VI. *Die galvanische Kette; von W. G. Hankel.*

(Aus den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl., vom 14. Nov. 1889; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Electromotorische Kraft.

Die materiellen Molecüle der Körper befinden sich fortdauernd in einem electrischen Zustande, der durch ihre Constitution bedingt ist und sich sofort wieder herstellt, wenn er durch den Eingriff äusserer Einwirkungen beeinflusst worden war. Betrachten wir die electrischen Vorgänge als rotirende Bewegung, so liegen auf der Oberfläche der Molecüle rotirende Schwingungen, deren Axen normal zur Oberfläche sind; dieselben können je nach der Gestalt und der Zusammensetzung der Molecüle auf der ganzen Oberfläche gleiche Stärke und gleichen Sinn besitzen, oder auf den verschiedenen Theilen der Oberfläche verschieden sein. Der Einfachheit wegen sollen im Folgenden die Schwingungen überall auf der ganzen Oberfläche als gleich gross und von gleichem Sinne angenommen werden.

Wird durch Zusammenhäufung von Molecülen derselben Art ein Körper von endlichen Dimensionen gebildet, so werden auf jedem im Inneren liegenden Molecüle die rotirenden Bewegungen durch die umliegenden Molecüle gehemmt, weil an den Berührungsstellen die Rotationen auf den beiden Molecülen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse besitzen. Es bleiben nur die an der äusseren Grenzfläche des Körpers befindlichen Schwingungen übrig. Sobald aber nun der Körper mit der Erde in leitende Verbindung gebracht wird, überträgt sich auf die Oberfläche eine Schicht entgegengesetzter Electricität und der Körper erscheint unelectrisch.

Legt man auf einen solchen nicht electrischen Leiter, z. B. auf eine Kugel aus Zink, eine Scheibe eines vollkommenen Isolators, so wird dadurch der Zustand der Zinkkugel nicht wesentlich verändert, denn die durch die Ableitung zur

Erde angehäufte electrische Schicht verhält sich gegen den Isolator wie zuvor gegen die Luft.

Anders gestaltet sich der Vorgang, wenn eine durch Ableitung unelectrisch gemachte und darauf wieder isolirte Zinkkugel mit einer zweiten ebensolchen berührt wird. Die in den zur Berührung kommenden Punkten befindliche, den unelectrischen Zustand bedingende Schicht wird durch die Berührung der leitenden Massen verdrängt, und es treten die Rotationen der beiden sich berührenden Molecüle einander gegenüber. Diese Rotationen sind aber gleich gross und von entgegengesetzter Richtung, heben sich also auf und der Berührungspunkt verhält sich wie ein innerer Punkt der übrigen Masse. Das System beider Kugeln bleibt also unelectrisch.

Wenn jedoch die beiden zur Berührung kommenden Kugeln aus Substanzen bestehen, deren Molecüle verschieden starke und auch wohl in entgegengesetzter Richtung erfolgende Schwingungen haben, so heben sich an der Berührungsstelle die Rotationen der beiden aneinanderstossenden Molecüle nicht auf; es entsteht vielmehr daselbst in der Berührungsebene eine Rotation, deren Grösse gleich ist der Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten beider Molecüle, Die Rotationsrichtung auf jedem Molecüle ist dabei auf die auf seiner Oberfläche nach aussen gerichtete Normale bezogen. Sind die Schwingungen auf dem einen Molecüle positiv, auf dem anderen negativ, so haben sie in der Berührungsebene gleiche Drehungsrichtungen und addiren sich. Geschehen auf den beiden Molecülen die Rotationen in derselben Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, so resultirt nur eine dem Ueberschuss der grösseren über die geringere entsprechende Rotation.

Diese in der Berührungsebene auftretenden Rotationen verbreiten sich über die beiden sich berührenden Molecüle und es entsteht auf der einen Seite jener Ebene ein positives und auf der anderen ein negatives Molecül.

Wie nun ein electrisch geladener Körper auf einen in der Nähe befindlichen Leiter[1]) derart einwirkt, dass im Inneren

1) Die Vorgänge bei der Vertheilung in Leitern werde ich in einer späteren Mittheilung genauer behandeln.

des letzteren die Molecüle in rotirende Bewegungen um die von dem Körper ausgehenden Strahlen als Axen versetzt werden, ebenso übertragen sich die Rotationsbewegungen der sich berührenden Molecüle der beiden Kugeln auf das Innere der ihnen angehörigen Massen. An der Grenzfläche gegen den Nichtleiter treten sie dann als freie Electricität auf.

Die durch die Berührung erzeugte electromotorische Kraft erscheint also als eine Rotationsbewegung von bestimmter Grösse.

Zu einer gleichen Auffassung der electromotorischen Kraft kommen wir bei Betrachtung der Inductionsvorgänge. Ein in einen Leiterkreis eintretender Strom erregt in dem benachbarten Stücke eines zweiten Leiterkreises einen inducirten Strom. Die Einwirkung des entstehenden Stromes auf den benachbarten Leitertheil besteht in Erregung von Rotationsbewegungen, welche dann für die entfernteren Theile des zweiten Kreises die electromotorische Kraft darstellen.

Electrischer Strom.

Werden die Pole eines galvanischen Elementes durch einen Leiter verbunden, so sucht die electromotorische Kraft e in den Molecülen desselben rotirende Bewegungen zu erzeugen. Diesem Bestreben stellen die einzelnen Molecüle einen von ihrer Beschaffenheit abhängigen Widerstand entgegen: die vorhandene electromotorische Kraft wird nun zum Theil verbraucht, um diesen Widerstand zu überwinden, und blos der noch übrige Theil bleibt als Rotation erhalten, welche in ihren Wirkungen nach aussen den electrodynamischen Effect hervorbringt. Je grösser der Widerstand ist, welchen die Substanz der Bewegung ihrer Molecüle entgegensetzt, um so mehr wird die electromotorische Kraft zu seiner Ueberwindung in Anspruch genommen, und um so geringer fällt die Geschwindigkeit der Rotation, d. h. die Stärke des Stromes aus. Die Summe der Rotationsgeschwindigkeiten ist in allen Querschnitten des Drahtes dieselbe, wenn der Strom constant geworden ist.

Die Verhältnisse bei der Strombildung zeigen eine gewisse Analogie mit dem Fliessen des Wassers durch Röhren. Ist in einem Gefässe eine Druckhöhe H gegeben, und fliesst die Flüssigkeit durch eine am Boden desselben befindliche horizontale cylindrische Röhre aus, so wird ein Theil h der Druckhöhe verbraucht, um den entgegengesetzten Widerstand zu überwinden, und nur der Rest h' erscheint als eine in allen Querschnitten der Röhre gleich grosse Geschwindigkeit.

Stärke des electrischen Stromes.

Es sei ein einziges[1]) galvanisches Element von der electromotorischen Kraft e gegeben, die wir uns in einem Querschnitte, z. B. in demjenigen, in welchem die beiden verschiedenen Metalle sich berühren, vereinigt denken wollen. Wird nun diese Kette durch einen Leiter vom Widerstande U geschlossen, so erhält man den in ihr entstehenden Strom $i = e - U$; d. h. es wird von der electromotorischen Kraft e unter den gegebenen Umständen ein Theil U absorbirt oder zur Ueberwindung des Widerstandes im Schliessungskreise verwendet, sodass nur der Rest $e - U$ als Strom auftritt. e und U müssen dabei mit demselben Maasse gemessen sein; in eben demselben Maasse erhält man dann auch die Stromstärke i ausgedrückt.

Bei dem bisherigen Verfahren zur Bestimmung der electromotorischen Kraft und des sogenannten Widerstandes werden dieselben in verschiedenen Maassen gefunden, und es kann daher aus solchen Angaben der Werth von i nach der obigen Formel nicht erhalten werden. Weiterhin werde ich ein Verfahren angeben, und seine Richtigkeit durch das Experiment beweisen, bei welchem e und U in gleichen Einheiten gemessen sind, sodass also $i = e - U$ ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$e - i = U.$$

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass bei unverändert erhaltenem Leiterkreise die Stromstärke proportional mit der electromotorischen Kraft wächst. Wird die electromotorische Kraft e auf E erhöht, so steigt die Stromstärke i auf I, wobei $e : i = E : I$, d. h. bei unverändertem Leiterkreise bleibt das Verhältniss der electromotorischen Kraft zur Stromstärke $e/i = E/I$ unverändert.

1) Die Vorgänge bei mehreren Elementen werden in einem späteren Abschnitte behandelt.

Schreiben wir die Gleichung $e - i = U$ in der Form $(e/i - 1)i = U$, so behält der in der Klammer stehende Ausdruck $e/i - 1$ für denselben Leiterkreis unverändert denselben Werth. Daraus folgt, dass der Widerstand oder der durch ihn absorbirte Betrag an Rotationsbewegung für denselben Leiterkreis keine Constante ist, sondern sich proportional mit der Stromstärke ändert.

Bezeichnen wir den durch einen gegebenen Leiterkreis bei der Stromstärke 1 absorbirten Betrag der electromotorischen Kraft mit u, also $u = U/i$, so wird $U = ui$. Durch Einführung dieses Werthes erhält man $(e/i - 1)i = ui$, oder

$$\frac{e}{i} = u + 1.$$

In dieser Gleichung bedeutet also e/i den Zahlenwerth der electromotorischen Kraft, welche nöthig ist, um in dem gegebenen Leiterkreise die Einheit des Stromes zu erzeugen.

Die oben mit u bezeichnete Zahl will ich kurzweg die *Absorptionszahl* des gegebenen Leiters nennen; sie gibt also den Betrag an, welcher bei der Stromstärke 1 von der zur Erzeugung dieses Stromes in dem gegebenen Leiterkreise nöthigen electromotorischen Kraft absorbirt wird. Diese electromotorische Kraft selbst ist aber $= u + 1$, also um die Einheit grösser als u. Es dürfte zweckmässig sein, auf einen speciellen Fall einzugehen.

Ist wie z. B. in einer später angeführten Messung für den aus einem grossen Daniell'schen Elemente und einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt gebildeten Leiterkreis die Absorptionszahl 6,99, so heisst dies: Von einer electromotorischen Kraft im Betrage von $6{,}99 + 1 = 7{,}99$ werden durch den genannten Leiterkreis 6,99 Theile absorbirt und nur 1 Theil bleibt als Strom erhalten. [1])

---

1) Im Vorstehenden ist die Absorptionszahl u so bestimmt, dass sie angibt, wieviel von einer durch $u + 1$ dargestellten electromotorischen Kraft absorbirt wird. Sie ist also stets auf die Einheit der Stromstärke bezogen.

Man kann die Absorption aber auch als den Bruchtheil darstellen, welcher von der electromotorischen Kraft 1 absorbirt wird. Dividirt man die obige Gleichung durch 7,99, so erhält man:

Aenderungen der Stromstärke infolge von Aenderungen im Leiterkreise.

Es sei gegeben eine galvanische Kette von der electromotorischen Kraft e und der Absorptionszahl u; dann ist

$$e = ui + i \quad \text{und} \quad i = \frac{e}{u+1}.$$

Schaltet man in diese Kette einen Draht von der bekannten Absorptionszahl a ein, so erhält man, wenn i' die neue Stromstärke bedeutet:

$$e = ui' + ai' + i' \text{ und } i' = \frac{e}{u+a+1}$$

oder

$$i' = \frac{e}{(u+1)+a}.$$

Ist die Absorptionszahl u der ursprünglichen Kette, sowie deren electromotorische Kraft e unbekannt, so lassen sich die beiden unbekannten Grössen e und u aus den beobachteten Werthen von i und i', sowie der bekannten Absorptionszahl a des eingeschalteten Leiters berechnen. Aus den beiden Gleichungen

$$i = \frac{e}{u+1} \quad \text{und} \quad i' = \frac{e}{(u+1)+a}$$

folgt

$$e = \frac{ii'a}{i-i'} \text{ und } u + 1 = \frac{ai'}{i-i'},$$

$$u = \frac{i'a}{i-i'} - 1.$$

Ist ein Draht von der unbekannten Absorptionszahl u'

$$1 = \frac{6,99}{7,99} + \frac{1}{7,99} = 0,874 + 0,126.$$

Nach dieser Bestimmung wird also der Absorptionscoëfficient

$$v = \frac{u}{u+1} = 0,874.$$

Ist der Absorptionscoëfficient in dieser Weise angegeben, so erhält man, weil die electromotorische Kraft $= 1$ ist, die Stromstärke gleich der Differenz zwischen dieser electromotorischen Kraft und dem Absorptionscoëfficienten. Im vorliegenden Falle erhalten wir also die Stromstärke $= 0,126$. Von der electromotorischen Kraft 1 ist also 0,874 durch den Widerstand absorbirt worden, und nur 0,126 Theile erscheinen im Strom.

Die eine Angabe für die Absorption lässt sich leicht in die andere verwandeln. Ist dieselbe auf die Einheit der electromotorischen Kraft bezogen, also $1 = 0,874 + 0,126$, so hat man nur die Gleichung mit $1/0,126$ zu multipliciren, um die Stromstärke auf 1 zu erhöhen und erhält dann die frühere Absorptionszahl $u = v/(1-v) = 0,874/0,126 = 6,99$.

gegeben, und soll u' nach dem Maasse von a bestimmt werden, so schaltet man den Draht anstatt a in die zuvor benutzte Kette ein und erhält die Stromstärke i''. Es ist dann

$$e = ui'' + u'i'' + i''.$$

Aus dieser Gleichung und der ersten $e = ui + i$ erhält man analog wie zuvor

$$i'' = \frac{e}{(u+1) + u'}.$$

Aus den drei Gleichungen

$$i = \frac{e}{u+1}, \quad i' = \frac{e}{(u+1)+a} \text{ und } i'' = \frac{e}{(u+1)+u}$$

ergibt sich das Verhältniss

$$\frac{u'}{a} = \frac{i'(i - i'')}{i''(i - i')}.$$

Soll die Stärke eines Stromes $i = e/(u+1)$ durch Hinzufügung eines neuen Widerstandes auf die Hälfte vermindert werden, so genügt es nicht, einen Draht von der Absorptionszahl u hinzuzusetzen. Es würde dann ein Strom von der Stärke y entstehen, welcher grösser wäre als $\frac{1}{2}i$, denn man hätte $e = 2uy + y$ oder $y = e/(2u+1)$; eine Verminderung des Stromes auf die Hälfte kann erst eintreten, wenn der Nenner des Bruches $2u + 2 = 2(u+1)$ wird. Um den Strom auf die Hälfte zu reduciren, ist also in die ursprüngliche Kette ein Leiter von der Absorptionszahl $u + 1$ einzuschalten.

Der Grund, warum die Hinzufügung von u allein nicht genügt, ist leicht zu erkennen. Eine Vermehrung des Leiters u um u würde bei der Stromstärke $i/2$ denselben Betrag von e in Anspruch nehmen, als der Widerstand u bei der Stromstärke i. Nun muss aber auch der im Strome i vorhandene Betrag auf die Hälfte reducirt werden; mithin ist noch ein weiterer Widerstand einzuschalten. Es bedarf also der Hinzufügung eines Leiters von der Absorptionszahl $u+1$, um die Stromstärke auf die Hälfte zu reduciren.

Aehnlich verhält es sich, wenn durch Hinwegnahme von Widerstand die Stärke des Stromes verdoppelt werden soll. Es ist dann nicht blos ein Widerstand $u/2$ wegzunehmen, sondern $(u+1)/2$. Nähme man nur einen Leiter von der Absorptionszahl $u/2$ hinweg, so hätte man, wenn y' die neue Stromstärke bedeutet:

$$e = \frac{u}{2}\,y' + y' \text{ oder } y' = \frac{e}{\frac{1}{2}u + 1}.$$

Es wäre also y' noch kleiner als $2i$. Soll $y' = 2i$ werden, so muss ein Leiter $(u + 1)/2$ weggenommen werden. Es muss nämlich mehr als $u/2$ aus dem Widerstande entfernt werden, weil ein Theil des Betrages von e, welcher bisher durch den Widerstand verbraucht war, jetzt zur Erhöhung des Stromes von i auf $2i$ in rotirende Bewegung übergehen soll.

Verzweigte Ströme.

Als Gesetze für die Vertheilung des Stromes in einem verzweigten Leitersystem ergeben sich ohne weiteres die folgenden.

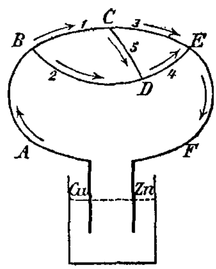
1) Denken wir uns die Drähte der Verzweigung dicht nebeneinander gelegt, so zeigt jeder Querschnitt nach aussen dieselbe electrodynamische Wirkung, es muss also die Summe der in jedem Durchschnitt vorhandenen rotirenden Bewegungen gleich gross sein. Man erhält dasselbe Resultat, wenn man von dem Satze ausgeht, dass in jedem Verzweigungspunkte ebensoviel Electricität zu- als abfliesst.

2) An jedem Verzweigungspunkte muss der Widerstand in den von ihm ausgehenden Verzweigungen gleich gross sein; wäre derselbe in einem Augenblick ungleich, so würde durch die Drähte, in welchen der Widerstand kleiner ist, sofort ein stärkerer Strom fliessen; dadurch würde aber ihr Widerstand vermehrt, während er in den anderen, für welche eine Verminderung der Stromstärke eingetreten ist, herabsinkt. Das Wachsen des Stromes in den ersteren und das Abnehmen in den anderen Drähten würde solange fortgehen, bis der Widerstand in allen Strombahnen gleich geworden ist.

3) Liegt in einem zusammenhängenden Leiterkreise eine electromotorische Kraft e, so wird zur Ueberwindung des Widerstandes in demselben nur der Betrag $e - i$ verwendet, wenn i die in einem unverzweigten Stücke auftretende Stromstärke bedeutet.

Ich will diese drei Sätze auf die Verzweigung in der

Wheatstone'schen Brücke anwenden und nehme an, dass der Strom die durch die Pfeile angezeigte Richtung habe.



Ad 1). Es sei *Zn Cu* das Element; in dem ungetheilten Drahte *AB* und *EF* fliesse der Strom i und seine Absorptionszahl sei u; in den mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichneten Stücken mögen i_1, u_1; i_2, u_2 u. s. w. die entsprechende Bedeutung haben.

Nach 1. ist

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4, \quad i_1 = i_3 + i_5,$$

also auch

$$i = i_3 + i_5 + i_2.$$

Ad 2). Den bei einer Stromstärke vorhandenen Widerstand oder die bei derselben auftretende Absorption erhält man durch Multiplication der Absorptionszahl mit der Stromstärke. Der Widerstand in den verschiedenen Theilen ist also in

EFAB	$u\,i$,	*CE*	$u_3 i_3$,
BC	$u_1 i_1$,	*DE*	$u_4 i_4$,
BD	$u_2 i_2$,	*CD*	$u_5 i_5$.

Im Verzweigungspunkte *B* muss also, wenn man die Drähte *BCE* und *BDE* bis zu ihrer Wiedervereinigung verfolgt, der Widerstand auf *BCE* genau so gross sein, wie auf *BDE*. Es ist also

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

oder

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 - i_2 u_2 - i_4 u_4 = 0.$$

Ein Gleiches muss stattfinden, wenn wir anstatt der Bahn *BCE* die Bahn *BCDE* einsetzen. Es ist dann

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

oder nach Abzug von $i_4 u_4$:

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2$$

oder

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 - i_2 u_2 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ad 3). Betrachten wir nun einen Leiterkreis, welcher die Kette mit der electromotorischen Kraft e einschliesst, z. B. *ABCEFA*, so ist, weil in jedem Gesammtquerschnitte durch den Leiter der Strom i fliesst, von der electromotorischen Kraft e der in dem Strome erhaltene Betrag i abzuziehen; es bleibt daher nur $e - i$ zur Ueberwindung des Widerstandes.

Es ist also für die Bahn $ABCEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_3 u_3.$$

Ebenso erhält man für die Bahn $ABDEFA$

$$e - i = iu + i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und für die Bahn $ABCDEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4.$$

Die Uebereinstimmung dieser drei Gleichungen erkennt man sofort, wenn man die unter (2) aufgeführten Gleichungen

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2$$

in Betracht zieht.

Aenderung der Absorption mit Länge und Dicke des Leiters.

Wird die Länge eines gegebenen Leiters von überall gleichem Querschnitte vergrössert, so wächst in gleichem Maasse die Anzahl der Molecüle, welche in Bewegung zu setzen sind; es nimmt also selbstverständlich die Absorptionszahl proportional der Länge zu.

Das Gesetz über die Abhängigkeit der Absorptionszahl vom Querschnitte ergibt sich in folgender Weise. Eine geschlossene Kette enthalte zwei Drähte aus demselben Material und von gleicher Länge, aber von verschiedenem Querschnitte. Der dickere Draht habe z. B. einen vierfach grösseren Querschnitt als der dünnere. Die durch die electrodynamische Wirkung im äusseren Raume gemessene Stärke des Stromes i ist überall in dem gleichen Abstande von der Mitte des Leitungsdrahtes dieselbe. Die von jedem Querschnitte ausgehende Wirkung entspricht der Summe der Rotationen der in ihm vorhandenen Molecüle. Soll nun die Wirkung des dickeren Drahtes dieselbe sein, wie die des dünneren, so müssen die Rotationen in dem ersteren, da er viermal so viel Molecüle enthält als der letztere, eine viermal kleinere Geschwindigkeit besitzen, als in dem dünnen Drahte, weil dann die Summe der Rotationen in beiden Drähten dieselbe ist.

Denken wir uns nun den dickeren Draht von vierfachem Querschnitt in vier gleich dicke Streifen zerlegt, so gleicht jeder einzelne Streifen dem dünnen Drahte. Die Absorptionszahl des dünnen Drahtes sei u für die Einheit der Stromstärke, dann ist dieselbe für jeden Streifen bei der Stromstärke 1 ebenfalls u. In dem dünneren Drahte fliesst der Strom i, folglich ist seine Absorption ui; in jedem Streifen fliesst dagegen nur der Strom $i/4$; die Absorption, welche der durch jeden Streifen gehende Strom $i/4$ findet, ist also nur $ui/4$, beträgt also nur ein Viertel von der, welche jeder Streifen bei der Stromstärke i zeigen würde.

Stromstärke bei mehreren Elementen.

Es möge ein Element Zink-Cadmium-Wasser die electromotorische Kraft e, ein gleichgestaltetes Element Zink-Kupfer-Wasser aber die electromotorische Kraft $E = 4e$ besitzen. Wegen der gleichen Länge und Dicke der Wassersäule ist in beiden der Widerstand gleich, daher die Absorptionszahl für beide $= u$.

Man erhält dann für das Element $(Zn\,Cd\,Aq)$:

$$e = ui + i, \quad e - i = ui \quad \text{und} \quad i = \frac{e}{u+1};$$

für das Element $(Zn\,Cu\,Aq)$:

$$E = ui' + i', \quad E - i' = ui' \quad \text{und} \quad i' = \frac{E}{u+1} = \frac{4e}{u+1}.$$

Der Strom i' hat also die vierfache Stärke des Stromes i.

Bei dem Element $(Zn\,Cd\,Aq)$ wird folglich der Betrag $e - i$ zur Ueberwindung des Widerstandes, und bei dem Element $(Zn\,Cu\,Aq)$ der Betrag $E - i' = 4e - i'$ ebendazu verbraucht.

Vergrössern wir ferner die Länge der Wassersäule in dem Element $(Zn\,Cu\,Aq)$ auf die vierfache Länge, so entsteht ein Strom i'', wobei $4e = 4ui'' + i'' = (4u + 1)i''$. Es wird also $i'' = 4e/(4u + 1)$. Es ist auch jetzt der Betrag $4e - i''$ zur Ueberwindung des Widerstandes verwendet.

Nehmen wir dagegen vier Elemente $(Zn\,Cd\,Aq)$, so ist die Summe der in ihnen auftretenden electromotorischen Kräfte allerdings auch $4e$, also ebenso gross, wie bei einem einzigen Zink-Kupferelement; desgleichen ist die Absorptions zahl wie in dem letzten Falle $4u$, und doch sind die Verhältnisse sehr wesentlich verändert. Die electromotorische Kraft ist nicht auf eine Stelle concentrirt, sondern ist auf vier Punkte vertheilt.

Entsteht bei dieser Anordnung ein Strom i''', so ist in jedem Querschnitt des Schliessungskreises eine Rotation i''' vorhanden. An jeder Stelle, wo eine electromotorische Kraft e liegt, übertrifft also diese electromotorische Kraft e die Stromrotation i''' um $e - i'''$ und nur dieser Betrag kann auf die Ueberwindung des Widerstandes verwendet werden. Dies gilt von jeder der vier electromotorischen Kräfte e; jedes e liefert also zur Ueberwindung des Widerstandes nur den Betrag $e - i'''$, folglich alle vier den Betrag $4(e - i''')$. Dieser Betrag dient, wenn kein weiterer Widerstand eingeschaltet ist, zur Ueberwindung des Widerstandes $4ui'''$. Es ist mithin $4(e - i''') = 4ui'''$ oder $e - i''' = ui'''$, d. h. der Strom ist nur ebenso stark als in einem Elemente, nämlich $i''' = e/(u + 1)$.

Schaltet man noch einen Draht von der Absorptionszahl a ein, so gehen für die verschiedenen Fälle die Gleichungen hervor:

$$e - i = ui + ai, \qquad e = (u + a + 1)i, \qquad i = \frac{e}{(u + 1) + a},$$

$$4e - i' = ui' + ai', \qquad 4e = (u + a + 1)i', \qquad i' = \frac{4e}{(u + 1) + a},$$

$$4e - i'' = 4ui'' + ai'', \qquad 4e = (4u + a + 1)i'', \qquad i'' = \frac{4e}{(4u + 1) + a},$$

$$4(e - i''') = 4ui''' + ai''', \qquad 4e = [4(u + 1) + a]i''', \qquad i''' = \frac{4e}{4(u + 1) + a}.$$

Wärmeentwickelung.

Wenn durch einen Draht kein Strom fliesst, mögen die einzelnen Bestandtheile seiner Molecüle eine bestimmte Lage gegen die nächsten Molecüle einnehmen. Tritt ein electrischer Strom ein, so ändert sich diese Anordnung und die Molecüle eines Querschnittes üben auf die Molecüle des folgenden eine Kraft aus, um sie in gleiche Rotation zu setzen. Die Molecüle sind bestrebt, stets den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, daher bedarf es der fortwährenden Aufwendung einer Kraft, um den Zwangszustand zu erhalten.

Der Widerstand wächst mit der Stromstärke und habe bei der Stromstärke i die Grösse $u'i$. Dieser Widerstand ist nun auf einer der Rotationsgeschwindigkeit i gleichen Länge zu überwinden, sodass eine mit $u'ii$ proportionale Hemmung der Bewegung entsteht, wodurch eine entsprechende Wärmemenge entwickelt wird.

Bedeutet u' die auf der Einheit der Länge vorhandene Absorptionszahl, so ist hiernach die in einer Drahtlänge l während der Zeit t erzeugte Wärme proportional mit $u'i^2lt$.

Electrische Spannung an den Enden der Kette.

An den Enden eines galvanischen Elementes, das nicht geschlossen ist, beobachtet man eine electrische Spannung, welche die Grösse seiner electromotorischen Kraft misst. Diese electromotorische Kraft wird in der geschlossenen Kette, wie gezeigt, verwendet: 1) zur Ueberwindung von Widerständen und 2) zur Erzeugung der Rotation der Molecüle. Dann kann nur der zur Ueberwindung des Widerstandes zu verwendende Theil noch als Spannung an den Enden auftreten, während der in der Rotationsbewegung enthaltene Theil zu keiner Spannung Veranlassung gibt. Es ist nach dem Früheren $e = ui + i$; ui bedeutet den zur Ueberwindung des Widerstandes nöthigen Theil von e, also die an den Polen der galvanischen Kette vorhandene Spannung. Wird dieselbe mit e' bezeichnet, sodass also $e' = ui$, so erhält man $e = e' + i$ oder $e - e' = i$.

Die Stromstärke in einer Kette ist aber auch $i = e/(u+1)$ und wird also um so kleiner, je grösser u wird; mit der Abnahme von i, also mit der Vergrösserung von u nähert sich mithin e' immer mehr dem e.

Ich habe oben p. 372 ausgesprochen, dass es ein Verfahren gibt, durch welches die Werthe von i und e in demselben Maasse bestimmt werden können. Dasselbe gründet sich auf das soeben beschriebene Verhalten der electrischen Spannung an den Polen der offenen und der geschlossenen Kette.

Experimenteller Nachweis.

Die Pole eines grossen Daniell'schen Elementes wurden nacheinander mit dem Goldblättchen meines Electrometers verbunden, während der andere Pol durch eine Verbindung mit der Gasleitung zur Erde abgeleitet war. Aus den an beiden Polen beobachteten, sehr nahe gleichen Ausschlägen wurde das Mittel als die Spannung an den Polen des Elementes genommen.[1])

Darauf wurde das Element mittelst eines Leiters von sehr grossem Widerstande, z. B. von 10000 Quecksilbereinheiten geschlossen. Hierbei zeigte sich keine merkliche Abnahme des Ausschlages. Als jedoch der Widerstand des eingeschalteten Leiters verringert wurde, trat eine merkbare Veränderung in den Spannungen an den beiden Polen auf.

Ich übergehe die mit grossen Widerständen ausgeführten Beobachtungen und wende mich gleich zu denen, bei welchen geringere Widerstände in der Kette lagen und die Abnahme in der Spannung an den Polen recht deutlich hervortrat.

Auch bei der geschlossenen Kette wurden die Beobachtungen an beiden Polen ausgeführt, wobei jedesmal der eine Pol zur Erde abgeleitet war. Aus den beiden sehr nahe gleichen Werthen, welche an den beiden Polen beobachtet waren, wurde wieder das Mittel genommen.[2])

---

1) Da der Zustand meiner Augen mir die Ablesung der Ausschläge unmöglich machte, so hat Hr. Prof. v. Zahn die Güte gehabt, die Beobachtungen am Electrometer und die Berechnung der Mittelwerthe auszuführen, wofür ich ihm hier meinen herzlichsten Dank abstatte.

2) In Betreff der bei diesen Messungen möglichen Genauigkeit bemerke ich Folgendes. Die Theilstriche des Ocularmikrometers, auf welche die Spitze des Goldblättchens sich projicirte, erschienen ungefähr 1 mm voneinander entfernt. Mit voller Sicherheit konnte daher die Lage des Goldblättchens nur auf 0,2 Scalentheile bestimmt werden. Da ferner die Versuche in meinem an der Strasse gelegenen Wohnzimmer ausgeführt wurden, so veranlassten die vorüberfahrenden Wagen kleine Störungen. Die Erschütterung änderte nämlich den Zustand der Elemente in der nassen Säule, deren Pole mit den beiden neben dem Goldblättchen befindlichen Messingscheiben verbunden waren, öfters in ungleicher Weise, sodass der eine Pol etwas stärker wurde als der andere. Dies hatte aber eine Aenderung in der Ruhelage des Goldblättchens zur Folge. Wurde

Die Mittelwerthe der bei den verschiedenen Widerständen gemachten Beobachtungen waren die nachstehenden. Der Widerstand der eingeschalteten Drähte ist in Quecksilbereinheiten angegeben:

Kette	offen	38,87
„	geschlossen durch 0,5 Q.-E.	30,84
„	offen	38,54
„	offen	38,65
„	geschlossen durch 0,3 Q.-E.	27,64
„	offen	38,52
„	geschlossen durch 1 Q.-E. .	33,71
„	offen	38,82

Nach einer Unterbrechung von 15 Minuten:

Kette	geschlossen durch 2 Q.-E. .	38,85
„	offen	38,56
„	geschlossen durch 3 Q.-E. .	36,65
„	offen	38,45

Vergleicht man nun die Mittel der vor und nach jeder Schliessung gemachten Beobachtungen der offenen Kette, mit den bei dem dazwischen liegenden Schlusse gemessenen, und ordnet die Versuche nach der Reihe der eingeschalteten Widerstände, vom grössten beginnend, so erhält man:

	e	e'	i	$u+1$	u
3 Q.-E.	38,51	36,65	1,86	20,70	19,70
2 „ „	38,56	35,85	2,71	14,23	13,23
1 „ „	38,67	33,71	4,96	7,80	6,80
0,5 „ „	38,70	30,84	7,86	4,92	3,92
0,3 „ „	38,59	27,64	10,95	3,52	2,52

In dieser Tabelle stehen unter e die an den Polen der offenen Kette beobachteten Spannungen, unter e' die an den Polen der geschlossenen Kette erscheinenden. Der Unterschied zwischen e und e', d. h. der von e durch den Widerstand nicht absorbirte Theil, bildet den Strom i; es ist also $e - e' = i$. Diese Differenzen, welche also die Stromstärke angeben, finden sich in der dritten Columne unter i zusammengestellt. Wird e durch i dividirt, so erhält man den Werth von $u+1$, worin u die Absorptionszahl des Schliessungsbogens bedeutet. Diese Zahlen stehen in der vierten Columne, während die fünfte die Werthe von u selbst enthält.

---

nun auch bei jeder Messung der electrischen Spannung die Ruhelage vorher und nachher bestimmt, so konnte doch der Fehler dadurch noch um 0,1 Scalenth. wachsen.

Die verschieden starken electrischen Ströme sind dadurch erhalten worden, dass mehr oder weniger Widerstand in die Kette eingeschaltet wurde. Bezeichnen wir die Stromstärke der Reihe nach mit $i_{0,3}$, $i_{0,5}$, i_1, u. s. w. und ebenso die ihnen zugehörige Absorptionszahl mit $u_{0,3}$, $u_{0,5}$, u_1, u. s. w., so wird, wenn x die Absorptionszahl der Kette selbst, y die Absorptionszahl für eine Quecksilbereinheit bezeichnet:

$$x + 3y = 19{,}70 = u_3, \qquad x + 0{,}5y = 3{,}92 = u_{0,5},$$
$$x + 2y = 13{,}23 = u_2, \qquad x + 0{,}3y = 2{,}52 = u_{0,3}.$$
$$x + 1y = 6{,}80 = u_1,$$

Ermittelt man aus diesen fünf Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe, so erhält man

$$x = 0{,}638 \quad \text{und} \quad y = 6{,}351.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die obigen Gleichungen ergibt sich:

0.638 + 19.053	= 19,69	20 69
0,638 + 12,702	= 13,34	14,34
0,638 + 6,357	= 6,99	7,99
0,638 + 3 175	= 3 81	4.81
0,638 + 1,905	= 2,54	3,54

Wird die beobachtete electromotorische Kraft e durch den entsprechenden Werth von $u + 1$ dividirt, so erhält man $e/(u + 1) = i$. Die Berechnung liefert:

	i berech.	i beobach.	Diff.
i_3 =	1,86	1,86	0
i_2 =	2,68	2,71	+ 0,03
i_1 =	4,84	4,96	+ 0,12
$i_{0,5}$ =	8,04	7,86	− 0,18
$i_{0,3}$ =	10,93	10,95	+ 0,02

Die berechneten Werthe stimmen also mit den beobachteten hinreichend überein.[1]

---

1) Man könnte bei den vorstehenden Versuchen vermissen, dass die Stromstärken nicht mit einem Galvanometer gemessen wurden. Diese Zugabe hätte den Apparat und die Beobachtungen unnöthig complicirt; es lässt sich nämlich leicht der Beweis führen, dass die obigen Werthe von i in der That Werthe darstellen, welche den mit einem Galvanometer beobachteten proportional sind.

Zu diesem Zwecke will ich zwei Werthe von i, z. B. $i_{0,3}$ und i_2, als

Absorptionszahlen und Absorptionscoëfficienten.

Nachdem im Vorstehenden die Absorptionszahl für eine Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bestimmt worden, lassen sich die Absorptionscoëfficienten v für ebenso lange und dicke Drähte von anderen Metallen angeben. Es wird nämlich nachher bewiesen werden, dass die

---

Ausschläge eines Galvanometers betrachten und dann nach der bisher üblichen Weise aus den Stromstärken die Werthe von E und W berechnen. Man hat also

$$I_{0,3} = 10{,}95 = \frac{E}{W + 0{,}3}, \qquad I_2 = 2{,}71 = \frac{E}{W + 2}.$$

Hieraus erhält man

$$W = 0{,}259 \quad \text{und} \quad E = 6{,}12.$$

Werden mit diesen Werthen von W und E die übrigen drei beobachteten Stromstärken berechnet, so erhält man

berechnet:	$\frac{E}{W+3} = 1{,}88$,	$\frac{E}{W+1} = 4{,}86$,	$\frac{E}{W+0{,}5} = 8{,}07$,
beobachtet:	1,86,	4,96,	7,86.

Ein Galvanometer hätte also Zahlen ergeben, welche den aus den electrometrischen Messungen abgeleiteten proportional gewesen wären.

Da jedoch bei einer anderen Veranlassung die Stromintensitäten eines Daniell'schen Elementes von gleicher Grösse, unter Einschaltung der eben benutzten Widerstände 0,3, 0,5, 1, 2 und 3 bestimmt wurden, so will ich die gefundenen Werthe hier folgen lassen. Die Stromstärke wurde mit einer Tangentenboussole, deren Kreis nur in ganze Grade getheilt war, gemessen.

Zwischen den Beobachtungen bei Einschaltung der verschiedenen Widerstände 0,3, 1, 2 und 3 wurde stets die Messung der Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 wiederholt, um ein Urtheil über die Veränderung der Kette zu gewinnen. Es wurde beobachtet:

bei Einschaltung von	0,5 Q.-E.	0,413	0,3 Q.-E.	0,555
	0,5 „	0,419	1,0 „	0,261
	0,5 „	0,414	2 „	0,139
	0,5 „	0,412	3 „	0,093

Betrachten wir die Kette als constant und nehmen für die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q.-E. den Werth 0,414, so gehen demnach

bei Einschaltung von	0,3	0,5	1	2	3
die Stromstärken	0,555	0,414	0,261	0,139	0,093

hervor. Setzt man dagegen die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q.-E. gleich 7,86, so werden die Verhältnisse der obigen Zahlen:

10,53 7,86 4,90 2,64 1,78.

Dies sind aber nahe dieselben Werthe, wie sie sich oben aus den electrometrischen Messungen ergeben haben.

in der bisherigen Weise gemessenen Widerstände W den Absorptionszahlen proportional sind. Die Absorptionscoëfficienten aber werden nach p. 374 aus den Absorptionszahlen u durch Division derselben mit $u + 1$ erhalten.

	W	e	u	i	e	v	i
Quecksilber .	1,000	7,351	6,351	1	1	0,864	0,136
Platin . . .	0,143	1,908	0,908	1	1	0,476	0,524
Eisen. . . .	0,125	1,794	0,794	1	1	0,443	0,557
Zink	0,0667	1,424	0,424	1	1	0,298	0,702
Kupfer . . .	0,0185	1,117	0,117	1	1	0,105	0,895
Silber . . .	0,0169	1,107	0,107	1	1	0,097	0,903

In der zweiten Columne der vorstehenden Tabelle sind die Widerstände für Quecksilber $= 1$ aufgeführt; die Zahlen der dritten, vierten und fünften Columne geben unter e die electromotorische Kraft an, welche bei der unter u bezeichneten Absorptionszahl einen Strom von der Stärke 1 entstehen lässt. Die Zahlen der sechsten, siebenten und achten Columne geben unter v an, wieviel von der electromotorischen Kraft $e = 1$ durch den Widerstand absorbirt wird und unter i, wieviel in den Strom übergeht.

Beziehungen der im Vorhergehenden aufgestellten Formeln zu den bisher üblichen.

Ich will nun zum Schlusse noch zeigen, in welcher Beziehung die von mir gegebenen Ausdrücke zu den bisher benutzten stehen.

Ohm'sches Gesetz.

In dem von **Ohm** für die Stärke eines electrischen Stromes aufgestellten Gesetze $I = E/W$ ist I die Stromstärke, E die electromotorische Kraft und W soll den Widerstand der Kette bedeuten. Die Werthe von E und W werden aber bei der Anwendung der vorstehenden Formel nicht direct gemessen, sondern durch Rechnung aus gemessenen Stromstärken hergeleitet.

Es sei für eine gegebene Kette $I = E/W$; durch Einschaltung eines bekannten Widerstandes A geht der vorstehende Ausdruck über in $I' = E/(W + A)$. Schaltet man anstatt A einen Widerstand W' von noch unbekannter Grösse ein, so erhält man $I'' = E/(W + W')$.

Oben p. 385 habe ich gezeigt, dass die mit dem Galvanometer gemessenen Stromstärken genau den nach den Gleichungen $i = e - e'$ berechneten proportional sind. Wir können also setzen $I = mi$, $I' = mi'$ und $I'' = mi''$.

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen W'/A, so ergibt sich

$$\frac{W'}{A} = \frac{I'(I - I'')}{I''(I - I')} = \frac{i'(i - i'')}{i''(i - i')},$$

also der nämliche Ausdruck, der p. 375 für u'/a gefunden wurde. A und W' unterscheiden sich von a und u' also nur durch einen constanten Factor n; es ist somit $A = na$ und $W' = nu'$.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$W = \frac{I' \,.\, A}{I - I'} = \frac{mi'na}{m(i - i')} = \frac{na \,.\, i'}{i - i'}.$$

Da nun früher aus den Gleichungen

$$i = \frac{e}{u + 1}, \qquad i' = \frac{e}{(u + 1) + a}$$

der Werth $u + 1 = i'a/(i - i')$ erhalten wurde, so ist $W = n(u + 1)$. W unterscheidet sich also von $u + 1$ nur durch denselben Factor, mit welchem die willkürliche Maasseinheit für den Widerstand multiplicirt ist.[1])

1) Ist der Factor n bekannt, so lässt sich aus dem in der bisher üblichen Weise gefundenen Werthe von W die Absorptionszahl der Kette u berechnen. Nehmen wir z. B. die beiden mittelst der Tangentenboussole p. 385 gemessenen Stromstärken

$$I_{0,5} = 0{,}414 = \frac{E}{W + 0{,}5} \quad \text{und} \quad I_2 = 0{,}139 = \frac{E}{W + 2},$$

so ergibt sich $W = 0{,}258.$

Nun hatten wir p. 384 für die Quecksilbereinheit die Absorptionszahl 6,351 gefunden, sonach ist die Einheit für die Absorptionszahl $1/6{,}351 \times$ der Quecksilbereinheit, d. h. $n = 1/6{,}351$. Man verwandelt also nach Quecksilbereinheiten gemessene Widerstände in Absorptionszahlen durch Multiplication mit 6,351. Dem oben berechneten Werthe von $W = 0{,}258$ liegt die Quecksilbereinheit zu Grunde.

Man erhält hiernach aus der Formel $0{,}258 = n(u + 1)$:

$$u + 1 = \frac{0{,}258}{n} = 0{,}258 \,.\, 6{,}351 = 1{,}639,$$

folglich $u = 0{,}639.$

Dieser Werth stimmt zufällig mit dem p. 384 gefundenen Werthe $x = 0{,}638$ überein. Bei der letzten Messung war zwar der dicke Kupfer-

Berechnet man aus der Gleichung $IW = E$ den Werth von E, so wird derselbe, da $I = mi$ und $W = n(u + 1)$:

$$E = mi \,.\, n(u + 1),$$

oder, da $i(u + 1) = e$:

$$E = mne.$$

Die Werthe E, I, W entsprechen also den Grössen e, i, $u+1$; sie sind nur durch gewisse constante Factoren von denselben verschieden.

Verstehen wir also unter W nicht den Werth nu, wo u die Absorptionszahl des ursprünglich gegebenen Leiterkreises bedeutet, sondern setzen $W = n(u + 1)$, so ist die Ohm'sche Formel mit der von mir aufgestellten in Uebereinstimmung.

Weiter in diese Kette eingeschaltete Widerstände W', W'' u. s. w. sind den Absorptionszahlen proportional, also $W' = nu'$, $W'' = nu''$ u. s. w.

Nach der bisherigen Auffassung soll der Widerstand eines gegebenen Leiterkreises von der Stärke des in ihm fliessenden Stromes unabhängig, also constant sein. Zufolge der im Vorhergehenden aufgestellten Theorie ist jedoch der Widerstand von der Stromstärke abhängig und wächst mit ihr proportional. Wenn in der Ohm'schen Formel $I = E/W$ der Werth von W als von der Stromstärke unabhängig erscheint, so liegt der Grund darin, dass W nicht den bei der Stromstärke I vorhandenen Widerstand bedeutet, sondern den Werth $n(u + 1)$, wo u die auf die Einheit der Stromstärke bezogene constante Absorptionszahl und n einen constanten Factor bezeichnet.

Kirchhoff'sche Gesetze.

Das erste der oben p. 376 aufgestellten Gesetze $i = i' + i''$ ist mit dem Kirchhoff'schen gleichbedeutend.

Das zweite $i'u' + i''u'' = 0$ u. s. w. stimmt ebenfalls mit

draht der Tangentenboussole dem Schliessungskreise hinzugefügt, andererseits aber war die Flüssigkeit in dem Daniell'schen Elemente in grösserer Höhe eingefüllt, und so hat sich zufälliger Weise die Vermehrung des Widerstandes durch Hinzufügung der Tangentenboussole, mit der Verminderung desselben infolge der Vergrösserung des Querschnittes der Flüssigkeit ausgeglichen.

dem Kirchhoff'schen $i'w' + i''w'' = 0$ überein, da $w' = nu'$, $w'' = nu''$.. ist. In dem dritten Gesetze $E = iw + i'w' + i''w''$ werden die Grössen w, w', w''... als völlig analog betrachtet. Dies ist aber nicht der Fall. Während $w' = nu'$, $w'' = nu''$, gilt für w, welches dem Theile der Kette entspricht, in welchem sich die electromotorische Kraft E befindet, die Gleichung:

$$w = n(u + 1).$$

Setzt man für w diesen Werth, so fällt auch der oben von mir aufgestellte Ausdruck mit dem von Kirchhoff gegebenen zusammen.

Joule'sches Gesetz.

Nach Joule ist die Wärmeentwicklung durch den Strom i in einem Drahte vom Widerstande w' und von der Länge l während der Zeit t proportional mit $w'i^2lt$. In diesem Ausdrucke ist aber w' nicht der effective Widerstand des Drahtstückes bei der Stromstärke i, sondern w' ist der Absorptionszahl u' proportional, $w' = nu'$, sodass auch zwischen diesem Ausdrucke und dem oben p. 381 von mir gegebenen Uebereinstimmung herrscht.