössen nebst ihren $\mu-1$ ersten nach z genommenen Differentialquotienten für $\omega=0$ verschwinden, $\Psi(+0)$ gleich dem Quotienten der μ^{ten} Differentialquotienten beider für $\omega=0$, wodurch man leicht findet, dass

$$\Psi(+0) = \frac{X(+0)}{C},\quad \text{wenn}\quad C = \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{2\pi^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Es wird also $S_\infty = C\,\Psi(+0)$, und diese Grösse ist aus den schon bei Gelegenheit der Gleichung (7.) des vorigen Paragraphen angeführten Gründen gleich $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{2\mu+1})$, sofern dieser Werth nicht vieldeutig ist und keine der Variablen einen ihrer Grenzwerthe besitzt.

Wenn dagegen irgend eine der Functionen $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und ihrer $\mu-1$ ersten Derivirten nach z für einen oder mehrere Werthe (c) der Variablen ω innerhalb der Integrationsgrenzen unstetig, aber nicht unendlich, wird, so kann man auf das Integral in $(A.)$, indem man es durch Einschaltung von Zwischengrenzen an den unstetigen Stellen in Theilintegrale zerlegt, noch immer das Verfahren der theilweisen Integration anwenden, aber es enthält alsdann S_m ausser einer Anzahl von Integralen, deren Summe sich für $m=\infty$ wiederum auf $X(+0)$ reducirt, noch eine Anzahl von Gliedern, die vom In-

*) In Betreff der irregulären Functionen, für welche die letzteren Bedingungen nicht erfüllt sind, verweise ich auf eine Abhandlung des Herrn *Lipschitz*, in Bd. 63 dieses Journals (S. 296—308).

tegralzeichen frei sind, und weil sie je einen der Werthe von

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega},\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right),\quad \ldots\quad \frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)\quad (\text{für } \omega=c)$$

als Factor enthalten, bei unbegrenzt wachsendem m unbestimmt oder unendlich werden. Es kann also hier von einer Convergenz der Reihe nicht die Rede sein, und eben so wenig wird dieselbe in dem Falle, wo die Derivirten von $\Psi(\omega)$ stellenweise unendlich grosse Werthe annehmen, stattfinden können, wenngleich sich dieser Fall nicht durch die nämlichen Schlüsse erledigen lässt.

Man darf übrigens nicht übersehen, dass wiewohl nach (6.) die a stetige Functionen der b, d. h. (wenn wir $l=1$ setzen) die Grössen $\cos\lambda_1$, $\sin\lambda_1\cos\lambda_2$ etc. stetige Functionen von $\cos\omega$, $\sin\omega\cos\omega_1$ etc. sind, dennoch für die Variablen λ selbst nicht durchweg das Gleiche stattfindet, indem insbesondere $\lambda_{2\mu+1}$ bei continuirlich sich änderndem ω plötzlich von einem der Grenzwerthe 0 und 2π auf den andern überspringen kann, und diesem Umstande ist es, wie ich beiläufig anführe, zuzuschreiben, dass für das specielle Werthsystem $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{2\mu+1}=\frac{1}{2}\pi$ die Function $\Psi(\omega)$ bei $\omega=\frac{1}{2}\pi$ im Allgemeinen eine plötzliche Aenderung erfährt und dadurch eine Divergenz der Reihe hervorbringt. Auf der anderen Seite aber ist das Folgende festzuhalten: Wenn die Function $f(\lambda_1,\ldots\lambda_{2\mu+1})$ als eine stetige Function g der $2\mu+2$ Variablen $a_1=\cos\lambda_1$, $a_2=\sin\lambda_1\cos\lambda_2$ etc. betrachtet werden kann, und wenn auch die sämmtlichen nach den a genommenen partiellen Differentialquotienten von g bis zu denen der $\mu-1^{\text{sten}}$ Ordnung inclusive stetige Functionen der a sind, so ist die Function f, so wie ihre $\mu-1$ ersten Derivirten nach ω, auch in Bezug auf die Variablen ω, ω_1, ... durchweg stetig, woraus man leicht schliesst, dass dann die Bedingungen erfüllt sind, unter welchen die Transformation von $(A.)$ in $(B.)$ möglich ist.

Was die Reihe $(\mathrm{I}^b.)$ betrifft, so kann man dieselbe offenbar statt bei $m=0$ auch bei $m=-\mu$ beginnen lassen, und wenn man dann jedes Glied derselben durch die Substitution (6.) transformirt, so wird man, unter der Voraussetzung, dass eine μ-malige theilweise Integration statthaft ist, auf ein Integral von der Form

$$S_m=\int_0^\pi F(\omega)\left(\tfrac{1}{2}P_0(z)+\tfrac{3}{2}P_1(z)+\cdots+\tfrac{1}{2}(2m+1)P_m(z)\right)\sin\omega\,d\omega$$

geführt, dessen Werth, falls $F(\omega)$ endlich, sich nach *Dirichlet* für $m=\infty$ auf $F(+0)$ reducirt, d. h., wie man zufolge der Bedeutung von $F(\omega)$ finden wird, im Allgemeinen auf $f(\varphi_1,\ldots\varphi_{2\mu+2})$.

§. 4.

Die Reihen beliebiger Ordnung für Functionen einer einzigen Variablen.

Wenn die Function f nur von der ersten Variablen φ_1 abhängt, während μ beliebig bleibt, so darf man $\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = 0$ setzen, und die Reihe (I^a.) lässt sich durch Benutzung einer von Herrn *Heine* (a. a. O. S. 141) gegebenen Integralformel oder auch durch Benutzung der Differentialgleichung (5.) in die Form bringen:

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu}^{\infty} \frac{\Gamma(m-\mu+1)}{m\,\Gamma(m+\mu)} \frac{d^\mu \cos(m\varphi)}{(d\cos\varphi)^\mu} \cdot A_m,$$

$$A_m = \int_0^\pi d\lambda \sin^{2\mu}\lambda\, f(\lambda) \frac{d^\mu \cos(m\lambda)}{(d\cos\lambda)^\mu},$$

wobei φ, λ statt φ_1, λ_1 und m statt des früheren $m+\mu$ geschrieben worden ist. Die Function $\Psi(\omega)$ vereinfacht sich jetzt in

$$\Psi(\omega) = c\int_0^\pi f(\lambda) \sin^{2\mu-1}\omega_1\, d\omega_1,$$

wo c eine leicht angebbare Constante, und nach (6.) ist:

$$a = \cos\lambda = \cos\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega\cos\omega_1.$$

Ist nun zunächst $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$, so wird $\lambda = \omega$, resp. $= \pi - \omega$, also von ω_1 unabhängig, so dass $\Psi(\omega)$ sich nur durch einen constanten Factor von $f(\lambda)$, resp. $f(\pi-\lambda)$, unterscheidet. Die Reihe ist also für die Grenzwerthe 0 und π divergent, wenn die Functionen $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, ... $f^{(\mu-1)}(\lambda)$ innerhalb des Intervalles von 0 bis π nicht sämmtlich stetig sind.

Wenn dagegen φ von 0 und π verschieden ist, so ist es für alle zwischen 0 und π gelegenen Werthe von ω erlaubt, die Integrationsvariable ω_1 durch a auszudrücken, und es wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\sin^{1-2\mu}\varphi\,[\sin^2\varphi\sin^2\omega - (\cos\varphi\cos\omega - a)^2]^{\mu-1} = M,$$

$$\sin^{2\mu-1}\omega\,\Psi(\omega) = c\int_{\cos(\varphi+\omega)}^{\cos(\varphi-\omega)} f(\arccos a)\, M\, da.$$

Die wiederholte Differentiation dieser Gleichung nach $z = \cos\omega$ ergiebt mit Rücksicht darauf, dass M und die $\mu-2$ ersten Derivirten von M für $a = \cos(\varphi-\omega)$ und $a = \cos(\varphi+\omega)$ verschwinden:

$$\frac{d^\alpha\, \Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega}{dz^\alpha} = c\int_{\cos(\varphi+\omega)}^{\cos(\varphi-\omega)} f(\arccos a) \frac{d^\alpha M}{dz^\alpha} da, \quad (\alpha \leqq \mu-1).$$

Dieses Integral aber ist selbst dann eine stetige Function des Parameters ω, wenn $f(\arccos a)$ oder $f(\lambda)$ stellenweise discontinuirlich ist, und es verschwindet ausserdem, wenn ω sich dem Werthe 0 oder π unbegrenzt nähert. Diese Eigenschaften reichen hin, um die Umformung der Gleichung (*A.*) des vorigen Paragraphen in (*B.*) zu rechtfertigen, und die Reihe convergirt also, wenn φ weder $=0$ noch $=\pi$, gegen den Werth von $X(\varepsilon)$ für ein unendlich kleines positives ε, d. h. gegen $\frac{1}{2}[f(\varphi-\varepsilon)+f(\varphi+\varepsilon)]$, wie man findet, wenn man in der vorangehenden Gleichung $\alpha=\mu-1$ nimmt und die entstehende Formel nach ω differentiirt.

Die Reihe (I^b.) nimmt für den Fall einer einzigen Variablen die Form an:

$$S = \sum_{\mu}^{\infty} \frac{(2m+1)\Gamma(m-\mu+1)}{2\Gamma(m+\mu+1)} \frac{d^\mu P_m(\cos\varphi)}{(d\cos\varphi)^\mu} \cdot B_m,$$

$$B_m = \int_0^\pi d\lambda \sin^{2\mu+1}\lambda f(\lambda) \frac{d^\mu P_m(\cos\lambda)}{(d\cos\lambda)^\mu}$$

und erweist sich dann als im Wesentlichen identisch mit der Entwicklung einer Function nach den Zugeordneten von $P_m(\cos\varphi)$. (Vergl. *Heine*, Handb. d. Kugelf. §. 52.) Wie ich einer gefälligen Mittheilung des Herrn *Heine* zu entlehnen mir erlaube, kann diese Reihe und zugleich der Beweis ihrer Convergenz für zwischen 0 und π gelegene Werthe von φ sehr leicht dadurch erhalten werden, dass man die Kugelfunctionenreihe, durch welche nach *Dirichlet* jede endliche Function zweier Variablen dargestellt werden kann, auf die specielle Function $F(\varphi,\psi)=f(\varphi)\sin^\mu\varphi\cos(\mu\psi)$ anwendet und die daraus entspringende Entwicklung von dem Factor $\sin^\mu\varphi\cos(\mu\psi)$ befreit. Aber für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ ist die Division durch diesen Factor unstatthaft, und die Convergenz der Reihe bleibt zweifelhaft. Sie findet jedoch dann allerdings sicher statt, wenn die $\mu-1$ ersten nach $\cos\lambda$ genommenen Differentialquotienten von $f(\lambda)\sin^{2\mu}\lambda$, so wie auch diese Function selbst, stetig und an den Grenzen $=0$ sind, und wenn der μ^{te} Differentialquotient endlich ist.

§. 5.

Der Fall einer unendlich grossen Anzahl von Variablen.

Die Summe der unendlichen Reihe auf der rechten Seite von (I.) in §. 2 lässt sich, wenn man dem allgemeinen Gliede den Factor ϱ^m hinzufügt und $\varrho<1$ nimmt, durch den folgenden geschlossenen Ausdruck darstellen:

$$S = \frac{(1-\varrho^2)\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{2\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}} \int k'(1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\, d\sigma'.$$

Es bezeichne nun ν eine ganze Zahl, die kleiner als $n-1$ ist, und es sei k' von den Variablen $\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \dots \lambda_n$ unabhängig, dann ist es erlaubt $\varphi_{\nu+1} = \varphi_{\nu+2} = \dots = 0$ zu setzen, es wird

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 + \dots + \sin\varphi_1\sin\lambda_1\dots\sin\varphi_\nu\sin\lambda_\nu\cos\lambda_{\nu+1},$$

und wenn man die Integrationen nach $\lambda_{\nu+2}, \lambda_{\nu+3}, \dots$ ausführt, $\cos\lambda_{\nu+1} = t$ und

$$J = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1-\varrho^2)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}(\nu+3)}\left(\frac{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}{1-t^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}dt$$

setzt, so ist:

$$S = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}\,\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}\,\Gamma\frac{1}{2}(n-\nu)}\int_0^{\pi}\dots\int_0^{\pi}k'J\sin^{n-1}\lambda_1\dots\sin^{n-\nu}\lambda_\nu\,d\lambda_1\dots d\lambda_\nu.$$

Wir werden jetzt die bisherigen Variablen vermöge der Substitutionen

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\pi - x_1\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \dots \quad \varphi_\nu = \tfrac{1}{2}\pi - x_\nu\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\pi - y_1\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \dots \quad \lambda_\nu = \tfrac{1}{2}\pi - y_\nu\sqrt{\frac{2}{n}}$$

durch neue ersetzen, ferner statt k' die Function $F(y_1, \dots y_\nu)$ einführen, und darauf die Zahl n ins Unendliche wachsen lassen, während ν einen gegebenen endlichen Werth beibehält, dann geht S über in:

$$(8.)\qquad S = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}F(y_1, \dots y_\nu)J.e^{-Y}dy_1\dots dy_\nu,$$

$$Y = y_1^2+y_2^2+\dots+y_\nu^2,$$

und für J findet man, wenn man $t = \varrho+\vartheta\sqrt{\frac{2}{n}}$ macht, durch eine keiner besonderen Schwierigkeit unterworfene Rechnung den Ausdruck:

$$(9.)\qquad J = (1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{2\varrho p-\varrho^2 q}{1-\varrho^2}},$$

worin:

$$p = \sum_{s=1}^{s=\nu}x_s y_s, \quad q = \sum_{s=1}^{s=\nu}(x_s^2+y_s^2).$$

Es lässt sich nun J auch in die Form bringen:

$$(9'.)\qquad J = \frac{e^Y e^{-Q}}{(\sqrt{1-\varrho^2})^\nu}, \quad \text{wenn:}\quad Q = \sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{\varrho x_s - y_s}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right)^2,$$

und vermöge dieses Werthes von J geht (8.) über in

$$(10.)\qquad S = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y_1, \dots y_\nu)}{(\sqrt{\pi}\sqrt{1-\varrho^2})^\nu}e^{-Q}dy_1\dots dy_\nu,$$

und wenn man dieses Integral durch die Substitution

$$y_1 = \varrho x_1 + \sqrt{1-\varrho^2} z_1, \quad \ldots \quad y_\nu = \varrho x_\nu + \sqrt{1-\varrho^2} z_\nu$$

transformirt, so findet man, dass dasselbe, wie es auch nach der Art seiner Entstehung nicht anders zu erwarten war, sich für ein unendlich wenig von 1 verschiedenes ϱ der Grenze $F(x_1, \ldots x_\nu)$ nähert, wenigstens sicher dann, wenn die Function F für alle Werthe der Variablen endlich und $F(x_1, \ldots x_\nu)$ nicht vieldeutig ist.

Kehren wir jetzt zu (8.) und (9.) zurück und denken uns J in die Reihe

$$J = J_0 + J_1 \varrho + J_2 \varrho^2 + \cdots$$

entwickelt, welche für $\varrho^2 < 1$ convergirt, so wird unter der Voraussetzung, dass die durch Einführung derselben in (8.) entstehende Entwicklung auch noch für $\varrho = 1$ convergent ist, die Function F durch die Reihe

$$\text{(II.)} \qquad F(x_1, \ldots x_\nu) = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$$

dargestellt, deren allgemeines Glied

$$X_m = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, \ldots y_\nu) J_m e^{-Y} dy_1 \ldots dy_\nu$$

eine ganze Function m^{ten} Grades der Variablen $x_1, \ldots x_\nu$ ist und der Differentialgleichung genügt, die aus (5.) durch die Annahme $\varphi_s = \frac{1}{2}\pi - x_s \sqrt{\frac{2}{n}}$, $n = \infty$ hervorgeht:

$$\text{(11.)} \qquad 2m X_m + \sum_{s=1}^{s=\nu} e^{x_s^2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(e^{-x_s^2} \frac{\partial X_m}{\partial x_s} \right) = 0.$$

Um nun J_m in entwickelter Form darzustellen, zerlege man J in das Product:

$$\text{(12.)} \qquad J = E(x_1, y_1) E(x_2, y_2) \ldots E(x_\nu, y_\nu),$$

wobei $E(x, y)$ definirt ist durch die Gleichung:

$$\text{(13.)} \qquad E(x, y) = \frac{e^{\frac{2\varrho xy - \varrho^2(x^2+y^2)}{1-\varrho^2}}}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \frac{e^{y^2} e^{-\frac{(\varrho x - y)^2}{1-\varrho^2}}}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Bei der Entwicklung von E kann man sich entweder der Differentialgleichung

$$\text{(14.)} \qquad 2\varrho \frac{\partial E}{\partial \varrho} - 2x \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

oder, wie ich es vorziehen werde, des folgenden bestimmten Integrales bedienen, worin i die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ hat:

$$\text{(15.)} \qquad E(x, y) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-yi)^2 - (x+\varrho t i)^2} dt.$$

Wenn man hierin die Exponentialgrösse mittels des *Taylor*schen Lehrsatzes nach Potenzen von ϱ entwickelt und

$$(16.)\qquad x^{(\alpha)} = (-2)^{-\alpha} e^{x^2} \frac{d^\alpha e^{-x^2}}{dx^\alpha},$$

$$(17.)\qquad y^{(\alpha)} = \frac{i^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-yi)^2} t^\alpha dt$$

setzt, wobei $y^{(\alpha)}$ genau dieselbe Function von y, wie $x^{(\alpha)}$ von x, ist, so ergiebt sich:

$$(18.)\qquad E(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{2^\alpha \varrho^\alpha}{\Pi(\alpha)} x^{(\alpha)} y^{(\alpha)},$$

und hieraus folgt wegen (12.):

$$J_m = \Sigma \frac{2^{\alpha_1} x_1^{(\alpha_1)} y_1^{(\alpha_1)}}{\Pi(\alpha_1)} \frac{2^{\alpha_2} x_2^{(\alpha_2)} y_2^{(\alpha_2)}}{\Pi(\alpha_2)} \cdots \frac{2^{\alpha_\nu} x_\nu^{(\alpha_\nu)} y_\nu^{(\alpha_\nu)}}{\Pi(\alpha_\nu)},$$

wenn die Summe sich auf alle Werthe 0, 1, 2, 3 ... der α bezieht, für welche $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = m$. Vermöge dieses Ausdruckes verwandelt sich die Reihe (II.) in

$$(\text{III.})\qquad F(x_1, \dots x_\nu) = \Sigma \frac{2^{\alpha_1+\dots+\alpha_\nu} . A_{\alpha_1,\dots\alpha_\nu}}{\pi^{\frac{1}{2}\nu} \Pi(\alpha_1) \dots \Pi(\alpha_\nu)} x_1^{(\alpha_1)} \dots x_\nu^{(\alpha_\nu)},$$

$$A_{\alpha_1,\dots\alpha_\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, \dots y_\nu) y_1^{(\alpha_1)} \dots y_\nu^{(\alpha_\nu)} e^{-Y} dy_1 \dots dy_\nu,$$

während für $\alpha_1, \dots \alpha_\nu$ alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ... zu setzen sind.

In dieser Form erweist sich unsere Entwicklung leicht als ein specieller Fall der von Herrn *Hermite* gegebenen, auf welche in der Einleitung hingedeutet wurde. Um auch zu diesen allgemeineren Reihen in ähnlicher Weise zu gelangen, wie wir zu (III.) gelangt sind, müsste man auf (8.) und (10.) zurückgehen und in Q statt der Summe der Quadrate der Grössen $\varrho x_1 - y_1$, $\varrho x_2 - y_2$, ... eine beliebige positive quadratische Form eben derselben Grössen einführen. Man wird dadurch zunächst auf eine *einzige*, der Reihe (II.) analoge Reihe geführt. Stellt man darauf das verallgemeinerte J in (9'.), um es nach Potenzen von ϱ entwickeln zu können, durch ein ν-faches Integral dar, in ähnlicher Weise, wie in unserem speciellen Falle J vermöge (12.) und (15.) durch ein Product von ν einfachen Integralen dargestellt wurde, so erhält man für J_m eine Zerfällung in einfachere Bestandtheile, deren jeder das Product einer Function der x in eine davon verschiedene Function der y ist. Da aber der Entwicklungscoefficient J_m in Wahrheit in Bezug auf die x und y symmetrisch ist, so ergiebt sich durch die Vertauschung dieser Grössen noch eine zweite, von der ersten verschiedene Darstellungsform desselben, und auf diese Weise entstehen die *beiden* von Herrn *Hermite* gegebenen Entwicklungen, deren inniger Zusammenhang auch hierdurch aufs Deutlichste hervortritt.

Zum Schlusse mögen noch einige Notizen über die Function $x^{(\alpha)}$ Platz finden. Durch das Integral in (17.) erhält man sehr leicht die bekannten Relationen:

$$\frac{dx^{(\alpha)}}{dx} = \alpha x^{(\alpha-1)}, \quad xx^{(\alpha)} = x^{(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{2} x^{(\alpha-1)}.$$

Die zweite ist ein specieller Fall der folgenden:

$$x^{(\alpha)} x^{(\beta)} = x^{(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha\beta}{2} x^{(\alpha+\beta-2)} + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{2.4} x^{(\alpha+\beta-4)} + \cdots.$$

Nach Potenzen von x geordnet ist:

$$x^{(\alpha)} = x^{\alpha} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1} \frac{x^{\alpha-2}}{2^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2} \frac{x^{\alpha-4}}{2^4} - \cdots.$$

Den Werth des Polynoms $x^{(\alpha)}$ für ein unendlich grosses α hat Herr *Hermite* mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x^{(\alpha)}}{dx^2} - 2x \frac{dx^{(\alpha)}}{dx} + 2\alpha x^{(\alpha)} = 0$$

bestimmt. Um denselben vermittelst des bestimmten Integrales in (17.) abzuleiten, bringe man dasselbe in die Form:

$$(17'.) \qquad x^{(\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{\alpha} \cos(2tx - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\, dt$$

und transformire es durch die Substitution $t = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \vartheta$, so wird:

$$x^{(\alpha)} = K \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}^{\infty} e^{-\vartheta^2 - \theta} \cos(2x\vartheta + x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\, d\vartheta,$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}\alpha} e^{x^2}, \quad \theta = \vartheta\sqrt{2\alpha} - \alpha \log\left(1 + \vartheta\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right).$$

Das in K multiplicirte Integral zerlege man in drei andere T_1, T_2, T_3 mit den Grenzen $-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ und $-m$, $-m$ und m, m und ∞, wobei m positiv und $< \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$. Da θ innerhalb der Integrationsgrenzen beständig positiv ist, so sind

T_1 und T_3 verschwindend klein, sofern nur m mit α zugleich unendlich wird. Man kann aber m so langsam zunehmen lassen, dass in T_2 beständig $\theta = \vartheta^2$ ist; es wird also:

$$T_2 = \cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\int_{-m}^{m} e^{-2\vartheta^2}\cos(2x\vartheta)\,d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi),$$

und somit:

$$x^{(\alpha)} = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}\alpha} e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi).$$

Danzig, im Mai 1866.