Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali.

(*Di* Carlo Somigliana, *a Pavia.*)

In una Nota pubblicata nel vol. 24, serie 2.ª dei *Rendiconti* del Reale Istituto Lombardo ho chiamato *simmetrici* certi sistemi di equazioni lineari, a derivate parziali, di 2.° ordine, i quali sono i più generali, per cui esiste un teorema di reciprocità analogo a quello di Green, per l'equazione di Laplace, e di Betti per le equazioni della elasticità, ed ho cercato di estendere a questi sistemi i metodi classici di integrazione per serie, nel caso in cui il campo di integrazione è limitato da una superficie di 2.° ordine.

Ora mi propongo di dare l'estensione di una altra parte della teoria dell'equazione di Laplace, la rappresentazione per mezzo di integrali definiti, che può, come è noto, dedursi dal teorema di reciprocità, limitandomi però al caso in cui si hanno due sole variabili indipendenti. Quando queste sono in numero maggiore si incontrano difficoltà più gravi, sebbene, in casi speciali, la estensione sia ancora possibile, ad esempio per le equazioni della isotropia elastica.

La formola di Green, e le affini, derivano dalla esistenza di certi integrali speciali (che chiamerò *caratteristici,* come già in un'altra occasione) i quali hanno un punto isolato di singolarità, nel quale essi, o le loro derivate, diventano infiniti secondo una legge determinata. Nel caso nostro dei sistemi simmetrici, non è difficile trovare integrali particolari che soddisfacciano alle condizioni richieste rispetto al punto singolare, ma essi risultano polidromi, e questa proprietà rende generalmente inapplicabili gli ordinari procedimenti. Vi è però un caso di eccezione, quando i diversi rami di questi integrali polidromi si riattaccano fra loro soltanto nel punto di singolarità (ed, al più, anche nel punto all'infinito), poichè allora uno qualunque di questi rami, preso isolatamente, può essere considerato come monodromo, senza che si perda la continuità. Un esempio semplicissimo si ha nella funzione $\lg \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, l'integrale caratteristico ben noto della equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Gli integrali, di cui mi servo nel presente lavoro appartengono a questa categoria; infatti, sebbene formati con funzioni polidrome, essi contengono delle costanti arbitrarie, le quali possono sempre essere determinate in modo che si verifichi il fatto particolare, poc'anzi accennato.

La ricerca di questi integrali ci conduce alla risoluzione di un altro problema, la determinazione, cioè, dell'integrale caratteristico per l'equazione lineare, a coefficienti costanti, con due variabili indipendenti, di un ordine pari qualsiasi; anzi, come è facile vedere, l'un problema coincide coll'altro.

Ne viene quindi ovviamente la estensione (che però qui non sviluppo) ad un'equazione di ordine pari qualunque di quelle ricerche che ho esposto in una Memoria pubblicata nel tom. 18 degli *Annali di Matematica* e relativa all'equazione di 4.° ordine.

§ 1. Forma generale degli integrali.

Si abbia un sistema simmetrico di equazioni a derivate parziali con n funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$ di due variabili indipendenti x, y, ed i secondi membri nulli, cioè un sistema della forma:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{11} u_1 + \Delta_{12} u_2 + \cdots + \Delta_{1n} u_n = 0 \\ \Delta_{21} u_1 + \Delta_{22} u_2 + \cdots + \Delta_{2n} u_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{n1} u_1 + \Delta_{n2} u_2 + \cdots + \Delta_{nn} u_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

dove

$$\Delta_{hs} = \Delta_{sh} = a_{hs} D_x^2 + 2 b_{hs} D_x D_y + c_{hs} D_y^2,$$

e le a_{hs}, b_{hs}, c_{hs} sono costanti reali. Introduciamo un nuovo simbolo di operazione, ponendo:

$$\Delta(D_x, D_y) = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \ldots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \ldots & \Delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix},$$

e intendendo che esso indichi l'operazione rappresentata simbolicamente dallo sviluppo, colle regole ordinarie, del determinante del 2.° membro, sviluppo che supporremo non identicamente nullo.

Similmente porremo:

$$\nabla_{hs} = \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_{hs}},$$

ove nella derivazione Δ_{hs} e Δ_{sh} devono essere considerati come distinti.

Siano ora $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ n nuove funzioni delle variabili x, y e formiamo per le $u_1, u_2, \ldots u_n$ le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \nabla_{11}\Phi_1 + \nabla_{21}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{n1}\Phi_n \\ u_2 = \nabla_{12}\Phi_1 + \nabla_{22}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{n2}\Phi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \nabla_{1n}\Phi_1 + \nabla_{2n}\Phi_2 + \cdots + \nabla_{nn}\Phi_n . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Esse daranno un sistema di integrali per le equazioni (1), se ciascuna delle funzioni Φ_h soddisfa all'equazione a derivate parziali di ordine $2n$ (l'equazione caratteristica di CAUCHY)

$$\Delta(D_x, D_y)\Phi = 0. \quad (3)$$

Difatti l'espressione simbolica

$$\Delta_{h1}\nabla_{s1} + \Delta_{h2}\nabla_{s2} + \cdots + \Delta_{hn}\nabla_{sn},$$

è uguale a Δ od a zero secondo che h è uguale o differente da s.

Se poi nei secondi membri delle (1) invece dello zero si avessero n funzioni note $X_1, X_2, \ldots X_n$, le (2) darebbero ancora un sistema di integrali, qualora le funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ soddisfacessero rispettivamente alle equazioni:

$$\Delta\Phi_1 = X_1, \qquad \Delta\Phi_2 = X_2, \ldots \qquad \Delta\Phi_n = X_n, \quad (4)$$

invece che alla (3).

Se si hanno due sistemi integrali delle (1) $u_1, u_2, \ldots u_n$ e $v_1, v_2, \ldots v_n$, il teorema di reciprocità è espresso da una relazione della forma:

$$\sum_{s=1}^{n} \int (u_s M_s - v_s L_s)\, d l = 0,$$

dove le L_s ed M_s sono funzioni lineari delle derivate prime delle u_s e delle v_s rispetttivamente, e l'integrazione è estesa al contorno l di un campo S nel quale le u_s, v_s sono regolari. Perchè si possano da questo teorema dedurre formole di rappresentazione per le funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$, quando le $v_1, v_2, \ldots v_n$ hanno un punto isolato di singolarità, le derivate di 1.° ordine di queste dovranno avere un infinito di 1.° ordine nel punto singolare (*). Ora i secondi membri delle (2) sono funzioni lineari delle derivate di ordine $2n-2$ delle funzioni Φ_s; noi potremo quindi avere un sistema di integrali che possiedono la richiesta singolarità, quando una delle Φ_s sia tale che le sue derivate di ordine $2n-1$ diventino infinite di 1.° ordine.

Osserviamo ora che anche per la equazione (3) si può stabilire un teorema di reciprocità, poichè mediante note formole di trasformazione d'integrali si ha:

$$\int (U\Delta V - U\Delta V)\,dS = \int F(U,\ V)\,dl,$$

dove $F(U,\ V)$ contiene linearmente le derivate di U e V fino a quelle di ordine $2n-1$. Quindi se U e V soddisfanno la equazione (3) si ha:

$$\int F(U,\ V)\,dl = 0.$$

Ora perchè si possa da questa relazione dedurre una espressione di U mediante un integrale definito [cioè V sia un integrale caratteristico della (3)], dovranno le derivate di V, di ordine $2n-1$, avere un punto di infinito isolato di 1.° ordine.

La determinazione degli integrali caratteristici del sistema (1) si riduce quindi alla determinazione dell'integrale caratteristico della equazione (3).

§ 2. Integrale caratteristico per una equazione di ordine pari.

Consideriamo la funzione $\Delta(x,\ y)$ che si ottiene sostituendo le variabili $x,\ y$ ai simboli $D_x,\ D_y$ nella espressione simbolica $\Delta(D_x,\ D_y)$; essa sarà omogenea, di grado $2n$, e potremo porre quindi:

$$\Delta(x,\ y) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} y + \cdots + a_n y^{2n}.$$

Noi supporremo che essa non possa mai annullarsi per valori reali di $x,\ y$ non contemporaneamente nulli. L'equazione:

$$\Delta\left(\frac{x}{y},\ 1\right) = 0,$$

avrà allora $2n$ radici complesse, coniugate a due a due, quando si consideri

(*) Cioè diventare infinite come $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, per $x=0.\ y=0$.

il rapporto $\frac{x}{y}$, come incognita. Noi rappresenteremo queste radici con

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \ldots \quad \Pi_n$$
$$\Pi'_1, \quad \Pi'_2, \ldots \quad \Pi'_n,$$

ponendo:

$$\Pi_s = p_s + i q_s \qquad i = \sqrt{-1}$$
$$\Pi'_s = p_s - i q_s \qquad q_s \gtrless 0,$$

e supporremo, dapprima, che siano tutte distinte.

Avremo allora:

$$\Delta(x, y) = a_0 (x - \Pi_1 y)(x - \Pi'_1 y) \cdots (x - \Pi'_n y),$$

e quindi anche:

$$\Delta(D_x, D_y) = a_0 (D_x - \Pi_1 D_y)(D_x - \Pi'_1 D_y) \cdots (D_x - \Pi'_n D_y),$$

e perciò l'integrale generale della (3) sarà:

$$\Phi = f_1(\Pi_1 x + y) + g_1(\Pi'_1 x + y) + \cdots + g_n(\Pi'_n(\Pi'_n x + y),$$

cioè sarà la somma di $2n$ funzioni arbitrarie dei $2n$ fattori lineari della forma binaria:

$$\Delta(y, -x) = a_0 y^{2n} - a_1 y^{2n-1} x + \cdots + a_{2n} x^{2n}.$$

Ciò posto, consideriamo il seguente integrale della nostra equazione:

$$Z = \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s + i\mu_s)(\Pi_s x + y)^{2n-2} \lg(\Pi_s x + y), \tag{5}$$

ove le λ_s, μ_s sono $2n$ costanti reali, per ora, arbitrarie. Si ha:

$$\lg(\Pi_s x + y) = \lg \sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} + i \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y},$$

quindi se poniamo:

$$(p_s x + y + i q_s x)^{2n-2} = \varphi_s + i\psi_s \qquad Z = Z_1 + i Z_2,$$

saranno φ_s, ψ_s due funzioni omogenee di grado $2n$ delle x, y, e avremo:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s) \lg \sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} - \sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y} \\ Z_2 &= \sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) \lg \sqrt{(p_s x + y)^2 + q_s^2 x^2} + \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s) \operatorname{arco\,tg} \frac{q_s x}{p_s x + y}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Queste due funzioni sono due integrali particolari della nostra equazione, in cui non vi sono più espressioni immaginarie, e sono in generale polidrome. Difatti quando noi, nel piano delle variabili x, y, compiamo un giro positivo attorno al punto comune di singolarità per le funzioni *arco tangente*, che è l'origine $x = y = 0$, i valori di Z_1 e Z_2 aumentano rispettivamente di

$$-2\pi \sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) \quad \text{e} \quad 2\pi \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s),$$

quantità generalmente non nulle, e funzioni delle coordinate del punto di partenza.

Però, se le costanti λ_s, μ_s possono determinarsi in modo che l'una, o l'altra, di queste quantità sia identicamente nulla (cioè nulla qualunque siano i valori di x, y) la Z_1, o la Z_2, potrà essere considerata come monodroma, quando ne sia fissato il valore in un punto, che non sia il punto $x = y = 0$. Ora le φ_s, ψ_s sono $2n$ forme binarie differenti di grado $2n - 2$, ed è noto che fra m forme binarie di grado $m - 2$ esiste sempre almeno una relazione lineare a coefficienti non tutti nulli. Basterà quindi prendere per le costanti

$$\mu_1, \quad \lambda_1, \quad \mu_2, \quad \lambda_2, \ldots \quad \mu_n, \quad \lambda_n,$$

oppure per le costanti

$$\lambda_1, \quad -\mu_1, \quad \lambda_2, \quad -\mu_2, \ldots \quad \lambda_n, \quad -\mu_n,$$

delle quantità proporzionali a questi coefficienti, perchè si abbia:

$$\sum_{s=1}^{n} (\mu_s \varphi_s + \lambda_s \psi_s) = 0,$$

oppure:

$$\sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \varphi_s - \mu_s \psi_s) = 0.$$

Per determinare quale sia la forma di questa relazione identica, che è il risultato della eliminazione di x^{2n-2}, $x^{2n-1}y, \ldots$, y^{2n-2} fra le φ_s, ψ_s, poniamo:

$$\Pi_s = \rho_s e^{i\omega_s}.$$

Avremo allora:

$$\varphi_s + i\psi_s = (\rho_s e^{i\omega_s} x + y)^{2n-2} = \sum_{h=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{h} \rho^{2n-h-2} e^{i(2n-h-2)\omega_s} x^{2n-h-2} y^h,$$

e quindi:

$$\varphi_s = \rho_s^{2n-2} \cos(2n-2)\omega_s \cdot x^{2n-2} + \binom{2n-2}{1} \rho_s^{2n-3} \cos(2n-3)\omega_s \cdot x^{2n-3} y + \cdots$$
$$+ \binom{2n-2}{2n-3} \rho_s \cos\omega_s \, x y^{2n-3} + y^{2n-2}$$

$$\psi_s = \rho_s^{2n-2} \operatorname{sen}(2n-2)\omega_s \cdot x^{2n-2} + \binom{2n-2}{1} \rho_s^{2n-3} \operatorname{sen}(2n-3)\omega_s \cdot x^{2n-3} y + \cdots$$
$$+ \binom{2n-2}{2n-3} \rho_s \operatorname{sen}\omega_s \, x y^{2n-3}.$$

La relazione fra le φ_s, ψ_s si ottiene formando la matrice (di $2n$ righe e $2n-1$ colonne) dei coefficienti delle φ_s, ψ_s e ponendo uguale a zero il determinante che si ottiene da questa matrice coll'aggiungere una colonna formata colle φ_s, ψ_s, nello stesso ordine con cui ne sono stati presi i coefficienti. Questa relazione è perciò la seguente:

$$\begin{vmatrix} \rho_1^{2n-2}\cos(2n-2)\omega_1 & \rho_1^{2n-3}\cos(2n-3)\omega_1 \dots & \rho_1\cos\omega_1 & 1 & \varphi_1 \\ \rho_1^{2n-2}\operatorname{sen}(2n-2)\omega_1 & \rho_1^{2n-3}\operatorname{sen}(2n-3)\omega_1 \dots & \rho_1\operatorname{sen}\omega_1 & 0 & \psi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_n^{2n-2}\cos(2n-2)\omega_n & \rho_n^{2n-3}\cos(2n-3)\omega_1 \dots & \rho_n\cos\omega_n & 1 & \varphi_n \\ \rho_n^{2n-2}\operatorname{sen}(2n-2)\omega_n & \rho_n^{2n-3}\operatorname{sen}(2n-3)\omega_1 \dots & \rho_n\operatorname{sen}\omega_n & 0 & \psi_n \end{vmatrix} = 0.$$

Se tutti i minori di ordine $2n-1$ della matrice considerata fossero nulli, i coefficienti della relazione fra le funzioni date sarebbero formati coi minori di ordine massimo che non sono tutti nulli.

Noi supporremo che sia la Z_1 la funzione che si vuol rendere monodroma, e quindi scriveremo la relazione considerata sotto la forma:

$$\sum_{s=1}^{n}(\mu_s\varphi_s + \lambda_s\psi_s) = 0. \tag{7}$$

I coefficienti μ_s, λ_s si potranno poi esprimere facilmente in funzione delle p_s, q_s mediante le formole di moltiplicazione per le funzioni seno e coseno, poichè si ha:

$$p_s = \rho_s\cos\omega_s \qquad q_s = \rho_s\operatorname{sen}\omega_s.$$

Osserviamo ora che, quando sia verificata la (7), non solo la funzione Z_1 potrà essere considerata come monodroma, quando ne sia fissato il valore in un punto, che non sia il punto $x=y=0$, ma tali potranno considerarsi anche tutte le sue derivate. Difatti le derivate della funzione *arco tangente* sono monodrome, e quindi la polidromia delle derivate di Z_1 non può derivare che dalle funzioni *arco tangente,* in esse contenute. Per una derivata di ordine h rispetto ad x, e t rispetto ad y si avrà quindi:

$$\frac{\partial^{h+t}Z_1}{\partial x^h\partial y^t} = -\sum_{s=1}^{n}\left(\mu_s\frac{\partial^{h+t}\varphi_s}{\partial x^h\partial y^t} + \lambda_s\frac{\partial^{h+t}\psi_s}{\partial x^h\partial y^t}\right)\text{arco tg}\,\frac{q_s x}{p_s x + y} + \cdots,$$

ove la parte scritta è la sola che può essere polidroma. Ma dalla (7) si ha:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\mu_s\frac{\partial^{h+t}\varphi}{\partial x^h\partial y^t} + \lambda_s\frac{\partial^{h+t}\psi_s}{\partial x^h\partial y^t}\right) = 0,$$

e questa relazione ha rispetto alla derivata considerata lo stesso significato che la (7) per la Z_1; perciò anche questa derivata gode delle stesse proprietà della Z_1.

Passiamo ora a considerare il caso in cui l'equazione:

$$\Delta\left(\frac{x}{y},\ 1\right) = 0,$$

ha delle radici multiple. Basterà considerare il caso che una delle radici, ad esempio Π_1, sia multipla secondo il numero m. L'integrale generale della equazione:

$$\Delta(D_x,\ D_y)\Phi = 0,$$

si può allora rappresentare nel modo seguente:

$$\Phi = \sum_{h=1}^{m} (\Pi'_1 x + y)^{h-1} f_h(\Pi_1 x + y) + \sum_{h=1}^{m} (\Pi_1 x + y)^{h-1} g_h(\Pi'_1 x + y)$$
$$+ \sum_{h=m+1}^{n} f_h(\Pi_{h-m+1} x + y) + \sum_{h=m+1}^{n} g_h(\Pi_{h-m+1} x + y).$$

Questa espressione contiene infatti $2n$ funzioni arbitrarie, ed inoltre posto:

$$F_h = (\Pi'_1 x + y)^{h-1} f_h(\Pi_1 x + y),$$

si ha, per $s \leqq h - 1$,

$$(D_x - \Pi_1 D_y)^s F_h = (h-1)\cdots(h-s)(\Pi'_1 - \Pi_1)^s (\Pi'_1 x + y)^{h-s-1} f_h(\Pi_1 x + y),$$

e quindi:

$$(D_x - \Pi_1 D_y)^h F_h = 0.$$

Ora siccome h può assumere i valori $1, 2, \dots m$, l'espressione $\Delta(D_x,\ D_y)$ contiene certamente il fattore $(D_x - \Pi_1 D_y)^h$, e quindi si avrà:

$$\Delta F_h = 0.$$

Potremo dunque prendere invece della funzione Z, data dalla (5), la seguente:

$$\left.\begin{aligned} Z = \sum_{h=1}^{m} (\lambda_h + i\mu_h)(\Pi'_1 x + y)^{h-1}(\Pi_1 x + y)^{2n-h-1} \lg(\Pi_1 x + y) \\ + \sum_{s=m+1}^{n} (\lambda_s + i\mu_s)(\Pi_{s-m+1} x + y)^{2n-2} \lg(\Pi_{s-m+1} x + y), \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

ove compaiono ancora $2n$ costanti arbitrarie.

Per vedere come possano essere determinate queste costanti allo scopo di ottenere la monodromia per la parte reale di Z, poniamo:

$$\overline{\varphi_h} + i\overline{\psi_h} = (\Pi'_1 x + y)^{h-1}(\Pi_1 x + y)^{2n-h-1} \qquad Z = Z_1 + iZ_2,$$

ed avremo:

$$\left.\begin{aligned}Z_1 = \lg\sqrt{(p_1x+y)^2+q_1^2x^2}\cdot\sum_{h=1}^{m}(\lambda_h\overline{\varphi_h}-\mu_h\overline{\psi_h}) - \text{arco}\,\text{tg}\,\frac{q_1x}{p_1x+y}\cdot\sum_{h=1}^{m}(\mu_h\overline{\varphi_h}+\lambda_h\overline{\psi_h})\\ +\sum_{s=m+1}^{n}(\lambda_s\varphi_s-\mu_s\psi_s)\lg\sqrt{(p_sx+y)^2+q_s^2x^2}-\sum_{s=m+1}^{n}(\mu_s\varphi_s+\lambda_s\psi_s)\,\text{arco}\,\text{tg}\,\frac{q_sx}{p_sx+y}\,.\end{aligned}\right\}\quad(6')$$

Ora perchè questa espressione possa essere considerata come monodroma basta che si abbia identicamente

$$\sum_{h=1}^{m}(\mu_h\overline{\varphi_h}+\lambda_h\overline{\psi_h})+\sum_{s=m+1}^{n}(\mu_s\varphi_s+\lambda_s\psi_s)=0. \qquad (7')$$

Ora le $2n$ forme, di grado $2n-2$, $\overline{\varphi_h}$, $\overline{\psi_h}$, φ_s, ψ_s sono in generale legate da una relazione lineare, e quindi si potranno determinare le costanti λ_h, μ_h, λ_s, μ_s, come nel caso, in cui non esistevano radici multiple.

Merita speciale menzione il caso in cui tutte le radici si riducono a due sole coniugate, cioè quando $m=n$. La (7') diviene allora:

$$\sum_{h=1}^{n}(\mu_h\overline{\varphi_h}+\lambda_h\overline{\psi_h})=0,$$

e la (6') ci dà:

$$Z_1=\lg\sqrt{(p_1x+y)^2+q_1^2x^2}\cdot\sum_{h=1}^{n}(\lambda_h\overline{\varphi_h}-\mu_h\overline{\psi_h}),$$

quindi scompaiono le funzioni *arco tangente* dalla espressione di Z_1. È facile vedere quale è in tal caso la funzione di grado $2n-2$ che moltiplica il logaritmo. Difatti la funzione

$$Z=(\Pi'_1x+y)^{n-1}(\Pi_1x+y)^{n-1}\lg(\Pi_1x+y),$$

è, per quanto si è visto, un integrale dell'equazione:

$$(D_x-\Pi_1D_y)^n(D_x-\Pi'_1D_y)^n\Phi=0,$$

a cui si riduce la nostra equazione $\Delta\Phi=0$, e separando la parte reale dalla immaginaria troviamo:

$$Z_1=\left\{(p_1x+y)^2+q_1^2x^2\right\}^{n-1}\lg\sqrt{(p_1x+y)^2+q_1^2x^2}.$$

Questo integrale, quando $p_1=0$ $q_1=1$ $n=2$, si riduce ad uno ben conosciuto.

Per le applicazioni che abbiamo di mira conviene cercare la forma delle derivate degli integrali che abbiamo determinato. Dalla (5) si ha:

$$\frac{\partial^{h+t}Z}{\partial x^h\partial y^t}=\sum_{s=1}^{n}(\lambda_s+i\mu_s)\Pi_s^h(\Pi_sx+y)^{2n-h-t-2}\left\{A_{ht}^{(s)}\lg(\Pi_sx+y)+B_{ht}^{(s)}\right\},$$

dove $A_{ht}^{(s)}$, $B_{ht}^{(s)}$ sono costanti. Per $h+t=2n-2$, il secondo membro si riduce ad una funzione lineare con coefficienti costanti delle espressioni

$$\lg(\Pi_1 x+y), \qquad \lg(\Pi_2 x+y), \ldots, \qquad \lg(\Pi_n x+y).$$

Le derivate di ordine $2n-1$ di Z_1 saranno le parti reali delle derivate di queste funzioni; ed avranno evidentemente un punto di infinito isolato, di 1.° ordine, nell'origine $x=y=0$.

Nel caso in cui si ha una radice multipla, le derivate della funzione

$$F_h=(\Pi'_1 x+y)^{h-1}(\Pi_1 x+y)^{2n-h-1}\lg(\Pi_1 x+y),$$

che sono di ordine non superiore a $2n-h-1$ sono della forma:

$$H_h(x, y)\lg(\Pi_1 x+y)+K_h(x, y),$$

ove H, K sono funzioni omogenee, razionali *intere* di grado uguale a $2n-2-\nu$, se ν è l'ordine della derivata. Se invece ν è maggiore di $2n-h-1$, le K sono funzioni omogenee, razionali *fratte,* ed ancora dello stesso grado; inoltre il loro denominatore è la potenza

$$(\Pi_1 x+y)^{\nu-(2n-h-1)}.$$

Di qui concludiamo che le derivate d'ordine $2n-2$ di Z, quando questa funzione è data dalla (5') sono della forma seguente:

$$\sum_{s=1}^{n-m+1} A_s \lg(\Pi_s x+y)+\sum_{h=1}^{m} \frac{R_{h-1}(x, y)}{(\Pi_1 x+y)^{h-1}},$$

dove le $R_{h-1}(x, y)$ sono omogenee, razionali, intere, di grado $h-1$.

Anche in questo caso, dunque, le derivate d'ordine $2n-1$ della Z_1 avranno un punto di infinito isolato, di 1.° ordine, nell'origine.

Perciò la funzione Z_1 data dalla (5) o (5') ha tutte le proprietà richieste per l'integrale caratteristico della equazione

$$\Delta(D_x, D_y)\Phi=0,$$

quando, ben inteso, si ammetta che la forma $\Delta(x, y)$ sia positiva.

§ 3. Teorema di reciprocità e formole integrali pei sistemi simmetrici.

Le equazioni (1) possono in infiniti modi essere poste sotto la forma:

$$\frac{\partial X_{11}}{\partial x}+\frac{\partial X_{12}}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial X_{21}}{\partial x}+\frac{\partial X_{22}}{\partial y}=0\ldots \qquad \frac{\partial X_{n1}}{\partial x}+\frac{\partial X_{n2}}{\partial y}=0. \qquad (1')$$

Difatti se poniamo:

$$X_{r1} = \sum_{s=1}^{n} \left(a_{rs} \frac{\partial u_s}{\partial x} + (b_{rs} - \varepsilon_{rs}) \frac{\partial u_s}{\partial y} \right)$$

$$X_{r2} = \sum_{s=1}^{n} \left((b_{rs} + \varepsilon_{rs}) \frac{\partial u_s}{\partial x} + c_{rs} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right) \qquad r = 1, 2, \ldots n,$$

ove le ε_{rs} sono costanti arbitrarie, si ha:

$$\frac{\partial X_{r1}}{\partial x} + \frac{\partial X_{r2}}{\partial y} = \sum_{s=1}^{n} \Delta_{rs} u_s.$$

Noi supporremo che le costanti ε_{rs} soddisfacciano alle relazioni:

$$\varepsilon_{rs} + \varepsilon_{sr} = 0,$$

qualunque siano gli indici r ed s, uguali o differenti. Le costanti ε_{rs} si riducono così ad $\frac{n(n-1)}{2}$.

In tale ipotesi, se indichiamo con Y_{r1}, Y_{r2} le espressioni analoghe alle X_{r1}, X_{r2} formate con un nuovo sistema di funzioni $v_1, v_2, \ldots v_n$, si ha:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(X_{s1} \frac{\partial v_s}{\partial x} + X_{s2} \frac{\partial v_s}{\partial y} \right) = \sum_{s=1}^{n} \left(Y_{s1} \frac{\partial u_s}{\partial x} + Y_{s2} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right),$$

e quindi, se tanto le u_s, come le v_s soddisfanno al sistema di equazioni (1'), per note formole di trasformazione di integrali, si ha il teorema di reciprocità

$$\sum_{s=1}^{n} \int \left(X_{s1} \frac{\partial x}{\partial n} + X_{s2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) v_s \, dl = \sum_{s=1}^{n} \int \left(Y_{s1} \frac{\partial x}{\partial n} + Y_{s2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) u_s \, dl, \tag{8}$$

ove l indica il contorno di un campo, in cui le u_s, v_s sono regolari, ed n la normale a questo contorno, che suolsi supporre diretta verso l'interno del campo.

Inoltre tutte le volte che sarà possibile determinare un sistema di valori per le costanti ε_{rs}, tali che la forma quadratica

$$\sum_{s=1}^{n} \left(X_{s1} \frac{\partial u_s}{\partial x} + X_{s2} \frac{\partial u_s}{\partial y} \right), \tag{9}$$

delle $2n$ derivate delle funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$ sia essenzialmente positiva e non si annulli che quando tutte queste derivate sono uguali a zero, le (1), o le (1'), determineranno in modo unico le n funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$ quando ne siano dati i valori al contorno e le determineranno all'infuori di altrettante costanti arbitrarie, quando siano dati, al contorno, i valori delle n funzioni $X_{s1}\frac{\partial x}{\partial n}+X_{s2}\frac{\partial y}{\partial n}$.

Se si indica con 2Π la forma quadratica rappresentata dalla espressione (9), si ha:

$$X_{s1}=\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{\partial u_s}{\partial x}} \qquad X_{s2}=\frac{\partial \Pi}{\partial \frac{\partial u_s}{\partial y}},$$

e le equazioni (1) od (1') sono quelle che risultano dalla equazione

$$\delta\int \Pi\, dS=0,$$

quando si considerino le variazioni δu_1, $\delta u_2, \ldots \delta u_n$ come arbitrarie.

Ora noi possiamo ottenere un sistema di integrali delle nostre equazioni prendendo per una qualunque delle funzioni Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_n$ nelle (2), la funzione Z_1 data dalla (5), o dalla (5'). Indicando con $v_1^{(r)}$, $v_2^{(r)}, \ldots v_n^{(r)}$ gli integrali che così si ottengono quando $\Phi_1=0, \ldots \Phi_r=Z_1, \ldots \Phi_n=0$, si avrà:

$$v_1^{(r)}=\nabla_{r1}Z_1, \qquad v_2^{(r)}=\nabla_{r2}Z_1, \ldots \qquad v_n^{(r)}=\nabla_{rn}Z_1,$$

ed avremo n di questi sistemi integrali, ponendo $r=1,\ 2, \ldots n$.

La forma che avranno questi integrali risulta dalle considerazioni fatte alla fine del paragrafo precedente. Quando la equazione $\Delta\left(\frac{x}{y},\ 1\right)=0$ non ha radici multiple (e ammettendo che le sue radici siano tutte complesse) si avrà:

$$v_1^{(r)}\equiv A_{11}^{(r)}\lg(\Pi_1 x+y)+A_{12}^{(r)}\lg(\Pi_2 x+y)+\cdots+A_{1n}^{(r)}\lg(\Pi_n x+y)+\text{cost.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n^{(r)}\equiv A_{n1}^{(r)}\lg(\Pi_1 x+y)+A_{n2}^{(r)}\lg(\Pi_2 x+y)+\cdots+A_{nn}^{(r)}\lg(\Pi_n x+y)+\text{cost.},$$

dove le $A_{pq}^{(r)}$ sono costanti ed il segno $\equiv$ indica che delle espressioni dei secondi membri si deve prendere la parte reale.

Quando invece esiste una radice multipla Π_1, si avrà:

$$v_1^{(r)}\equiv B_{11}^{(r)}\lg(\Pi_1 x+y)+\cdots+B_{1,n-m+1}^{(r)}\lg(\Pi_{n-m+1}x+y)+\frac{H_1^{(r)}(x,\ y)}{(\Pi_1 x+y)^{m-1}}+\text{cost.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n^{(r)}\equiv B_{n1}^{(r)}\lg(\Pi_1 x+y)+\cdots+B_{n,n-m+1}^{(r)}\lg(\Pi_{n-m+1}x+y)+\frac{H_n^{(r)}(x,\ y)}{(\Pi_1 x+y)^{m-1}}+\text{cost.},$$

dove le $B_{pq}^{(r)}$ sono costanti, e le $H^{(r)}$ sono funzioni omogenee, razionali, intere di grado $m-1$.

Tanto in un caso che nell'altro le $v_1^{(r)}, \dots v_n^{(r)}$ avranno un solo punto isolato di singolarità per $x = y = 0$, e potranno essere considerate, come monodrome. Perciò anche le espressioni:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_1^{(2)} + \cdots + c_n v_1^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V_n = c_1 v_n^{(1)} + c_2 v_n^{(2)} + \cdots + c_n v_n^{(n)}, \end{array}\right\} \tag{10}$$

daranno un sistema integrale che gode delle stesse proprietà, quando per c_1, $c_2, \dots c_n$ si prendano delle costanti qualsiasi.

Applichiamo ora il teorema di reciprocità (8) ad un campo S, dal quale sia stato escluso il punto $x = y = 0$ mediante una piccolissima curva σ di normale ν, descritta attorno ad esso. Osserviamo dapprima che, quando la piccola area che esclude l'origine diviene evanescente si avrà:

$$\lim \int_\sigma \left(X_{s1} \frac{\partial x}{\partial \nu} + X_{s2} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) V_s \, d\sigma = 0$$

$$\lim \int_\sigma \left(Y_{s1} \frac{\partial x}{\partial \nu} + Y_{s2} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) u_s \, d\sigma = C_s u_s^{(0)},$$

dove $u_s^{(0)}$ è il valore di u_s per $x = y = 0$ e C_s una espressione costante, che contiene linearmente le $c_1, c_2, \dots c_n$.

Perciò il teorema di reciprocità ci dà:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s u_s^{(0)} = \sum_{s=1}^{n} \int \left(X_{s1} \frac{\partial x}{\partial n} + X_{s2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) V_s \, dl - \sum_{s=1}^{n} \int \left(Y_{s1} \frac{\partial x}{\partial n} + Y_{s2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) u_s \, dl.$$

Ora noi potremo, in generale, determinare le costanti $c_1, c_2, \dots c_n$ in modo che, delle n quantità $C_1, C_2, \dots C_n$, una sia uguale alla unità e le rimanenti siano nulle, cioè si abbia:

$$C_1 = 0, \dots \quad C_{r-1} = 0, \quad C_r = 1, \quad C_{r+1} = 0, \dots \quad C_n = 0. \tag{11}$$

Difatti queste equazioni costituiscono un sistema lineare con n incognite (*). Facendo $r = 1, 2, \dots n$ avremo così n sistemi di valori per le costanti c_1, $c_2, \dots c_n$, a cui corrisponderanno altrettanti sistemi di integrali dati dalle (10).

(*) Non entriamo a discutere i casi di non risolubilità di questo sistema, poichè ci allontaneremmo troppo dal nostro scopo, che è di dimostrare la esistenza in via generale delle formole finali (12).

Indicando con $V_1^{(r)}, V_2^{(r)}, \dots V_n^{(r)}$ quello che corrisponde ai valori delle c_1, $c_2, \dots c_n$ dati dalle (11), e con $Y_{s1}^{(r)}, Y_{s2}^{(r)}$ le Y_{s1}, Y_{s2} ad esso corrispondenti, avremo:

$$\left.\begin{aligned} u_r^{(0)} = \sum_{s=1}^{n} \int \left(X_{s1} \frac{\partial x}{\partial n} + X_{s2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) V_s^{(r)} dl - \sum_{s=1}^{n} \left(Y_{s1}^{(r)} \frac{\partial x}{\partial n} + Y_{s2}^{(r)} \frac{\partial y}{\partial n} \right) u_s dl \\ r = 1, 2, \dots n. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Sono queste le formole alle quali volevamo arrivare e che dànno una estensione del teorema di reciprocità analoga a quella del teorema di Green. Da esse, cambiando le variabili x, y in $x - x_0$, $y - y_0$ nelle $V_s^{(r)}$, si ottengono immediatamente le formole che rappresentano le funzioni $u_1, u_2, \dots u_n$ in un punto qualunque del campo (x_0, y_0), mediante i loro valori, e quelli delle loro derivate, al contorno.

Per arrivare alle formole (12) noi abbiamo introdotta la condizione che la forma $\Delta(x, y)$ non si annullasse per valori reali delle variabili, eccetto che per la coppia di valori $x = y = 0$. Non sarà inopportuno notare che questa condizione è *distinta* dall'altra che sia positiva la forma quadratica Π, e che pure conviene ammettere, quando si vuol conservare la proprietà che il sistema di equazioni studiato possa definire un sistema unico di integrali. Ciò non avviene nel caso di una sola equazione, poichè allora le due forme Δ e Π coincidono.

Basterà che accenniamo alla possibilità di estendere le formole (12) al caso più generale, già indicato da principio (§ 1), in cui nei secondi membri delle equazioni (1) si hanno n funzioni note $X_1, X_2, \dots X_n$, poichè tale estensione non ha nulla di diverso dalle analoghe, che si ottengono nei casi noti. Piuttosto osserveremo che le formole, alle quali così si arriva, dimostrano il teorema reciproco di quello contenuto nelle equazioni (2) (4). Difatti è facile constatare che tali formole possono essere ridotte alla forma che hanno le (2), poichè tale è quella degli integrali ausiliari caratteristici $V_1^{(r)}, \dots V_n^{(r)}$.

Possiamo quindi concludere che non solo le (2) dànno un sistema integrale delle equazioni (1) generalizzate, quando le $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ soddisfanno alle equazioni (4), ma che inoltre, dato un sistema integrale qualunque, si ha (colle ipotesi ammesse) un metodo per determinare le funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ che riducono tale sistema alla forma (2).

Pavia, Dicembre, 1893.