Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik.

Von

T. Carleman in Upsala.

Ich werde im folgenden ein Variationsproblem betreffend die Kapazität eines Zylinderkondensators behandeln. Als Hilfsmittel dient die Theorie der konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche.

Unter einem Zylinderkondensator versteht man bekanntlich ein System von zwei leitenden Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden, von denen die eine ganz im Innern der anderen enthalten und durch das Vakuum oder einen Isolator von ihr getrennt ist. Ferner sollen die Höhen der Zylinder groß gegen die Querschnitte sein. Die Kapazität definiert man als Elektrizitätsmenge pro Höheneinheit des inneren Zylinders, wenn dieser das Potential Eins hat, während der Außenzylinder zur Erde abgeleitet ist, d. h. das Potential Null besitzt.

Bei der mathematischen Behandlung betrachtet man die Zylinder als unendlich lang. Das Schnittgebilde unseres Kondensators mit einer Ebene senkrecht zu den Erzeugenden möge aus zwei geschlossenen, weder sich selbst noch sich gegenseitig schneidenden Kurven, der äußeren C_0 und der inneren C_1, bestehen. Das Zwischengebiet nennen wir Ω. Es wird im folgenden stets angenommen, daß der Isolator zwischen den Zylinderflächen überall dieselbe Dielektrizitätskonstante D besitzt. Bedeutet nun U diejenige harmonische Funktion, welche auf C_0 und C_1 die Randwerte 0 bzw. 1 annimmt, so ist die Kapazität durch

$$K = \frac{D}{4\pi}\int\limits_{C} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds \tag{1}$$

gegeben. Dabei bedeutet C eine beliebige C_1 umschließende Kurve, die nicht außerhalb C_0 verläuft, und $\frac{\partial}{\partial n}$ eine Ableitung in der Richtung der nach C_1 weisenden Normale.

Betreffs der Variation der Kapazität bei Änderung der Zylinderflächen möge folgender Satz zur Orientierung dienen: Die Kapazität K'

eines Kondensators, dessen Querschnittskurven C_0' und C_1' nicht außerhalb Ω verlaufen, ist größer oder gleich K. Gleichheit besteht nur dann, wenn das Kurvensystem $C_0'C_1'$ mit $C_0 C_1$ identisch ist.

Es genügt, den Satz in folgenden beiden Spezialfällen zu beweisen:

1. C_0' identisch mit C_0;
2. C_1' „ „ C_1.

Denn bezeichnet man die zu einem Kurvenpaar $C_0 C_1$ gehörige Kapazität mit $K(C_0 C_1)$, so folgt aus

$$K(C_0' C_1) - K(C_0 C_1) \geqq 0,$$

$$K(C_0' C_1') - K(C_0' C_1) \geqq 0$$

die Ungleichung

$$K(C_0' C_1') - K(C_0 C_1) \geqq 0.$$

Im Falle 1. ist $U' - U$ (unter U' die zu U analoge Funktion für das Kurvenpaar $C_0' C_1'$ verstanden) eine im Gebiete zwischen C_0 und C_1' harmonische Funktion, die auf C_0 verschwindet. Auf C_1' hingegen gilt $U' - U \geqq 0$, denn in Ω ist überall $U \leqq 1$. Hieraus folgt, daß auf C_0

$$\frac{\partial}{\partial n}(U' - U) \geqq 0 \tag{2}$$

ist. Das Gleichheitszeichen kann nur dann überall gelten, wenn $U' - U$ identisch verschwindet, d. h. wenn C_1' mit C_1 zusammenfällt. Aus (1) und (2) folgert man nun

$$K' - K = \frac{D}{4\pi} \int\limits_{C_0} \frac{\partial}{\partial n}(U' - U)\, ds \geqq 0,$$

w. z. b. w. Der Fall 2. läßt sich in genau analoger Weise erledigen.

Wenn C_1 und C_0 Kreise mit den Radien R_1 bzw. R_0 und dem Mittelpunktsabstand d sind, so berechnet sich die Kapazität aus der Gleichung

$$\frac{1}{2K} = \log(2 R_0 R_1) - \log \Psi, \tag{3}$$

$$\Psi = R_0^2 + R_1^2 - d^2 - \sqrt{[(R_0 + R_1)^2 - d^2]\,[(R_0 - R_1)^2 - d^2]}.$$

Für konzentrische Kreise bekommt man

$$K = \frac{1}{2 \log \frac{R_0}{R_1}}. \tag{4}$$

Wir lassen jetzt die Kurven C_0 und C_1 variieren mit der Bedingung, daß die Längen konstant bleiben. Es ist einleuchtend, daß die Kapazität beliebig hohe Werte annimmt, wenn C_0 und C_1 sich beinahe berühren. Dies läßt sich übrigens mit Hilfe der Formel (3) und des vorangehenden Satzes streng beweisen. Daß die Kapazität beliebig kleine

Werte annehmen kann, sieht man etwa folgendermaßen ein. Es sei γ ein Kreis mit dem Radius R, der im Innern von C_0 liegt. Um dessen Mittelpunkt beschreiben wir einen anderen Kreis γ_ε mit beliebig kleinem Radius ε. Nun können wir immer innerhalb γ_ε eine Kurve C_1 von beliebiger Länge konstruieren. Die zu $C_0 C_1$ gehörige Kapazität ist aber gemäß dem oben bewiesenen Satze kleiner als die Kapazität eines Kondensators mit den Querschnittslinien γ und γ_ε, d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2 \log \frac{R}{\varepsilon}},$$

was mit ε gegen Null strebt.

Hingegen gilt folgender Satz:

Unter allen Zylinderkondensatoren, deren Außen- und Innenzylinder konstante Querschnittsflächen besitzen[1], *hat derjenige die kleinste Kapazität, welcher aus zwei konzentrischen Kreiszylindern besteht.*

Wenn man Ω auf ein anderes zweifach zusammenhängendes Gebiet Ω^* konform abbildet, geht U in eine harmonische Funktion U^* über, die auf C_0^* und C_1^* 0 bzw. 1 wird. Bedeutet $z^* = f(z)$ die abbildende Funktion, so hat man

$$\frac{\partial U^*}{\partial n^*} = \frac{1}{|f'(z)|} \frac{\partial U}{\partial n},$$

$$ds^* = |f'(z)|\, ds.$$

Daraus folgt

$$K^* = \frac{D}{4\pi} \int\limits_{C^*} \frac{\partial U^*}{\partial n^*} ds^* = \frac{D}{4\pi} \int\limits_{C} \frac{\partial U}{\partial n} ds = K.$$

Die Kapazität ist also eine Invariante gegenüber konformen Transformationen.

Wir betrachten nun diejenige konforme Abbildung, die Ω auf einen Kreisring mit den Radien l und 1 ($l < 1$) transformiert. l ist bekanntlich durch C_0 und C_1 völlig bestimmt.

Wir können also gemäß (4) unser Problem auch so formulieren:

Für welche Kurven $C_0 C_1$, die Flächenstücke von konstanten Inhalten begrenzen, wird l ein Minimum?

Sei $F(z)$ diejenige analytische Funktion, welche den Kreisring auf Ω abbildet. Wir entwickeln $F(z)$ in eine Laurent-Reihe um den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise:

---

[1]) Dieser Satz gilt auch bei der allgemeineren Nebenbedingung, daß der äußere Inhalt von C_1 und der innere Inhalt von C_0 vorgeschriebene Werte behalten.

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n) r^n e^{in\varphi}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi) r^n + i \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n \sin n\varphi + \beta_n \cos n\varphi) r^n$$

$$= X + iY.$$

Der Kreis mit dem Radius r $(l < r < 1)$ geht in eine Kurve C über, welche eine Fläche vom Inhalte

$$\int_C X\,dY = \int_0^{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r^p(\alpha_p \cos p\varphi - \beta_p \sin p\varphi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} q r^q (\alpha_q \cos q\varphi - \beta_q \sin q\varphi)\, d\varphi$$

umgrenzt. Wegen bekannter Orthogonalitätsbeziehungen erhält man hieraus

$$(5)\quad \int_C X\,dY = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\alpha_n^2 r^{2n} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\beta_n^2 r^{2n} - \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n\alpha_n \alpha_{-n} + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n\beta_n \beta_{-n}$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,|c_n|^2 r^{2n},$$

letzteres wegen

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,\alpha_n \alpha_{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\beta_n \beta_{-n} = 0.$$

Man kann ohne Schwierigkeit zeigen, daß die Reihe rechter Hand in Formel (5) für $r = 1$ konvergiert und den inneren Inhalt von C_0 repräsentiert. Ebenso erhält man für $r = l$ den äußeren Inhalt von C_1. Daß die Kurven C_0 und C_1 Flächen mit konstantem Inhalt πR^2 bzw. $\pi\varrho^2$ $(\varrho < R)$ umgrenzen sollen, kann also durch die Gleichungen

$$(6)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|c_n|^2 = R^2, \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2$$

ausgedrückt werden.

Dieses Gleichungssystem können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}},$$

$$(8)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 = R^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2.$$

Wegen $l < 1$ ist

$$l^2 > l^4 > l^6 > \cdots,$$

mithin auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 l^2 \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 l^{2n} = \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}}. \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_n = \ldots = 0. \tag{10}$$

Ferner haben wir wegen $\frac{1}{l^{2n}} > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \frac{1}{l^{2n}} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2.$$

Gleichheit findet dann und nur dann statt, wenn

$$c_{-1} = c_{-2} = \ldots = c_{-n} = \ldots = 0. \tag{11}$$

Aus (9) folgt nun

$$l^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 \geqq \varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2,$$

woraus man unter Berücksichtigung von (8) erhält

$$l^2 \geqq \frac{\varrho^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2}{R^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2}$$

und schließlich wegen $\varrho < R$

$$l^2 \geqq \frac{\varrho^2}{R^2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn sowohl (10) als auch (11) erfüllt sind. In diesem Falle ist aber $F(z) = c_0 + c_1 z$ und somit C_0 und C_1 konzentrische Kreise mit den Radien R bzw. ϱ. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Zürich, Oktober 1917.

(Eingegangen am 29. November 1917.)