

VI. Ueber die Bestimmung der inneren Reibungsconstanten von Gasen und Flüssigkeiten mittelst schwingender Scheiben¹⁾; von L. Grossmann.

Zur Bestimmung der inneren Reibung sind fast ausschliesslich die Methoden von Coulomb, von Maxwell und insbesondere die Transpirationsmethode verwandt worden. Die Rechnung lässt sich für die ersten Methoden nur approximativ und für die letzte auch nur unter gewissen vereinfachenden Annahmen führen; daher fallen die Werthe, welche die einzelnen Versuchsarten ergeben, verschieden aus, ja jede veränderte Anordnung desselben Versuchs führt meist zu etwas anderen Zahlenergebnissen. Da die Formeln, welche O. E. Meyer für die Coulomb'sche Methode entwickelt hat²⁾, bedeutend grössere Werthe ergeben (für Luft nach vorliegenden Beobachtungen bis $2\frac{1}{2}$, für Wasser $1\frac{1}{2}$ mal so grosse) als die Maxwell'schen, diese aber den mittelst Transpiration durch Capillaren ermittelten Werthen ziemlich gleiche ergaben, so wurde letztere Methode in der Folge meist benutzt, besonders der grösseren Einfachheit des Versuchs halber, wie wohl auch diese Abweichungen in den Werthen bis zu 80% ergab (für Luft).

Im Folgenden soll der Nachweis geführt werden, dass, ebenso wie die Formeln von O. E. Meyer³⁾, auch die von Maxwell⁴⁾ zu grosse Werthe liefern müssen, ferner werde ich für letztere Methode noch einen weiteren oberen Grenzwert, und für beide endlich Formeln aufstellen, welche sicher untere Grenzen darstellen, welche den wahren Werthen ziemlich nahe liegen. Die einfachste Methode, die von Coulomb, soll dadurch wieder zu Ehren gebracht werden, indem sie den wahren Werth der inneren Reibungsconstante ziemlich genau (vielleicht mittelst eines Reductionsfactors ganz genau)

1) Auszug aus des Verfassers Inaug.-Diss. Breslau 1880.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113**. p. 67. 1861. Inaug.-Diss. Königsberg 1860. Crelle's Journ. **59**. p. 229. 1861.

3) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113**. p. 67. 1861; **125**. p. 404. 1865.

4) Maxwell, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London 1866.

berechnen lässt; einen bei weitem sichereren Aufschluss über diese Grösse wird aber die Methode von Maxwell geben, indem die Grenzen hier viel enger zu ziehen sind. Dagegen muss es bei der Methode der Transpiration vorläufig unentschieden bleiben, ob die gefundenen Zahlenresultate zu gross oder zu klein ausfallen.

Zur Bestimmung der inneren Reibungscoefficienten der Gase wird man sich in Zukunft wohl der Maxwell'schen, vielleicht auch auf Grund der weiter unten folgenden Erörterungen der Coulomb'schen, also der primitiven und einfachsten Methode bedienen. Für Flüssigkeiten lassen meine Formeln aus dem Coulomb'schen Versuch gleich einfach und ebenso genau untere Grenzwerte ableiten; die von mir für die Theorie von Maxwell zur Rechnung aufgestellten Formeln gestalten sich für den Physiker aber zu schwerfällig. Gerade für diesen Fall hat in letzter Zeit Th. Schmidt¹⁾ die Rechnung durchgeführt in der Weise, wie sie O. E. Meyer für den anderen Versuch durchgeführt hatte. Die Formeln müssen obere Grenzwerte ergeben. Dagegen lassen sich die inneren Reibungscoefficienten der Flüssigkeiten in noch etwas anderer Weise bestimmen durch eine weitere Abänderung des Experimentes, welche ich unten bei meinen Versuchen über die innere Reibung des Quecksilbers besprechen werde, und für diesen Fall bietet die Rechnung keine Schwierigkeit.

Um den Beweis für den Charakter der oberen oder unteren Grenzen, welcher den Formeln eigen sein soll, zu liefern, muss ich auf das Wesen der Rechnungsweisen eingehen, wenn auch mit möglichster Kürze.

Jeder, der sich mit dem Problem beschäftigt hat, wird wissen, dass der analytische Ausdruck für die Bewegung eines horizontal um seinen Mittelpunkt schwingenden, nach zwei Dimensionen unendlich dünnen, liquiden Cyllinderringes, unter Berücksichtigung der verticalen und der horizontalen Reibung bisher keine Integration gestattet hat; das Gleiche gilt bekanntlich auch von einer in gleicher Weise schwingen-

1) Th. Schmidt, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über innere Reibung von Flüssigkeiten. Inaug.-Diss. Breslau 1881.

den unendlich dünnen Cylinderscheibe, wenn man neben der verticalen Reibung (oben und unten) noch die seitliche in Rechnung zieht, selbst wenn man sich die Scheibe als Ganzes gleichmässig schwingend denkt. Man abstrahirte von der seitlichen Reibung, die eine derartige liquide Scheibe erfährt, und dann gestaltet sich die Reibungsgleichung für den Fall, dass jede andere Bewegung des Mediums ausgeschlossen ist: $\mu d^2 \Theta / dy^2 = \rho d \Theta / dt$, wo Θ der Ablenkungswinkel aus der Ruhelage, y die Verticalcoordinate (deren Nullpunkt in der Scheibenfläche liegt), t die Zeit, μ die innere Reibungsconstante und ρ die Dichtigkeit des Mediums bedeuten.

Nun kann man den der Reibung entsprechenden Kraftverlust der im reibenden Medium schwingenden Scheibe in zweierlei Weise auffassen und in Rechnung stellen. Erstens drückt man direct, wie O. E. Meyer und Maxwell, den Reibungsbetrag auf jede Scheibenfläche mit Zugrundelegung der Newton'schen Hypothesen über die Reibung durch obige Function Θ aus und fügt das entsprechende Glied zu der als Bedingungsgleichung auftretenden Bewegungsgleichung der Scheibe hinzu, nämlich $-\frac{1}{2} \pi R^3 \mu (d^2 \Theta / dt dy)_0$, worin R den Radius, h die Dicke der Scheibe bedeutet; hierzu trat dann noch ein Glied $-2 \pi \mu R^3 h (d^2 \Theta / dt dy)_0$ entsprechend der Reibung am Scheibenrand, welche so berechnet wurde, als wäre die Randfläche eine Ebene, welche Näherung von O. E. Meyer bei der Grösse der zur Beobachtung dienenden Scheiben als genügend genau nachgewiesen wurde; Maxwell führte den seitlichen Reibungseffect in etwas anderer Weise ein, wie wir später ersehen werden.

Eine andere Form erhalten die Gleichungen, wenn man den Reibungseffect aus der Bewegungsquantität des schwingenden Mediums ableitet und diesen in Rechnung stellt, auf Grund des Principis, dass der Bewegungszustand eines festen oder liquiden Mediums in jedem Augenblick dadurch gegeben ist, dass die Summe der Drehungsmomente sämmtlicher wirkenden Kräfte gleich sein muss dem Drehungsmoment der sogenannten Trägheitskräfte, bezogen auf jede beliebige Axe. (Die-

ser Satz gilt, so lange keine merklichen Compressionen und Dilatationen eintreten). Es ist $-\frac{1}{2}\pi R^4\mu(d^2\Theta/dtdy)_0 = \int_0^H \frac{1}{2}\pi R^4\rho(d^2\Theta/dt^2)dy$, vermöge der Reibungsgleichung, wo nämlich H die Grenze bezeichnen soll (den Werth von y), wo die von der Scheibe sich nach der Verticalen durch Reibung fortpflanzende Bewegung ihr Ende erreicht. Der Ausdruck des Integrals besagt, dass die Reibung so berechnet ist, als schwänge ein Cylinder des Mediums vom Radius (R) der Scheibe und der Höhe H , dessen eine Grundfläche an der Scheibenfläche hafte, dessen andere dagegen in Ruhe sei. Wir sehen also, dass in dieser Rechnung der Betrag der Reibung auf den Mantel dieses Cylinders vernachlässigt worden ist; es ist somit zu wenig Reibung in Rechnung gesetzt. Es muss also die berechnete Constante (μ_c , resp. μ_m ; s. unten) immer zu gross ausfallen. Wollen wir also den Reibungseffect aus den Trägheitskräften des schwingenden Mediums berechnen, so ergibt sich noch ein der Bewegungsgleichung hinzuzufügendes Glied von selbst, das die auf den Mantel ausgeübte Reibung angeben soll.

Dass das schwingende Medium sich nur für unendlich grosse Scheiben als Cylinder darstellt, ist evident; wir können aber diese Anschauung hier beibehalten. Die auf den Mantel ausgeübte Reibung ergibt das Glied $-\int_0^H 2\pi\mu R^3(d^2\Theta/dtdr)_R dy$ für die Bewegungsgleichung des Systems. Fassen wir nun zwei Flächenelemente ins Auge, von denen das eine, der Fläche y angehörig, am Rande liegt, und das andere diesem unendlich benachbart dem Rande angehört, so ist ersichtlich, dass nur ein kleiner Fehler begangen wird, wenn wir die auf beide ausgeübte Reibung gleich setzen, d. h. wenn wir $(d^2\Theta/dtdr)_R = (d^2\Theta/dtdy)_y$ setzen; wir erhalten dann $-\int_0^H 2\pi\mu R^3(d^2\Theta/dtdy)_y = 2\pi\mu R^3(d\Theta/dt)_0$. Bei dieser Berechnung des seitlichen Reibungseffects ist nicht berücksichtigt, dass das Medium durch diese Reibung in seiner Bewegung geschwächt wird; die auf den Mantel ausgeübte Reibung ist also sicher zu gross angesetzt, und insofern müssen sich bei dieser Rechnung zu kleine Werthe ergeben.

Für das Experiment von Maxwell ist dies noch strenger zu erweisen, dort pflanzt sich die Bewegung nach der Verticalen nur um die Strecke b gleich dem Abstand der festen und der beweglichen Scheibe, seitlich aber ungehindert fort, es ist also dort sicher $(d^2 \Theta)/dt dr)_R < d^2 \Theta/dt dy$, und somit ist hier ein zweiter Fehler derselben Art begangen worden, welcher den oben berechneten seitlichen Reibungsbetrag noch grösser gestaltet und den Charakter der unteren Grenze für die zu berechnenden Werthe noch schärfer hervortreten lässt. Dass die so berechneten Werthe dennoch weniger abweichen, liegt in dem Charakter des Versuchs.

Endlich ist noch der Näherungsrechnung von Maxwell zu gedenken; dieser versuchte es in anderer Weise, die auf das schwingende Medium wirkende seitliche Reibung zu berechnen. Dabei vernachlässigt er zunächst auch die Krümmung des Scheibenrandes, dann aber weicht seine Rechnung ab. In der Gleichung, welche die Bewegung des geradlinig hin- und herschwingenden Mediums darstellt, setzt Maxwell, wie er zeigt, mit grosser Annäherung, das Glied, welches die Trägheitskraft darstellt, was also mit der Dichte multiplicirt ist, gleich Null und berechnet unter dieser Näherung die Reibung, welche die schwingende Masse seitlich erfährt. Aus diesem Betrag berechnet er sodann, um wie viel der Radius der Scheibe vergrössert werden müsste, um einen gleichen Mehrbetrag von Reibung zu erzielen. Denken wir uns nun zwei Medien mit gleichen Reibungsconstanten, aber von ungleicher Dichtigkeit, so ist es klar, dass der Betrag der Reibungskräfte in dem dichteren Medium grösser sein wird — man findet sie proportional $\sqrt{\rho \mu}$; denn die Reibekraft ist proportional $\mu d^2 \Theta/dt dy$; es ist aber unter Berücksichtigung des Werthes Θ , wie ihn die Reibungsgleichung ergibt, $d^2 \Theta/dt dy$ proportional $\sqrt{\rho/\mu}$ und somit der Reibungseffect $\sqrt{\rho \mu}$ —; wenn also Maxwell die Dichtigkeit geringer ansetzt, indem er sie gleich Null setzt, so muss der berechnete Betrag zu klein ausfallen, folglich muss die aus seiner Formel berechnete Reibungsconstante eine obere Grenze sein; da ferner dieser bei der Berechnung der seitlichen Reibung des schwingenden Mediums begangene Fehler

von geringerem Effect ist, als wenn man diese Reibung ganz ignorirt, so ist auch mit Bestimmtheit zu erwarten, dass Maxwell's Formel eine dem wahren Werth näher liegende obere Grenze liefern wird, als die von mir oben besprochene obere Grenze. Für Flüssigkeiten sind übrigens Maxwell's Formeln nicht anwendbar, da die zu Grunde gelegten Reihenentwickelungen in diesem Falle die für Gase gestattete Beschränkung der Reihen auf wenige Glieder nicht gestatten.

Um die zur Rechnung dienenden Formeln klar auseinanderzustellen, sei es mir gestattet, folgende nähere Bezeichnung einzuführen. Es soll die Reibungsconstante, welche unter Vernachlässigung der seitlichen Reibung des Mediums berechnet werden, (obere Grenze) mit μ_c und μ_m (Coulomb und Maxwell's Versuch), die aus meiner Näherungsrechnung sich ergebende mit μ'_c und μ'_m , mit μ''_m der aus Maxwell's Formel berechnete, mit μ_t der aus Transpirationsversuchen sich ergebende Mittelwerth und endlich mit μ der wahre Werth bezeichnet werden. Im Obigen wurde also die Existenz folgender Ungleichungen $\mu_c > \mu > \mu'_c$ und $\mu_m > \mu''_m > \mu > \mu'_m$ nachgewiesen.

Es sei nochmals betont, dass die Formeln für μ_m , μ''_m und μ'_m nur für Gase gelten, und dass Th. Schmidt für Flüssigkeiten Formeln aufgestellt hat. Es wird sich in vielen Fällen empfehlen, statt einer Scheibe mehrere an einer Axe zu befestigen. Ich gebe die Formeln für den Fall, dass es sich um zwei Scheiben handle, und zwar sowohl für den Fall, dass beide in demselben Medium schwingen, als auch dass die obere (1) in einem Gas die untere (2) in einer Flüssigkeit schwingen; die Indices sind entsprechend (μ_{2c} ist μ'_c entsprechend der Scheibe (2), also dem sie umgebenden Medium). Es ist leicht, die Formeln für jede andere Anordnung des gleichen Versuchs daraus zu entnehmen.

Es soll ferner L das dekadisch-logarithmische Decrement zweier aufeinanderfolgender Schwingungsbogen, T die Schwingungsdauer, d. i. das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden extremen Lagen, und K das Trägheitsmoment des Apparates bedeuten. Ferner soll folgende Bezeichnung eingeführt werden zur Kürzung der Darstellung:

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{L}{\log_{10} e}; \quad a = \frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}; \quad r = \sqrt{\frac{\pi}{2T} \left(-\frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}\right)} \\ a_1 = R_1^3 (R_1 + 2h_1) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 2R_1^3 \\ a_3 = R_2^3 \end{array} \right\} \left(\frac{R_2}{2} + 2h_2 \right) \\ a_2 = R_2^3 (R_2 + 2h_2) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = 2R_2^3 \\ a_4 = \frac{1}{2} R_2^4 \end{array} \right\} \end{array} \right. \text{ dann ist:}$$

$$(III_a) \quad \sqrt{\mu_c} = \frac{2K\lambda}{\pi T(a_1 + a_2) \left(1 - a \frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{q}}$$

(fast dieselbe Formel, wie sie O. E. Meyer entwickelt hat).

$$(III_b) \quad \sqrt{\mu_{2c}} = \frac{2K\lambda}{\pi T a_2 \left(1 - a \frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{q_2}} - \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{\mu_{1c} q_1}{q_2}},$$

$$(IV_a) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\mu_c} = -\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}} \\ \mathfrak{A} = \frac{(a_1 + a_2) \left(1 - a \frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{q}}{4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad \text{(Zwei Scheiben in demselben Medium)} \\ \mathfrak{B} = \frac{K\lambda}{\pi T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{array} \right.$$

$$(IV_b) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\mu_{2c}} = -\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}} \\ \mathfrak{A} = \frac{a_2 \sqrt{q_2}}{4\varepsilon_2} \left(1 - a \frac{\lambda}{\pi}\right) r \\ \mathfrak{B} = \frac{K\lambda}{\pi T \varepsilon_2} - \frac{a_1 \sqrt{q_2} \mu'_{1c}}{2\varepsilon_2} \left(1 - a \frac{\lambda}{\pi}\right) r - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mu'_{1c}. \end{array} \right.$$

Für Gase setzt man genügend genau:

$$1 - a \frac{\lambda}{\pi} = 1, \quad r = \sqrt{\frac{\pi}{2T}}.$$

Von den für das Maxwell'sche Experiment entwickelten Formeln gebe ich im Folgenden die für Gase geltenden; die obere Scheibe schwingt vollständig frei in einem als unbegrenzt anzunehmenden Medium. Der unteren ist von unten eine Scheibe genähert auf die Entfernung b . Es ist:

$$(V) \quad \mu_m = \frac{b}{a_4} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - (a_1 + a_3) \sqrt{\mu_c} \sqrt{\frac{q\pi}{2T}} \right\}.$$

$$(VI) \quad \mu'_m = \frac{b}{a_4 + b\varepsilon_2} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \mu'_c - (a_1 + a_3) \sqrt{\mu'_c} \sqrt{\frac{q\pi}{2T}} \right\}.$$

$$(VII) \quad \mu_m'' = \frac{b}{a_4 \left(1 + \frac{4\alpha}{R_2}\right)} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - (a_1 + a_4) \sqrt{\mu_c} \sqrt{\frac{\varrho \pi}{2T}} \right\},$$

$$\text{wo:} \quad \alpha = \frac{2b + h_2}{\pi} \log_e 10 \left(\log_{10} 2 + \log_{10} \sin \frac{\pi b}{2b + h_2} \right).$$

Für den eigentlichen Versuch von Maxwell, wo allen schwingenden Flächen je eine feste Fläche in gleichen Abständen gegenübergestellt ist, erhält man folgende Gleichungen zur Rechnung (nur für Gase geltend) bei n Scheibenflächen:

$$(VIII) \quad \mu_m = \frac{2b}{nR^4} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - nR^3 h \sqrt{\mu_c} \sqrt{\frac{\varrho \pi}{2T}} \right\}.$$

$$(IX) \quad \mu_m' = \frac{2b}{nR^4 \left(1 + \frac{4b}{R}\right)} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - nR^3 h \sqrt{\mu_c} \sqrt{\frac{\varrho \pi}{2T}} \right\}.$$

$$(X) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_m'' = \frac{4Kb\lambda}{n\pi T R^4 \left(1 + \frac{4\alpha}{R}\right)}, \\ \text{wo: } \alpha = \frac{2b + h}{\pi} \log_e 10 \left(\log_{10} 2 + \log_{10} \sin \frac{\pi b}{2b + h} \right). \end{array} \right.$$

Zu (VIII) und (IX) ist zu erwähnen, dass das zweite Glied in der Klammer sich auf die seitliche Scheibenreibung bezieht, welche daher gegen das erste Glied, wenn die Entfernung b klein ist, sehr klein ist. Es genügt eine ungefähre Kenntniss von der Grösse μ_c , resp. μ_c' , die ja durch einen Vorversuch nach Coulomb's Methode leicht aus (III_a), resp. (IV_b) genügend genau berechnet werden kann.

Ehe ich zur Mittheilung eigener Beobachtungsergebnisse und zur Berechnung fremder Beobachtungen übergehe, sei es mir noch gestattet, eine andere Methode zur Bestimmung der inneren Reibung einer Flüssigkeit darzulegen, welche der Idee nach von O. E. Meyer stammt. Auf die in Frage kommende Flüssigkeit giesse man eine andere, welche sich mit ihr nicht mischt, und deren innere Reibungsconstante man kennt; in letzterer schwinde eine Scheibe, und vielleicht ausserhalb in der Luft noch eine, um das Trägheitsmoment

zu vergrössern. Man könnte vielleicht auch eine Scheibe in der Luft schwingen, und die Bewegung der Luft direct auf die Flüssigkeit wirken lassen, dann müsste aber die Entfernung b sehr gering sein, und es müsste die Scheibe möglichst leicht, resp. das Trägheitsmoment recht klein sein. Die Bewegung pflanzt sich nach dem dritten Medium fort, und aus der Rückwirkung auf die Scheibe ist dann die innere Reibung des untersten Mediums zu bestimmen, falls man aus der Uebereinstimmung mehrerer Beobachtungen bei verschiedener Entfernung zu schliessen Grund hat, dass Gleiten an der Grenze nicht stattfindet. Die für diesen Versuch und letztere Voraussetzung erforderlichen Formeln, nach welchen ich die innere Reibung des Quecksilbers berechnete, sind folgende:

$$(XI) \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{a_4 r \sqrt{\mu'_{2m} \varrho_2}} \left\{ \frac{2\lambda K}{\pi T} - (2\varepsilon_1 \mu'_{1c} + \varepsilon_2 \mu'_{2c} + \varepsilon_2 \mu'_{2m}) \right\} \\ \quad - \frac{1-a\frac{\lambda}{\pi}}{a_4 \sqrt{\mu'_{2m} \varrho_2}} \left\{ a_1 \sqrt{\mu'_{1c} \varrho_1} + a_3 \sqrt{\mu'_{2c} \varrho_2} \right\} \\ k_2 = \cos 2q_2 b; \quad k_3 = \sin 2q_2 b. \\ z_2^2 \left(C + 1 - a\frac{\lambda}{\pi} \right) - 2z_2 \left(Ck_2 + \left(a + \frac{\lambda}{\pi} \right) k_3 \right) + C - \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi} \right) = 0 \\ \sqrt{\mu_3} = \tau \sqrt[3]{\frac{\mu_2 \varrho_2}{\varrho_3} \frac{1 + z_2 e^{\frac{2p_2 b}{2p_2 b}}}{1 - z_2 e^{\frac{2p_2 b}{2p_2 b}}}}. \end{array} \right.$$

Der gesuchte Werth μ_3 liegt zwischen dem so berechneten Werth und dem Werth, den man erhält, wenn alle Grössen ε (Ausdruck von C) gleich Null gesetzt werden. τ hat die Bedeutung $+1$ oder -1 je nachdem es die Rechnung verlangt.

Nach den Gleichungen (III), (IV_a) und (IV_b) berechnete ich zunächst Versuche über die innere Reibung von Luft und Wasser, die ich im August 1878 im physik. Laboratorium zu Breslau ausführte. Sämmtliche Werthe μ sind auf Millimeter, Milligramm und Secunden berechnet.

Die Rechnung ergab Folgendes für Luft:

Temp. C°.	μ_c	μ'_c
21,8°	0,04352	0,01600
20,0	0,04085	0,01520
20,1	0,04200	0,01560
22,0	0,04610	0,01666

Für die Mitteltemperatur von 21° ergab sich also $0,01587 = \mu'_c$. Aus Transpirationsversuchen von O. E. Meyer, Obermayer und Puluj berechnete ich im Mittel für 21° $\mu_t = 0,01823$; es ist $\mu_t/\mu'_c = 1,15$.

Ferner für Wasser:

Temp. C°.	μ_c	μ'_c	μ_t mittlerer Werth	$\mu_t : \mu'_c$
21,4	1,326	0,863	1,000	1,158
19,8	1,403	0,900	1,035	1,15

Es ist jedenfalls merkwürdig, dass die Verhältnisse $\mu_t : \mu'_c$ für Luft und Wasser beide gleich erscheinen, wogegen die Verhältnisse $\mu_c : \mu_t$ ganz verschieden ausfallen. Dies scheint mir darauf hinzudeuten, dass das Verhältniss $\mu_t : \mu'_c$ die Bedeutung einer Constante hat, die dem Apparat zukommt oder vielleicht geometrischer Natur ist, hervorgerufen durch die Abweichung der Form des schwingenden Mediums von der des Cylinders, welche wohl in allen Medien dieselbe sein muss.

Bestätigt sich diese Constanz für andere Apparate, und käme selbst jedem Apparat eine andere Correctionszahl zu, so würde man jedenfalls aus dem einfachen Experimente von Coulomb die Constante der inneren Reibung recht genau bestimmen können, indem man für ein beliebiges Medium, dessen innere Reibungsconstante bekannt ist, den Werth μ'_c bestimmt.

Im weiteren berechnete ich die von O. E. Meyer¹⁾ mitgetheilten Untersuchungen über die Reibung der Luft und des Wassers, die um so wichtiger waren, als es sich um vier verschiedene Scheiben handelte. Abgesehen von drei Zahlen ergaben sich für Luft die Verhältnisse:

1) Meyer, Crelle's Journ. 59. p. 229. 1861.

Scheibe	Radius Pariser Linien	$\mu_t : \mu'_t$
I.	51,68	1,03
III.	69,79	1,06
II.	49,57	1,19
I.	51,68	1,17
		Mittel 1,11
IV.	95,31	

Hier ist also auch das Verhältniss für Wasser und Luft dasselbe, und es erscheint unabhängig von der Scheibengrösse = 1,11.

Für Wasser ergeben sich diese Verhältnisse $\mu_t : \mu'_t$

Scheibe I.	{ 1,104 1,098
„ II.	{ 1,097 1,088
„ III.	{ 1,116 1,101
„ IV.	{ 1,106 1,093
ohne Scheibe	1,112
Mittel	1,114

Dass die Zahl 1,11 nicht genau mit der aus meinen Beobachtungen hervorgehenden 1,15 stimmt, kann seinen Grund darin haben, dass ich bei der Berechnung der Beobachtungen von O. E. Meyer den Einfluss kleiner Haltescheiben, welche die einzelnen Scheiben festhielten, nicht besonders berücksichtigt habe; diese können auf die Form des Mediums von Einfluss gewesen sein.

Um die für das Maxwell'sche Experiment aufgestellten Formeln VIII bis X zu prüfen, berechnete ich nach IX die von Puluj nach Maxwell's Methode ausgeführten Untersuchungen, welche er im 13. Bde. von Carl's Repertorium mittheilt. Die Zahlenergebnisse theile ich im Folgenden mit und füge die von Puluj berechneten Werthe in Klammern hinzu:

Luft		Kohlensäure	Wasserstoff
0,01793	0,01828	0,01485	0,008 902
(0,01916)	(0,01917)	(0,01528)	(0,00923)
19,5° C.	20,0° C.	19,9° C.	15,83° C.

Ferner berechnete ich die von Kundt und Warburg nach dieser Methode ausgeführten Beobachtungen¹⁾ und zwar nach VIII und IX, die nach X von diesen Physikern berechneten Werthe μ''_m füge ich hinzu:

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337 u. 525. 1875.

Luft			Wasserstoff		
μ_m	0,019 586	0,020 170	0,009 635 8	0,009 947 0	0,009 818 1
μ_m''	18 682	18 898	9 165 8	928 4	916 4
μ_m'	17 822	17 678	8 768	871 8	860 5
	18,8° C.	15,0° C.	19,1° C.	19,0° C.	13,6° C.
Kohlensäure					
	0,015 866	0,01368	0,016 418		
	15 181	1499	15 425		
	14 455	1427	1 439		
	20,0° C.	16,6° C.	18,5° C.		

Die Ungleichungen, die theoretisch abgeleitet worden, sind also durchweg bestätigt. Hervorzuheben ist, dass beinahe $\mu_m : \mu_m' = 1 + 4b/R$ ist; es war bei den Dimensionen der hier angewandten Scheibe $1 + 4b/R = 1,099$, resp. $= 1,141$; der Scheibenradius 79,5 mm. Nimmt man eine grössere Scheibe, etwa von 100 mm, und wählt die Entfernung gleich 1, so ist $\mu_m : \mu_m' = 1,04$. Man kann also die Genauigkeit sicher mittelst VIII und IX bis auf 2% bringen und sogar auf mehr, da μ_m' dem wahren Werthe entschieden näher liegt als μ_m . Ferner ist die Rechnung von μ_m bedeutend einfacher, da die Grösse α in X umständlich zu berechnen ist. Es sei mir gestattet, die aus obigen Zahlen berechneten Verhältnisse $\mu_m'' : \mu_m'$ im Folgenden zusammenzustellen:

b mm	Kohlensäure	Luft	Wasserstoff
2,802	1,072	1,069	$\left\{ \begin{array}{l} 1,065 \\ 1,065 \end{array} \right\}$
2,668	—	1,068	—
1,967	$\left\{ \begin{array}{l} 1,050 \\ 1,050 \end{array} \right\}$	1,048	1,045
1,884	1,029	1,048	1,037

Einen Einfluss der Grösse der Radien kann man bei diesen Zahlen, die mittelst verschiedener Scheiben zum Theil gewonnen wurden, nicht entnehmen.

Als ich mich mit diesen Arbeiten befasste, lag es in meiner Absicht, die äussere Reibung zwischen Wasser und Quecksilber zu berechnen, wobei sich mir zunächst die vorstehenden theoretischen Ergebnisse darboten. Die bei jener ursprünglich beabsichtigten Untersuchung einzuschlagende

Methode ist eben besprochen. Die im Wasser schwingende Scheibe musste ihre Bewegung bis zu dem darunter befindlichen Quecksilber durch das Wasser fortpflanzen, die Rückwirkung musste dann das Material zur Rechnung liefern, vorausgesetzt dass die inneren Reibungsconstanten von Wasser und Quecksilber bekannt seien.

Da sich jedoch die Formeln für diesen Fall so umständlich gestalteten, und da mir geeignete Vorrichtungen, um den Abstand der unteren Scheibenfläche vom Quecksilber mit genügender Genauigkeit zu messen, fehlten, so unterzog ich mich dieser Arbeit nicht, sondern prüfte vielmehr mittelst Gleichung (XI), ob ein Haften zwischen Wasser und Quecksilber stattfände oder nicht. Ergab die Rechnung bei verschiedener Entfernung dieselbe innere Reibungsconstante für das Quecksilber, so musste ein Haften stattfinden, entgegengesetzten Falls nicht. Die Rechnung bietet hier keine Schwierigkeit, nur genügte die Bestimmung der Entfernung b nicht der beanspruchten Genauigkeit, und die Aufgabe musste umgekehrt gelöst werden: Aus den Beobachtungsdaten, Decrement und Schwingungsdauer, musste die Entfernung berechnet werden, eine sehr umständliche Arbeit. Folgendes sind die Resultate, wo μ'_3 die innere Reibungsconstante des Quecksilbers bezeichnet. — Mit Zugrundelegung von:

b	berechn. sich μ'_3	Temperatur	$\tau = \pm 1$	b mm	
				beobacht.	berechn.
4,0	1,542	?	+1	3,85	(4,0)
2,94	1,56	?	+1	3,1	(2,94)
1,536	1,54	?	-1	1,6	(1,536)
2,62	1,57	20,0	+1	2,7	(2,62)
2,35	1,5	19,0	+1	2,5	(2,35)
1,74	1,5	19,0	-1	1,7	(1,74)
1,00	1,6	20,0	-1	1,05	(1,00)

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass der Betrag der Gleitung nicht bedeutend sein kann, vielmehr schliesse ich in Uebereinstimmung mit Warburg¹⁾, dass ein Haften stattfindet. Die Zahlenwerthe von μ hat Th. Schmidt bestätigt gefunden.

1) Warburg, Pogg. Ann. **140**. p. 367. 1870.

Schliesslich noch einige Bemerkungen. Unter anderen führte ich die Rechnung für den Fall durch, dass zwei Scheiben auf derselben Axe sich so benachbart sind, dass das zwischen den Scheiben befindliche Medium von beiden Scheiben in Schwingung versetzt wird. Dabei ergab sich der *a priori* einleuchtende Satz, hier aber analytisch, dass bei grosser Annäherung der Scheiben das Zwischenmedium gar keine Reibung verursacht, sondern einfach mit der Scheibe mitschwingt.

Ferner lehren die Gleichungen (V) und (VI) Grenzen herzuleiten für die Entfernung, bis zu welcher das Medium noch in merkliche Schwingung versetzt wird. Bei wachsender Entfernung nämlich geht der Versuch, den diese Gleichungen berechnen lassen (also der abgeänderte Maxwell'sche, wo nur die untere Fläche der Scheiben einer festen Scheibe genähert wird) in den von Coulomb über; es durchlaufen die Grösse μ_m , μ'_m bei wachsender Entfernung alle Werthe von μ bis μ_c , resp. μ'_c . Trage ich also in Gleichung (V), resp. (VI) als Werth des Decrements den ein, welchen der Apparat in (wirklich) als unbegrenzt anzusehenden Medien gezeigt hat, ebenso die Schwingungsdauer (diese ist fast unveränderlich), ersetze die Grössen μ_m und μ'_m also durch μ_c und μ'_c , so können wir daraus die Grenzwerte H ableiten, wo der Maxwell'sche Versuch in den von Coulomb übergeht. Es ist sehr wichtig, diese Grenze zu kennen, da man dieser entsprechend die Dimensionen der Gehäuse, welche die schwingenden Apparate gegen Zug schützen, wählen muss.

Die Formeln, die bei Flüssigkeiten an Stelle von Gl. (V) und (VI) treten, habe ich aus angeführten Gründen nicht gegeben; auch hier gestaltet sich die Rechnung sehr complicirt, und konnte man nur durch allmähliche Approximation das Resultat für das Wasser ziehen. Für den von mir benutzten Apparat ergab sich die Entfernung, bis zu welcher die Bewegung sich fortpflanzt:

für Luft $27,6 > H > 18,2$ mm (I. Drehungsmoment) u. f. Wasser $10,6 < H < 13,8$
und $24,7 > H > 17,1$ „ (II. „ „ „ „ $10,6 < H < 16,5$

Es ist ersichtlich, dass aus Gleichung (VI) die untere, aus (V) aber die obere Grenze abgeleitet wird, denn meine Theorie setzt den Effect der Reibung zu gross an, also muss sich die gesuchte Entfernung zu klein ergeben; umgekehrt ist es mit jener in (V) verkörpertten Rechnungsweise. Da ferner meine Formeln genauere Werthe liefern, so liegt die untere Grenze näher. Für meinen Apparat würde also für die Luft $H = 20$ mm, für Wasser aber $H = 11$ mm sein; darnach würde sich die Bewegung im Wasser ungefähr einhalbmahl so weit fortpflanzen wie in der Luft. Jene Entfernungen H sind aber jedenfalls bis zu einem gewissen Grade abhängig von den Constanten des Apparats.

VII. *Bestimmung der Reibung von Flüssigkeiten nach der Methode von Maxwell; von Theodor Siegfried Schmidt aus Breslau.*

(Hierzu Taf. V Fig. 4.)

§ 1. Der erste, welcher die Abnahme der Amplituden einer innerhalb einer Flüssigkeit schwingenden Scheibe dazu benutzte, den Reibungswiderstand der Flüssigkeit zu bestimmen, war Coulomb.¹⁾ Auf F. Neumann's Anregung nahm O. E. Meyer diese Untersuchungen auf und führte das Experiment theoretisch durch.²⁾ Er nahm die Tiefe der Flüssigkeit, in welcher die Scheibe ihre Schwingungen ausführte, so gross an, dass sie in der Rechnung gleich unendlich gesetzt werden durfte, und leitete unter dieser Voraussetzung Formeln ab, welche es gestatteten, den Reibungscoefficienten einer Flüssigkeit in absolutem Maasse zu berechnen. Nach den von ihm entwickelten Formeln ist eine grosse Anzahl von Experimenten über Flüssigkeiten und Gase ausgerechnet worden. Zur Bestimmung des Reibungscoefficienten der Gase hat J. Clerk Maxwell³⁾ das Experiment wesentlich

1) Coulomb, Mém. de l'Inst. nat. 3. an 9. p. 246.

2) O. E. Meyer, Crelle's Journ. 59. p. 229. 1861 u. 62. p. 201. 1863.

3) Maxwell, Phil. Trans. 156. p. 249. 1866.