Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von **B. Igel** in Wien.

Die Arbeit von Weierstrass „Über die Entwicklung der Modularfunctionen“, welche gleichsam als Beispiel für die Theorie der Abel'schen Functionen im Bd. 52 von Crelle's Journal und in den „Mathematischen Werken“ separat als erste Abhandlung abgedruckt ist, gliedert sich folgendermaßen:

I. Wird die Möglichkeit, dass die elliptischen Functionen als Quotienten je zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und beständig convergierenden Reihen, deren Coefficienten ganze Functionen des Moduls sind, ausgedrückt werden können, welche Möglichkeit schon Abel angedeutet hat, streng bewiesen.

II. Werden partielle Differentialgleichungen entwickelt, mit deren Hülfe die Coefficienten der Reihen bestimmt werden.

III. Wird gezeigt, wie man die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen in Fourier'schen Reihen entwickelt. Diese Entwickelung geschieht auf zweierlei Weise. Erstens, indem gezeigt wird, dass die Zähler und Nenner Functionalgleichungen genügen, welche die Fourier'schen Reihen vollständig charakterisieren. Zweitens, indem eine partielle Differentialgleichung abgeleitet wird, der die in Rede stehenden Zähler und Nenner genügen und aus welcher mit Zuhilfenahme der Nullwerte der letzteren die Bestimmung der Coefficienten der Reihen erfolgt.

In neuerer Zeit ist für die Darstellbarkeit der elliptischen Functionen als Quotienten beständig convergierender Potenzreihen ein von dem Weierstrass'schen verschiedener Beweis unternommen worden. (S. Kneser, Mathem. Annalen, Bd. 32.) Es ist aber übersehen worden, dass Hermite in seiner „Übersicht der Theorie der elliptischen Functionen“ schon einen Beweis angedeutet hat, der sich noch enger an die Rechnungen der „Fundamenta nova“ anschließt.

Die Deduction Hermite's lässt sich kurz wie folgt wiedergeben. Die Functionen snu, cnu, dnu können bekanntlich für Werte von u, welche kleiner als Eins sind, in Reihen nach Potenzen der Variabeln entwickelt werden, deren Coefficienten ganze Functionen von k^2 mit rationalen Coefficienten sind. Das Gleiche gilt offenbar von den Integralfunctionen:

$$\overline{Z}(u) = \int_0^u k^2 sn^2 u\, du, \quad \int_0^u \overline{Z}(u)\, du.$$

Die Exponentialgröße

$$e^{-\int_0^u \overline{Z}(u)\, du}$$

führt aber zu einer convergenten Entwickelung für jeden Wert von u. Wenn nun gezeigt werden könnte, dass der Nenner der drei elliptischen Functionen

$$Al(u) = e^{-\int_0^u \overline{Z}(u)\, du}$$

sei und dass die Zähler, die $Al(u)_1$, $Al(u)_2$, $Al(u)_3$ heißen mögen, aus $Al(u)$ entstehen, wenn man u um gewisse Größen vermehrt, so würde der verlangte Beweis geliefert sein.

Die Ausführung dieses Beweises gebe ich in §. 1, indem ich für die $Al(u)_i$ auf die einfachste Weise Functionalgleichungen ableite. In §. 2 zeige ich, dass die zweite Methode von Weierstrass, aus der partiellen Differentialgleichung, der die $Al(u)_i$ genügen, die Fourier'schen Reihen abzuleiten, schon Jacobi bekannt gewesen, was Weierstrass entgangen zu sein scheint. Den Gedankengang, den Jacobi nur andeutet, führe ich im Jacobi'schen Sinne auf die einfachste Weise aus. Im §. 3 drücke ich die $Al(u)_i$ durch die Sigma aus und gelange auf diese Weise zu einer höchst interessanten Formel. Im §. 4 knüpfe ich einige Bemerkungen an die Abhandlung von Borchardt „Über das arithmetisch-geometrische Mittel“ (Borchardt's Journal, Bd. 58). In §. 5 wird ein von Jacobi implicite ausgesprochenes Princip erörtert und dadurch eine Stelle in den „Fundamenta nova“ erklärt, die sonst ganz unverständlich erscheint.

§. 1.

Aus dem Additionstheorem für das Integral zweiter Ordnung

$$(1) \qquad E(u) + E(v) - E(u+v) = k^2 sn\, u\, sn\, v\, sn(u+v)$$

folgt mit Benützung einiger bekannten Formeln unmittelbar

$$(2)\quad \begin{cases} E(v+iK') = E(v) + \dfrac{cn\,v\,dn\,v}{sn\,v} + \dfrac{iEK'}{K} - \dfrac{2\pi}{2K} \\ E(v+K) \quad = E(v) - \dfrac{k^2 sn\,v\,cn\,v}{dn\,v} + E \\ E(v+2iK') = E(v) + \dfrac{2iEK'}{K} - \dfrac{\pi i}{K} \\ E(v+2K) \quad = E(v) + 2E \end{cases}$$

Für

$$Z(v) = E(v) - \frac{E}{K}v$$

ergibt sich daher leicht

$$(3)\quad \begin{cases} Z(v+iK') = Z(v) + \dfrac{cn\,v\,dn\,v}{sn\,v} + \dfrac{\pi i}{2K} \\ Z(v+K) \quad = Z(v) - \dfrac{k^2 sn\,v\,cn\,v}{dn\,v} \\ Z(v+2iK') = Z(v) - \dfrac{i\pi}{K} \\ Z(v+2K) \quad = Z(v). \end{cases}$$

Aus diesen Functionalgleichungen folgen die Formeln:

$$(4)\qquad Z(iK') = \infty \qquad Z(2iK') = -\frac{\pi i}{K}.$$

Da $sn\,v$ durch ein Bruch darstellbar ist, dessen Zähler seine Nullwerte und dessen Nenner die Nullwerte besitzt, für die es unendlich wird, so kann man setzen:

$$(5)\qquad sn\,v = A\,.\,\frac{H(v)}{\Theta(v)},$$

wenn Θ und H durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\Theta(v)}{\Theta(0)} = e^{+\int_0^v Z(v)\,dv} \\ \dfrac{H(v)}{\Theta(0)} = \dfrac{c\,.\,\Theta(v+iK)}{\Theta(0)}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (3) folgt

$$(7)\qquad \Theta(v+2iK') = -\,e^{\alpha - \frac{i\pi v}{K}}\,.\,\Theta(v).$$

Und da aus denselben Gleichungen die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} Z(2iK') = -\dfrac{\pi i}{K} \\ \Theta(2iK') = -e^{\frac{\pi K'}{K}}\,\Theta(0) \end{cases}$$

folgen, so schließen wir, dass $\alpha = \frac{\pi K'}{K}$, sodass

$$(9) \qquad \Theta(v + 2iK') = -e^{\frac{\pi}{K}(K' - iv)}\,.\,\Theta(v)$$

ist. Aus dieser Gleichung, in Verbindung mit dem Umstande, dass auch die Gleichung

$$(10) \qquad H(v + 2iK') = -e^{\frac{\pi}{K}(K' - iv)}\,.\,H(v)$$

bestehen müsse, wenn snv die Periode $2iK'$ haben soll, folgen die Gleichungen

$$\Theta(v + iK') = ie^{\frac{\pi}{4K}(K' - iv)}\,.\,H(v)$$
$$H(v + iK') = ie^{\frac{\pi}{4K}(K' - iv)}\,.\,\Theta(v),$$

aus welchen die Bestimmung von c sich ergibt.

Was die Constante A betrifft, so ergibt sich dieselbe infolge der Formel $sn(K) = 1$ in der Form

$$(11) \qquad A = \frac{H(K)}{\Theta(K)}.$$

Setzt man

$$\Theta_1(v) = \Theta(v + K)$$
$$H_1(v) = H(v + K),$$

so ergibt dieselbe Betrachtungsweise die Formeln

$$(12) \qquad \begin{cases} cn(v) = \dfrac{\Theta(0)}{H(K)}\,\dfrac{H_1(v)}{\Theta(v)} \\ dn(v) = \dfrac{\Theta(0)}{\Theta(K)}\,\dfrac{\Theta_1(v)}{H(v)}. \end{cases}$$

Und es ergeben sich leicht die Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} \Theta_1(v + 2iK') = e^{\frac{\pi}{K}(K' - iv)}\,.\,\Theta_1(v) \\ H_1(v + 2iK') = e^{\frac{\pi}{K}(K' - iv)}\,.\,H_1(v). \end{cases}$$

Durch die Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \Theta(v+2K) \;\;= \Theta(v) \\ \Theta(v+2iK') = -e^{\frac{\pi}{K}(K'-iv)}\,\Theta(v) \\ H(v+2K) \;\;= -H(v) \\ H(v+2iK') = -e^{\frac{\pi}{K}(K'-iv)}\,H(v) \end{cases}$$

sind aber bekanntlich Θ und H als Fourier'sche Reihen bebestimmt. Auf die verschiedenen Arten, diese Reihen zu bestimmen, komme ich bald zurück. Für jetzt sollen die Weierstrass'schen $Al(v)_i$ abgeleitet werden.

Setzt man

$$\overline{Z} = \int_0^v k^2 sn^2 v\, dv,$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (3) für diese Function folgende Functionalgleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} \overline{Z}(v+2K) \;\;= \overline{Z}(v) + 2J \\ \overline{Z}(v+2iK') = \overline{Z}(v) + 2iJ', \end{cases}$$

wo

$$J = K - E$$
$$J' = \frac{J}{K} + \frac{\pi}{2K}$$

ist. Setzt man

$$Al(v) = e^{-\int_0^v Z(v)\,dv},$$

so erhält man leicht die Gleichungen:

$$(16) \qquad \begin{cases} Al(v+2K) \;\;= e^{-2J(v+K)}\,.\,Al(v) \\ Al(v+2iK') = -e^{-2iJ'(v+iK')}\,.\,Al(v). \end{cases}$$

Setzt man ferner

$$e^{\frac{J}{2K}v^2}\,Al(v) = J_c(v),$$

so erhält man

$$(17) \qquad \begin{cases} J_c(v+2K) \;\;= J_c(v) \\ J_c(v+2iK') = -e^{\frac{\pi}{K}(K'-iv)}\,J_c(v). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass

$$(18)\qquad J_c(v) = \frac{\Theta(v)}{\Theta(0)}$$

ist und daher die Formel

$$(19)\qquad Al(v) = e^{-\frac{J}{2K}v^2} \frac{\Theta(v)}{\Theta(0)}.$$

Setzen wir nun

$$(20)\qquad \begin{cases} sn\,v = \dfrac{Al(v)_1}{Al(v)} \\ cn\,v = \dfrac{Al(v)_2}{Al(v)} \\ dn\,v = \dfrac{Al(v)_3}{Al(v)}, \end{cases}$$

so ergeben sich leicht die Formeln:

$$(21)\qquad \begin{cases} Al(v)_1 = e^{-\frac{J}{2K}v^2} \cdot \dfrac{H(v)}{\Theta(0)} \cdot \dfrac{H(K)}{\Theta(K)} \\ Al(v)_2 = e^{-\frac{J}{2K}v^2} \cdot \dfrac{H_1(v)}{\Theta(0)} \cdot \dfrac{\Theta(0)}{H(K)} \\ Al(v)_3 = e^{-\frac{J}{2K}v^2} \cdot \dfrac{\Theta_1(v)}{\Theta(0)} \cdot \dfrac{\Theta(0)}{\Theta(K)}. \end{cases}$$

Hiermit ist der von Hermite angedeutete Beweis für die Darstellbarkeit der drei elliptischen Functionen durch Quotienten von Reihen, die in Bezug auf v und k^2 rational sind und für jeden Wert dieser Größen convergieren, vollständig durchgeführt.

§. 2.

Der Bequemlichkeit wegen führe ich hier an Stelle von Θ, H, Θ_1, H_1 die Functionen

$$\vartheta_{01},\ \vartheta_{11},\ \vartheta_{00},\ \vartheta_{10}$$

ein. Für diese bestehen die Functionalgleichungen:

$$(22)\qquad \begin{cases} \vartheta_{g_1 g_2}(v+1) = e^{-\pi i g_1} \vartheta_{g_1 g_2}(v) \\ \vartheta_{g_1 g_2}(v+w) = e^{-\pi i (2v+w)} e^{-\pi i g_2} \vartheta_{g_1 g_2}(v), \end{cases}$$

aus denen bekanntlich die partielle Differentialgleichung

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta_{g_1 g_2}}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}}{\partial w} = 0$$

abgeleitet wird. Infolge der ersten Gleichung (22) kann man, nach bekannten Principien,

$$(24) \qquad \vartheta_{00}(v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_\nu e^{2\nu v \pi i}$$

setzen. Zu Bestimmung der A_ν bedient sich Herr Königsberger (Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. I, p. 323) der zweiten Gleichung (22). Setzt man in (24) $v+w$ statt v, so folgt mit Berücksichtigung der letzen Gleichung

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_\nu e^{2\nu(v+w)\pi i} = e^{-(2v+w)\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_\nu e^{2\nu v \pi i}$$

oder

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_\nu e^{(2\nu+1)w\pi i} \cdot e^{(2\nu+2)v\pi i} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_\nu e^{2\nu v \pi i},$$

woraus, wenn man auf der linken Seite statt ν $\nu-1$ setzt und die Coefficienten von $e^{2\nu v\pi i}$ einander gleich setzt, die folgenden Relationen zwischen den zu bestimmenden Coefficienten folgen

$$A_\nu = A_{\nu-1} e^{(2\nu-1)w\pi i}$$

oder

$$A_\nu e^{-\nu^2 w\pi i} = A_{\nu-1} e^{-(\nu-1)^2 w\pi i},$$

d. h. die Größe A_ν ist von ν unabhängig, und es wird somit, wenn A_0 eine Constante bedeutet,

$$A_\nu = A_0 e^{\nu^2 w\pi i}$$

sein. ϑ_{00} hat also die Form

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(v) &= A_0 \sum e^{\nu^2 w\pi i} \cdot e^{2\nu v\pi i} = \\ &= A_0 \sum e^{\nu(2v+\nu w)\pi i} = \\ &= A_0\, e^{-\frac{\pi i}{w} v^2} \sum e^{\frac{\pi i}{w}(v+\nu w)^2}. \end{aligned}$$

Führt man die Größe

$$q = e^{w\pi i}$$

ein, so hat man

$$(25) \qquad \begin{aligned} \vartheta_{00}(v) &= A_0 \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu v \pi i} \\ &= A_0 (1 + 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi + +). \end{aligned}$$

Herr Weber in seinem Buche „Elliptische Functionen" verfolgt bei der Bestimmung der A_ν einen ganz anderen Weg, indem er aus der Differentialgleichung (23), die für die A_ν die Gleichung

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial w} = \pi i \nu^2 A_\nu$$

ergibt, folgert, dass

$$\vartheta_{00}(v) = \sum c_\nu q^{\nu^2} e^{2\nu v \pi i}$$

und dann aus der zweiten Gleichung (22) die Gleichung

$$c_{\nu-1} = c_\nu$$

ableitet. Wir haben in der Einleitung eine zweite Methode von Weierstrass kennen gelernt, die wesentlich darin besteht, die Differentialgleichung (23) unabhängig von den Functionalgleichungen (22) zu beweisen, aus derselben die erste der Functionalgleichungen abzuleiten und dann mittelst der Bedingungen, unter welchen die Functionen verschwinden sollen, die Größen A_ν zu bestimmen. Diese Methode deutet schon Jacobi in seiner berühmten Arbeit „Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten" an. Zum Schlusse derselben sagt er nämlich „Vermöge der partiellen Differentialgleichung erhält die für Θ anzunehmende Reihe die Form

$$A + 2A_1 q \cos 2v + 2A_2 q^4 \cos 4v + 2A_3 q^9 \cos 6v + +,$$

wo A, A_1, A_2 etc. Zahlencoefficienten sind, und es gibt die Bedingung, dass diese Reihe für

$$v = \frac{1}{2}(\pi - i \lg q)$$

verschwinden soll, die Werte

$$A = A_1 = A_2 = \text{etc.}"$$

Um diesen Gedankengang im Geiste Jacobi's auszuführen, nämlich zu zeigen, wie aus der partiellen Differentialgleichung die Functionalgleichungen sich ergeben, recuriere ich auf einen von Jacobi in einer der unter dem Titel „Suite des Notices etc." veröffentlichten Abhandlungen (Ges. Werke, Bd. I) aufgestellten Satz, der, wie ich glaube, noch nicht gehörig berücksichtigt worden und aus dem Französischen übersetzt folgendermaßen lautet:

Sind φ und ψ zwei Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\frac{\partial z}{\partial w},$$

so lässt sich die eine durch die andere in folgender Weise darstellen:

$$\psi = e^{-\left(xi + \frac{w}{4}\right)} \varphi\left(x - \frac{iw}{2}\right),$$

wo $w = -\lg q = \pi \frac{K'}{K}$ ist.

Führen wir q statt w ein, so bestehen demnach die Gleichungen

$$(26) \qquad \begin{cases} \varphi(x + \frac{i}{2}\lg q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{ix} \psi(x) \\ \psi(x + \frac{i}{2}\lg q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{ix} \varphi(x). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man bekanntlich durch Vertauschung von x mit $x + \frac{1}{2}\lg q$ die Gleichungen

$$(27) \qquad \begin{cases} \varphi(x + i\lg q) = q^{-1} e^{2xi} \varphi(x) \\ \psi(x + i\lg q) = q^{-1} e^{2xi} \psi(x) \end{cases}$$

ab, d. h. die zweite Functionalgleichung in (22).

Aus dem Umstande, dass eine Function, welche der partiellen Differentialgleichung genügt, die Nullpunkte $\frac{2n+1}{2}\pi + \frac{2m+1}{2} i \lg q$ hat, folgt, wenn man die Gleichungen (26) berücksichtigt, dass die Nullpunkte der übrigen der Differentialgleichung genügenden Functionen durch das folgende Schema gegeben sind:

$$(28) \qquad \begin{cases} n\pi + mi\lg q \\ n\pi + \frac{2m+1}{2} i \lg q \\ \frac{2n+1}{2}\pi + mi\lg q. \end{cases}$$

Es sei nun $\chi(x)$ die Function, für welche die Gleichung besteht

$$(29) \qquad \chi(n\pi + mi \lg q) = 0,$$

so verschwindet sie offenbar auch für $x = 0$. Daraus folgt, dass für $\chi(x)$ die Functionalgleichung besteht:

$$\chi(x + n\pi) = f \cdot \chi(x).$$

Der Factor f bestimmt sich aus den Gleichungen (27) und ist ± 1. Aus den Gleichungen (26) geht hervor, dass alle Functionen, welche der partiellen Differentialgleichung genügen, den Functionalgleichungen (22) genügen.

§. 3.

Wie Jacobi sein fundamentales Theta durch die Gleichung

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \int_0^u Z(u)\,du,$$

definiert Weierstrass sein fundamentales Sigma durch die Gleichung

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \int^s \frac{s\,ds}{\sqrt{S}}.$$

Es entsteht nun die Frage, ob sich nicht die übrigen Sigma's auf ähnliche Weise ausdrücken lassen. Für σ_3 findet sich die Formel

$$(30) \qquad Z(\sqrt{e_1 - e_3}\,u) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left(\frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)} - \frac{\eta u}{w}\right)$$

bei Schwarz (Formeln und Lehrsätze etc., Art. 39). Die Ableitung derselben findet sich in dem Buche von Enneper über elliptische Functionen (zweite Auflage, pag. 221).

Setzen wir in den Gleichungen (20) $\sqrt{e_1 - e_3}\,u$ für u und multiplicieren die erste derselben mit

$$\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

so erhalten wir

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_1}{\sqrt{e_1-e_3}\,Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)} = \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,sn(\sqrt{e_1-e_3}\,u) \\ \dfrac{Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_2}{Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)} = \qquad cn(\sqrt{e_1-e_3}\,u) \\ \dfrac{Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_3}{Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)} = \qquad dn(\sqrt{e_1-e_3}\,u). \end{cases}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit den folgenden (S. Schwarz, Art. 26, 2)

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,sn(\sqrt{e_1-e_3}\,u) \\ \dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \qquad cn(\sqrt{e_1-e_3}\,u) \\ \dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \qquad dn(\sqrt{e_1-e_3}\,u), \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(33)\quad \begin{cases} \sigma_3(u) = \sqrt{e_1-e_3}\,Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u) \\ \sigma_1(u) = \sqrt{e_1-e_3}\,Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_2 \\ \sigma_2(u) = \sqrt{e_1-e_3}\,Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_3 \\ \sigma(u) = \qquad Al(\sqrt{e_1-e_3}\,u)_1. \end{cases}$$

Es ist also

$$(34)\quad \sigma_3(u) = \sqrt{e_1-e_3}\,e^{-\int_0^u Z(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\,du}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (30), so erhält man die bemerkenswerte Formel:

$$(35)\quad e^{\int_A^u \left[\sqrt{e_1-e_3}\,Z(\sqrt{e_1-e_3}\,u)+\frac{\eta u}{w}\right]du} = \sqrt{e_1-e_3}\,e^{-\int_0^u Z(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\,du},$$

wo A die Größe bedeutet, für welche $\sigma_3(u)$ Null wird. Bedenkt man dass

$$Z(\sqrt{e_1-e_3}\,u) = E(\sqrt{e_1-e_3}\,u) - \frac{E}{K}\sqrt{e_1-e_3}\,u$$

ist und berücksichtigt die Formel

$$\frac{E}{K} = \frac{1}{e_1-e_3}\left(\frac{\eta}{w}+e_1\right),$$

so geht die Formel (35) in folgende über:

$$(36)\quad e^{\int_A^u \left[\sqrt{e_1-e_3}\,E(\sqrt{e_1-e_3}\,u)-e_1 u\right]du} = \sqrt{e_1-e_3}\,e^{-\int_0^u Z(\sqrt{e_1-e_3}\,u)\,du}.$$

§. 4.

In der Arbeit „Über das arithmetisch-geometrische Mittel" (Crelle's Journal, Bd. 58, p. 127—134) stellt sich Borchardt die Aufgabe, von dem arithmetisch-geometrischen Mittel als dem Grenzwerte, auf welchen die wiederholte algebraische Operation führt, auszugehen und die Berechnung desselben auf die Bestimmung des elliptischen Integrals zurückzuführen. Durch äußerst scharfsinnige Betrachtungen gelangt er zu der Differentialgleichung:

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(x+y)(1-xy)=0, \tag{37}$$

wo

$$\frac{n}{m}=x \qquad \frac{\nu}{\mu}=\frac{\partial f}{\partial n}:\frac{\partial f}{\partial m}=y$$

ist. Durch die Substitution

$$y=-\frac{v'}{v+v'(x)} \tag{I}$$

wird dann die Differentialgleichung in die nachstehende überführt:

$$(x-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dv}{dx}-xv=0. \tag{38}$$

Eine elegante Deutung der Substitution (I) führt ihn auf die Formel

$$v=\frac{m}{w}, \tag{II}$$

mit deren Hilfe und infolge der Nebenbedingung, dass für $m=n$ auch $w=m$, oder, was dasselbe ist, dass für $x=1$ auch $v=1$ wird, Borchardt, indem er den Ausdruck (II) mit dem bekannten vollständigen Integrale

$$v=CF(x)+C_1F(x_1) \tag{III}$$

vergleicht, die Formel erhält

$$v=\frac{m}{w}=\frac{2}{\pi}F(x_1)=\frac{2}{\pi}m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi+n^2\sin^2\varphi}}. \tag{39}$$

Ich will den umgekehrten Weg befolgen, von der Substitution (I) und der Differentialgleichung (38) ausgehend direkt die Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels zu bewerkstelligen und dann zur Darstellung von v durch w zu gelangen. Führt man an Stelle von $F(x)$ und $F(x_1)$ die Jacobi'schen Bezeichnungen K und K' ein, so erhält (I), wenn man (III) berücksichtigt, die Form

$$\begin{aligned}(40)\qquad &\left\{CK + C_1 K' + C\frac{\partial K}{\partial k}k + C_1\frac{\partial K'}{\partial k}k\right\}\frac{\partial w}{\partial n} + \\ &+ \left\{C\frac{\partial K}{\partial k} + C_1\frac{\partial K'}{\partial k}\right\}\frac{\partial w}{\partial m} = 0.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial n} = \rho\left(C\dfrac{\partial K}{\partial k} + C_1\dfrac{\partial K'}{\partial k}\right) \\ \dfrac{\partial w}{\partial m} = -\rho\left[CK + C_1 K' + k\left(C\dfrac{\partial K}{\partial k} + C_1\dfrac{\partial K'}{\partial k}\right)\right]. \end{cases}$$

C muss nun gleich Null sein, da $\frac{\partial w}{\partial n}$ und $\frac{\partial w}{\partial m}$ von der $(-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind und deshalb nur von $\frac{n}{m}$ abhängen. Es ist also

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial n} = \rho\, C_1\dfrac{\partial K'}{\partial k} \\ \dfrac{\partial w}{\partial m} = -\rho\, C_1\left(K' + k\dfrac{\partial K'}{\partial k}\right), \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{\partial K'}{\partial k} = -\frac{\partial K'}{\partial k'}\,\frac{k}{k'} &= \frac{k}{k'}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k'\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.\end{aligned}$$

Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{\partial w}{\partial n}n + \frac{\partial w}{\partial m}m = w,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}(43)\qquad w &= C_1\rho m K' + C_1\rho m\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^2\varphi - k^2\sin^2\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\right] \\ &= C_1\rho m K'.\end{aligned}$$

Es kann aber w als von der Ordnung Eins in m und n nicht gleich mK' sein, es muss also

$$\rho = \frac{1}{(AK')^2}$$

sein. w hat also die Form

$$w = \frac{C_1}{A^2} \frac{1}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}}}, \tag{44}$$

da

$$K' = m \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist. Da nun v die Form

$$v = C_1 m \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}}$$

hat, so ist das Product $w \, . \, v$

$$w \, . \, v = \frac{C_1^2}{A^2} m. \tag{45}$$

Für $k = 1$ ist $w = m$, $m = n$, folglich ist in diesem Falle

$$v = \frac{C_1^2}{A^2}.$$

Nun ist in demselben Falle, da $K' = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$v = C_1 \frac{\pi}{2};$$

folglich ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{C_1}{A^2},$$

d. h.

$$C_1 = \frac{2}{\pi}, \quad A = \frac{2}{\pi}.$$

Es geht daher aus (45) die Schlussformel hervor

$$v = \frac{m}{w}. \tag{46}$$

§. 5.

Damit eine Function $F(x, y)$ durch die gleichzeitige Substitution von $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ an Stelle von x und y nicht geändert werde, ist nothwendig, dass, wenn man die Wurzeln von

$$F(x, y) = 0$$

mit η_1 bezeichnet, dieselben in $\varphi(\eta)$ übergehen, falls man für x $\varphi(x)$ setzt. Und man sieht leicht ein, dass diese Bedingung auch hinreichend sei.

Wenn man daher in der Theorie der Modulargleichungen zu beweisen hat, dass die Substitution $\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1-k'}{1+k'}, \frac{1-l'}{1+l'}$ oder irgend welche nach demselben Gesetze gebildeten Ausdrücke für k und l die Modulargleichungen nicht ändern, so braucht man nach diesem Principe nur zu beweisen, dass die Wurzeln derselben die Form $\varphi(l)$ annehmen, wenn man an Stelle von k $\varphi(k)$ setzt. Dieser Beweis lässt sich aber mit Hilfe eines leicht einzusehenden und von mir [1]) rein algebraisch bewiesenen Satzes leicht führen. Dieser Satz lautet:

> Bei einer zusammengesetzten Transformation kommt es auf die Ordnung der Zusammensetzung nicht an.

Nehmen wir der Kürze wegen eine aus zwei primitiven Transformationen zusammengesetzte Transformation und setzen die zu der einen Transformation gehörige Modulargleichung

$$f(k, l) = 0$$

und die zu der anderen Transformation gehörige Modulargleichung

$$\varphi(k, \mu) = 0,$$

so ist ein Theil der zur zusammengesetzten Transformation gehörige Modulargleichung entweder durch

$$\varphi(l, \nu) = 0$$

oder durch

$$f(\mu, \nu) = 0$$

dargestellt, jenachdem man von der ersten oder von der zweiten Transformation ausgeht. Dies heißt aber nichts anderes, als dass l in $\psi(l)$ übergeht, wenn man in $f(kl)$ statt k $\mu = \psi(k)$, d. h. eine Wurzel von $\varphi(k, \mu) = 0$ einsetzt.

Das Princip sowie die ganze Beweisführung deutet Jacobi am Schlusse des §. 31 der Fundamenta nova an. Nachdem er den berühmten Beweis dafür gegeben hat, dass die Substitution

---

[1]) Monatshefte Bd. 3.

$\frac{1}{k}, \frac{1}{l}$ an Stelle von k und l die Modulargleichung nicht ändert, fährt er dann fort:

Adnotabo adhuc ubi secundum eandem transformationis legem quampiam simul transformantur k in $k^{(m)}$, l in $l^{(m)}$, quoties $k^{(m)}$ loco k ponatur etiam l in $l^{(m)}$ abire; unde aequationes modulares, ubi simul k in $k^{(m)}$ l in $l^{(m)}$ mutantur. immutatae manere debent. — Generaliter autem de compositione transformationum probari potest, transformationibus duabus aut pluribus successive adhibitis ad eandem perveniri, quocunque illae adhibeantur ordine.