Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginarî.

Di

Luigi Bianchi a Pisa.

Prefazione.

La presente Memoria tratta dei gruppi di sostituzioni lineari:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

sopra una variabile complessa z, i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono tutti i numeri *interi* di un *corpo quadratico immaginario* Ω, assoggettati alla sola condizione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.\text{*)} \tag{2}$$

Essa è una continuazione del lavoro da me pubblicato nel Vol^e^ XXXVIII di questi Annali, ove già è indicata la generalizzazione, che qui trova il suo effettivo svolgimento.**)

Ogni numero intero o frazionario in Ω ha la forma:

$$m + in\sqrt{D}, \tag{3}$$

---

*) È visibile la ragione perchè, studiando il gruppo totale (1) in cui i numeri interi α, β, γ, δ sono legati dall' unica equazione (2), ci restringiamo alcaso di un corpo quadratico immaginario. In un corpo quadratico reale, ed in ogni altrocorpo di numeri algebrici di grado superiore, esistono infatti numeri interi, diversi da zero, con modulo piccolo quanto si vuole. Tali gruppi, contenendo sostituzioni infinitesimali, p. e. della forma $z' = z + \beta$, sono quindi *impropriamente discontinui* e non ammettono la rappresentazione geometrica di per altro separare da questi gruppi dei sotto gruppi *propriamente discontinui.* Poincaré. Si puo' E' appunto allo studio di sottogruppi di questa specie, pelcaso di un corpo quadratico reale che il Sig[r] Fricke ha dedicato tre interessanti lavori pubblicati nei Vol[i] 38° e 39° di questi Annali. Per i corpi di numeri lgebrici di grado superiore ci troviamo qui davanti ad un promettente campo di ricerche affatto inesplorato.

**) Veggasi la nota del Sig[r] Picard nel Vol[e] 38° di questi Annali e la mia nota del 5. Luglio 1891 nei Rendiconti della R[a]-Accademia dei Lincei. — Le citazioni che si riferiscono alla mia memoria nel Vol[e] 38° dei presenti Annali saranno segnate con (A).

dove D è un numero razionale intero positivo ê privo di fattori quadrati ed m, n indicano numeri razionali variabili. Fra i numeri della forma (3), se *non e'* $D \equiv 3$ (*mod.* 4) sono *interi algebrici* quelli soltanto in cui m, n rappresentano numeri interi ordinarii. Ma nel caso $D \equiv 3$ (mod. 4) sono anche interi quei numeri (3) pei quali m, n sono ciàscuno la metà di un numero intero ordinario impari. Riuniamo i due casi ponendo

$$\omega = \frac{1+i\sqrt{D}}{2} \text{ se } D \equiv 3 \text{ (mod. 4)}, \quad \omega = i\sqrt{D} \text{ in tutti gli altri casi;}$$

il nostro gruppo G comprende allora tutte le sostituzioni (1) a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, nelle quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono i numeri della forma $m + n\omega$, essendo m, n interi ordinarii.

Nella prima parte di questo lavoro, giovandomi della rappresentazione geometrica del Sig[r] Poincaré (Acta Mathematica Bd. 3) e del principio dell' *ampliamento del gruppo per riflessione*, principio il cui sviluppo è dovuto principalmente al Sig[r] Fricke, fisso gli effettivi poliedri fondamentali per gli undici seguenti valori di D:

$$D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 19.$$

Per i gruppi G corrispondenti, colla effettiva determinazione del poliedro fondamentale, resta altresi dimostrato che basta ogni volta un numero finito di sostituzioni elementari a generarli. Pel caso generale la risoluzione delle questioni corrispondenti deve rimanere riservata a studî ulteriori.

Una circostanza notevole si osserva nei poliedri fondamentali qui determinati. Se diciamo *vertice singolare* di un tale poliedro un vertice situato sul piano $\xi\eta$, o all' infinito,*) in ciascuno dei poliedri fondamentali per i nostri gruppi, dopo l'ampliamento per riflessione, si trova che: *Il numero dei vertici singolari eguaglia il numero delle classi degli ideali nel corpo quadratico corrispondente.* Tale proprietà sembra intimamente connessa coll' altra, dimostrata ai §§ 2, 3, secondo la quale il detto numero rappresenta anche il numero delle classi dei numeri frazionarii in Ω. Ne segue che nella rete di poliedri, che dà la divisione della metà superiore dello spazio corrispondente al gruppo considerato, tutti e soli i punti del piano $\xi\eta$, indici di numeri frazionarii in Ω, figurano come vertici di poliedri della rete.

Nella parte seconda, seguendo il metodo del libro del Sig[r] Klein,**) come già ho fatto nella memoria precedente pei casi $(1, i)$, $\left(1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$,

*) Nella determinazione metrica non-euclidea sono questi effettivamente tutti e soli i vertici a distanza infinita.

**) (Klein-Fricke) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. II. Abschnitt, 3. Capitel.

stabilisco la teoria delle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite con coefficienti e variabili interi nel corpo Ω. Qui la presenza dei vertici singolari introduce qualche nuova difficolta, che si riesce per altro facilmente a superare.

La parte terza è dedicata allo studio di una particolare classe di forme quadratiche, sulle quali vengono eseguite le sostituzioni del gruppo riproduttivo di una forma indefinita di Hermite. Questa teoria raggiunge per le funzioni *automorfe*, corrispondenti al detto gruppo, lo stesso effetto che quella delle forme quadratiche ordinarie per le funzioni modulari nella teoria della moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche. Riserbandomi di ritornare in seguito su questo argomento, rimando, per la trattazione di un caso particolare, al terzo lavoro testè citato del Sig^{r} Fricke.

Parte 1^{a}.

Gruppi e poliedri fondamentali.

§ 1.

Discontinuita' propria del gruppo pei punti fuori del piano $\xi\eta$.

A base delle nostre ricerche poniamo, come nel lavoro antecedente, la rappresentazione geometrica del Sig^{r} Poincaré per le sostituzioni lineari

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

le cui formole occorre qui ricordare. Distendiamo i valori della variabile complessa $z = \xi + i\eta$ sul piano $\xi\eta$ e aggiungiamo ai due assi coordinati 0ξ, 0η un terzo asse 0ζ ortogonale ad ambedue. Ad ogni sostituzione (1) facciamo corrispondere univocamente una trasformazione della metà superiore $\zeta > 0$ dello spazio, per la quale ogni punto $(\xi\eta\zeta)$ si trasporta nel punto $(\xi'\eta'\zeta')$ le cui coordinate sono date dalle formole:*)

$$(2) \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}, \\[2ex] z_0' = \dfrac{\varrho^2\alpha_0\gamma + z_0\alpha_0\delta + z\beta_0\gamma + \beta_0\delta}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}, \\[2ex] \varrho'^2 = \dfrac{\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}, \\[2ex] \zeta' = \dfrac{\zeta}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0}, \end{cases}$$

*) Secondo la notazione di Hermite, l'indice *zero* apposto ad una quantita' complessa ne indica qui, come sempre in seguito, la coniugata.

ove si è posto: $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $\varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$. Si osserverà che pei punti del piano $\zeta = 0$ queste formole si riducono all' unica formola (1).

Considerando ora la totalità delle sostituzioni (1) appartenential nostro gruppo G, diremo equivalenti *rispetto a* G due punti p, p' della metà superiore R dello spazio, se vi ha in G una sostituzione che trasporti p in p'. Poichè nel corpo Ω non esiste manifestamente che un numero finito di numeri interi con modulo inferiore ad una quantità arbitraria fissa, nel gruppo G non sono contenute sostituzioni infinitesimali. Dalle ricerche generali di Poincaré (l. c.) segue quindi che nell' intorno di ogni punto in R*) fuori del piano $\xi\eta$ il gruppo G è propriamente discontinuo, cioè un intorno sufficientemente piccolo del punto non contiene alcuna coppia di punti equivalenti fra loro.

Ma senza riferirci al teorema generale di Poincaré daremo qui una dimostrazione diretta di questa proprietà affatto analoga a quella che il Sig[r] Hurwitz ha fatto conoscere pel gruppo modulare.**)

Prendiamo due coppie arbitrarie di piani paralleli ai piani coordinati $\eta\zeta$, $\xi\zeta$ e siano

$$\xi = l, \quad \xi = m, \quad \eta = l', \quad \eta = m'$$

le loro equazioni e del prisma indefinito racchiuso da questi quattro piani consideriamo la regione (V), situata in R al di sopra del piano

$$\zeta = \varepsilon$$

parallelo al piano $\xi\eta$, essendo ε una quantità positiva, arbitrariamente piccola, fissa. Dimostreremo il teorema, che include la proprietà enunciata: *Nella regione* (V) *definita' dalle diseguaglianze*

$$l < \xi < m, \quad l' < \eta < m', \quad \zeta > \varepsilon,$$

non può esistere che un numero finito di punti equivalenti ad un dato punto $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ *in* R.

Sia infatti $p' \equiv (\xi'\eta'\zeta')$ un punto di (V) equivalente a $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ e sia $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione che porta p in p', talchè valgono le formole (2). La quarta di queste, 'essendo per ipotesi $\zeta' < \varepsilon$, ci dà:

$$\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0 < \frac{\zeta}{\varepsilon}$$

ovvero

$$(3) \qquad \zeta^2\gamma\gamma_0 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) < \frac{\zeta}{\varepsilon}.$$

La somma del primo membro consta di due termini essenzialmente positivi ed essendo ξ, η, ζ, ε quantità fisse, ne segue subito che il

*) Con R si indicherà sempre la metà superiore $\zeta > 0$ dello spazio.

**) Grundlagen einer independenten Theorie der Modulfunctionen. Math. Annalen Bd. 18.

numero intero γ nel corpo quadratico Ω, e conseguentemente δ, non può avere che un numero finito di valori compatibili colla (3). Sia γ', δ' una tale coppia di valori, che a causa della relazione

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1 \tag{4}$$

dovranno essere inoltre primi fra loro. Se α', β' è una coppia speciale di valori per α, β che soddisfano la (4), ogni altra tale coppia è data dalle formole

$$\alpha = \alpha' + k\gamma', \quad \beta = \beta' + k\delta',$$

dove k è un intero arbitrario in Ω.*) Se sostituiamo questi valori di α, β nella 1ª delle (2), troviamo:

$$z' = \frac{\varrho^2\alpha'\gamma_0' + z\alpha'\delta_0' + z_0\beta'\gamma_0' + \beta'\delta_0'}{\varrho^2\gamma'\gamma_0' + z\gamma'\delta_0' + z_0\gamma_0'\delta' + \delta'\delta_0'} + k,$$

e poichè la 1ª parte della somma nel 2º membro è fissa mentre la parte reale e il coefficiente dell' immaginario in z' debbono giacere fra i rispettivi limiti assegnati l, m; l' m', ne concludiamo che il numero intero k e conseguentemente ciascuno dei numeri α, β non può assumere che un numero finito di valori. Così adunque il numero delle sostituzioni supposte è necessariamente limitato c. d. d.

A complemento della proprietà dimostrata aggiungiamo il teorema: *Appena $D > 3$, nella regione di R definita dalle diseguaglianze*

$$-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{D}}{2} < \eta < \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad \zeta > 1$$

non esiste alcuna coppia di punti equivalenti.

Se è possibile, sià $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione di G che porti il punto $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ di questa regione nel punto $p' \equiv (\xi'\eta'\zeta')$ della regione stessa. Abbiamo per ipotesi

$$\zeta > 1, \quad \zeta' > 1, \quad \frac{1}{\zeta\zeta'} < 1;$$

ma per la 4ª delle (2)

$$\frac{1}{\zeta\zeta'} = \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0),$$

onde $\gamma\gamma_0 < 1$ e però $\gamma = 0$. A causa di $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, non esistendo nel corpo Ω, per $D > 3$. che le due unità ± 1, si ha necessariamente $\alpha = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ e la sostituzione supposta avrebbe la forma

$$\xi' + i\eta' = \xi + i\eta + \beta;$$

*) Da $(\alpha - \alpha')\delta' = (\beta - \beta')\gamma'$ segue in fatti che γ' dividendo il prodotto del 1º membro ed essendo primo con δ' divide $\alpha - \alpha'$ etc.

ma giacendo ξ, ξ' fra i limiti $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ ed η, η' fra i limiti $-\frac{\sqrt{D}}{2}$ e $+\frac{\sqrt{D}}{2}$ (i limiti esclusi), deve essere $\beta = 0$ e però $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ è l'identitá e i due punti coincidono.

§ 2.*)

Equivalenza dei numeri frazionarii in Ω.

Scrivendo un numero frazionario in Ω sotto la forma $\frac{a}{b}$, essendo a, b interi in Ω, *intenderemo sempre che esso sia sotto forma irreducibile*, che cioè a, b non abbiano un divisor comune *realmente esistente in* Ω. Salvo per quei corpi Ω nei quali esistono solo ideali principali, ciò non implica affatto che a, b siano primifra loro, ma soltanto che *l'ideale* P massimo comun divisore di a, b non sia un ideale principale nè ammetta un tale ideale per divisore. Al contrario quindi di quanto accade nei corpi più semplici, due frazioni ambedue irreducibili $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ possono essere eguali senza che sia $a = \pm c$, $b = \pm d$.**) Ora supposta l'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sia P l'ideale massimo comun divisore di a, b e Q quello di c, d; avremo:

$$a = PA, \quad b = PB; \quad c = QC, \quad d = QD,$$

essendo A, B, C, D coppie di ideali primi fra loro. Da $AD = BC$, essendo A primo con B, segue che A divide C come inversamente C divide A e però $A = C$ e similmente $B = D$; dunque: *Gli ideali P, Q moltiplicati pel medesimo ideale A danno ideali principali e sono quindi fra loro equivalenti.*

Inversamente ad ogni frazione irréducibile $\frac{a}{b} = \frac{PA}{PB}$ in cui P sia l'ideale massimo comun divisore di a, b, ove sia Q un ideale qualunque equivalente a P possiamo sostituire l'altra eguale $\frac{c}{d} = \frac{QA}{QB}$, nella quale il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore é l'ideale Q.

Ciò posto, se diciamo *equivalenti* rispetto a G due numeri frazionarii $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ in Ω quando siano fra loro legati dalla relazione

*) Le denominazioni di questo paragrafo e dei seguenti sono quelle date dal Sig[r] Dedekind nella sua *Teoria dei numeri interi algebrici*, come è esposta nell' Appendice alle lezioni di Dirichlet.

**) Per es. nel campo $(1, i\sqrt{5})$ le due frazioni eguali $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3}{1-i\sqrt{5}}$ sono ambedue irreducibili.

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha \frac{a}{b} + \beta}{\gamma \frac{a}{b} + \delta},$$

essendo $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione in G, stabiliamo subito il teorema: *Se la frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono equivalenti, gli ideali P, P', che sono rispettivamente il massimo comun divisore di a, b e di a', b', sono altresì equivalenti fra loro.*

Si ha infatti $\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b}$, e poichè ogni ideale che divida simultaneamente a, b divide anche $\alpha a + \beta b$ e $\gamma a + \delta b$, come inversamente ogni ideale divisore comune di $\alpha a + \beta b$, $\gamma a + \delta b$ divide anche

$$\delta(\alpha a + \beta b) - \beta(\gamma a + \delta b) = a,$$
$$-\gamma(\alpha a + \beta b) + \alpha(\gamma a + \delta b) = b,$$

la proprietà enunciata risulta da quanto è detto superiormente. Ora andiamo a dimostrare inversamente: *Se nelle due frazioni irreducibili $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ gli ideali P, P', che per ciascuna frazione rappresentano il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore, sono equivalenti, anche le due frazioni sono fra loro equivalenti.*

Come abbiamo visto, alla frazione $\frac{a'}{b'}$ possiamo sostituirne un' altra eguale per la quale P', venga surrogato da P, sicchè è lecito supporre senz' altro $P' = P$. Noi dimostreremo allora che le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono equivalenti ad una medesima terza frazione e quindi fra loro.

Osserviamo in primo luogo che alla frazione $\frac{a}{b}$ possiamo sostituirne un' altra equivalente $\frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b}$ nella quale il denominatore sia reale. Basta perciò prendere p. e. α, β, γ, δ reali assumendo γ, δ in guisa che $\gamma a + \delta b$ sia reale, ciò che evidentemente è sempre possibile. In seguito supporremo dunque che sia b reale.

Tratteremo distesamente il caso di $\omega = i\sqrt{D}$, l'altro caso $\omega = \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$ per $D \equiv 3 \pmod{4}$ comportando una trattazione del tutto analoga.

§ 3.

Continuazione.

L'ideale P, come modulo finito, può ricondursi ad una base di due termini e sia questa $[\alpha_1, \alpha_2]$, dove dunque α_1, α_2 sono interi in Ω e tutti i numeri in P si ottengono dall' espressione $t\alpha_1 + u\alpha_2$

percorrendo t, u i numeri interi razionali. Sia ora m il più piccolo numero razionale (intero) e positivo in P; avremo

$$m = p\alpha_1 + q\alpha_2,$$

dove i numeri razionali interi p, q saranno *primi fra loro*, giacchè, se avessero un divisor comune $\delta > 1$, anche $\frac{m}{\delta} < m$ si troverebbe in P. Prendiamo ora due interi (razionali) p', q' che soddisfino alla condizione $pq' - p'q = 1$ e i due numeri

$$m = p\alpha_1 + q\alpha_2, \quad r + is\sqrt{D} = p'\alpha_1 + q'\alpha_2$$

costituiranno una nuova base di P, talchè potremo scrivere

$$P = [m, r + is\sqrt{D}],$$

essendo m, r, s interi ordinarii. Ma poichè P è un ideale, i due numeri $i\sqrt{D}m$, $i\sqrt{D}(r + is\sqrt{D})$ debbono pur trovarsi in P e si avrà perciò

$$i\sqrt{D}m = p'm + q'(r + is\sqrt{D}),$$
$$i\sqrt{D}(r + is\sqrt{D}) = pm + q(r + is\sqrt{D}),$$

dove p, q, p', q' sono nuovamente razionali interi. Queste ci danno

$$m = q's, \quad r = -p's, \quad pm + qr = -sD, \quad r = q's;$$

dalle due prime segue che s divide simultaneamente m, r e però ogni numero in P, in particolare a, b, quindi, essendo $\frac{a}{b}$ irreducibile dovremo avere $s = \pm 1$ e senza alterare la generalità potremo fare evidentemente $s = 1$. Così le seconde danno

$$r^2 + D = -pm \tag{1}$$

per tal modo la base di P è ricondotta alla forma $[m, r + i\sqrt{D}]$ ove $r^2 \equiv -D$ (mod. m). I due numeri

$$a = a_1 + ia_2\sqrt{D}, \quad b = b_1$$

appartenendo a P hanno la forma

$$a = hm + a_2(r + i\sqrt{D}), \quad b = h'm, \tag{2}$$

ove h, h', a_2 sono interi razionali. Dimostreremo che si possono trovare in Ω quattro interi α, β, γ, δ tali che si abbia

$$a = \alpha(r + i\sqrt{D}) + \beta m, \quad b = \gamma(r + i\sqrt{D}) + \delta m \tag{3}$$

e inoltre

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{4}$$

dopo di che il nostro teorema sarà provato risultando con ciò $\frac{a}{b}$ equivalente alla frazione $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$, che dipende solo dall' ideale P.*)

Scindendo α, β, γ, δ nella loro parte reale ed immaginaria, poniamo

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{D}, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2\sqrt{D}, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{D},$$
$$\delta = \delta_1 + i\delta_2\sqrt{D}.$$

Per soddisfare le (3) dobbiamo anzi tutto determinare α, γ dalle congruenze

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{D})(r + i\sqrt{D}) &\equiv a_2(r + i\sqrt{D})\\ (\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{D})(r + i\sqrt{D}) &\equiv 0\end{aligned}\right\} \pmod{m},$$

che si scindono nelle altre

$$\begin{cases} r\alpha_1 - D\alpha_2 \equiv r a_2 \\ \alpha_1 + r\alpha_2 \equiv a_2 \end{cases} \pmod{m}, \qquad \begin{cases} r\gamma_1 - D\gamma_2 \equiv 0 \\ \gamma_1 + r\gamma_2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}.$$

In ciascuna di queste coppie di congruenze può omettersi la prima, che, a causa di $r^2 \equiv -D \pmod{m}$, è una conseguenza della seconda; così dobbiamo porre

$$(5) \qquad \alpha_1 = a_2 - ry + mx, \quad \alpha_2 = y, \quad \gamma_1 = mt - ru, \quad \gamma_2 = u,$$

essendo x, y, t, u interi reali. Dopo ciò le (3) ove si sostituiscano per a, b i valori (2) e per α_1, α_2, γ_1, γ_2 i valori precedenti danno

$$(5^*) \qquad \beta_1 = h - py - rx, \quad \beta_2 = -x, \quad \delta_1 = h' - pu - rt, \quad \delta_2 = -t.$$

Ora la condizione (4) si scinde nelle due

$$\begin{cases} \alpha_1\delta_1 - D\alpha_2\delta_2 - \beta_1\gamma_1 + D\beta_2\gamma_2 = 1, \\ \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 - \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0; \end{cases}$$

queste sostituendovi i valori (5), (5*) si traducono nelle due seguenti equazioni lineari nelle incognite x, y, t, u:

$$\begin{cases} (hm + a_2 r)t + (a_2 p - hr)u - h'mx + h'ry = h'a_2 - 1, \\ a_2 t + hu - h'y = 0 \end{cases}$$

Se nella prima sostituiamo ad $h'y$ il valore tratto dalla seconda,

---

*) Il punto $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$ è, per la (1), indice della forma quadratica a determinante $-D$:

$$mx^2 - 2rxy - py^2;$$

la forma opposta

$$mx^2 + 2rxy - py^2$$

corrisponde precisamente nel senso di Dedekind (Dirichlet, Zahlentheorie 3. Auflage § 176) all' ideale P. Queste due forme sono *primitive* (di 1ª specie) Cf. ibid.

vediamo che restano da determinarsi x, t, u in guisa che risulti soddisfatta l'equazione

$$(6)\qquad (hm+2a_2r)t + a_2pu - h'mx = h'a_2 - 1$$

e insieme la congruenza

$$(7)\qquad a_2t + hu \equiv 0 \pmod{h'},$$

dopo di che il teorema sarà provato. Considerando anche la (6) come una congruenza rispetto al modulo h', abbiamo il sistema simultaneo

$$(8)\qquad (hm+2a_2r)t + a_2pu \equiv -1, \quad a_2t + hu \equiv 0 \pmod{h'},$$

che ammette certamente soluzioni se il determinante

$$\begin{vmatrix} hm+2a_2r, & a_2p \\ a_2\quad, & h \end{vmatrix} = h(hm+2a_2r) - a_2^2p$$

è primo con h'. Ora si dimostra con facilità che ciò avviene necessariamente per l'ipotesi ammessa che a, b abbiano appunto per massimo comun divisore l'ideale P, onde segue che ogni numero in P, in particolare m, si può porre sotto la forma $\lambda a + \mu b$, essendo λ, μ interi in Ω. Dovremo dunque avere per convenienti valori interi reali di λ_1, λ_2, μ_1, μ_2:

$$(hm + a_2r + ia_2\sqrt{D})\,(\lambda_1 + i\lambda_2\sqrt{D}) + h'm(\mu_1 + i\mu_2\sqrt{D}) = m,$$

ossia

$$(hm+a_2r)\lambda_1 - Da_2\lambda_2 + h'm\mu_1 = 0,$$
$$a_2\lambda_1 + (hm+a_2r)\lambda_2 + h'm\mu_2 = 0.$$

Da queste eliminando successivamente λ_2, λ_1 e dividendo ogni volta per m risultano le altre:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \{h(hm+2a_2r) - a_2^2p\}\,\lambda_1 &= hm + a_2r + h'\sigma, \\ \{h(hm+2a_2r) - a_2^2p\}\,\lambda_2 &= -a_2 + h'\tau, \end{aligned}$$

essendo σ, τ razionali interi. Un divisor comune di $h(hm+2a_2r) - a_2^2p$ e di h' dividerebbe per le (9) anche $a_1 = hm + a_2r$ e a_2, quindi anche a, b contro l'ipotesi.

Sia ora t', u' una coppia di numeri che soddisfano le (8) e poniamo

$$(hm+2a_2r)t' + a_2pu' = h'c - 1, \quad a_2t' + hu' = h'd$$
$$t = t' + h'T, \quad u = u' + h'U;$$

allora la (7) è identicamente soddisfatta e la (6), divisa per h', diventa

$$(hm+2a_2r)T + a_2pU - mx = a_2 - c.$$

Questa è certamente solubile in numeri interi poichè i tre numeri

$$hm + 2a_2r, \quad a_2p, \quad m$$

non hanno un divisor comune. E infatti essendo m, a_2 primi fra loro (perchè altrimenti per le (2) anche a, b avrebbero un effettivo divisore comune) un tale divisore dividerebbe anche m, $2r$, p mentre come si è osservato nella nota superiore, la forma quadratica $(m, r, -p)$ è primitiva di 1ª specie.

Nel caso $D \equiv 3 \pmod{4}$, $\omega = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$ vale una dimostrazione affato simile che basterà qui accennare. L'ideale P si ridurrà in questo caso alla base $[m, r+\omega]$ essendo $r^2+r+\frac{D+1}{4} = mk$, con m, r, k razionali interi. Avendosi ora

$$a = hm + a_2(r+\omega), \quad b = h'm$$

possiamo determinare i quattro interi x, y, t, u dalle equazioni

$$\begin{aligned} \{hm + (2r+1)a_2\}\, t - a_2 ku - h'mx &= h'a_2 - 1, \\ a_2 t + hu - h'y &= 0 \end{aligned}$$

e ponendo

$$\begin{cases} \alpha = a_2 - (r+1)y + mx + y\omega, & \beta = h - rx + ky - x\omega, \\ \gamma = -(r+1)u + mt + u\omega \quad , & \delta = h' - rt + ku - t\omega \end{cases}$$

avremo

$$a = \alpha(r+\omega) + \beta m, \quad b = \gamma(r+\omega) + \delta m, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

cioè $\frac{a}{b}$ risulta equivalente a $\frac{r+\omega}{m}$ che è l'indice della forma quadratica primitiva di 2ª specie $2mx^2 - 2(2r+1)xy + 2ky^2$, a determinante $-D$ la cui opposta corrisponde all' ideale P.

Dimostrato così il nostro teorema, osserviamo che se ripartiamo i numeri frazionarii in Ω in *classi*, ponendo nella medesima classe tutti e soli quelli che sono equivalenti fra loro, il risultato conseguito può anche enunciarsi così: *Il numero delle classi dei numeri frazionarii in Ω eguaglia il numero delle classi degli ideali, cioè il numero delle classi delle forme quadratiche primitive a determinante $-D$ se non è $D \equiv 3$ (mod. 4), e invece il numero delle classi delle forme primitive di 2ª specie se $D \equiv 3$ (mod. 4).*

§ 4.

Discontinuità impropria del gruppo G pei punti del piano $\xi\eta$.

Il gruppo G, che abbiamo dimostrato essere propriamente discontinuo per i punti di R fuori del piano $\xi\eta$ (§ 1), è al contrario *impropriamente* discontinuo nell' intorno di ogni punto del piano $\xi\eta$. Esso non appartiene quindi alla classe di gruppi immediatamente utilizzabili per la teoria delle funzioni (gruppi automorfi), ma contiene bensì infiniti tali sottogruppi (fra i quali una classe soltanto verrà studiata nel presente lavoro.)

L' enunciata proprietà segue subito dai risultato dei precedenti §§, giacchè ogni porzione comunque piccola del piano $\xi\eta$ contiene *infiniti* punti indici di numeri frazionarii in Ω e questi appartengono soltanto ad un numero finito di classi.

Ma senza ricorrere al teorema generale del § 2, basta qui al nostro scopo riferirci a quella parte del teorema che riguarda l'equivalenza: di due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ in Ω, ove a, b, come c, d. siano primi fra loro. Stabiliamo nuovamente l'equivalenza di due tali frazioni perchè le considerazioni relative ci saranno poi utili in seguito.

Essendo a, b primi fra loro possiamo trovare in Ω due interi α, β tali che sia $a\beta - b\alpha = 1$, come pure due altri interi γ, δ che soddisfino la condizione $c\delta - d\gamma = 1$. Le sostituzioni $\begin{pmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c, & \gamma \\ d, & \delta \end{pmatrix}$ di G trasportano quindi rispettivamente il punto $z = \infty$ in $z' = \frac{a}{b}$, $z' = \frac{c}{d}$. Componendo dunque la seconda sostituzione coll' inversa della prima si ottiene la effettiva sostituzione di G:

$$\begin{pmatrix} c & \gamma \\ d & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c\beta - b\gamma, & -c\alpha + a\gamma \\ d\beta - b\delta, & -d\alpha + a\delta \end{pmatrix},$$

che trasporta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$.

Ora consideriamo in particolare le frazioni della forma $\frac{r + is\sqrt{D}}{p}$, ove p sia un numero primo reale di cui $-D$ sia non-residuo quadratico ed r, s due interi arbitrarii non divisibili simultaneamente per p. In queste frazioni il numeratore è primo col denominatore perchè $r^2 + Ds^2$ non è divisibile per p; esse sono quindi tutte fra loro equivalenti. Ora, secondo il noto teorema di Dirichlet, esistono infiniti numeri primi p di questa specie e però in ogni porzione del piano $\xi\eta$ cadono infiniti punti, indici di quantità della forma $\frac{r + is\sqrt{D}}{p}$, che sono tutti fra loro equivalenti.

§ 5.

Relazione fra i gruppi totali G, G' nei campi $\left(1, \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}\right)$, $(1, i\sqrt{D})$ per $D \equiv 3 \pmod{4}$.

Come già abbiamo detto nella prefazione, il gruppo G di sostituzioni lineari

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

che noi consideriamo nel caso $D \equiv 3 \pmod{4}$ è quello completo, ove i coefficienti percorrono tutti i possibili numeri interi della forma $m + n\frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$ con m, n razionali interi. È chiaro per altro che se nella (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono soltanto gli interi del campo $(1, i\sqrt{D})$, che entro il campo totale $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ forma un così detto *ordine*, avremo altresì un gruppo, che si indicherà con G', e sarà contenuto in G come sottogruppo. Dimostreremo che G' è sottogruppo *d'indice finito* in G; ne segue che, appena determinato il poliedro fondamentale per G, conosceremo altresì quello di G'. Basterà quindi limitarsi alla ricerca del primo poliedro, che sarà in ogni caso più semplice. La condizione perchè un numero intero in Ω appartenga all' ordine $(1, i\sqrt{D})$ si può esprimere con una congruenza rispetto al modulo 2, essendo per ciò necessario e sufficiente che il detto numero risulti congruo (mod. 2) con un numero reale. G' è adunque sottogruppo *congruenziale* di G, caratterizzato da ciò che le sue sostituzioni sono congrue (mod. 2) con una sostituzione dei *sei* tipi seguenti:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ne segue che se valutiamo il numero N di sostituzioni in G incongrue (mod. 2), l'indice del sottogruppo G' di G sarà precisamente eguale a $\frac{N}{6}$. Il numero N risulta diverso secondo che

$$a)\ D \equiv 3 \ (\text{mod. } 8), \quad o \quad b)\ D \equiv 7 \ (\text{mod. } 8),$$

casi che tratteremo quindi separatamente.*) Osserviamo che in ogni caso i quattro numeri $0, 1, \omega, 1+\omega$ formano un sistema completo di resti (mod. 2).

Caso a) $D \equiv 3$ (mod. 8). Avendosi

$$\omega^2 - \omega + \frac{D+1}{4} = 0, \tag{2}$$

sussiste qui la congruenza $\omega^2 \equiv \omega + 1$ (mod. 2) e la congruenza

$$\beta x \equiv \gamma \ (\text{mod. } 2)$$

per i valori $1, \omega, 1+\omega$ di β e un valore arbitrario di γ ammette ogni volta una sola soluzione.

Ora le sostituzioni di G essendo assoggettate (mod. 2) all' unica condizione $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ (mod. 2) ne risulta che per quelle di esse in cui $\delta \equiv 0$ (mod. 2), α può assumere 4 valori incongrui e β 3, la coppia scelta per α, β individuando ciascuna volta γ. Abbiamo dunque in G:

$$4 \times 3 = 12 \text{ sostituzioni incongrue con } \delta \equiv 0 \ (\text{mod. } 2).$$

---

*) L'ultima ragione di questa differenza sta in ciò che nel primo caso il numero 2 è un numero primo nel campo $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ mentre nel secondo caso è scindile in fattori (ideali).

Se *non è* $\delta \equiv 0$ (mod. 2), possono sì β che γ assumere 4 valori incongrui e dai valori scelti per β, γ, δ risulta individuato α; vi sono quindi in G: $4 \times 4 \times 3 = 48$ sostituzioni incongrue con $\delta \equiv 1, \omega, 1+\omega$ (mod. 2).

E poichè G, come ora si dimostrerà, contiene effettivamente sostituzioni di tutti questi caratteri (mod. 2) si vede che *il numero* N *certato è eguale a* 60 *se* $D \equiv 3$ (*mod.* 8).

Fra queste 60 sostituzioni scegliamo le due

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 1+\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

osservando che G contiene certamente sostituzioni di questi caratteri (mod. 2). Per la 2ª è evidente e per la sostituzione A basta sostituirvi l'altra congrua (mod. 2) esistente in G:

$$\begin{pmatrix} 3\omega - \frac{3D+7}{8}, & 1+\omega \\ -3\omega \quad, & -2 \end{pmatrix} \text{ se } D \equiv 3 \text{ (mod. 16)},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \omega - \frac{D+5}{8}, & 1+\omega \\ -\omega \quad, & -2 \end{pmatrix} \text{ se } D \equiv 11 \text{ (mod. 16)}.$$

La sostituzione A, considerata (mod. 2), è a periodo 5 e la B a periodo 2 mentre la loro combinazione

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1+\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ha il periodo 3. Pel noto teorema del Sig[r] Dyck il gruppo generato da A, B consta effettivamente di 60 sostituzioni ed, astrattamente considerato, coincide col gruppo dell' icosaedro.

Nel caso attuale adunque: *G' è sotto gruppo d'indice* 10 *in G ed ha in G la medesima giacitura che il gruppo diedrale di* 6 *sostituzioni nel gruppo dell' icosaedro.* Si osserverà che nello stesso tempo riconosciamo in G l'esistenza di altri sottogruppi d'indice finito corrispondenti ai varii sottogruppi dell' icosaedro.

Caso b) $D \equiv 7$ (*mod.* 8). In forza della (2) sussistono qui le congruenze:

$$\omega^2 \equiv \omega, \quad (\omega+1)^2 \equiv \omega + 1, \quad \omega(\omega+1) = 0 \text{ (mod. 2)},$$

onde si rileva facilmente che la congruenza

$$xy \equiv k \text{(mod. 2)}$$

ammette 9 soluzioni diverse per $k = 0$, 3 soluzioni per $k = \omega$ o $k = \omega + 1$, ed una soltanto par $k = 1$. Dopo di ciò si vede subito che il numero N delle possibili sostituzioni di G incongrue (mod. 2) è dato da $N = 36$.

Fra di esse consideriamo particolarmente le due

$$A = \begin{pmatrix} \omega + 1, & 1 \\ 1 \;, & \omega \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

a periodo 3 ciascuna e permutabili fra loro che generano quindi un gruppo Γ_9 colle 9 sostituzioni seguenti

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega + 1 \\ \omega + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega + 1 \\ \omega + 1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo esplicitamente le altre 27 sostituzioni ordinandole nel noto modo rispetto alla sostituzioni di Γ_9:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & \omega + 1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1, & 1 \\ \omega \;, & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;, & \omega \\ \omega + 1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega + 1, & \omega \\ 1 \;, & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \;, & 1 \\ \omega + 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \omega + 1 \\ \omega, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega + 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1, & \omega \\ 1 \;, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ \omega, & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;, & 0 \\ \omega + 1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega \\ 1, & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \;, & \omega + 1 \\ \omega + 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1, & 1 \\ \omega \;, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & \omega + 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1, & 1 \\ 1 \;, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \omega + 1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1, & \omega \\ \omega \;, & \omega + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega \;, & 1 \\ \omega + 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;, & 1 \\ \omega + 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Queste 36 sostituzioni, considerate (mod. 2), formano un gruppo nel quale Γ_9 è contenuto quale sottogruppo *eccezionale* d'indice 4. Resta a verificarsi che G contiene effettivamente sostituzioni di tutti questi caratteri (mod. 2), per il che, esaminando il quadro superiore, vediamo che basta riscontrare in G l'esistenza di una sostituzione congrua (mod. 2) con $\begin{pmatrix} \omega + 1, & 1 \\ 1 \;, & \omega \end{pmatrix}$; questa si trova immediatamente nella sostituzione $\begin{pmatrix} \omega + 1, & 2\omega - \frac{D+5}{4} \\ 1 \;, & \omega \end{pmatrix}$. Possiamo ora enunciare il risultato finale:

Il sottogruppo G' di G ha l'indice 10 *o* 6 *secondo che* $D \equiv 3$ *o* $D \equiv 7$ (*mod.* 8).

Osservazione. In modo del tutto analogo a quello tenuto nel presente paragrafo per lo studio del sottogruppo G' di G, si può procedere alla ricerca di quei sottogruppi G_1 di G, nei quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono soltanto gli interi di un determinato *ordine* $[1, k\omega]$, essendo k un numero fisso razionale intero. In ogni caso G_1, come sottogruppo congruenziale di G ha indice finito. Per tal modo ad esempio il caso in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono gli interi della forma $m + in\sqrt{D}$, ove D *ammetta fattori quadrati* si riconduce a quello da noi esclusivamente considerato in cui D è privo di tali fattori.

§ 6.

Doppio ampliamento del gruppo — Riflessioni.

Fino adora abbiamo considerato nel corpo quadratico Ω soltanto quelle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

con coefficienti interi il cui determinante è eguale a $+1$; ma è chiaro che otteniamo un gruppo più ampio Γ, se esigiamo soltanto che $\alpha\delta - \beta\gamma$ sia un' *unità*. Eccettuati i casi $D = 1$, $D = 3$ nei quali vi sono rispettivamente 4 e 6 unità, abbiamo in effetto le due sole unità ± 1 e però G è sottogruppo eccezionale d'indice 2 in Γ. Se riflettiamo poi che le sostituzioni (1) non sono alterate quando si moltiplichino i quattro coefficienti per un medesimo fattore e per questo prendiamo un' unità, vediamo che lo stesso accade per $D = 1$, $D = 3$. Il gruppo Γ formato da tutte le sostituzioni (1) con

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \tag{2}$$

condizione questa che nel caso $D = 1$ si sostituirà coll' altra

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \quad \text{o} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm i,$$

sarà indicato nel seguito con

$$\Gamma^{(i\sqrt{D})} \quad \text{o} \quad \Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)} \quad \text{per } D \equiv 3 \pmod{4}$$

ed anche talora più brevemente con $\Gamma^{(\omega)}$ ed è di questo gruppo che particolarmente ci occuperemo.

Procediamo ora ad un secondo ampliamento di $\Gamma^{(\omega)}$ ben più importante pel nostro scopo, all' *ampliamento per riflessione* (Erweiterung durch Spiegelung). Consideriamo perciò insieme alle sostituzioni lineari dirette (o di 1ª specie) sulla variabile z le altre

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \tag{3}$$

z_0 essendo la coniugata di z, sostituzioni che diremo *di 2ª specie*. Le formole per la relativa trasformazione dello spazio si ottengono da quelle di Poincaré ((2) § 1) semplicemente scambiandovi z con z_0. Riguardando il mezzo spazio R come immagine (conforme) dello spazio a curvatura costante negativa, le prime trasformazioni rappresentano un puro movimento e le seconde invece un tale movimento combinato con una riflessione o simmetria rispetto ad un piano.

Se nella (2), (3) immaginiamo che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrano tutti gli interi in Ω che soddisfano alla condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ (o alle altre $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ per $D = 1$) otterremo un gruppo che indicheremo con

$$\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{D})}, \quad \bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)} \quad \text{o} \quad \bar{\Gamma}^{(\omega)},$$

nel quale $\Gamma^{(\omega)}$ è evidentemente contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

Per la determinazione del poliedro fondamentale dei gruppi $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ e $\Gamma^{(\omega)}$ ha singolare importanza la ricerca di quelle sostituzioni di 2ª specie in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, che sono a periodo 2 cioè coincidono colla propria inversa. Queste sostituzioni si diranno *riflessioni* (Spiegelungen). Gli elementi per questa determinazione si trovano già sviluppati da Fricke nel citato libro di Klein (pª 196 s. s), al quale qui ci riferiremo.

L'inversa della sostituzione di 2ª specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad \text{è} \quad z' = \frac{-\delta_0 z_0 + \beta_0}{\gamma_0 z_0 - \alpha_0}$$

e perchè le due sostituzioni coincidano occorre che si abbia:

$$-\delta_0 = k\alpha, \quad \beta_0 = k\beta, \quad \gamma_0 = k\gamma, \quad -\alpha_0 = k\delta$$

dove k è un fattore di proporzionalità. Lasciando per un momento da parte il caso $D = 1$ sarà $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 = \pm 1$, onde risulta $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. Si presenterà dunque uno dei due casi seguenti

$$\begin{array}{lllll} 1^0 & -\delta_0 = \alpha, & \beta_0 = \beta, & \gamma_0 = \gamma, & -\alpha_0 = \delta, \\ 2^0 & \delta_0 = \alpha, & \beta_0 = -\beta, & \gamma_0 = -\gamma, & \alpha_0 = \delta. \end{array}$$

Scindendo ciascun coefficiente nella sua parte reale ed immaginaria troviamo in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, quando non è $D \equiv 3 \pmod{4}$, i due tipi seguenti di riflessioni

$$\text{Tipo I:} \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D})\, z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

$$\text{Tipo II:} \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D})\, z_0 + i b_1\sqrt{D}}{i c_1\sqrt{D}\, z_0 + (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi reali che debbono corrispondentemente soddisfare alla condizione:

$$\begin{array}{ll} \text{I*)} & a_1^2 + D a_2^2 + b_1 c_1 = \pm 1, \\ \text{II*)} & a_1^2 + D a_2^2 + D b_1 c_1 = \pm 1 \end{array}$$

secondo che si tratta del tipo I o del tipo II.

Similmente procedendo per $D \equiv 3$ (mod. 4), troviamo in $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ le riflessioni dei due tipi:

$$\text{Tipo III:} \qquad z' = \frac{\left(a_1 + a_2\,\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - \left(a_1 + a_2\,\frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)},$$

$$\text{Tipo IV:} \qquad z' = \frac{\left(a_1 + a_2\,\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + i b_1\sqrt{D}}{i c_1\sqrt{D}\, z_0 + \left(a_1 + a_2\,\frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)}$$

ove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi reali assoggettati alle rispettive condizioni:

$$\text{III*)} \quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 b_1 c_1 = \pm 4,$$
$$\text{IV*)} \quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 D b_1 c_1 = \pm 4.$$

Se $D = 1$, la condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ dovendo essere surrogata dalle altre $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$, i risultati sono leggiermente diversi. Per $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ troviamo ancora $k = \pm 1$ ma qui il doppio segno di k non porta differenza alcuna perchè col moltiplicare simultaneamente α, β, γ, δ per i si passa dall' un segno di k all' altro. Per $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ si ha invece $k^2 = -1$, $k = \pm i$, dove nuovamente possiamo trascurare il doppio segno di k. Così troviamo in $\bar{\Gamma}^{(i)}$ le riflessioni dei due tipi

$$\text{Tipo A:} \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)}, \qquad a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = \pm 1,$$

$$\text{Tipo B:} \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1 - i) b_1}{(1 - i) c_1 z_0 + a_2 + i a_1}, \quad a_1^2 + a_2^2 + 2 b_1 c_1 = \pm 1.$$

§ 7.

Sfere di riflessione propria ed impropria.

Calcoliamo ora le trasformazioni dello spazio R corrispondenti alle sostituzioni di 2ª specie a periodo 2 trovate in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$. Usiamo per ciò delle formole (2) § 1 nelle quali, come già superiormente è stato avvertito, deve a questo oggetto scambiarsi z con z_0.

Consideriamo dapprima il caso in cui sia $c_1 = 0$, ove evidentemente nelle I*), II*), III*), IV*) può valere soltanto il segno superiore. Se si tratta del gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{D})}$ per $D > 1$, o del gruppo $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ per $D > 3$, avremo manifestamente

$$a_1 = \pm 1, \quad a_2 = 0$$

restando b_1 arbitrario e per le relative formole di trasformazione troviamo

$$\xi' = -\xi + b_1, \quad \eta' = \eta, \qquad \zeta' = \zeta \quad \text{pel tipo I) o III)},$$
$$\xi' = \xi, \qquad \eta' = -\eta + b_1\sqrt{D}, \quad \zeta' = \zeta \quad \text{pel tipo II) o IV)}.$$

Queste rappresentano una simmetria o riflessione sul piano

(1) $$2\xi = b_1, \quad 2\eta = b_1\sqrt{D}.$$

Percorrendo b_1 tutti i numeri razionali interi le (1) ci danno tutti i *piani di riflessione.* Però nel caso $D = 1$ abbiamo oltre i piani di riflessione (1) gli altri

(2) $$\xi - \eta = b_1, \quad \xi + \eta = b_1$$

e nel caso $D = 3$

(3) $$\pm\xi + \eta\sqrt{3} + \frac{1}{2}b_1 = 0, \qquad \pm\xi\sqrt{3} + \eta + \frac{1}{2}b_1\sqrt{3} = 0,$$

come subito si rileva dalle formole del precedente paragrafo.

Supponendo ora c_1 diverso da zero e considerando dapprima il caso in cui nel 2° membro delle I*), II*), III*), IV*) del § 6 vale il segno superiore, dalle formole (2) del § 1 troviamo i risultati seguenti. La sostituzione del tipo I)

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{D})\,z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - ia_2\sqrt{D})}, \quad a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1$$

produce la trasformazione dello spazio data dalle formole:

$$\begin{cases} \xi' - \dfrac{a_1}{c_1} = \dfrac{1}{c_1^2}\,\dfrac{\xi - \dfrac{a_1}{c_1}}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\[2ex] \eta' - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1} = \dfrac{1}{c_1^2}\,\dfrac{\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\[2ex] \zeta' = \dfrac{\zeta}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}. \end{cases}$$

Come si vede, questa è un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

Tale inversione si dirà anche una *riflessione* su questa sfera che prenderà il nome di *sfera di riflessione.* Similmente si vedrà che le sostituzioni dei tipi II), III), IV) § 6 corrispondono a riflessioni sulle rispettive sfere

$$\left(\xi-\frac{a_2}{c_1}\right)^2+\left(\eta+\frac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{Dc_1^2},$$
$$\left(\xi-\frac{2a_1+a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{c_1^2},$$
$$\left(\xi-\frac{a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta+\frac{2a_1+a_2}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{Dc_1^2}.$$

Riepiloghiamo i risultati in un quadro a cui dovremo ricorrere in seguito

$$D\text{ qualunque}\begin{cases}\text{Tipo I)}\begin{cases}\text{Sostituzione}\quad z'=\dfrac{(a_1+ia_2\sqrt{D})z_0+b_1}{c_1z_0-(a_1-ia_2\sqrt{D})},\\ \qquad\qquad\text{(A)}\quad a_1^2+Da_2^2+b_1c_1=1,\\ \text{Sfera di riflessione}\quad\left(\xi-\dfrac{a_1}{c_1}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{c_1^2};\end{cases}\\[2ex] \text{Tipo II)}\begin{cases}\text{Sostituzione}\quad z'=\dfrac{(a_1+ia_2\sqrt{D})z_0+ib_1\sqrt{D}}{ic_1\sqrt{D}\,z_0+(a_1-ia_2\sqrt{D})},\\ \qquad\qquad\text{(B)}\quad a_1^2+Da_2^2+Db_1c_1=1,\\ \text{Sfera di riflessione}\quad\left(\xi-\dfrac{a_2}{c_1}\right)^2+\left(\eta+\dfrac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{Dc_1^2};\end{cases}\end{cases}$$

$$D\equiv 3\ (\text{mod. }4)\begin{cases}\text{Tipo III)}\begin{cases}\text{Sostituzione}\quad z'=\dfrac{\left(a_1+a_2\dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)z_0+b_1}{c_1z_0-\left(a_1+a_2\dfrac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)},\\ \qquad\qquad\text{(C)}\quad (2a_1+a_2)^2+Da_2^2+4b_1c_1=1,\\ \text{Sfera di riflessione}\quad\left(\xi-\dfrac{2a_1+a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta-\dfrac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{c_1^2};\end{cases}\\[2ex] \text{Tipo IV)}\begin{cases}\text{Sostituzione}\quad z'=\dfrac{\left(a_1+a_2\dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)z_0+ib_1\sqrt{D}}{ic_1\sqrt{D}z_0+\left(a_1+a_2\dfrac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)},\\ \qquad\qquad\text{(D)}\quad (2a_1+a_2)^2+Da_2^2+4Db_1c_1=1,\\ \text{Sfera di riflessione}\quad\left(\xi-\dfrac{a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta+\dfrac{2a_1+a_2}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\dfrac{1}{Dc_1^2}.\end{cases}\end{cases}$$

Per ottenere tutte le sfere di riflessione basta far percorrere nelle formole precedenti ad a_1, a_2, c_1 tutti gli interi reali che soddisfano alle congruenze rispettive

$$a_1^2+Da_2^2\equiv 1\ (\text{mod. }c_1),\qquad a_1^2+Da_2^2\equiv 1\ (\text{mod. }Dc_1),$$
$$(2a_1+a_2)^2+Da_2^2\equiv 4\ (\text{mod. }4\,c_1),\quad (2a_1+a_2)^2+Da_2^2\equiv 4\ (\text{mod. }4\,Dc_1).$$

In fine nel caso $D=1$ abbiamo i risultati seguenti:

$$D = 1 \begin{cases} \text{Tipo A)} \begin{cases} \text{Sostituzione} \quad z' = \dfrac{(a_1 + i a_2)\, z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)}, \\ \qquad\qquad\qquad a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione} \left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{c_1^2}; \end{cases} \\ \text{Tipo B)} \begin{cases} \text{Sostituzione} \quad z' = \dfrac{(a_1 + i a_2)\, z_0 + (1 - i)\, b_1}{(1 - i)\, c_1 z_0 + (a_2 + i a_1)}, \\ \qquad\qquad\qquad a_1^2 + a_2^2 + 2 b_1 c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione} \left(\xi - \dfrac{a_1 - a_2}{2 c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_1 + a_2}{2 c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{2 c_1^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Consideriamo ora quelle sostituzioni di 2ª specie a periodo 2, che corrispondono nelle formole (A), (B), (C), (D) del quadro superiore ad un cangiamento di segno nel 2º membro. Per la trasformazione dello spazio corrispondente ad esempio ad una tale sostituzione del tipo I) troviamo:

$$\begin{cases} \xi' - \dfrac{a_1}{c_1} = -\dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\xi - \dfrac{a_1}{c_1}}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\ \eta' - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1} = -\dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\eta - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\ \qquad \zeta' = + \dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\zeta}{\left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}. \end{cases}$$

È chiaro che questa trasformazione consiste in una riflessione sulla sfera

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

congiunta con una rotazione di π attorno a quel diametro della sfera che è perpendicolare al piano $\xi\eta$. Diremo questo diametro *asse* della sfera, la sostituzione si chiamerà una *riflessione impropria* e la sfera stessa *sfera di riflessione impropria*. Analogamente procedendo per gli altri casi si vede che le formole riunite nei quadri superiori ci danno tutte le sfere di riflessione *impropria*, quando alle condizioni (A), (B), (C), (D) si sostituiscano quelle che ne risultano cangiando il segno del 2º membro.

È da notarsi che una sfera può figurare simultaneamente come sfera di riflessione propria ed impropria. Ciò accade per tutte e sole le sfere dei tipi I) o III) diraggio eguale ad 1 o a $\frac{1}{2}$. La combinazione delle due riflessioni propria ed impropria dà allora una rotazione di π attorno all' asse della sfera cioè una sostituzione ellittica a periodo 2 in $\Gamma^{(\omega)}$.

§ 8.

Periodicità delle sostituzioni in $\Gamma^{(\omega)}$.

Le sostituzioni lineari

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

si dividono, come è noto, inquattro classi cioè: ellittiche, paraboliche, iperboliche e lossodromiche*). Supposto ridotto, come sempre è possibile, il determinante $ad-bc$ eguale all' unità, la natura della sostituzione dipende dalla somma $a+d$ del 1º e 4º coefficiente. Se $a+d$ è reale, essa è ellittica, parabolica od iperbolica secondo che

$$(a+d)^2 < 4, \quad (a+d)^2 = 4, \quad (a+d)^2 > 4;$$

quando $a+d$ non è reale la sostituzione è lossodromica.

Per lo studio del nostro gruppo $\Gamma^{(\omega)}$ ci interessa specialmente di conoscere le sostituzioni ellittiche in $\Gamma^{(\omega)}$ ed il loro periodo, che è necessariamente finito, il gruppo essendo propriamente discontinuo. Il periodo della sostituzione si deduce dal valore del moltiplicatore

$$k = \frac{\{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4}\}^2}{4};$$

per le sostituzioni ellittiche di un gruppo propriamente discontinuo esso è eguale ad una radice n^ma^ dell' unità e il corrispondente periodo è allora $=n$. Ricordiamo inoltre che nella trasformazione dello spazio dovuta ad una sostituzione ellittica rimangono fissi tutti i punti di un circolo (o retta) ortogonale al piano $\xi\eta$**).

Supposto $D>1$ si hanno in $\Gamma^{(\omega)}$ due sorta di sostituzioni, quelle a determinante $+1$ e quelle a determinante -1. Le prime sono ellittiche se $\alpha+\delta=0$ o $\alpha+\delta=\pm 1$ ed hanno per rispettivo moltiplicatore

$$k=-1 \quad \text{o} \quad k=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2};$$

esse sono quindi a periodo 2 o 3, qualunque sia D.

Una sostituzione $z' = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ di $\Gamma^{(\omega)}$ a determinante -1 si riduce a determinante $+1$ moltiplicando i suoi quattro coefficienti per i; essa sarà dunque ellittica se $i(\alpha+\delta)$ è reale ed il suo modulo è <2. Sarà dunque $\alpha+\delta = in\sqrt{D}$ con n razionale intero e la condizione $Dn^2<4$ porta subito, per $D>3$, $n=0$ e però $\alpha+\delta=0$. Queste nuove sostituzioni ellittiche sono a periodo 2; dunque: *Nel gruppo* $\Gamma^{(\omega)}$, *appena* $D>3$, *esistono soltanto sostituzioni ellittiche coi periodi* 2 *e* 3.

Nei casi esclusi $D=1$, $D=2$, $D=3$, considerando dapprima i due ultimi, sono possibili sostituzioni ellittiche di periodo diverso da

*) Cf. Klein, Vorlesungen etc. pag. 163 s. s. e Poincaré, Acta Mathematica Bd. 3.

**) Nello spazio non-euclideo essa è una pura rotazione.

2, 3 solo fra quelle di determinante -1. Riprendendo la considerazione superiore, alla condizione $Dn^2 = 4$, oltre che con $n = 0$, si soddisfa anche con $n = \pm 1$ e corrispondentemente risulta

$$k = \pm i \text{ per } D = 2, \quad k = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \text{ per } D = 3$$

ed abbiamo quindi per $D = 2$ delle sostituzioni ellittiche a periodo 4, per $D = 3$ delle sostituzioni a periodo 3 e 6.

In fine se $D = 1$ troviamo delle nuove sostituzioni ellittiche solo fra quelle a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ e possiamo senz' altro supporre $\alpha\delta - \beta\gamma = i$. Per ridurre il determinante $= + 1$ basta allora moltiplicare i quattro coefficienti per $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ e, dovendo essere per le sostituzioni cercate

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha + \delta) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}(m + in)$$

reale, sarà $n = m$ quindi

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha + \delta) = m\sqrt{2}$$

e la corrispondente condizione $2m^2 < 4$ si soddisfa, oltre che con $m = 0$, anche con $m = \pm 1$. Le relative sostituzioni in $\Gamma^{(i)}$ sono a periodo 4. Ci saranno poi utili anche le osservazioni seguenti che riguardano le sostituzioni paraboliche in $\Gamma^{(\omega)}$. Una tale sostituzione lascia invariato un solo punto del piano $\xi\eta$ che è indice di un numero frazionario in $\Gamma^{(\omega)}$. Inversamente ogni tale punto $z_0 = \frac{a}{b}$ è punto fisso di infinite sostituzioni paraboliche in $\Gamma^{(\omega)}$; queste hanno la forma $\begin{pmatrix} 1 + \gamma\frac{a}{b}, & -\gamma\left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \gamma \quad , & 1 - \gamma\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ ove γ percorre tutti gli interi in Ω che rendono $\gamma\frac{a}{b}$, $\gamma\frac{a^2}{b^2}$ interi. Il sottogruppo di $\Gamma^{(\omega)}$ che lascia fisso il punto $\frac{a}{b}$ consta di tutte e sole queste sostituzioni a determinante $+1$ combinate con una sostituzione ellittica a determinante -1 e a periodo 2. I numeri γ formano manifestamente un ideale riconducibile ad una base binaria e però bastano due sostituzioni paraboliche elementari per generare tutte quelle del sottogruppo descritto. Fra le sostituzioni paraboliche osserviamo quelle che lasciano fisso il punto $z = \infty$; esse hanno la forma

$$z' = z + \beta$$

e se ad esse si associano le sostituzioni della forma

$$z' = -z + \beta.$$

che sono ellittiche a periodo 2 si ha il gruppo di tutte le sostituzioni di $\Gamma^{(\omega)}$ che lasciano invariato $z = \infty$. Da quanto abbiamo visto ai §§ 2, 3 risulta che per ogni punto $z_0 = \frac{a}{b}$ indice di un numero frazionario in Ω con a, b primi fra loro il gruppo delle sostituzioni che lo lasciano fermo consta egualmente di sostituzioni paraboliche e di sostituzioni ellittiche a periodo 2 ed è affine al gruppo sopra descritto. Lo stesso risulta per qualsiasi numero frazionario in Ω, da quanto è detto superiormente.

§ 9.

Angoli sotto cui s'intersecano le sfere di riflessione.

In questo paragrafo per sfere di riflessione s'intenderanno quelle di *riflessione propria* soltanto; supporremo inoltre $D > 3$ notando semplicemente i risultati speciali per $D = 1, 2, 3$. Per angolo A di due sfere fisseremo di considerare quello che vien formato nella regione interna ad ambedue le sfere, per cui se d è la distanza dei centri ed r, r', sono i raggi si avrà

$$(1) \qquad d^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos A.$$

Quando due sfere di riflessione s'incontrano, la sostituzione di 1ª specie che nasce dalla combinazione delle due riflessioni è ellittica o parabolica secondo che le due sfere si tagliano effettivamente oppure si toccano. Siccome le sostituzioni ellittiche in $\Gamma^{(\omega)}$, per $D > 3$, sono soltanto a periodo 2 o 3 ne segue che l'angolo A sotto cui si tagliano due sfere di riflessione potrà soltanto avere uno dei tre valori $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Ciò vogliamo qui confermare con un calcolo diretto sulle formole del § 7.

Prendiamo due sfere di riflessione appartenenti ambèdue al tipo I) del § 7 e siano

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_2\sqrt{D}}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2}$$

le loro equazioni essendo a_1, a_2, b_1, c_1; α_1, α_2, β_1, γ_1 numeri razionali interi che soddisfano alle condizioni

$$(2) \qquad a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1, \quad \alpha_1^2 + D\alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1,$$

ove supporremo c_1, γ_1 positivi, come evidentemente è lecito. Se le due sfere s'incontrano, per l'angolo A di loro intersezione risulta dalla (1)

$$\left(\frac{a_1}{c_1} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + D\left(\frac{a_2}{c_1} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{2\cos A}{c_1\gamma_1},$$

ovvero, per le (2)

$$\cos A = -\frac{1}{2}\left\{2a_1\alpha_1 + 2Da_2\alpha_2 + b_1\gamma_1 + \beta_1c_1\right\}.$$

La quantità fra parentesi essendo un numero intero, troviamo possibili per $\cos A$ soltanto invalori $\cos A = 0$, $\cos A = \pm 1$, $\cos A = \pm \frac{1}{2}$ e però

$$A = \frac{\pi}{2}; \quad A = 0, \ \pi; \quad A = \frac{\pi}{3}, \ \frac{2\pi}{3}.$$

La combinazione delle due riflessioni

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{D}) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \quad z' = \frac{(\alpha_1 + i \alpha_2 \sqrt{D}) z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (\alpha_1 - i \alpha_2 \sqrt{D})}$$

dà la sostituzione di 1ª specie a determinante $+1$: $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ dove

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1 \alpha_1 + D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + i\sqrt{D}(a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2), \\
\beta &= a_1 \beta_1 - b_1 \alpha_1 + i\sqrt{D}(a_2 \beta_1 - b_1 \alpha_2), \\
\gamma &= c_1 \alpha_1 - a_1 \gamma_1 + i\sqrt{D}(a_2 \gamma_1 - c_1 \alpha_2), \\
\delta &= a_1 \alpha_1 + D a_2 \alpha_2 + c_1 \beta_1 - i\sqrt{D}(a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2),
\end{aligned}$$

questa è ellittica a periodo 2 se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = 0, \quad \cos A = 0$$

ellittica a periodo 3 se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = \pm 1, \quad \cos A = \pm \frac{1}{2},$$

parabolica se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = + 2, \quad \cos A = \pm 1$$

ed iperbolica negli altri casi (se le due sfere non s'incontrano).

Se le due sfere di riflessione si toccano è chiaro che nello stesso punto del piano $\xi\eta$ si toccano infinite sfere di riflessione. Se si incontrano ortogonalmente, non può pel loro circolo comune C passare alcun' altra sfera di riflessione, altrimenti questa sfera apparterrebbe al medesimo tipo I), come ora vedremo e taglierebbe le precedenti sotto l'angolo $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$ avremmo quindi due sostituzioni ellittiche l'una a periodo 2 l'altra a periodo 3 che lascierebbero ambedue fissi i punti del cerchio C; la loro combinazione darebbe luogo ad una sostituzione ellittica a periodo 6, che nel nostro gruppo $\Gamma^{(\omega)}$ per $D > 3$ è impossibile (§ 8). Se le due sfere si tagliano secondo un angolo di $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$, facendo subire ad una delle due sfere una riflessione sull' altra, si ottiene una terza sfera di riflessione che passa pel loro circolo comune. In questo caso si ha

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = \pm 1$$

e per l'equazione di questa terza sfera si ottiene facilmente

$$\left(\xi - \frac{a_1 \mp \alpha_1}{c_1 \mp \gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{D}\, \frac{a_2 \mp \alpha_2}{c_1 \mp \gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(c_1 \mp \gamma_1)^2}.$$

Come caso limite se $c_1 = \gamma_1$, valendo i segni superiori, la terza sfera si riduce al piano (di riflessione) che contiene il circolo comune alle altre due. D'altronde risulta subito dalle considerazioni superiori che oltre queste tre sfere non vi ha alcun' altra sfera di riflessione che appartenga allo stesso fascio.

Risultati perfettamente simili si otterrebbero per due sfere appartenenti simultaneamente al tipo II), III) o IV) § 7.

Consideriamo ora due sfere di riflessione di tipo diverso p. e. dei tipi I), II) § 7 e siano

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1\sqrt{D}}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\gamma_1^2}$$

le loro equazioni essendo a_1, a_2, b_1, c_1; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ numeri interi che soddisfano le condizioni:

$$a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1, \quad \alpha_1^2 + D\alpha_2^2 + D\beta_1\gamma_1 = 1.$$

Per l'angolo A sotto cui si tagliano troviamo dalla (1) avendo riguardo alle precedenti

$$\cos A = -\frac{\sqrt{D}}{2}\{2a_1\alpha_2 + 2a_2\alpha_1 + b_1\gamma_1 + c_1\beta_1\}.$$

La quantità fra parentesi essendo un numero intero ed avendosi $D > 3$ ne risulta necessariamente $\cos A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$. Corrispondentemente la sostituzione di 1ª specie (a determinante -1), composta delle due riflessioni, è ellittica a periodo 2.

Riassumendo abbiamo: *Se due sfere di riflessione del medesimo tipo s'incontrano, esse si tagliano sotto un angolo retto oppure eguale a* $\frac{\pi}{3}$ $\left(o \ \frac{2\pi}{3}\right)$, *ovvero si toccano. Per due sfere di riflessione di diverso tipo l'incontro non può avvenire che ortogonalmente.*

Nei casi esclusi $D = 1, 2, 3$ si vedrà facilmente che oltre agli indicati valori per l'angolo A si presenta anche il valore $\frac{\pi}{4}$ per $D = 1, 2$ e il valore $\frac{\pi}{6}$ per $D = 3$ (Cf. § 7).

§ 10.

Generalità sulla ricerca del poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$.

Consideriamo l'insieme di tutti i piani e di tutte le sfere di riflessione e in particolare le loro traccie (rette e circoli) sul piano $\xi\eta$. È facile vedere che qualsiasi porzione di questo piano, per quanto piccola, è sempre attraversata da sfere di riflessione. E infatti in questa area giacciono infiniti punti equivalenti al punto $z=\infty$ cioè punti $z=\frac{a}{b}$ indici di numeri frazionarii in Ω con a, b primi fra loro (§ 4). Ora come pel punto $z=\infty$ passano le due serie di piani di riflessione (§ 7)

$$\xi=\frac{1}{2}b_1, \quad \eta=\frac{1}{2}b_1\sqrt{D},$$

ove b_1 è un numero intero razionale qualunque così per ogni tale punto $z=\frac{a}{b}$ passano due serie di sfere di riflessione, appartenenti a due diversi tipi, rispettivamente fra loro tangenti ed ortogonali nel punto z; tali sfere si ottengono trasformando i detti piani per mezzo di una sostituzione che trasporti $z=\infty$ in $z=\frac{a}{b}$. Così p. e. pel punto $z=0$ passano le due serie di sfere di riflessione dei tipi I), II) § 7:

$$\left(\xi-\frac{1}{c_1}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{c_1^2}, \quad \xi^2+\left(\eta-\frac{1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{Dc_1^2}$$

essendo c_1 un intero arbitrario.

Per quei valori di D, che noi considereremo, avviene che questi circoli e rette di riflessione ricoprono interamente il piano $\xi\eta$ e ci sarà ogni volta possibile limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessione un poliedro P nell' interno del quale non penetri più alcuna sfera (o piano) di riflessione. Gli angoli diedri di questo poliedro, trascurando i casi $D=1, 2, 3$, saranno o angoli retti o angoli di ampiezza $\frac{\pi}{3}$, poichè se ad uno spigolo si trovasse un angolo eguale a $\frac{2\pi}{3}$, la terza sfera di riflessione che passa per questo spigolo (§ 9) penetrerebbe nell' interno del poliedro. Gli angoli di P essendo sottomultipli di π, se facciamo subire a P successive riflessioni sulle sue faccie e nello stesso modo operiamo coi nuovi poliedri ottenuti veniamo a riempire con questi poliedri una ed una sola volta lo spazio R (Poincaré l. c.). A questa divisione dello spazio R con poliedri, le cui faccie danno complessivamente tutte le sfere e piani di riflessione, corrisponde un sottogruppo $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ pel quale P è il poliedro fondamentale. Se osserviamo inoltre che ogni sostituzione di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ scambia fra loro le sfere e i piani di riflessione e cangia per conseguenza la rete di poliedri sopra considerata in sè medesima, vediamo che $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ è un sottogruppo di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ permutabile con tutte le sue sostituzioni cioè *eccezionale* in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$.*) Il poliedro P avendo un numero

*) In altre parole si osservi che $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ si genera con sole riflessioni e d'altra parte contiene tutte le riflessioni di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$. Ora qualunque trasformata di una riflessione è pure una riflessione e però $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ è eccezionale in $\overline{\Gamma}^{\omega}$.

finito di faccie, spigoli e vertici, le sostituzioni di $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ che lo trasformano in sè medesimo sono necessariamente in numero limitato. Se indichiamo con r questo numero abbiamo evidentemente: $\bar{\Gamma}_r^{(\omega)}$ *è sotto gruppo eccezionale di indice r in* $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$. Il poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ si otterrà da P suddividendo convenientemente questo poliedro in r poliedri parziali. (Cf. Fricke, Vol. XXXIX di questi Annali).

§ 11.

Continuazione.

Da queste considerazioni generali scendiamo ad alcune osservazioni utili per l'effettiva applicazione ai singoli casi. Supponendo sempre $D > 3$, i piani di riflessione dividono lo spazio R in prismi eguali a base rettangolare di lati $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{D}}{2}$; in particolare fissiamo il prisma limitato in R dai quattro piani di riflessione

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{\sqrt{D}}{2},$$

che evidentemente non è attraversato da alcun altro piano di riflessione. Il poliedro P che formeremo consterà di quella porzione del prisma, che è esterna ad un conveniente numero di sfere di riflessione, così determinate che il poliedro P non abbia a comune col piano $\xi\eta$ che qualche vertice. In tutti i casi una di queste sfere sarà quella col centro in $z = 0$ e col raggio $r = 1$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

che appartiene al tipo I) § 7 ove si prenda $a_1 = a_2 = 0$, $c_1 = 1$.

È facile vedere direttamente, servendosi di un noto metodo, che, trovato un tale poliedro P, ogni punto dello spazio R troverà certamente il suo equivalente rispetto a $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ in un punto di P. E infatti é chiaro in primo luogo che usando delle sostituzioni

$$z' = \pm z + \beta, \quad z' = \pm z_0 + \beta$$

che lasciano invariate le ordinate ζ dei punti, si potrà trasportare ogni punto p di R entro il prisma. Se supponiamo già dimostrato che mediante sostituzioni di $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ si possa trasportare un punto p di R nell' interno del prisma ed esternamente ad $n-1$ fra le sfere di riflessione che limitano p, *ingrandendone o lasciandone invariata l'ordinata,* lo stesso proveremo accadere ove alle $n-1$ sfere precedenti se ne aggiunga una n^{ma} del contorno di P. Indicando per un momento con Π la regione di R interna al prisma ed esterna alle $n-1$ sfere e con S la n^{ma} sfera di riflessione si trasporti dapprima p in p_1 internamente a Π. Se p_1 è interno ad S *colla riflessione su* S che *ne ingrandisce l'ordinata*, si trasporti esternamente e il nuovo punto, se esterno a Π, si trasporti internamente a Π in p_2. Operando su p_2 come prima su p_1 e così via otteniamo una serie di punti $p_1, p_2, p_3, \ldots$ con ordinate crescenti tutti interni al prisma ed alla sfera. Tale serie di punti è quindi necessariamente finita (§ 1) e perveniamo così certamente ad un punto p_n equivalente a p esterno a Π e non interno ad S c. d. d. Distinguendo ora i valori di D rispetto al modulo 4 notiamo ancora quanto segue.

1°. *Sia* $D \equiv 1$ (*mod.* 4). Il punto $\frac{1+i\sqrt{D}}{2}$ del piano $\xi\eta$ non è *interno* ad alcuna sfera di riflessione, ma per esso passano, tangenzialmente ai rispettivi piani $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{\sqrt{D}}{2}$, due serie di sfere di riflessione tra le quali notiamo quelle di massimo raggio che hanno le equazioni

$$\text{a)}\quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\text{Tipo I)}\quad a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = \frac{1-D}{2},$$

$$\text{b)}\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{D-1}{2\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2 . D},$$

$$\text{Tipo II)}\quad a_1 = 1 - D,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = \frac{1-D}{2}.$$

2°. *Sia* $D \equiv 3$ (*mod.* 4). Abbiamo allora la sfera di riflessione

$$\text{c)}\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

che appartiene al tipo III) § 7 e corrisponde a

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 1,\quad b_1 = -\frac{D-3}{4}.$$

Se di più $D \equiv 3$ (mod. 8) si osserverà la sfera di riflessione

$$\text{d)}\quad \left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\text{Tipo III)}\quad a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = -\frac{D-3}{8}.$$

3. *Sia D pari.* Il punto $z = \frac{i\sqrt{D}}{2}$ non è interno ad alcuna sfera di riflessione; per esso passano tangenzialmente ai piani $\xi = 0$, $\eta = \frac{\sqrt{D}}{2}$ due serie di tali sfere di cui segniamo le due col massimo raggio:

e) $\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}$,

Tipo I) $a_1=1,\quad a_2=1,\quad c_1=2,\quad b_1=-\frac{D}{2}$,

f) $\xi^2+\left(\eta-\frac{D-1}{2\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2 D}$,

Tipo II) $a_2=0,\quad a_1=1-D,\quad c_1=2,\quad b_1=1-\frac{D}{2}$.

Le sfere di riflessione qui indicate a), b), c), d), e), f) bastano già per i piccoli valori di D a separare il poliedro P cercato,

§ 12.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i)}$.

Benchè i casi $D=1$, $D=3$ siano già stati trattati nel lavoro precedente, non sembra qui inutile coordinare la determinazione dei poliedri fondamentali corrispondenti alle osservazioni generali del paragrafo precedente.

Se $D=1$, si considerino i tre piani di riflessione

$$(1)\quad \xi=\frac{1}{2},\qquad (2)\quad \eta=0,\qquad (3)\quad \xi-\eta=0$$

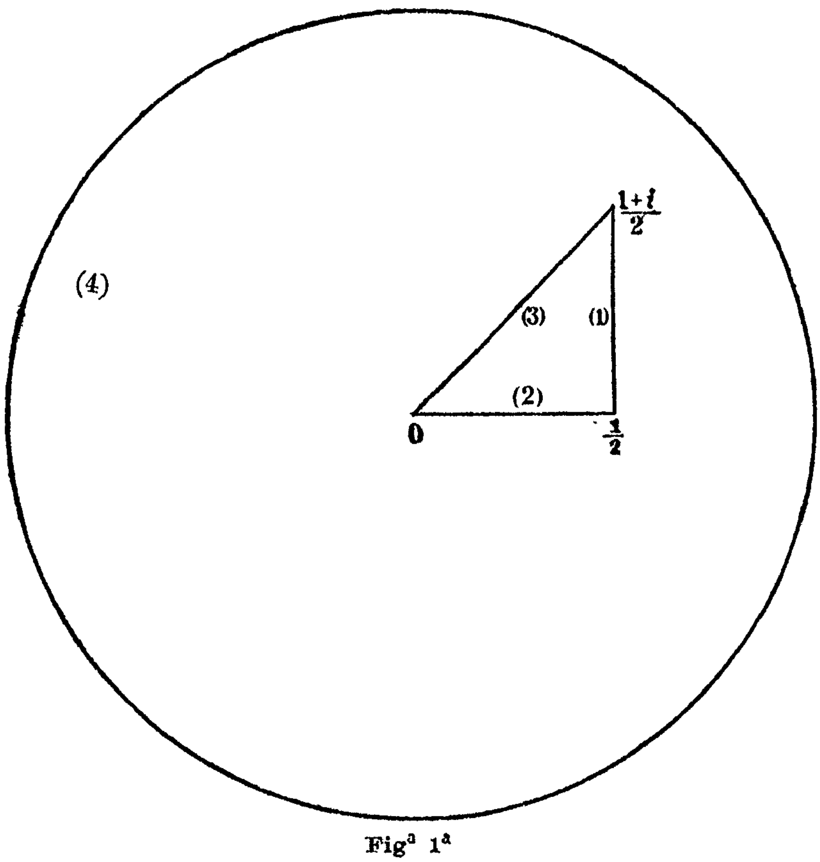


Fig.^a 1^a

e si indichi con P il poliedro racchiuso in R da questi tre piani esternamente alla sfera

$$(4)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.^{*})$$

*) In questa come nelle figure seguenti si osservano le traccie sul piano $\xi\eta$ dei piani e delle sfere di riflessioni numerati come nel testo.

Questo poliedro ha 4 vertici di cui uno all' infinito e gli altir tre nei punti

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

i suoi angoli diedri sono di ampiezza $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ agli spigoli rettilinei e $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ agli spigoli circolari. È evidente che nessun piano di riflessione attraversa P, nè può attraversarlo alcuna sfera di riflessione che altrimenti dovrebbe contenere nel suo interno o V_1, o V_2, o V_3, ciò che facilmente si vede essere impossibile. Conseguentemente P è il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\bar{\Gamma}_\nu^{(i)}$ in $\bar{\Gamma}^{(i)}$. Qui troviamo subito $\nu = 1$, cioè $\bar{\Gamma}_\nu^{(i)}$ coincide con $\bar{\Gamma}^{(i)}$. E infatti una sostituzione di $\bar{\Gamma}^{(i)}$, che trasformi P in sè medesimo, deve lasciar fermo il vertice all' infinito e scambiare gli altri tre ed è quindi visibilmente l'identità.

Determinato così il poliedro fondamentale per $\bar{\Gamma}^{(i)}$, basta per esempio associarvi quello che se ne ottiene per riflessione sul piano $\xi - \eta = 0$ per avere il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma^{(i)}$ definito dalle diseguaglianze

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1 .$$

Esso è naturalmente la metà di quello determinato nella precedente nota, ove si consideravano soltanto le sostituzioni a determinante $+1$. Questo poliedro Π fondamentale per $\Gamma^{(i)}$ ha un quinto vertice nel punto $V_4 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Applicando al poliedro Π le infinite sostituzioni di $\Gamma^{(i)}$ otterremo quella rete di poliedri che effettua la divisione dello spazio R corrispondente a questo gruppo. I poliedri della rete corrispondendo univocamente alle sostituzioni di $\Gamma^{(i)}$, potremo nominare ciascun poliedro colla sostituzione che lo fa nascere dal fondamentale, il quale sarà rappresentato dall' identità.

Per le applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme occorre conoscere i nomi dei poliedri che circondano il fondamentale. Notiamo dunque in primo luogo i nomi dei poliedri aderenti a Π per le cinque faccie; essi sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\Gamma^{(i)}$ si genera colle tre sostituzioni elementari

$$\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix}.$$

È anche opportuno conoscere i nomi dei poliedri che si attaccano a Π lungo gli spigoli circolari come risultano dallo schema seguente

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & i\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo lo spigolo } V_1 V_2, \quad \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}i, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo } V_1 V_4$$

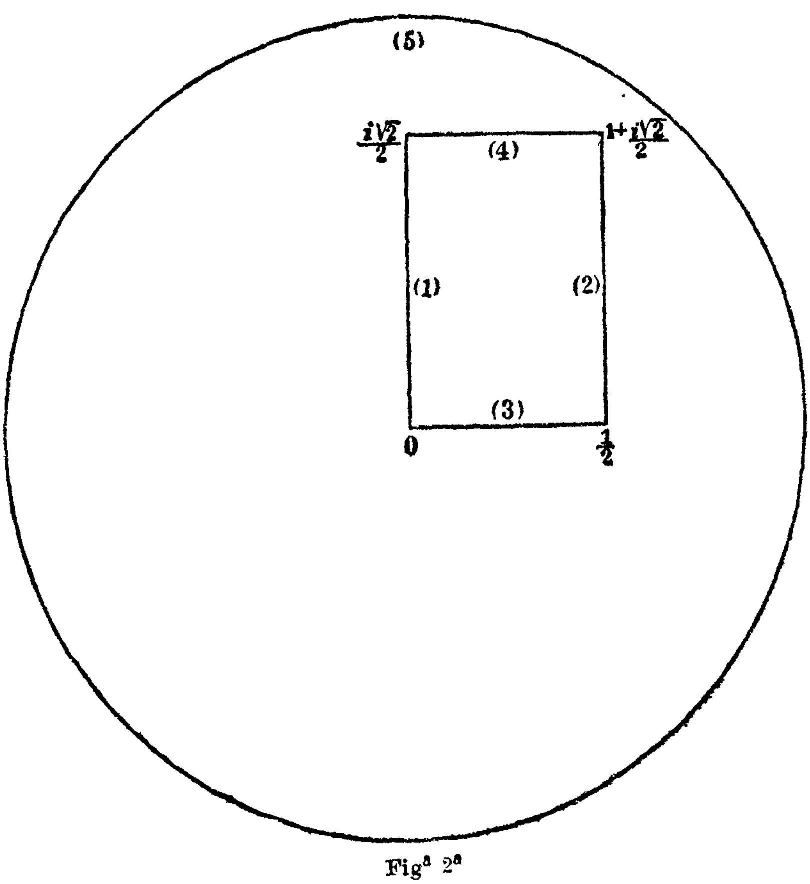
$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & i\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}-1, & i\\ i, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ -i, & i\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 1\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo } V_3 V_4, \quad \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}i, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}i, & 0\\ i, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo } V_2 V_3.$$

§ 13.

I gruppi $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$, $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$.

a) Nel caso $D = 2$ nel poliedro P racchiuso in R fra i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Figª 2ª

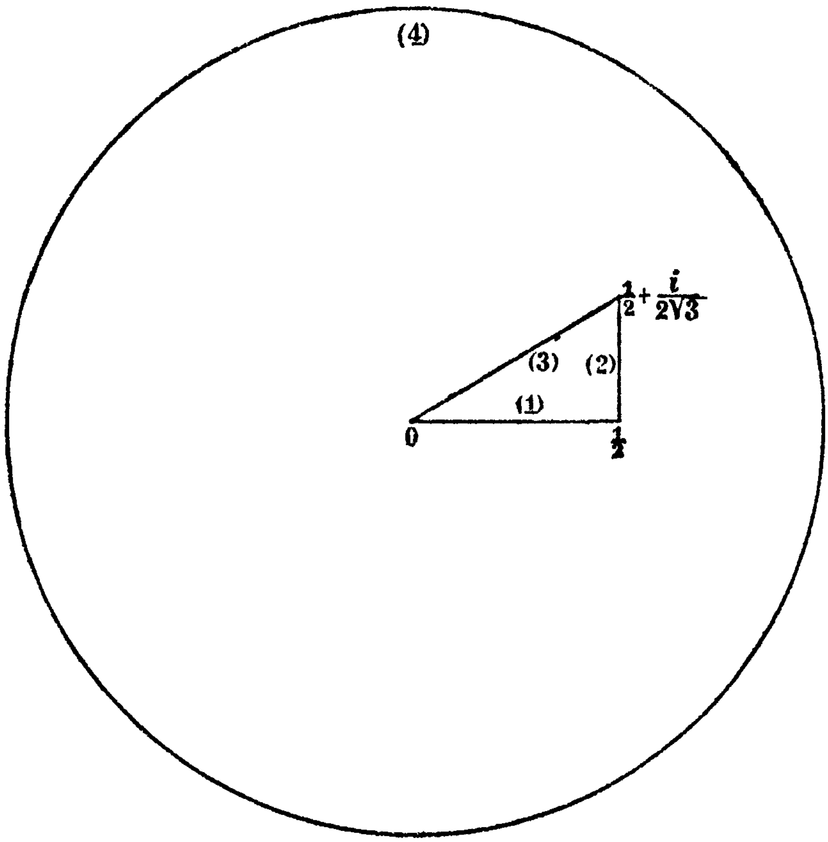
esternamente alla sfera

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

abbiamo già il poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$. E infatti osserviamo che questo poliedro ha cinque vertici di cui uno all' infinito e gli altri quattro nei punti

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right),$$
$$V_4 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

i suoi angoli diedri sono tutti retti salvo due agli spigoli circolari $V_2 V_3$, $V_3 V_4$ di rispettiva ampiezza $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$. Esso non è attraversato da alcuna sfera diriflessione e poichè si vede subito che nessuna sosti-



Figª 3ª

tuzione di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$, tranne l'identità, può trasformarlo in sè medesimo si conclude che P è il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$. Questo gruppo può dunque generarsi colle cinque sostituzioni seguenti che corrispondono alle riflessioni sulle faccie:

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = z_0 + i\sqrt{2}, \quad z' = \frac{1}{z_0}.$$

Associando al poliedro P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$ abbiamo il poliedro fondamentale per $\Gamma^{(i\sqrt{2})}$. A generare quest' ultimo gruppo bastano le sostituzioni di 1ª specie che nascono per combinazione delle precedenti con una determinata fra esse, cioè:

$$z' = -z, \quad z' = z + 1, \quad z' = -z + i\sqrt{2}, \quad z' = -\frac{1}{z}.$$

b) Nel caso $D = 3$ si consideri il prisma a base triangolare racchiuso dai tre piani di riflessione (§ 7)

$$(1)\ \eta = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \xi = \eta\sqrt{3};$$

la porzione di esso giacente in R all' esterno della sfera

$$(4)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

è il poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$. Questo poliedro ha infatti, oltre il vertice all' infinito, i tre vertici:

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

con angoli diedri eguali a $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ agli spigoli rettilinei e $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ agli spigoli circolari. Esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e non è trasformato in sè medesimo che dalla sostituzione identica in $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$. Associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$ si ha il poliedro fondamentale per $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ formato dalla porzione di prisma a base triangolare equilatera

$$\xi - \eta\sqrt{3} = 0, \quad \xi + \eta\sqrt{3} = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}$$

esterna alla sfera

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1\ {}^{*)}.$$

Per sostituzioni generatrici di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ troviamo le quattro.

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = \frac{\omega - 1}{2} z_0, \quad z' = \frac{1}{z_0}, \quad \left(\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

e quindi per quelle di $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ le tre:

$$z' = -z + 1, \quad z' = \frac{\omega - 1}{\omega} z, \quad z' = \frac{1}{z}.$$

§ 14.

Il gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$.

Se $D = 5$ consideriamo il poliedro P a 7 faccie limitato in R dai quattro piani

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

*) Anche qui si osserverà che il poliedro fondamentale per $\Gamma^{(\omega)}$ è la metà di quello determinato nella nota precedente, ove si consideravano le sole sostituzioni a determinante $+1$.

esternamente alle tre sfere di riflessione (§ 14):

$$(5)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\quad (6)\ \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4},$$
$$(7)\ \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{20}.$$

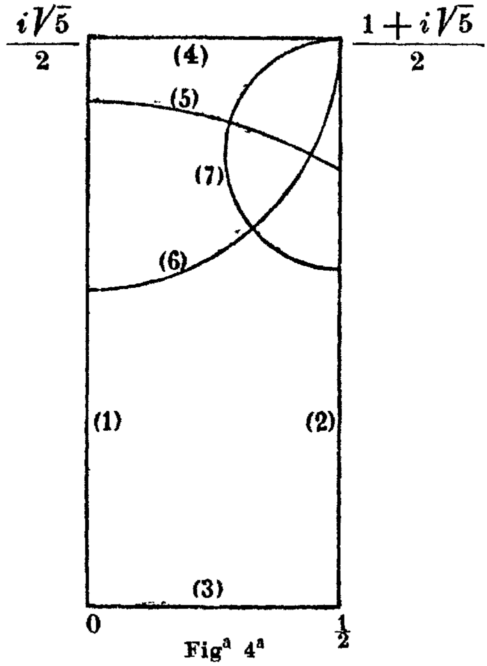


Fig.ª 4ª

Esso possiede 8 vertici dei quali uno all' infinito e gli altri sette nei punti

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5),

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ " " (1) (5) (6),

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ " " (1) (4) (6),

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ " " (2) (4) (6) (7),

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ " " (2) (5) (7).

$V_6 \equiv \left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right)$ " " (5) (6) (7),

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " (2) (3) (5).

Fra questi si ha il solo vertice *singolare* sul piano $\xi\eta$ $V_4 \equiv \frac{1+i\sqrt{5}}{2}$. Dei 13 angoli diedri in P ve ne ha uno solo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ cioè quello allo spigolo $V_5 V_7$, gli altri 12 sono retti. Con semplici calcoli, di cui qui daremo soltanto un esempio, ci accertiamo che non vi è nessuna sfera di riflessione (o piano) che attraversi P. Una tale sfera dovrebbe infatti contenere nel suo *interno* almeno uno dei sette vertici. Ora prendiamo p. e. il vertice $V_6 \equiv \left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right)$; se una sfera del tipo I) § 7:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{5}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad a_1^2 + 5a_2^2 + b_1c_1 = 1$$

contenesse V_6 nel suo interno dovremmo avere

$$(5a_1 - 2c_1)^2 + 5(5a_2 - 2c_1)^2 + c_1^2 < 25.$$

Questa diseguaglianza consente a c_1 i soli valori $c_1 = 1, 2, 3, 4$, i valori negativi opposti potendosi evidentemente trascurare. Essa si traduce nelle rispettive diseguaglianze

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \quad (5a_1 - 2)^2 + 5(5a_2 - 2)^2 < 24, \\ c_1 &= 2, \quad (5a_1 - 4)^2 + 5(5a_2 - 4)^2 < 21, \\ c_1 &= 3, \quad (5a_1 - 6)^2 + 5(5a_2 - 6)^2 < 16, \\ c_1 &= 4, \quad (5a_1 - 8)^2 + 5(5a_2 - 8)^2 < 9, \end{aligned}$$

delle quali soltanto la seconda e la terza ammettano la soluzione intera $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, incompatibile per altro colla condizione

$$a_1^2 + 5a_2^2 + b_1c_1 = 1$$

essendo nel 1⁰ caso $c_1 = 2$ e nel 2⁰ $c_1 = 3$. Similmente per una sfera del tipo II) § 7

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{5c_1^2}$$

che contenesse V_6 nel suo interno dovrebbe aversi

$$(5a_2 - 2c_1)^2 + 5(a_1 + 2c_1)^2 + c_1^2 < 5$$

onde $c_1 = 1$ o $c_1 = 2$ e però:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \quad (5a_2 - 2)^2 + 5(a_1 + 2)^2 < 4, \\ c_1 &= 2, \quad (5a_2 - 4)^2 + 5(a_1 + 4)^4 < 1, \end{aligned}$$

diseguaglianze ambedue impossibili in numeri interi. In modo del tutto simile si procederà per gli altri vertici.

Per dimostrare che il poliedro P superiormente definito è il poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ resta a provarsi che nessuna sostituzione del gruppo, diversa dall' identità, cangia P in sè medesimo. Poichè il vertice singolare $z = \infty$ non è equivalente all' altro vertice singolare $V_6 \equiv \frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ (nella frazione irreducibile $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ non essendo numeratore e denominatore primi fra loro) (Cf. §§ 2, 3), una tale sostituzione dovrebbe lasciare fissi ambedue questi vertici, ciò che manifestamente è impossibile. Ma se domandiamo di trovare una sostituzione lineare che cangi P in sè medesimo, senza esigere che appartenga a $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$, vediamo che effettivamente ne esiste una ed una soltanto cioè:

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{5}}{\sqrt{2}} z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\, z_0 + \frac{-1+i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$

— Ne concludiamo che $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ è contenuto quale sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel gruppo ampliato colla sostituzione scritta. Nei casì precedenti invece un tale ampliamento è impossibile.

Quali sostituzioni generatrici di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ troviamo le 7 riflessioni:

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = z_0 + i\sqrt{5}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$
$$z' = \frac{i\sqrt{5}z_0 - 2}{2z_0 + i\sqrt{5}}, \quad z' = \frac{(-4+i\sqrt{5})\,z_0 - 2i\sqrt{5}}{2i\sqrt{5}\,z_0 - (4+i\sqrt{5})}.$$

Associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$ troviamo il poliedro fondamentale di $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$, gruppo che si genera colle 6 sostituzioni elementari di 1ª specie:

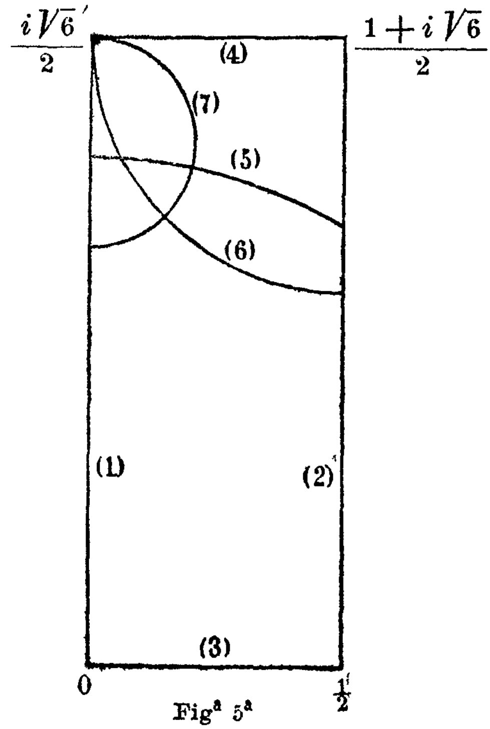
$$z' = -z, \quad z' = z + 1, \quad z' = -z + i\sqrt{5}, \quad z' = -\frac{1}{z},$$
$$z' = \frac{i\sqrt{5}z + 2}{2z - i\sqrt{5}}, \quad z' = \frac{(-4+i\sqrt{5})z + 2i\sqrt{5}}{2i\sqrt{5}z + (4+i\sqrt{5})}.$$

§ 15.

Il gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$.

Per $D = 6$ prendiamo per poliedro P quello compreso in R entro il prisma

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Figª 5ª

esternamente alle tre sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$
$$(7)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{24}.$$

Esso ha, oltre il vertice all' infinito, i sette verticì:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5);

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{2\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ „ „ (1) (5) (7);

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$ „ „ (1) (4) (6) (7);

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ „ „ (2) (4) (6);

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{10},\ \frac{2\sqrt{6}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{10}\right)$ „ „ (5) (6) (7);

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ „ „ (2) (5) (6);

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (2) (3) (5);

tutti i suoi angoli diedri sono retti salvo i due agli spigoli $V_5 V_6$, $V_6 V_7$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$.

Nel modo solito, conoscendo le coordinate dei vertici, ci accertiamo che nessuna sfera di riflessione attraversa P. Inoltre siccome qui si hanno due soli vertici singolari cioè $z = \infty$, $z = \frac{i\sqrt{6}}{2}$, che non sono fra loro equivalenti, nè si trova alcuna sostituzione in $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ che li lasci fissi ambedue, vediamo che P è il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$.*) Quello di $\Gamma^{(i\sqrt{6})}$ si ottiene associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$.

Ritroviamo cosí che l'intero gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ si genera colle 7 riflessioni

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0, \quad z' = z_0 + 1, \quad z' = z_0 + i\sqrt{6}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$
$$z' = \frac{(1+i\sqrt{6})z_0 - 3}{2z_0 - (1-i\sqrt{6})}, \quad z' = \frac{5z_0 + 2i\sqrt{6}}{-2i\sqrt{6}z_0 + 5}$$

ed il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{6})}$ colle 6 sostituzioni di 1ª specie

$$z' = -z, \quad z' = z + 1, \quad z' = z + i\sqrt{6}, \quad z' = \frac{1}{z},$$
$$z' = \frac{(1+i\sqrt{6})z - 3}{2z - (1-i\sqrt{6})}, \quad z' = \frac{5z + 2i\sqrt{6}}{-2i\sqrt{6}z + 5}.$$

§ 16.

I gruppi $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$, $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$.

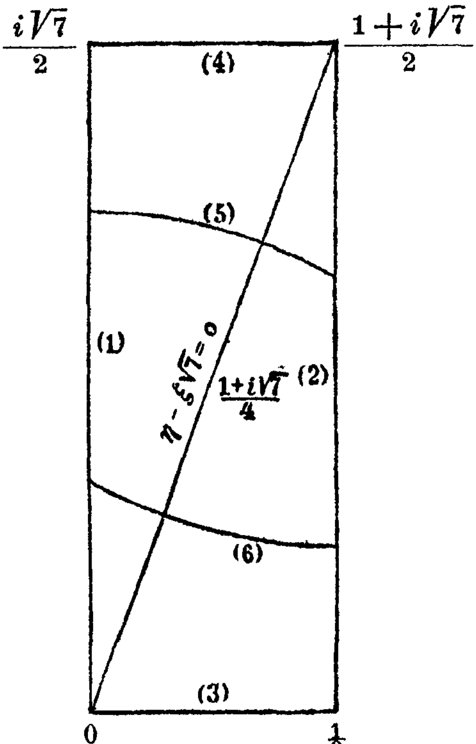
a) Nel caso del gruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ consideriamo il poliedro P racchiuso dai quattro piani

*) Fuori del gruppo vi ha la riflessione $z' = \frac{i\sqrt{3}z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}z_0 + i\sqrt{3}}$ che cangia P in sè stesso. Anche in questo caso è quindi possibile un nuovo ampliamento del gruppo.

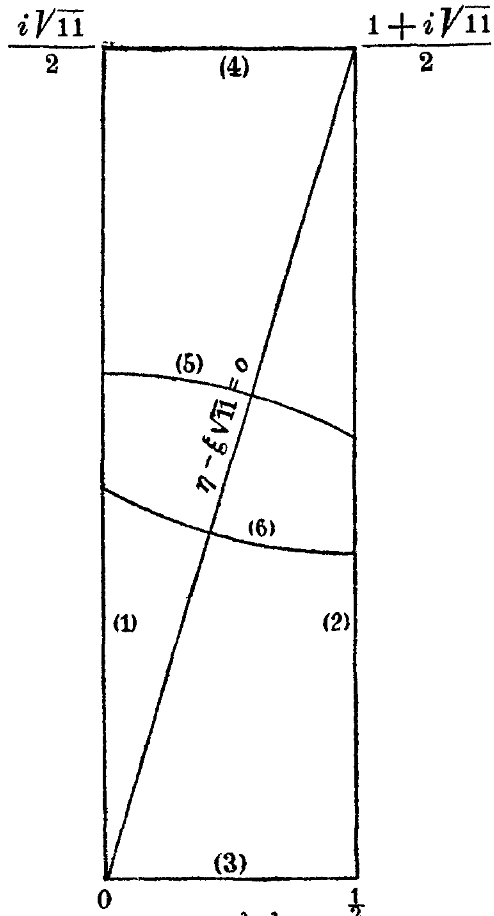
$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

esternamente alle due sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1.$$



Figª 6ª



Figª 7ª

Esso ha un solo vertice singolare all' infinito e i sei vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5);

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{7}},\ \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ „ „ (1) (5) (6);

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (1) (4) (6);

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{7}}{2},\ 1\right)$ „ „ (2) (4) (6);

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2\sqrt{7}},\ \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ „ „ (2) (5) (6);

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (2) (3) (5),

con 9 diedri retti e 2 di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e P è quindi il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\bar{\Gamma}_\nu^{(\omega)}$ in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, il cui indice ν eguaglia il numero delle sostituzioni in $\bar{\Gamma}_1^{(\omega)}$ che trasformano P in sèmedesimo. Una tale sostituzione deve lasciar fisso l'unico vertice singolare ∞ ed avere quindi la forma

$$z' = \pm z + \beta, \quad z' = \pm z_0 + \beta$$

secondo che è 1ª o di 2ª specie. Come trasformazione dello spazio, essa non altera le ordinate e perciò lascierà invariati i vertici di ciascuna coppia $(V_1 V_4)$, $(V_2 V_5)$, $(V_3 V_6)$ ovvero li scambierà fra loro.

Il 1º caso si riscontra subito impossibile, onde risulta che la sostituzione supposta deve essere a periodo 2. Oltre l'identità esiste solo una tale sostituzione cioè $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, che dà una rotazione di ampiezza π attorno alla retta normale al piano $\xi\eta$ condotta pel punto $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$. È evidente che questa rotazione sovrappone effetivamente il poliedro P a sè stesso. Abbiamo dunque $\nu = 2$ e se suddividiamo il poliedro P in due parti, p. e. col piano $\xi\sqrt{7} - \eta = 0$ normale al piano $\xi\eta$ condotto pei punti 0, $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, una qualunque di queste parti potrà prendersi per poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$. Cosi potremo definire il detto poliedro colle diseguaglianze

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad 0 < \eta < \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 > 1, \quad \eta > \xi\sqrt{7}.$$

Esso ha oltre il vertice all' infinito i quattro vertici

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(0, \frac{2}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\right), \quad V_3 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$V_4' \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Mentre in tutti i casi precedenti il gruppo $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ si generava con sole riflessioni, nel caso attuale ciò non è possibile.*) Fra le sostituzioni generatrici di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ oltre le riflessioni

---

*) E chiaro infatti che il gruppo $\bar{\Gamma}_2^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$, che ha P per poliedro fondamentale, contiene tutte le riflessioni di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$.

$$z' = z_0,\quad z' = -z_0,\quad z' = -z_0 + 1,\quad z' = z_0 + i\sqrt{7},\quad z' = \frac{1}{z_0},$$

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{7}}{2} z_0 - 1}{z_0 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}}$$

figura la sostituzione ellittica a periodo 2

$$z' = -z + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}.$$

b) Affatto analogamente si comporta il gruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$, ove considereremo il poliedro P compreso fra i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

esternamente alle due sfere di riflessione

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1.\text{*)}$$

Abbiamo qui, oltre il vertice all' infinito i sei vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione di (1) (3) (5);
$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{3}{\sqrt{11}},\ \sqrt{\frac{2}{11}}\right)$	" " (1) (5) (6);
$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{11}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	" " (1) (4) (6);
$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{11}}{2},\ 1\right)$	" " (2) (4) (6);
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2\sqrt{11}},\ \sqrt{\frac{2}{11}}\right)$	" " (2) (5) (6);
$V_6 = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	" " (2) (3) (5);

eccetto i tre diedri agli spigoli $V_2 V_3$, $V_3 V_5$, $V_5 V_6$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ gli altri sono retti. Nessuna sfera di riflessione attraversa P e, come pel caso superiore, si vede che una sola sostituzione di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ cioè

$$z' = -z + \frac{1+i\sqrt{11}}{2},$$

oltre l'identità, trasforma P in sè medesimo. Se del poliedro P consideriamo dunque la regione in cui è soddisfatta la diseguaglianza:

$$\eta > \xi\sqrt{11}$$

avremo definito il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$. In fine osserviamo che in ambedue questi casi un nuovo ampliamento del gruppo è impossibile.

*) Fig^a 7^a.

§ 17.

Il gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$.

Tracciamo dapprima i quattro piani di riflessione

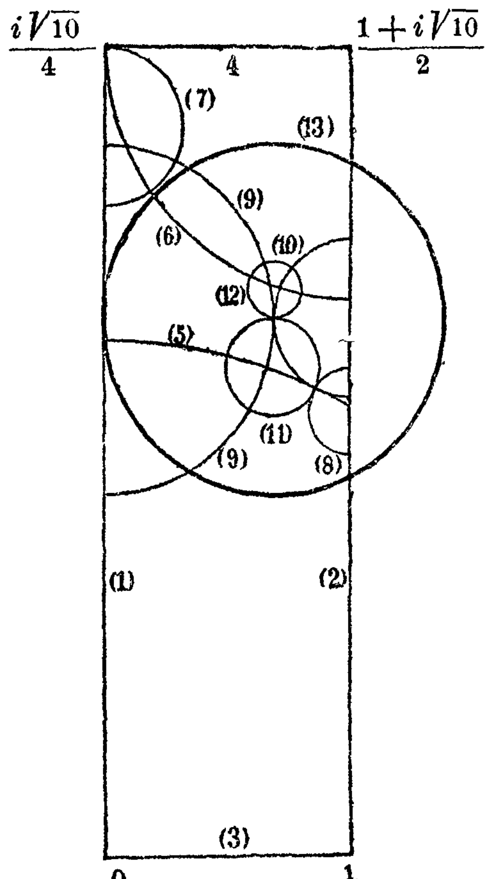
$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e le tre sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{40}.$$

Indi osservando che dentro il rettangolo delle rette (1), (2), (3), (4), oltre il punto singolare $\frac{i\sqrt{10}}{2}$, esistono i due punti singolari $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$, $\frac{3+2i\sqrt{10}}{7}$, che non sono interni ad alcuna sfera di riflessione, deter-



Fig^a 8^a

miniamo per ciascuno di essi le sfere di riflessione di massimo raggio che vi passano. Troviamo così le nuove sfere:

$$(8)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{11}{4\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{160},$$

$$(9)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{9},$$

$$(10)\quad \left(\xi-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\tfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^2+\zeta^2=\tfrac{1}{36},$$
$$(11)\quad \left(\xi-\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\tfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+\zeta^2=\tfrac{1}{90},$$
$$(12)\quad \left(\xi-\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\tfrac{7}{2\sqrt{10}}\right)^2+\zeta^2=\tfrac{1}{360}.\text{*)}$$

Queste, insieme coi piani e colle sfere superiori, limitano un poliedro P con 16 vertici dei quali uno all' infinito e gli altri 15 nei punti

$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1)$	intersezione di (1) (3) (5);
$V_2\equiv\left(0,\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	„ „ (1) (5) (9);
$V_3\equiv\left(0,\ \frac{3\sqrt{10}}{7},\ \frac{1}{7}\right)$	„ „ (1) (7) (9);
$V_4\equiv\left(0,\ \frac{\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$	„ „ (1) (4) (6) (7);
$V_5\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{10}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	„ „ (2) (4) (6);
$V_6\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2\sqrt{10}},\ \frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$	„ „ (2) (6) (10);
$V_7\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{2\sqrt{10}}{7},\ \frac{1}{14}\right)$	„ „ (2) (8) (10);
$V_8\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{10}}{11},\ \frac{\sqrt{3}}{22}\right)$	„ „ (2) (5) (8);
$V_9\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „ (2) (3) (5);
$V_{10}\equiv\left(\frac{3}{7},\ \frac{2\sqrt{10}}{7},\ 0\right)$	„ „ (5) (8) (10) (11);
$V_{11}=\left(\frac{3}{10},\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{10}\right)$	„ „ (5) (9) (11);
$V_{12}\equiv\left(\frac{7}{20},\ \frac{7}{2\sqrt{10}},\ \frac{1}{20}\right)$	„ , (6) (10) (12);
$V_{13}\equiv\left(\frac{1}{14},\ \frac{3\sqrt{10}}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$	„ „ (6) (7) (9);
$V_{14}\equiv\left(\frac{11}{34},\ \frac{6\sqrt{10}}{17},\ \frac{\sqrt{3}}{34}\right)$	„ „ (6) (9) (12);
$V_{15}\equiv\left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{10}}{3},\ 0\right)$	„ „ (9) (10) (11) (12).

Fra gli angoli diedri di P due soltanto sono di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ i rimanenti essendo retti.

Colcalcolo effettivo, dai valori superiori per le coordinate dei

*) Fig^a 8^a.

vertici, ci accertiamo che nessuna sfera di riflessione attraversa P*), che è dunque il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\bar{\Gamma}_{\nu}^{(i\sqrt{10})}$ in $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$.

Ora se osserviamo che P ha i 4 vertici singolari

$$\infty, \quad \frac{1+i\sqrt{10}}{3}, \quad \frac{i\sqrt{10}}{2}, \quad \frac{3+2i\sqrt{10}}{7}$$

dei quali solo il secondo è equivalente al primo (§§ 2, 3), vediamo che una sostituzione S di $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$ che trasformi P in sè medesimo deve o lasciar fermi ambedue i vertici ∞, $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$ o scambiarli fra loro. Il 1° caso si presenta soltanto per la sostituzione identica, come subito si vede, onde risulta intanto che la S sarà a periodo 2.

Ma una sostituzione di 1ª specie che cangia ∞ in $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$ è data da $\begin{pmatrix}1+i\sqrt{10}, & 4\\ 3 & , 1-i\sqrt{10}\end{pmatrix}$ e tutte le altre della stessa specie si ottengono combinandola colle sostituzioni $\begin{pmatrix}1, & m+in\sqrt{10}\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}$ (m, n razionali interi) che lasciano fermo ∞; esse hanno perciò la forma

$$\begin{pmatrix}1+i\sqrt{10}, & (1+i\sqrt{10})(m+in\sqrt{10})\pm 4\\ 3 & , 3(m+in\sqrt{10})\pm(1-i\sqrt{10})\end{pmatrix}$$

e non sono mai a periodo 2. La S dovrà dunque essere una riflessione (impropria) e se ricorriamo alle formole dei §§ 6, 7 troviamo che esiste effetivamente una ed una sola tale sostituzione, cioè

$$(\mathrm{S}) \qquad z' = \frac{(1+i\sqrt{10})z_0 - 4}{3z_0 - (1-i\sqrt{10})}.$$

È questa una riflessione impropria colla sfera di riflessione (impropria)

$$(13) \qquad \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{9}.$$

È facile ora verificare che la (S) cangià effettivamente P in sè medesimo scambiando fra loro le faccie

[(1) (10)], [(2) (9)], [(3) (12)], [(4) (11)], [(5) (6)], [(7) (8)]

e conseguentemente i vertici

$(V_1 V_{12})$, $(V_2 V_6)$, $(V_3 V_7)$, $(V_4 V_{10})$, $(V_5 V_{11})$, $(V_8 V_{13})$, $(V_9 V_{14})$, $(V_{15} V_\infty)$**).

---

*) Per l'abbreviazione di questo calcolo veggasi la nota seguente.

**) L' esistenza della riflessione impropria S che produce i detti scambî fra i vertici e l'osservazione che nessuna sfera di riflessione propria contiene nel suo

Abbiamo dunque $\nu = 2$ e per ottenere da P il poliedro fondamentale per $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$ basta dividere P in due parti equivalenti mediante la sfera (13) di riflessione impropria, scegliendo una qualunque di queste parti p. e. la esterna per nuovo poliedro P'. Così si rendono evidentemente inutili le sfere (8) (10) (11) (12) e P' resta definito dalle di seguaglianze

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad 0 < \eta < \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{4}, \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{40},$$

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{9}, \quad \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{9}.$$

Qui per la prima solta vediamo spontaneamente presentarsi a limitare il poliedro fondamentale *una sfera di riflessione impropria;* un secondo esempio si vedrà ora per $D = 13$. A generare il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$, oltre le riflessioni proprie sui piani (1) (2) (3) (4) e sulle sfere (5) (6) (7) (9) occorre la riflessione impropria sulla sfera (13). Osserviamo però che vi ha fuori del gruppo la riflessione $z' = \dfrac{i\sqrt{5}z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}z_0 + i\sqrt{5}}$ che cangia P in sè medesimo e però come nei casi $D = 5$, $D = 6$ è qui possibile un nuovo ampliamento del gruppo.

§ 18.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{13})}$.

Consideriamo i quattro piani di riflessione:

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

e le tre sfere (V$^{\text{i}}$ § 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{52}.$$

Indi osserviamo che oltre il punto $\dfrac{1 + i\sqrt{13}}{2}$ esistono entro il rettangolo 1) 2) 3) 4) i due punti singolari $\dfrac{1 + i\sqrt{13}}{3}$, $2\dfrac{1 + i\sqrt{13}}{7}$, che non sono interni ad alcuna sfera di riflessione ma pei quali passano

interno il centro della (13) permette di ridurre alla metà i calcoli da farsi per constatare che nessuna sfera di riflessione propria contiene nel suo interno un vertice di P. Basta in fatti fare questa verifica per un vertice in ciascuna coppia.

due serie di tali sfere dei tipi I), II), § 7; scegliendo fra queste per ciascuno le sfere di massimo raggio abbiamo le ulteriori sfere:

$$(8)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{16},$$

$$(9)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{36},$$

$$(10)\quad \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{9},$$

$$(11)\quad \left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{208},$$

$$(12)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{117},$$

$$(13)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{2\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{468}.$$

Se vi associamo in fine la sfera di riflessione

$$(14)\quad \left(\xi-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\eta-\frac{2\sqrt{13}}{5}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{25},$$

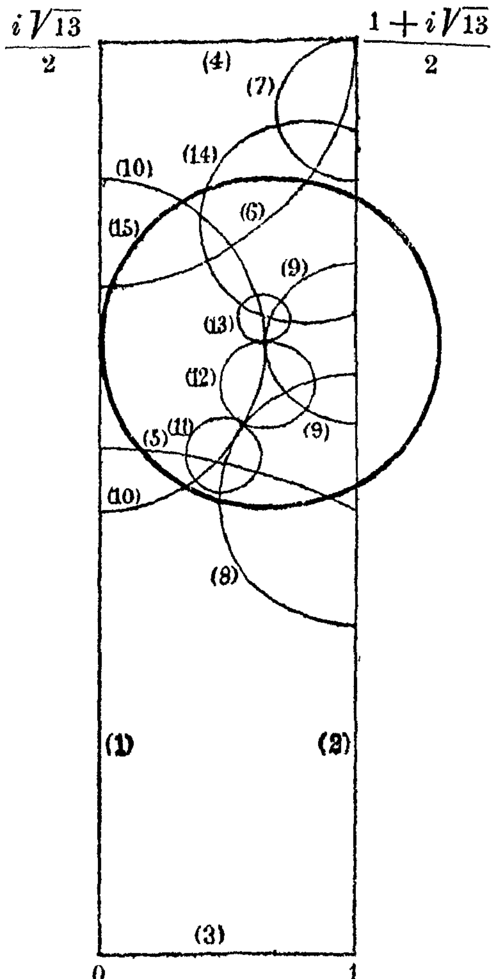


Fig.ª 9ª

avremo definito un poliedro P con 20 vertici, di cui uno V_∞ all' infinito e gli altri nei punti:

$$\begin{array}{lll}
V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1) & \text{intersezione di} & (1)\,(3)\,(5); \\
V_2 \equiv \left(0,\ \frac{7}{2\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (1)\,(5)\,(10); \\
V_3 \equiv \left(0,\ \frac{5}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (1)\,(6)\,(10); \\
V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{13}}{2},\ \frac{1}{2}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (1)\,(4)\,(6); \\
V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{13}}{2},\ 0\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(4)\,(6)\,(7); \\
V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{91}{16\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{16}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(7)\,(14); \\
V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{19}{4\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(4)\,(9); \\
V_8 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{4}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{2\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(8)\,(9); \\
V_9 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(5)\,(8); \\
V_{10} \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (2)\,(3)\,(5); \\
V_{11} \equiv \left(\frac{3}{13},\ \frac{7}{2\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (5)\,(10)\,(11); \\
V_{12} \equiv \left(\frac{4}{15},\ \frac{4\sqrt{13}}{15},\ \frac{1}{15}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (5)\,(8)\,(11); \\
V_{13} \equiv \left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (6)\,(10)\,(14); \\
V_{14} \equiv \left(\frac{2}{7},\ \frac{2\sqrt{13}}{7},\ 0\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (8)\,(10)\,(11)\,(12); \\
V_{15} \equiv \left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (9)\,(10)\,(12)\,(13); \\
V_{16} \equiv \left(\frac{13}{40},\ \frac{7\sqrt{13}}{40},\ \frac{\sqrt{3}}{40}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (10)\,(13)\,(14); \\
V_{17} \equiv \left(\frac{5}{13},\ \frac{4}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{13}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (8)\,(9)\,(12); \\
V_{18} \equiv \left(\frac{8}{23},\ \frac{8\sqrt{13}}{23},\ \frac{1}{23}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (9)\,(13)\,(14); \\
V_{19} \equiv \left(\frac{4}{9},\ \frac{4\sqrt{13}}{9},\ \frac{1}{9}\right) & \text{,,} \qquad \text{,,} & (6)\,(7)\,(14).
\end{array}$$

Si verifica anche qui che nessuna sfera di riflessione attraversa P e che oltre l'identità vi ha una sola sostituzione in $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{13})}$ che trasforma P in sè medesimo, cioè la riflessione impropria

$$z' = \frac{(1+i\sqrt{13})\,z_0 - 5}{3z_0 - (1-i\sqrt{13})}.$$

Questa scambia fra di loro effettivamente le faccie

[(1) (9)], [(2) (10)], [(3) (13)], [(4) (12)], [(5) (14)], [(6) (8)], [(7) (11)]

e conseguentemente i vertici

$$(V_1 V_{18})\ (V_2 V_7)\ (V_3 V_8)\ (V_4 V_{17})\ (V_5 V_{14})\ (V_6 V_{11})\ (V_9 V_{13})\ (V_{10} V_{16})$$
$$(V_{12} V_{19})\ (V_{15} V_\infty).$$

Mediante la corrispondente sfera di riflessione impropria

$$(15)\quad \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{9}$$

dividiamo il poliedro P in due parti equivalenti; una qualunque di esse può assumersi per poliedro fondamentale del gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{13})}$. (Cf. § prec[te]). Fuori del gruppo esiste la riflessione $z' = \dfrac{\frac{1+i\sqrt{13}}{\sqrt{2}} z_0 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} z_0 + \frac{-1+i\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}$, che trasforma P in sè stesso ed un nuovo ampliamento è possibile.

§ 19.

I gruppi $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$, $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$.

a) Se $D = 15$, oltre i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

consideriamo le due sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che nel caso attuale si toccano nel punto $\frac{1+i\sqrt{15}}{4}$. È questo un punto singolare e determinando le sfere di riflessione del tipo IV, § 7 che ivi passano troviamo

$$(7)\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{7}{2\sqrt{15}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{15},$$

$$(8)\quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{4}{\sqrt{15}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{15}.\text{*)}$$

Cosi abbiamo definito un poliedro P coi vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione di (1) (3) (5);
$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$	„ „ (1) (5) (8);
$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{2\sqrt{15}}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$	„ „ (1) (6) (8);
$V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „ (1) (4) (6);
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{15}}{2},\ 1\right)$	„ „ (2) (4) (6);

*) Fig[a] 10[a].

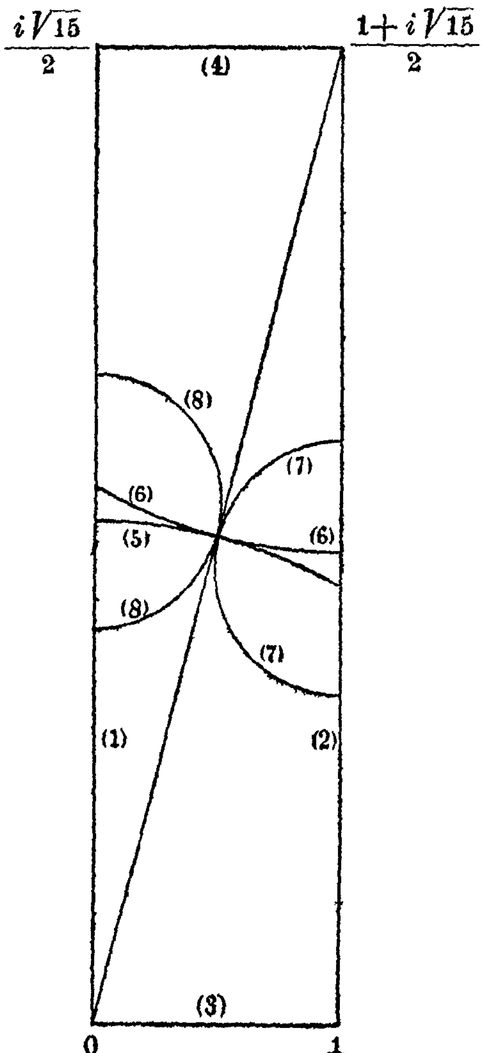
$$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{intersezione di } (2)\,(6)\,(7);$$

$$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{15}}{14}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (2)\,(5)\,(7);$$

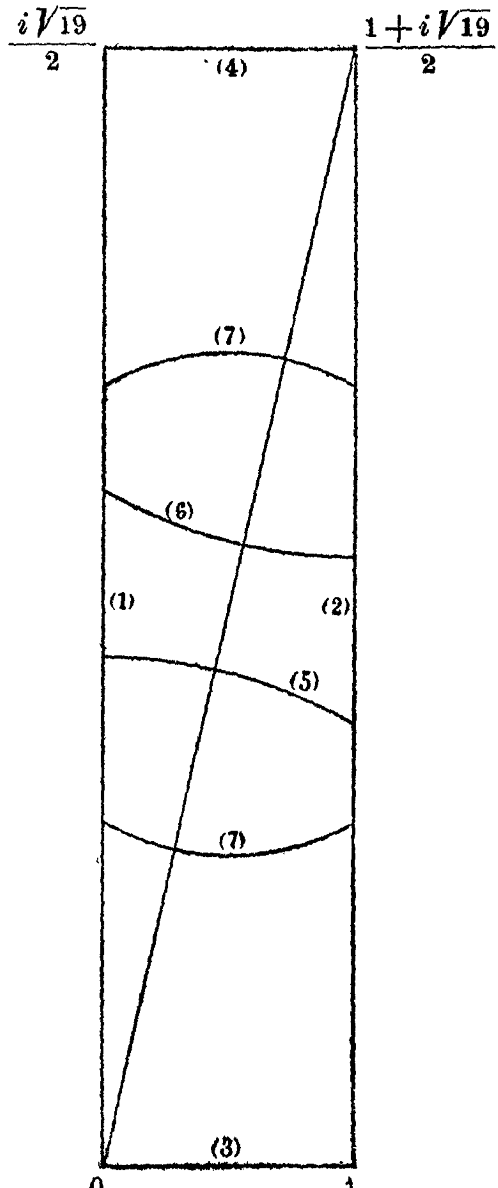
$$V_8 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (2)\,(3)\,(5);$$

$$V_9 \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (5)\,(6)\,(4)\,(8);$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (1)\,(2)\,(3)\,(4)$$



Figª 10ª



Figª 11ª

con angoli diedri retti salvo due di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Ove si osservi che P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e che, oltre l'identità, la sola sostituzione: $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ lo cangia in sè medesimo, si deduce, precisamente come per $D = 7, 11$ (§ 16) che il poliedro fondamentale di $\Gamma\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)$ si ottiene dividendo P mediante il piano $\eta = \xi\sqrt{15}$ in due parti (equivalenti) e scegliendo ad arbitrio una di queste parti. Fuori del gruppo vi sono per altro le due sostituzioni:

$$z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}}, \quad z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}}$$

che trasformano P in sè medesimo. Il gruppo è quindi suscettibile d'ampliamento, ma il gruppo ampliato non contiene alcuna nuova riflessione.

b) Nel caso $D = 19$, oltre i quattro piani di riflessione

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \tfrac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

e le due sfere (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che attualmente sono esterne, basta considerare la terza sfera di riflessione (§ 11)

$$(7)\ \left(\xi - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{19}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{4}\ {}^{*)}$$

che le taglia ortogonalmente ambedue. Abbiamo così definito un poliedro P coi 9 vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione di (1) (3) (5);
$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{4}{\sqrt{19}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$	„ „ (1) (5) (7);
$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{6}{\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{2}{19}}\right)$	„ „ (1) (6) (7);
$V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „ (1) (4) (6);
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{19}}{2},\ 1\right)$	„ „ (2) (4) (6);
$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{11}{2\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{3}{19}}\right)$	„ „ (2) (6) (7);
$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{2}{19}}\right)$	„ „ (2) (5) (7);

*) Fig[a] 11[a].

$$V_8 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{intersezione di} \quad (2)\,(3)\,(5);$$

$$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty) \qquad ,, \qquad ,, \quad (1)\,(2)\,(3)\,(4).$$

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$ che lo cangi in sè medesimo è: $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. Dividendo questo poliedro in due parti (equivalenti) mediante il piano

$$\eta = \xi\sqrt{19},$$

una qualunque di queste può assumersi per poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$. Osserviamo in fine che questo gruppo non è suscettibile di alteriore ampliamento.

§ 20.

Osservazioni circa i casi superiori.

La ricerca dei poliedri fondamentali pei nostri gruppi $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ potrebbe forse spingersi più avanti sulla medesima via. Ma, oltre alla difficoltà pratica che nasce dalla crescente complicazione di questi poliedri, ve ne ha una di ordine teorico, che i mezzi di cui fin qui abbiamo disposto sono insufficienti a vincere. Essa consiste in ciò che: *Nei casi superiori esistono sul piano $\xi\eta$ dei punti esterni a qualsiasi sfera di riflessione, per quanto vi siano sfere di riflessione che passano ad essi vicino quanto si vuole* (§ 10). Tale circostanza, che ora andiamo a verificare, rende evidentemente inapplicabile, senza alteriori modificazioni, il metodo tenuto nei casi sopra trattati.

Supponiamo dapprima che *non sia* $D \equiv 3$ (mod. 4), talchè tutte le sfere di riflessione si trovano raccolte nei tipi I), II) § 7

$$\text{I)}\quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},\quad a_1^2 + D a_2^2 \equiv (\text{mod.}\, c_1),$$

$$\text{II)}\quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D c_1^2},\quad a_1^2 + D a_2^2 \equiv (\text{mod.}\, D c_1).$$

Sia ora n un numero dispari, primo con D, inferiore a $\sqrt{D}$ di cui $-D$ sia residuo quadratico; sia inoltre s un numero qualunque primo con n ed r una soluzione della congruenza

$$r^2 \equiv -D s^2 \ (\text{mod. } n).$$

Dimostriamo che: *il punto* $z = \frac{r + is\sqrt{D}}{n}$ *è esterno a qualsiasi sfera di riflessione.* E infatti se la sfera I) lo contenesse nel suo interno o alla superficie, dovremmo avere

$$\left(\frac{r}{n}-\frac{a_1}{c_1}\right)^2+D\left(\frac{s}{n}-\frac{a_2}{c_1}\right)^2\leqq\frac{1}{c_1^2},$$

ovvero

$$(1)\qquad (n a_1 - r c_1)^2 + D(n a_2 - s c_1)^2 \leqq n^2.$$

Essendo per ipotesi $D > n^2$ sarà necessariamente $n a_2 = s c_1$, e quindi, poichè s, n sono primi fra loro:

$$a_2 = s\alpha, \quad c_1 = n\alpha,$$

ove α è intero. La diseguaglianza (1) si cangià così nell' altra

$$(a_1 - r\alpha)^2 \leqq 1,$$

onde deducesi

$$a_1 = r\alpha \quad \text{o} \quad a_1 = r\alpha \pm 1.$$

Ma in ambedue ì casi riesce impossibile soddisfare con un conveniente valore di α la congruenza $a_1^2 + D a_2^2 \equiv 1 \pmod{c_1}$ che nel primo caso diventa

$$(r^2 + D s^2)\alpha^2 \equiv 1 \pmod{n\alpha}$$

e nel 2^0

$$(r^2 + D s^2)\alpha^2 \pm 2r\alpha \equiv 0 \pmod{n\alpha}$$

mentre $r^2 + D s^2$ è divisibile per n ed r è primo con n.

Analogamente per una sfera di riflessione II) dovrebbe sussistere la diseguaglianza

$$D(n a_2 + r c_1)^2 + (n a_1 - D s c_1)^2 \leqq n^2,$$

onde segue

$$a_2 = r\alpha, \quad c_1 = n\alpha$$

con α intero. Di piu risulterebbe

$$a_1 = D s\alpha \quad \text{o} \quad a_1 = D s\alpha \pm 1$$

ma in ambedue i casi è impossibile soddisfare la congruenza

$$a_1^2 + D a_2^2 \equiv 1 \pmod{D n\alpha}.$$

Nel caso $D \equiv 3 \pmod 4$, ove si hanno le sfere di riflessione dei tipi III), IV), § 7 si traggono ancora le medesime conclusioni appena $D > 4n^2$.

Per esempio, se prendiamo $n=3$ e supponiamo $D > 9$ $\big($o $D > 36$ quando sia $D \equiv 3 \pmod 4\big)$, vediamo che il punto $\frac{1+i\sqrt{D}}{3}$ sarà esterno a tutte le sfere di riflessione per i valori di D della forma $3h+2$, di cui il primo esempio si ha per $D = 14$.*)

*) Le difficollà qui accennate possono, almeno in parte, superarsi con nuovi ampliamenti del gruppo. Riserbo per un' altra memoria lo sviluppo di queste nuove ricerche istituite dopo lo presentazione del presente lavoro e non ancora condotte a termine.

Parte seconda.

Forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite.

§ 21.

Forme di Dirichlet ridotte.

Premettiamo l'avvertenza che i corpi quadratici Ω, che intenderemo di considerare in seguito, saranno sempre di quelli pei quali superiormente abbiamo fissato il poliedro fondamentale del corrispondente gruppo $\Gamma^{(\omega)}$. Però le medesime considerazioni saranno applicabili ad ogni altro corpo quadratico immaginario pel quale si riesca a determinare il poliedro fondamentale di $\Gamma^{(\omega)}$.

Una forma binaria quadratica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

nella quale coefficienti e variabili siano numeri interi del corpo quadratico Ω si dirà una *forma di Dirichlet*. Spesso, ponendo in evidenza i soli coefficienti, la indicheremo simbolicamente con (a, b, c). Escluderemo senz' altro il caso che il determinante della forma:

$$d = b^2 - ac$$

sia un quadrato perfetto; in tal caso la forma è decomponibile in due fattori lineari con coefficienti razionali in Ω e i problemirelativi a questa specie di forme possono facilmente trattarsi dietro i risultati del § 2.

Dimostreremo come, mediante la rappresentazione geometrica studiata nella prima parte della presente memoria, si possa stabilire la teoria generale di queste forme e in particolare risolvere i due problemi fondamentali della teoria dell' equivalenza (A § 7).

Diciamo *radici* della forma (a, b, c) le due radici z_1, z_2 dell' equazione

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Non essendo $d = b^2 - ac$ un quadrato perfetto, z_1, z_2 non sono numeri razionali in Ω e i punti del piano $\xi\eta$ indici di queste radici sono esterni alla rete poliedrica di $\Gamma^{(\omega)}$. Descriviamo sul segmento che unisce questi due punti, come diametro, il circolo C ortogonale al piano $\xi\eta$; questo diremo il *circolo indicatore* della forma $f = (a, b, c)$. Una forma f è fissata, a meno di un cangiamento simultaneo di segno dei suoi coefficienti, dati che ne siano il determinante ed il circolo indicatore.

Chiamiamo *ridotta* una forma f quando il suo circolo indicatore attraversa il poliedro fondamentale P di $\Gamma^{(\omega)}$. Precisamente come pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ (A § 7) si dimostra il teorema: *Ogni forma di Dirichlet ammette una forma ridotta equivalente.*

§ 22.

Numero delle forme ridotte di un dato determinante.

Sussiste il teorema: *Il numero delle forme ridotte di un dato determinante è finito.*

Nel caso che il poliedro fondamentale non abbia alcun vertice sul piano $\xi\eta$, come accade per $D = 1, 2, 3, 7, 11, 19$ la dimostrazione si può fare precisamente come nel campo $(1, i)$ A, § 8). Ma quando il poliedro presenta di tali vertici singolari occorrono alcune considerazioni complementari che qui svilupperemo.

Consideriamo dapprima, come al § 1, la regione (V) di R limitata dai quattro piani

$$\xi = l, \quad \xi = m, \quad \eta = l', \quad \eta = m'$$

al di sopra del piano

$$\zeta = \varepsilon,$$

essendo $l, m, l', m', \varepsilon$ cinque costanti dalle quali l'ultima positiva e dimostriamo il lemma:

Esiste soltanto un numero finito di forme (a, b, c) di Dirichlet con assegnato determinante $d = b^2 - ac$, i cui circoli indicatori attraversino la regione (V).

Per la forma (a, b, c) a determinante d il raggio r del circolo indicatore è dato da

$$r = \frac{\sqrt{|d|}}{|a|},$$

e poichè la massima ordinata di un punto del circolo è r mentre la minima per i punti della regione (V) è ε, dovremo avere intanto $\frac{\sqrt{|d|}}{|a|} \geqq \varepsilon$, cioè $a \leqq \frac{\sqrt{|d|}}{\varepsilon}$. Il primo coefficiente a della forma non può dunque assumere che un numero finito di valori. Per ogni tale valore di a consideriamo la serie di forme *parallele* ad una singola forma (a, b, c):

$$(a, b, c), \ (a, b', c'), \ (a, b'', c'') \ldots,$$

nella quale cioè i coefficienti medii $b, b', b'' \ldots$ sono congrui fra loro (mod. a). Se osserviamo che i loro circoli indicatori nascono da quello di (a, b, c) per una traslazione $z' = z + \beta$ del gruppo $\Gamma^{(\omega)}$, riesce evidente, per la forma della regione (V), che soltanto un numero finito di questi circoli attraverserà (V). E poichè il numero dei valori di b incongrui (mod. a) è finito, il lemma è dimostrato. Siano ora $v_1, v_2, v_3 \ldots$ i vertici singolari sulpiano $\xi\eta$ del poliedro P. Isoliamo un intorno di ciascuno di essi da P, descrivendo per esempio altrettante sfere di raggio arbitrariamente piccolo coi centri in $v_1, v_2, v_3 \ldots$ e indichiamo con

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ le piccole porzioni di P interne rispettivamente alle sfere descritte. Il numero delle forme ridotte di dato determinante d, i cui circoli indicatori attraversano la regione di P, che si ottiene sottraendo da P le regioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ è finito, pel lemma premesso. Basterà dunque provare che per ciascuna regione σ_i non vi ha che un numero finito di forme a determinante d i cui circoli indicatori la attraversino. Osserviamo per ciò che la regione σ_i è racchiusa da cinque faccie sferiche, delle quali le quattro uscenti dal vertice singolare v_i, che è indice di un numero frazionario in Ω, si dividono in due coppie di sfere tangenti fra loro ed ortogonali a quelle dell' altra coppia, mentre la quinta giace sopra una sfera col centro in v_i. Per quanto abbiamo dimostrato ai §§ 2, 3, possiamo supporre che il valore di z in v_i abbia la forma $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$, cioè v_i sia indice di una forma quadratica ordinaria (m, r, k) a determinante $-D$. Se operiamo allora la sostituzione a determinante m:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m, & r+i\sqrt{D} \end{pmatrix}$$

che trasporta v_i nel punto all' infinito, la corrispondente trasformazione dello spazio cangierà la regione σ_i in una nuova regione Σ_i limitata da quattro piani due a due paralleli e normali al piano $\xi\eta$ e da una quinta faccia sferica e tutti i punti di Σ_i rimarranno *al di sopra* del piano $\xi\eta$. Supponendo ora che il circolo indicatore della forma di Dirichlet

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

a determinante d attraversi σ_i, applichiamo alla forma f la sostituzione a determinante m

$$\begin{cases} x = (r+i\sqrt{D})\,X - Y, \\ y = mX, \end{cases}$$

che trasformerà f nella forma a determinante dm^2:

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

dove A, B, C hanno i valori

$$A = a(r+i\sqrt{D})^2 + 2bm(r+i\sqrt{D}) + cm^2,$$

$$B = -a(r+i\sqrt{D}) - bm, \qquad C = a.$$

Il circolo indicatore di F attraverserà Σ_i. Ora, secondo il lemma, il numero delle forme F a determinante dm^2, il cui circolo indicatore attraversa Σ_i è limitato e poichè, come risulta dalle formole superiori, ad ogni forma F corrisponde una sola forma f, risulta così dimostrato il teorema.

§ 23.

Risoluzione dei due problemi della teoria dell' equivalenza.

Consideriamo una forma ridotta f_1 ed il suo circolo indicatore C. I punti ove C interseca il piano $\xi\eta$ sono esterni alla rete poliedrica del gruppo $\Gamma^{(\omega)}$ (§ 21) e conseguentemente C attraversa un numero infinito di poliedri della rete. Questi intercettano sopra C una serie di archi

$$\ldots \overline{A_{-2}A_{-1}},\ \overline{A_{-1}A_1},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4}\ldots$$

estesa nei due sensi all' infinito, ove $\overline{A_1A_2}$ indicherà l'arco intercetto dal poliedro fondamentale P. Ora osserviamo che gli archi $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_{-1}A_1}$, che comprendono $\overline{A_1A_2}$, possono essere cangiati con due sostituzioni di $\Gamma^{(\omega)}$ *perfettamente determinate* in due archi *ridotti*, che giacciono cioè nel poliedro fondamentale. Le sostituzioni inverse trasformano f_1 in due forme ridotte che si diranno le *ridotte contigue* di f_1. Così ogni forma ridotta f_1 ha due ridotte contigue determinate senza ambiguità da f_1 ed è chiaro che la relazione di contiguità fra due forme ridotte è invertibile. Ora prendiamo una ridotta contigua f_2 di f_1, di f_2 prendiamo la seconda ridotta contigua f_3 oltre f_1 e così di seguito. Poichè il numero delle forme ridotte è finito, costituiremo un gruppo di forme ridotte

$$f_1 f_2 f_3 \ldots f_n$$

tutte fra loro equivalenti e tale che le ridotte contigue di ogni forma del gruppo si troveranno nel gruppo stesso. Si dimostra subito inversamente (Cf. A § 10) che ogni forma ridotta equivalente a f_1 si trova nel gruppo così costruito, che si dirà il *periodo* delle forme ridotte equivalenti a f_1; dunque: *Due forme ridotte sono equivalenti solo quando appartengono al medesimo periodo.*

Il primo problema della teoria dell' equivalenza: *decidere se due forme f, f' dello stesso determinante sono equivalenti* resta così risoluto, potendosi ricondurre al caso delle forme ridotte. E poichè, se f, f' sono equivalenti, col nostro metodo troviamo anche *una* sostituzione che trasforma effettivamente f, in f', per trovarle tutte resta a risolvere la questione: *Determinare nel gruppo $\Gamma^{(\omega)}$ il sottogruppo riproduttivo di una forma data f, che si può senz' altro supporre ridotta.*

Per maggiore chiarezza limitiamoci dapprima a ricercare le sostituzioni di $\Gamma^{(\omega)}$ a determinante $+1$ che trasformano la forma ridotta f_1 in sè stessa; invece di operare cioè col gruppo $\Gamma^{(\omega)}$, operiamo con quel suo sottogruppo eccezionale $\Gamma_2^{(\omega)}$ d'indice 2 che comprende le sole sostituzioni a determinante $+1$. Al poliedro P sostituiremo adunque il poliedro Π che risulta associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$, che sarà il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_2^{(\omega)}$ ed i concetti di forme equivalenti e forme ridotte si riferiranno al gruppo $\Gamma_2^{(\omega)}$ ed al suo poliedro Π.

Una forma $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ a determinante d ha le due radici

$$z_1 = -\frac{b + \sqrt{d}}{a}, \quad z_2 = -\frac{b - \sqrt{d}}{a},$$

ove pel radicale $\sqrt{d}$ fisseremo una volta per tutte un senso determinato p. e. quello che dà alla parte reale di $\sqrt{d}$ il segno positivo se $\sqrt{d}$ non è puramente immaginario e, inquest' ultimo caso, quello pel quale $\frac{\sqrt{d}}{i}$ è positivo. Chiameremo allora z_1 la *prima* e z_2 la *seconda* radice e fisseremo per senso positivo del circolo indicatore quello che in R va da z_1 verso z_2. Una forma f risulta per tal modo individuata dal suo determinante d, dal suo circolo indicatore e dal senso positivo di questo. Se una sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a determinante $+1$ trasforma f in f', la sua inversa cangia il circolo indicatore di f in quello di f' e precisamente il senso positivo dell' uno nel senso positivo dell' altro.*)

Sia ora f_1 una forma ridotta, $\overline{A_1 A_2}$ l'arco del suo circolo indicatore intercettato da Π e il senso da A_1 verso A_2 il senso positivo. La ridotta contigua a f_1 che si incontra dopo A_2 si dirà la contigua a *destra* di f_1 e quella prima di A_1 la contigua a *sinistra*. Così è chiaro, per quanto precede, che se f_2 è contigua a destra di f_1, questa è contigua a sinistra di f_2. Ciò posto, prendiamo la contigua a destra f_2 di f_1, la contigua a destra f_3 di f_2 e così via. La prima forma a ripetersi nella serie

$$f_1\, f_2\, f_3 \cdots$$

è certamente f_1 e se ciò accade immediatamente dopo f_n, alla forma f_{n+1}, diremo che

$$f_1\, f_2\, f_3 \cdots f_n$$

costituisce un *periodo* di forme ridotte. Componendo successivamente la sostituzione (data dal metodo stesso) che trasforma f_1 in f_2 conquella che porta f_2 in f_3 etc. e in fine con quella che porta f_n in $f_{n+1} = f_1$ troviamo una sostituzione S che trasforma f_1 in sè medesima. D'altra parte ogni sostituzione che trasforma f_1 in sè stessa cangia il circolo indicatore di f_1 in sè medesimo e se, come qui supponiamo, è a determinante $+1$ ne conserva altresì il senso positivo; se ne conclude subito che è una potenza di S. Dunque: *Il gruppo delle sostituzioni*

*) Cf. Dirichlet, Zahlentheorie § 72, e Klein, Modulfunctionen p^a. 251.

di $\Gamma^{(\omega)}$ *a determinante* $+1$ *riproduttrici di* f_1 *è un gruppo ciclico generato da una sostituzione minima* S *che sappiamo determinare.**)

Volendo da questo gruppo risalire all' intero sottogruppo di $\Gamma^{(\omega)}$ riproduttivo di f_1, osserveremoche se τ, τ' sono due sostituzioni a determinante -1 riproduttrici di f_1 il prodotto $\tau^{-1}\tau'$ è necessariamente una potenza di S. Quindi il sottogruppo cercato o coincide col gruppo ciclico superiore o lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 2, constando delle sostituzioni della forma

$$\text{a)} \quad S^n, \ \tau S^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ogni sostituzione τS^n cangia il circolo indicatore di f_1 in sè medesimo rovesciandone il senso positivo; essa ha perciò necessariamente un punto fisso sul circolo ed è quindi ellittica a periodo 2, il suo determinante essendo eguale $a - 1$**). La costituzione del gruppo a) corrisponde quindi evidentemente a quella di un gruppo diedrale.

È chiaro che in tal caso fra le sostituzioni τS^n se ne troverà una che lascierà fermo A_1 ovvero scambierà A_1 con A_2. Se tale sostituzione esiste è ben facile determinarla dalle coordinate note di A_1, A_2 e si ottiene così la determinazione completa del sottogruppo cercato.

§ 24.

Forme definite di Hermite.

Consideriamo una forma quadratica:

$$Axx_0 + Bxy_0 + B_0x_0y + Cyy_0$$

dove i coefficienti A, C sono razionali interi; B è un intero nel corpo quadratico, B_0 il coniugato, x, y due interi variabili in Ω e $x_0\,y_0$ i loro coniugati. Una tale forma si dirà una *forma di Hermite* e sarà rappresentata per brevità col simbolo $[A, B, C]$. Per ogni sostituzione lineare

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

eseguita sulle variabili, ove α, β, γ, δ sono interi in Ω (quando contemporaneamente si eseguisca la sostituzione coniugata sulle variabili coniugate) la F si trasforma in una forma

$$F' = A'x'x_0' + B'x'y_0' + B_0'x_0'y' + C'y'y_0'$$

della stessa natura e si hanno le formole di trasformazione:

---

*) Nel corrispondente § 10 (A) è incorso un errore che facilmente si correggerà dietro le indicazioni del testo.

**) Alla medesima conclusione si arriva direttamente osservando che in una tale sostituzione il 1º ed il 4º coefficiente sono eguali e di segno contrario (V. Dirichlet, Zahlentheorie § 57).

$$(1)\quad \begin{cases} A' = A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0, \\ B' = A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0, \\ B_0' = A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta, \\ C' = A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0. \end{cases}$$

Se il determinante della sostituzione è un' unità le due forme F, F' si diranno equivalenti rispetto a $\Gamma^{(\omega)}$.

La forma F è *definita* o *indefinita* secondo che il determinante $\Delta = BB_0 - AC$ è negativo o positivo. In una forma definita A, C hanno lo stesso segno e ci possiamo limitare, come faremo, a considerare il caso dei coefficienti estremi positivi. Ad una forma definita $[A, B, C]$ corrisponde in R un punto perfettamente determinato le cui coordinate sono date dalle formole

$$(2)\qquad \xi = -\frac{B+B_0}{2A}, \quad \eta = \frac{B-B_0}{2iA}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{A};$$

questo punto si dirà *l'indice* della forma (Cf. A § 11). Una forma definita (positiva) è individuata dal suo determinante e dal suo indice. *Due forme definite equivalenti hanno indici equivalenti ed inversamente.* (ibid.).

Diremo *ridotta* una forma definita quando il suo indice giaccia nel poliedro fondamentale. Ne segue subito: *Ogni forma definita è equivalente ad una forma ridotta.*

Ora riferendoci alle considerazioni del § 22 possiamo dimostrare il teorema: *Il numero delle forme ridotte definite di un dato determinante Δ è limitato.* Se riprendiamo infatti a considerare in R una regione (V) come quella del § 1 definita dalle diseguaglianze

$$l < \xi < m, \quad l' < \eta < m', \quad \zeta > \varepsilon,$$

dimostriamo dapprima facilmente che *entro* (V) *non può cadere che un numero finito di punti indici di forme a determinante* Δ. Per una tale forma dovendo aversi $\frac{\sqrt{-\Delta}}{A} > \varepsilon$, cioè $A < \frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}$, il 1^0 coefficiente A non può assumere che un numero finito di valori. Per ogni valore ammissibile di A, tanto la parte reale quanto il coefficiente dell' immaginario in B debbono giacere fra limiti assegnati e però risulta evidente l'ultima asserzione.

Ora se il poliedro P ha vertici singolari sul piano $\xi\eta$ si escludano al modo del § 22 e le considerazioni stesse di questo paragrafo dimostreranno il teorema enunciato. Basta per ciò osservare che la sostituzione

$$\begin{cases} x = (r + i\sqrt{D})\, x' - y', \\ y = mx' \end{cases}$$

a determinante m ivi considerata trasforma la $F = [A, B, C]$ a determinante Δ nella $F' = [A', B', C']$ a determinante Δm^2, ove

$$(3)\quad \begin{cases} A' = A(r^2+D) + Bm(r+i\sqrt{D}) + B_0 m(r-i\sqrt{D}) + Cm^2, \\ B' = -A(r+i\sqrt{D}) - B_0 m, \\ C' = A \end{cases}$$

e mentre ad ogni forma F ne corrisponde una sola F', inversamente ad ogni forma F' corrisponde per le (3) una sola forma F.

Ove si aggiunga in fine che due forme ridotte non sono in generale equivalenti salvo quando i loro due indici si trovino su due faccie coniugate di P e l'uno risulti dall' altro per la sostituzione di $\Gamma^{(\omega)}$ che cangia l'una faccia nella coniugata, si hanno tutti gli elementi necessarii per risolvere, nel caso delle forme definite di Hermite, i problemi della teoria dell' equivalenza.

§ 25.

Esempî numerici.

Per mostrare in qualche esempio l'effettiva applicazione dei risultati precedenti, prendiamo dapprima il caso del corpo quadratico

$$\left(1,\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$$

e scriviamo le condizioni affinchè una forma definita positiva $[A, B, C]$ sia ridotta. Secondo il § 16 possiamo definire il poliedro fondamentale P di $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ colle diseguaglianze

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi \leq \tfrac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \eta - \xi\sqrt{7} \geq 0, \quad \eta + \xi\sqrt{7} \geq 0,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1, \quad \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geq 1,$$

$$\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geq 1.$$

Ora se poniamo

$$B = B_1 + B_2\,\frac{1+i\sqrt{7}}{2},$$

essendo B_1, B_2 razionali interi, il punto indice della forma avrà per le (2) § 24 le coordinate

$$\xi = -\frac{2B_1 + B_2}{2A}, \quad \eta = \frac{B_2\sqrt{7}}{2A}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}$$

e le precedenti diseguaglianze si tradurranno per una forma ridotta nelle seguenti

$$|2B_1+B_2|\leq A,\quad 0\leq B_2\leq A,\quad B_1+B_2\geq 0,\quad B_1\leq 0,\quad C\geq A,$$
$$2C+(2B_1+B_2)-7B_2+2A\geq 0,$$
$$2C-(2B_1+B_2)-7B_2+2A\geq 0.{}^{*)}$$

L'ordinata minima di un punto del poliedro P è $=\sqrt{\frac{3}{7}}$; in conseguenza deve aversi

$$A\leq\sqrt{-\frac{7}{3}\Delta},$$

il che dà per A un numero finito di valori. Indi le diseguaglianze superiori, unitamente alla condizione

$$AC-B_1^2-2B_2^2-B_1B_2=-\Delta,$$

danno un numero finito di forme ridotte. Così se prendiamo $\Delta=-3$ troviamo le 5 *forme ridotte*

$$[1,\,0,\,3],\quad\left[1,\,\frac{1+i\sqrt{7}}{2},\,5\right],\quad\left[1,\,\frac{-1+i\sqrt{7}}{2},\,5\right],\quad[2,\,-1,\,2],$$
$$[2,\,i\sqrt{7},\,5]$$

delle quali le tre prime sono equivalenti mentre le ultime due non sono equivalenti fra loro nè alla prima. Le forme di Hermité a determinante -3 nel campo $\left(1,\,\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$ si ripartiscono dunque in tre classi rappresentate dalle forme ridotte

$$[1,\,0,\,3],\quad[2,\,-1,\,2],\quad[2,\,i\sqrt{7},\,5].$$

Come secondo esempio consideriamo il caso del campo quadratico $(1,\,i\sqrt{5})$. Il poliedro fondamentale del corrispondente gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ è stato definito al § 14 mediante le diseguaglianze

$$-\frac{1}{2}\leq\xi\leq\frac{1}{2},\quad 0\leq\eta\leq\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geq 1,$$
$$\xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2\geq\frac{1}{4},$$
$$\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2\geq\frac{1}{20},$$
$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2\geq\frac{1}{20},$$

che per una forma definita $[A,\,B,\,C]$, ponendo

$$B=B_1+iB_2\sqrt{5},$$

*) Che le diseguaglianze caratterizzanti una forma ridotta siano lineari rispetto ai coefficienti della forma non è una particolarita di questo caso ma una proprietà generale.

si traducono nelle altre:

$$(a)\begin{cases}-\frac{A}{2}\leq B_1\leq\frac{A}{2}, \quad 0\leq B_2\leq\frac{A}{2}, \quad C\geq A, \quad C-5B_2+A\geq 0,\\ C-B_1-4B_2+A\geq 0, \quad C+B_1-4B_2+A\geq 0.\end{cases}$$

Ora, secondo quanto abbiamo detto al § 22, descriviamo attorno ai due vertici singolari $\frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ come centri due sfere di raggio ε così piccolo che stacchino dal poliedro P due intorni dei vertici singolari e ricerchiamo separatamente per ciascuna delle tre parti, in cui P risulta diviso, quali indici di forme dell' assegnato determinante (negativo) Δ vi sono contenuti. Se prendiamo l'intorno del vertice singolare $\frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$ definito dalle diseguaglianze

$$\xi\geq-\frac{1}{2}, \quad \eta\leq\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2\geq\frac{1}{4}, \quad \left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2\geq\frac{1}{20},$$

$$\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2\leq\varepsilon^2,$$

le forme ridotte $[A, B, C]$ i cui indici cadono in quest' intorno dovranno soddisfare alle diseguaglianze:

$$(b)\begin{cases}B_1\leq\frac{A}{2}, \quad B_2\leq\frac{A}{2}, \quad C-5B_2+A\geq 0,\\ C-B_1-4B_2+A\geq 0, \quad C-B_1-5B_2+\left(\frac{3}{2}-\varepsilon^2\right)A\leq 0.\end{cases}$$

Se ad una tale forma $[A, B, C]$ applichiamo (§ 24) la sostituzione

$$\begin{pmatrix}-1+i\sqrt{5}, & -1\\ 2 & , \; 0\end{pmatrix}$$

a determinante 2, ne deriviamo una forma $[A', B', C']$ a determinante 4Δ e i coefficienti A, B, C della 1ª forma si deducono da quelli della 2ª colle formole

$$A=C', \qquad B_1=\frac{C_1-B_1'}{2}, \qquad B_2=\frac{C'+B_2'}{2},$$

$$C=\frac{A'+6C'-2B_1'+10B_2'}{4},$$

ove si è posto $B'=B_1'+iB_2'\sqrt{5}$. Per la forma $[A', B', C']$ le diseguaglianze (b) si mutano nelle altre

$$0\leq B_1'\leq\frac{A'}{2}, \quad \frac{-A'}{2}\leq B_2'\leq 0, \quad A'\leq 4\varepsilon^2 C';$$

ma poichè deve essere

$$A'C'-B_1'^2-5B_2'^2=4\Delta,$$

ponendo in questa per C' il limite inferiore $\frac{A'}{4\varepsilon^2}$ e per $B_1'^2$, $B_2'^2$ i limiti superiori $\frac{A'^2}{4}$ ne deduciamo

$$A'^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 6\right) \leq -16\Delta.$$

Questa ci dà per A' un numero *finito* di valori e a ciascuno di essi corrisponde un numero finito di valori per B_1', B_2'. Se prendiamo

$$\varepsilon = \frac{1}{3\sqrt{5}}$$

risulta $A'^2 \leq -\frac{16}{39}\Delta$, sicchè per $\Delta = -1$, $\Delta = -2$, nessun indice di forme ridotte cade negli intorni dei vertici singolari.

Nel poliedro che risulta togliendo da P gli intorni dei due vertici singolari la minima ordinata di un vertice è $\frac{\sqrt{39}}{45}$. Per una forma ridotta $[A, B, C]$ a determinante -1 dovremo dunque avere

$$\frac{1}{A} \geq \frac{\sqrt{39}}{45}$$

e quindi $A \leq 7$. Tenendo presenti le diseguaglianze (a) troviamo le seguenti quattro forme ridotte a determinante $\Delta = -1$:

$$[1, 0, 1], \quad [2, i\sqrt{5}, 3], \quad [5, 2+2i\sqrt{5}, 5], \quad [5, -2+2i\sqrt{5}, 5],$$

delle quali soltanto le due ultime sono equivalenti fra loro. Nel campo $(1, i\sqrt{5})$ le forme a determinante -1 si distribuiscono dunque in tre classi.

§ 26.

Forme di Hermite indefinite.

Una forma di Hermite indefinita $[A, B, C]$ individua nel piano $\xi\eta$ il circolo reale:

$$(1) \qquad A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

che soltanto se il primo coefficiente A è nullo si riduce ad una linea retta. In tal caso il determinante $\Delta = BB_0$ è scindibile nel prodotto di due fattori coniugati nel corpo quadratico Ω ed il gruppo riproduttivo della forma, la cui determinazione forma l'oggetto principale delle ricerche seguenti, deducesi per trasformazione da un sottogruppo modulare*). Generalmente intenderemo escluso questo caso che consente una trattazione più semplice.

La sfera descritta sul circolo (1), come cerchio massimo, si dirà

*) Cf. pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ la mia nota nei. Rendiconti Accademia Lincei 4 maggio 1890.

la *sfera indicatrice* della forma $[A, B, C]$. Ove si scinda B nella sua parte reale ed immaginaria, ponendo

$$B = M + iN,$$

l'equazione della sfera indicatrice è:

$$\left(\xi + \frac{M}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{N}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2}. \tag{2}$$

La forma $[A, B, C]$ è determinata, a meno di un cangiamento simultaneo di segno nei coefficienti, quando ne sia fissato il determinante e la sfera indicatrice.

Diciamo la $[A, B, C]$ *ridotta* quando la sua sfera indicatrice attraversa il poliedro fondamentale P; sussiste allora il teorema: *Ogni forma di Hermite indefinita ammette una forma ridotta equivalente.*

Ed ora andiamo a dimostrare l'altro teorema fondamentale: *Il numero delle forme ridotte di assegnato determinante Δ è finito.*

Perchè una forma sia ridotta è *necessario* che la sua sfera indicatrice o contenga *nel suo interno* qualche vertice non singolare di P, ovvero contenga nel suo interno o alla superficie un vertice singolare. Sia dapprima $v_0 \equiv (\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ un vertice non singolare e però $\zeta_0 > 0$; se la sfera (4) contiene nel suo interno v_0 dovremo avere

$$(A\xi_0 + M)^2 + (A\eta_0 - N)^2 + A^2\zeta_0^2 < \Delta; \tag{3}$$

ne segue intanto che il 1^0 coefficiente A non può assumere che un numero finito di valori e poichè inoltre la parte reale ed immaginaria in B, per ogni tale valore di A, debbono giacere, in forza della (3) stessa, fra limiti assegnati, il numero di queste sfere è limitato.

Se v_0 è un vertice singolare le sue coordinate saranno

$$\xi_0 = \frac{r}{n}, \quad \eta_0 = \frac{s\sqrt{D}}{n}, \quad \zeta_0 = 0,$$

essendo r, s, n razionali interi. Supponiamo che non sia $D \equiv 3 \pmod{4}$, il caso $D \equiv 3 \pmod{4}$ consentendo una trattazione del tutto simile; allora il 2^0 coefficiente B avrà la forma

$$B = B_1 + iB_2\sqrt{D},$$

con B_1, B_2 interi ordinarii. Se la sfera (2) contiene *nel suo interno* v_0 dovremo avere

$$(Ar + B_1 n)^2 + D(As - B_2 n)^2 < \Delta n^2.$$

Ponendo per un momento

$$Ar + B_1 n = \alpha, \quad As - B_2 n = \beta \tag{4}$$

le coppie di valori ammissibili per α, β sono evidentemente in numero limitato. Per ogni tale coppia di valori di α, β essendo

$$\alpha^2 + D\beta^2 \equiv n^2(B_1^2 + DB_2^2) \pmod{A}$$

e però

$$\alpha^2+D\beta^2-n^2\Delta\equiv n^2\{B_1{}^2+DB_2{}^2-\Delta\}\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ A)$$

deve essere A un divisore del numero *diverso da zero* $\alpha^2+D\beta^2-n^2\Delta$ e però A e quindi B_1, B_2 (per le (4)) non possono ricevere corrispondentemente che un numero finito di valori.

Resta che proviamo che vi ha soltanto un numero finito di forme a determinante Δ le cui sfere indicatrici passano pel vertice singolare $v_0\equiv\frac{r+is\sqrt{D}}{n}$, ivi attraversando il poliedro P. Sia $[A, B, C]$ una tale forma per la quale risulti adunque per la (1)

$$A(r^2+Ds^2)+nB(r+is\sqrt{D})+nB_0(r-is\sqrt{D})+Cn^2=0. \tag{5}$$

Ricorrendo al processo già usato ai §§ 22, 24, applichiamo ad $[A, B, C]$ la sostituzione a determinante n

$$\begin{cases} x=(r+is\sqrt{D})\,x'-y', \\ y=nx', \end{cases}$$

che la cangia in una forma $[0, B', C']$ a determinante Δn^2 col primo coefficiente nullo, a causa della (5) e gli altri due dati dalle formole

$$\begin{cases} B'=-A(r+is\sqrt{D})-B_0 n, \\ C'=A. \end{cases} \tag{6}$$

La sfera indicatrice della forma trasformata si riduce dunque al piano

$$B'z+B_0'z_0+C'=0, \tag{7}$$

mentre l'intorno del vertice singolare v_0 si muta in una regione Σ della natura di quella considerata al § 22. Per ipotesi deve il piano (7) traversare questa regione Σ e quindi la sua distanza p dall' origine non potrà manifestamente superare un certo limite. Ma troviamo

$$p=\frac{C'}{2n\sqrt{\Delta}},$$

onde segue che C' non può assumere che un numero finito di valori e poichè lo stesso accade di B' in forza della condizione $B'B_0'=n^2\Delta$, le formole (6) dimostrano subito la proprietà enunciata.

§ 27.

Periodi delle forme ridotte.

Per ciò che riguarda la distribuzione delle forme ridotte in periodi, e la risoluzione dei due problemi della teoria della equivalenza, poco vi è da aggiungere a quanto è esposto pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ nel lavoro precedente (A. §§ 13, 14). Sulla sfera indicatrice di una forma ridotta f_1 la divisione poliedrica, corrispondente al nostro gruppo $\Gamma^{(\omega)}$, darà una rete di poligoni con lati circolari normali all' equatore*) della sfera. Consideriamo il polygono π_1 della rete tagliato sulla sfera dal poliedro fondamentale P e i poligoni della rete contigui a π_1. Ciascuno di questi con una sostituzione di $\Gamma^{(\omega)}$ perfettamente determinata può essere trasportato in un poligono *ridotto*, giacente cioè nel poliedro fondamentale; la sostituzione inversa applicata alla forma f_1 la cangia in una forma ridotta equivalente ad f_1, che diremo una *ridotta contigua* di f_1. È chiaro che in generale il passaggio dalla forma ridotta f_1 ad una contigua si opera per mezzo di una delle sostituzioni elementari del gruppo, che cangiano cioè il poliedro P in uno degli aderenti *per una faccia*. Fa eccezione il caso in cui la sfera indicatrice di f_1 attraversa uno spigolo di P, chè allora la sostituzione da adoperarsi è quella che cangia P nel poligono della rete opposto lungo questo spigolo. Immaginiamo ora scritte tutte le forme ridotte contigue ad f_1 e di ciascuna prendiamo nuovamente le ridotte contigue, omettendo quelle che eventualmente ripetessero forme già ottenute e così continuiamo. Il numero delle forme ridotte di un dato determinante Δ essendo limitato (§ 26), costituiremo un aggregato di forme ridotte differenti

A) $$f_1\, f_2\, f_3 \ldots f_n,$$

tutte equivalenti fra loro, tale che le ridotte contigue di ogni forma f_i in A) si trovano in A) stesso. Diremo questo aggregato A) un *periodo di forme ridotte* e, come in (A) § 14) dimostreremo il teorema: *Due forme ridotte equivalenti appartengono al medesimo periodo.*

Con ciò viene risoluto il problema di riconoscere se due forme indefinite dello stesso determinante sono equivalenti o no; nel caso affermativo si trova anche un' effettiva sostituzione che trasforma l'una nell' altra. Rimane così soltanto da risolvere il 2° problema della teoria dell' equivalenza:

Determinare in $\Gamma^{(\omega)}$ il sottogruppo riproduttivo di un' assegnata forma indefinita, che è lecito supporre ridotta.

Questa ricerca offre interesse non soltanto per la teoria dei numeri ma ben più per quella delle funzioni *automorfe.* Tale sottogruppo è infatti un gruppo *automorfo* e le corrispondenti funzioni hanno stretta analogia colle funzioni modulari, colle quali hanno a comune una teoria della trasformazione e il gruppo delle corrispondenti equazioni di trasformazione (gruppo delle equazioni modulari) **).

---

*) Intendiamo per equatore il circolo massimo nel piano $\xi\eta$.

**) Cf. Fricke, Math. Annalen Bd. 39.

§ 28.

Gruppo riproduttivo di una forma di Hermite indefinita.

Essendo

A) $$f_1\, f_2\, f_3 \ldots f_n$$

il periodo delle forme ridotte individuato da f_1, consideriamo i corrispondenti poligoni ridotti

B) $$\pi_1',\ \pi_2',\ \pi_3' \ldots \pi_n'.$$

Poichè due forme distinte $[A, B, C]$, $[A', B', C']$ dello stesso determinante hanno a comune la sfera indicatrice solo quando i coefficienti dell' una siano eguali e di segno contrario ai corrispondenti dell' altra, vediamo che la serie B) consterà di poligoni tutti distinti, ovvero due a due coincidenti. Il secondo caso si presenterà quando il periodo A) contenga la forma contraria $[-A, -B, -C]$ di $f_1 = [A, B, C]$ e quindi anche la forma contraria di ogni forma nel periodo.

Se procediamo dunque direttamente sui poligoni della rete che la sfera indicatrice di f_1 taglia dalla divisione poliedrica e formiamo il poligono Π constante degli m poligoni contigui

$$\pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_m$$

che formano un sistema completo di poligoni non equivalenti della rete, sarà $m = n$ nel 1^0 caso e $m = \frac{1}{2} n$ nel 2^0. Determiniamo ora, nel noto modo (A) § 13), il sottogruppo Φ di $\Gamma^{(\omega)}$, che trasforma in sè medesima la rete sferica di f_1, sottogruppo che avrà precisamente per poligono fondamentale Π. Il gruppo Φ coinciderà col sottogruppo riproduttivo Φ_1 di f_1 nel 1^0 caso e lo conterrà invece come sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel 2^0 caso, ove le sostituzioni di Φ che non appartengono a Φ_1 trasformeranno f_1 nella sua *contraria*. Ora colle formole effettive di trasformazione si prova facilmente che una sostituzione di Φ_1 produce un semplice scorrimento (nel senso non-euclideo) della sfera indicatrice in sè medesima, mentre una sostituzione di Φ fuori di Φ_1 produce un tale scorrimento combinato con un ribaltamento o inversione delle due faccie della sfera. Nel secondo caso adunque il gruppo Φ non è altro che il gruppo Φ_1 *ampliato per riflessione.*

Per chiarire con un esempio queste osservazioni consideriamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ e la divisione poliedrica corrispondente (§ 12) e prendiamo la forma

$$f_1 = ixy_0 - ix_0 y,$$

la cui sfera indicatrice si riduce al piano $\eta = 0$. Questo taglia dalla divisione poliedrica precisamente la figura corrispondente al gruppo modulare *ampliato per riflessione.*

§ 29.

Esempio numerico pel gruppo $\Gamma^{(i)}$.

Alla discussione di alcuni esempi numerici facciamo precedere l'osservazione seguente. La distribuzione delle forme ridotte in periodi operandosi per forme contigue, per ottenere da una forma ridotta tutte le ridotte contigue basterà in generale applicare a ciascuna forma ridotta f_i le sostituzioni elementari del gruppo $\Gamma^{(\omega)}$. Solo quando la sfera indicatrice di f_i attraversi uno spigolo di P converrà usare inoltre la sostituzione che trasforma P nel poligono opposto lungo questo spigolo (§ 27). Ciò del resto avverrà soltanto per valori speciali di Δ e per particolari forme ridotte. Basterà dunque, scritto il sistema completo delle forme ridotte, osservare l'effetto permutativo prodotto sopra di esse dalle sostituzioni elementari del gruppo (alle quali eventualmente saranno da aggiungersi le sostituzioni sopra indicate) per conoscere la distribuzione in classi delle forme a determinante Δ. Dopo di ciò si calcoleranno facilmente le sostituzioni generatrici del sottogruppo riproduttivo di ogni forma ridotta.

Come primo esempio prendiamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ col poliedro fondamentale del § 12 avente, oltre il vertice all' infinito, i quattro vertici

$$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1),\quad V_2 \equiv \left(0,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right),\quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$
$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Una forma indefinita $[A,\ B,\ C]$ a determinante Δ è ridotta se la sua sfera indicatrice

$$\left(\xi + \frac{M}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{N}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2}, \tag{1}$$

(ove si è posto, scindendo B nella sua parte réale ed immaginaria, $B = M + iN$, contiene *nel suo interno* almeno uno dei quattro vertici $V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4$.

Scriviamo le rispettive condizioni di riduzione che sono

$$(2)\quad \begin{cases} \text{pel vertice } V_1 \ldots M^2 + N^2 + A^2 < \Delta, \\ \quad ,, \qquad ,, \qquad V_2 \ldots 4M^2 + (2N - A)^2 + 3A^2 < 4\Delta, \\ \quad ,, \qquad ,, \qquad V_3 \ldots (2M + A)^2 + 4N^2 + 3A^2 < 4\Delta, \\ \quad ,, \qquad ,, \qquad V_4 \ldots (2M + A)^2 + (2N - A)^2 + 2A^2 < 4\Delta. \end{cases}$$

Osserviamo poi se la sfera (1) può contenere uno spigolo del poliedro. Se essa contenesse lo spigolo $V_1 V_2$ che è l'intersezione della sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

col piano $\xi = 0$, la sua equazione dovrebbe avere la forma

$$(\xi + \lambda)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + \lambda^2,$$

essendo λ una costante. Dal confronto colla (1) risulta

$$\lambda = \frac{M}{A}, \quad N = 0, \quad \Delta = A^2 + M^2,$$

e però Δ sarebbe scindibile nella somma di due quadrati, caso che escludiamo (§ 26). Le stesso accadrebbe se la sfera indicatrice passasse per lo spigolo $V_1 V_3$.

Un calcolo del tutto simile prova che se la sfera (1) passa per lo spigolo $V_2 V_4$ o per l'altro $V_3 V_4$ deve presentarsi uno dei due casi seguenti

$$(3) \qquad f = [A,\ iN,\ N - A] \quad \text{con } \Delta = A^2 + N^2 - AN,$$

$$(4) \qquad f = [A,\ M,\ -(A+M)] \text{ con } \Delta = A^2 + M^2 + AM.$$

Come si vede, ciò può accadere soltanto per un valore di Δ scindibile in fattori coniugati nel campo quadratico $\left(1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le sostituzioni elementari di $\Gamma^{(i)}$ sono le tre seguenti

$$S_1 = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix},$$

alle quali sono da associarsi per le forme delle rispettive specie (3), (4) le sostituzioni

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -i, & i \end{pmatrix}, \quad S_5 = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ i, & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora, essendo $[A, B, C]$ una forma qualunque di Hermite, notiamo gli effetti prodotti dalle sostituzioni S_1, S_2, S_3 dati dalle formole seguenti

$$(5) \qquad \begin{cases} S_1[A, B, C] = [A, iB, C], \\ S_2[A, B, C] = [A, i(A+B), C'], \\ S_3[A, B, C] = [C, -iB_0, A]. \end{cases}$$

Se prendiamo come esempio $\Delta = 3$, usando delle (2), troviamo che si danno qui 16 forme ridotte cioè le 8:

$$\begin{aligned} f_1 &= [1,\ 0,\ -3], & f_2 &= [1,\ 1,\ -2], \\ f_3 &= [1,\ -1,\ -2], & f_4 &= [1,\ i,\ -2], \\ f_5 &= [1,\ -i,\ -2], & f_6 &= [1,\ 1+i,\ -1], \\ f_7 &= [1,\ -1+i,\ -1], & f_8 &= [1,\ -1-i,\ -1], \end{aligned}$$

e le 8 contrarie che indicheremo rispettivamente con $f_1' f_2' f_3' f_4' f_5' f_6' f_7' f_8'$. Calcolando secondo le (5) l'effetto prodotto sulle forme ridotte da S_1, S_2, S_3 troviamo*).

*) Qui si rende necessaria una spiegazione delle notazioni usate. Nel primo modo di scrittura sopra ciascuna forma ridotta della linea inferiore collochiamo la forma trasformata surrogandola conuna lineetta quando questa non è ridotta. Il secondo modo di scrittura mostra la permutazione prodotta decomposta in cicli.

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} f_1 & f_4 & f_5 & f_3 & f_2 & f_7 & f_8 & - \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_1)\,(f_2 f_4 f_3 f_5)\,(f_6 f_7 f_8 -),$$

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} f_4 & -f_1 & f_7 & f_6 & - & f_3 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_1 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_1 f_4 f_7 f_3)\,(f_5 f_6 -)\,(f_8 f_2 -),$$

$$S_3 \equiv \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & f_6' & - & f_8' \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_6 f_6')\,(f_8 f_8').$$

La semplice ispezione di queste formole dimostra che le sostituzioni S_1, S_2, S_3 bastano già a congiungere fra loro transitivamente tutte le 16 forme ridotte, le quali formano adunque un unico periodo.

Vogliamo ora calcolare le sostituzioni fondamentali del sottogruppo Φ che trasforma in sè medesima la sfera indicatrice di f_1, che nel caso attuale sarà il gruppo ampliato per riflessione del sottogruppo riproduttivo di f_1. Alla sua determinazione, avendosi qui le due forme ridotte

$$f_5 = [1,\ -i,\ -2], \qquad f_2 = [1,\ 1,\ -2]$$

delle specie (3), (4), occorre inoltre segnare gli effetti delle rispettive sostituzioni $S_4\,S_5$, cioè

$$S_4 f_5 = f_2, \qquad S_5 f_2 = f_5.$$

Dopo di ciò costruendo un semplice schema per figurare la successione delle forme ridotte contigue, troviamo come sostituzioni generatrici di Φ le tre seguenti

$$\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -i, & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i, & -3i \\ 1, & -1-i \end{pmatrix},$$

delle quali le prime due trasformano la f_1 in sè medesima mentre la terza la trasforma nella contraria.

§ 30.

Esempio numerico pel gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$.

Il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ ha il poliedro fondamentale descritto al § 14 con nove vertici di cui uno all' infinito e gli altri 8 nei punti:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \qquad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right), \qquad V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$V_1' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \qquad V_2' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$V_3' \equiv \left(-\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right), \qquad V_4' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

fra i quali sono da notarsi i due vertici singolari sul piano $\xi\eta$

$$V_1 \equiv \frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \qquad V_1' \equiv \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}.$$

Perchè una forma indefinita $[A, B, C]$ sia ridotta è necessario e sufficiente che la sua sfera indicatrice contenga *nel suo interno* almeno uno degli otto vertici, giacchè nel caso attuale non può darsi che essa passi per uno dei vertici singolari. E infatti se ciò accadesse p. e. pel vertice $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ dovremmo avere (ponendo al solito $B = B_1 + iB_2\sqrt{5}$):

$$(2B_1 + A)^2 + 5(2B_2 - A)^2 = 4\Delta,$$

il numero A dovrebbe essere manifestamente pari e dalla precedente equazione, divisa per 4, risulterebbe Δ decomponibile in due fattori coniugati in Ω, caso che escludiamo (§ 26).

Scrivendo ora che la sfera indicatrice della forma $[A, B, C]$, la cui equazione è:

$$\left(\xi + \frac{B_1}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{B_2\sqrt{5}}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2},$$

contiene nel suo interno uno degli otto vertici troviamo le diseguaglianze:

$$\begin{cases} (2B_1+A)^2+5(2B_2-A)^2 < 4\Delta, \quad (2B_1-A)^2+5(2B_2-A)^2 < 4\Delta, \\ 16(2B_1 + A)^2 + 5(8B_2 - 3A)^2 + 3A^2 < 64\Delta, \\ 16(2B_1 - A)^2 + 5(8B_2 - 3A)^2 + 3A^2 < 64\Delta, \\ (5B_1 + 2A)^2 + 5(5B_2 - 2A)^2 + A^2 < 25\Delta, \\ (5B_1 - 2A)^2 + 5(5B_2 - 2A)^2 + A^2 < 25\Delta, \\ (2B_1+A)^2+5B_2^2+3A^2 < 4\Delta, \quad (2B_1-A)^2+5B_2^2+3A^2 < 4\Delta, \end{cases}$$

delle quali una almeno deve essere soddisfatta se la forma è ridotta. Prendiamo p. e. $\Delta = 2$: troviamo 16 forme ridotte, cioè le otto forme

$$\begin{aligned} f_1 &= [1, 0, -2], & f_2 &= [1, i\sqrt{5}, 3], \\ f_3 &= [1, -1, -1], & f_4 &= [1, 1, -1], \\ f_5 &= [1, -1+i\sqrt{5}, 4], & f_6 &= [1, 1+i\sqrt{5}, 4], \\ f_7 &= [2, -1+i\sqrt{5}, 2], & f_8 &= [2, 1+i\sqrt{5}, 2] \end{aligned}$$

insieme colle otto contrarie. Pel gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ abbiamo le sei sostituzioni generatrici (§ 14)

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -1, & i\sqrt{5} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} i\sqrt{5}, & 2 \\ 2, & -i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad S_6 = \begin{pmatrix} -4+i\sqrt{5}, & 2i\sqrt{5} \\ 2i\sqrt{5}, & 4+i\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

il cui effetto permutativo sulle forme ridotte sopra scritte è dato dalle formole seguenti:

$$S_1 \equiv (f_1)(f_2 f_4), \quad S_2 = (f_3 f_1 f_4 -)(f_5 f_2 f_6 -)(f_7 f_8 -),$$
$$S_3 \equiv (f_1 f_2)(f_3 f_6)(f_4 f_5)(f_7 f_8), \quad S_4 \equiv (f_3 f_3')(f_4 f_4')(f_7 f_8),$$
$$S_5 = (f_3 f_4)(f_5 f_6)(f_7 f_7')(f_8 f_8'),$$

mentre la S_6 trasforma ciascuna delle forme ridotte in una forma non ridotta.

Abbiamo qui adunque due periodi di forme ridotte, l'uno formato dalle 12 forme

$$f_1\, f_2\, f_3\, f_4\, f_5\, f_6\, f_1'\, f_2'\, f_3'\, f_4'\, f_5'\, f_6'$$

e l'altro dalle 4 forme

$$f_7\, f_8\, f_7'\, f_8';$$

il numero delle classi delle forme indefinite a determinante $\Delta = 2$ nel campo $(1, i\sqrt{5})$ è quindi eguale a 2.

Parte terza.

Involuzione ed ortogonalità delle forme di Dirichlet e di Hermite.

§ 31.

Forme di Dirichlet in involuzione colla forma fondamentale F od ortogonali a questa.

Consideriamo un determinato campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$, o $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ ed in esso una forma di Hermite indefinita:

$$F = [A, B, C], \quad \Delta = BB_0 - AC > 0$$

che intenderemo fissata una volta per tutte e chiameremo la *forma fondamentale.* Le ricerche seguenti si riferiranno a quel sottogruppo Φ di $\Gamma^{(\omega)}$ che trasforma in sè medesima la sfera indicatrice di F, sottogruppo che coincide col sottogruppo riproduttivo della forma F, ovvero lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 2 (§ 28). Esse avranno per iscopo di costruire rispetto ad una certa classe di forme quadratiche, sulle quali si opereranno le sostituzioni di Φ, una teoria intieramente analoga a quella delle forme binarie quadratiche ordinarie rispetto al gruppo modulare. Se il circolo indicatore di una forma di Dirichlet φ giace sulla sfera indicatrice Σ di F, diremo che *φ è in involuzione con F.* Quando accada invece che il circolo di φ sia ortogonale alla detta sfera, diremo che *φ è ortogonale a F.*

È chiaro che operando sopra una forma φ in involuzione con F od ortogonale a F una sostituzione qualunque di Φ, otterremo una forma trasformata φ' egualmente in involuzione con F od ortogonale a F. Considerando adunque la totalità delle forme φ di un dato determinante in involuzione con F od ortogonali a F, diremo *equivalenti rispetto a* Φ due tali forme φ, φ' quando esista in Φ una sostituzione che trasformi φ in φ'. Potremo quindi distribuire le forme φ di egual determinante in classi e facilmente dimostreremo che: *Il numero delle classi delle forme φ di egual determinante in involuzione colla forma fondamentale F, o a questa ortogonali, è sempre finito.*

Immaginiamo per ciò costruito sulla sfera Σ indicatrice di F il poligono fondamentale Π del gruppo Φ (§ 28). Se si tratta di una forma φ in involuzione con F diremo che φ è *ridotta* quando il suo circolo indicatore, che giace sopra Σ, attraversi Π; una forma φ ortogonale a F sarà invece *ridotta* se il punto ove il circolo indicatore di φ incontra (ortogonalmente) Σ giace nel poligono Π. Essendo Π sulla sfera Σ il poligono fondamentale del gruppo Φ, ogni punto di questa sfera fuori dell' equatore può trasportarsi con una sostituzione di Φ entro Π, onde segue subito il teorema: *Ogni forma φ è equivalente ad una forma ridotta.* In secondo luogo sussiste il teorema: *Il numero delle forme ridotte φ di egual determinante è finito.* Per dimostrarlo osserviamo che il poligono Π attraversa un certo numero di poliedri

$$P_1\, P_2 \ldots P_m$$

della rete corrispondente al gruppo $\Gamma^{(\omega)}$; questi poliedri nascono dal fondamentale P_1 per mezzo di determinate sostituzioni di $\Gamma^{(\omega)}$ che indicheremo rispettivamente con $S_1 = 1$, S_2, $S_3 \ldots S_m$. Se φ e una forma ridotta, sia essa in involuzione con F od ortogonale a F, il suo circolo indicatore attraversa uno dei poliedri P_1, $P_2 \ldots P_m$, sia P_i; allora la sostituzione S_i cangierà la forma φ in una forma *assolutamente ridotta*, il cui circolo indicatore cioè attraversa il poliedro fondamentale. Per ottenere adunque le forme ridotte richieste basterà costruire tutte le forme assolutamente ridotte dell' assegnato determinante (§ 22) e a ciascuna di essa applicare le sostituzioni S_2^{-1}, $S_3^{-1} \ldots S_m^{-1}$. Quelle fra le forme ottenute che hanno circoli indicatori giacenti sopra Σ od ortogonali a Σ sono le forme ridotte richieste.

Dimostrati così i due teoremi fondamentali, è chiaro che per le nostre forme φ, considerate rispetto al gruppo Φ, siamo ora in grado di risolvere, coi noti metodi, i corrispondenti problemi della teoria dell' equivalenza e in particolare di determinare entro Φ il sottogruppo riproduttivo di una forma φ.

Come esempio consideriamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ e prendiamo per forma fondamentale

$$F = ixy_0 - ix_0y$$

la cui sfera indicatrice si riduce al piano $\eta = 0$ (Cf. § 28). Se ci limitiamo a considerare le sostituzioni del gruppo riproduttivo di F troviamo tutte e sole le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a coefficienti reali e a determinante $+1$. Una forma φ in involuzione con F deve avere le sue radici reali e però, sopprimendo dai coefficienti un eventuale fattore comune, essa resterà a coefficienti reali con determinante positivo. Per una forma φ ortogonale alla F le due radici debbono essere coniugate immaginarie onde nuovamente Φ si può ridurre a coefficienti reali con determinante negativo. Qui adunque otteniamo, come caso particolare, la teoria delle ordinarie forme quadratiche considerate rispetto al gruppo modulare $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$.

§ 32.

Condizioni d'involuzione.

Ricerchiamo ora le effettive relazioni cui debbono soddisfare i coefficienti di una forma di Dirichlet

$$\varphi = (a, b, c)$$

perchè essa stia in involuzione colla forma fondamentale

$$F = [A, B, C].$$

Per brevità ci limiteremo al caso del campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$ e porremo quindi

$$(1) \qquad a = a_1 + ia_2\sqrt{D}, \quad b = b_1 + ib_2\sqrt{D}, \quad B = B_1 + iB_2\sqrt{D}$$

ove $a_1, a_2, b_1, b_2, B_1, B_2$ sono interi razionali. Indicando con d il determinante $b^2 - ac$ di φ, poniamo altresì

$$(2) \qquad d = d_1 + id_2\sqrt{D}$$

e inoltre

$$(3) \qquad d = \varrho e^{i\psi}$$

ove

$$(3^*) \qquad \varrho = \sqrt{d_1^2 + Dd_2^2}, \quad \cos\psi = \frac{d_1}{\varrho}, \quad \operatorname{sen}\psi = \frac{d_2\sqrt{D}}{\varrho}.$$

Per le radici

$$z_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad z_2 = \xi_2 + i\eta_2$$

della forma φ troviamo

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\left(\sqrt{\varrho}\cos\frac{\psi}{2} - b_1\right)a_1 + \left(\sqrt{\varrho}\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} - b_2\sqrt{D}\right)a_2\sqrt{D}}{a_1^2 + Da_2^2}, \\[2ex] \eta_1 = \dfrac{\left(\sqrt{\varrho}\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} - b_2\sqrt{D}\right)a_1 - \left(\sqrt{\varrho}\cos\frac{\psi}{2} - b_1\right)a_2\sqrt{D}}{a_1^2 + Da_2^2} \end{cases}$$

i valori di $\xi_2 \eta_2$ deducendosi da questi col cangiare $+\sqrt{\varrho}$ in $-\sqrt{\varrho}$. Perchè la forma φ sia in involuzione con F è necessario e sufficiente che i due punti $(\xi_1 \eta_1)$ $(\xi_2 \eta_2)$ siano situati sull' equatore della sfera indicatrice di F, cioè sul circolo

$$A(\xi^2 + \eta^2) + 2B_1 \xi - 2B_2 \sqrt{D}\, \eta + C = 0. \tag{5}$$

Sostituendo in questa i valori di $\xi_1 \eta_1$, indi quelli di $\xi_2 \eta_2$, troviamo le due equazioni

$$\text{(6)}\quad \begin{cases} A(b_1^2 + Db_2^2 + \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + Da_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad + C(a_1^2 + Da_2^2) = 0, \\ (a_1 B_1 + Da_2 B_2 - Ab_1)\cos\frac{\psi}{2} + \sqrt{D}\,(a_2 B_1 - a_1 B_2 - Ab_2)\,\mathrm{sen}\frac{\psi}{2} = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali dimostra che ϱ deve essere un numero razionale e però, come radice quadrata dell' intero $d_1^2 + Dd_2^2$, un numero intero. Come primo risultato abbiamo dunque: *Le forme φ di Dirichlet in involuzione con una forma indefinita di Hermite hanno un determinante la cui norma è un quadrato perfetto.*

Ora se il determinante d non ha un valore *reale negativo* non può essere $\cos\frac{\psi}{2} = 0$ e alla 2ª delle (6) possiamo sostituire quella che se ne ottiene moltiplicandola per $2\cos\frac{\psi}{2}$, il che dà per le richieste condizioni d'involuzione:

$$\text{(7)}\quad \begin{cases} A(b_1^2 + Db_2^2 + \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + Da_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \qquad\qquad + C(a_1^2 + Da_2^2) = 0, \\ (a_1 B_1 + Da_2 B_2 - Ab_1)(\varrho + d_1) + (a_2 B_1 - a_1 B_2 - Ab_2) D d_2 = 0. \end{cases}$$

Nel caso escluso $d = d_1 < 0$ lé condizioni d'involuzione si scrivono evidentemente

$$\text{(7*)}\quad \begin{cases} A(b_1^2 + Db_2^2 - d_1) - 2B_1(a_1 b_1 + Da_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad + C(a_1^2 + Da_2^2) = 0, \\ a_2 B_1 - a_1 B_2 - Ab_2 = 0. \end{cases}$$

Si osserverà che queste equazioni sono lineari rispetto ai coefficienti della forma fondamentale, onde segue subito che ogni forma di Dirichlet, *il cui determinante abbia per norma un quadrato perfetto,* è in involuzione con infinite forme di Hermite. Le forme di Dirichlet, che soddisfano a questa condizione, possono anche caratterizzarsi dicendo che: *Il loro gruppo riproduttivo contiene un sottogruppo di sostituzioni iperboliche.*

E infatti se la forma φ è in involuzione colla F, nel gruppo Φ riproduttivo di F vi ha un sottogruppo ciclico di sostituzioni iperboliche, che riproduce altresì la forma φ. Reciprocamente se la forma di Dirichlet φ ammette nel suo sottogruppo riproduttivo una sostituzione iperbolica $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, che si può supporre a determinante $+1$, nella quale quindi $\alpha + \delta$ sarà reale, potremo sempre determinare una forma di Hermite indefinita F invariabile per la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$. La F sarà in involuzione con φ e il determinante di quest' ultima avrà conseguentemente per norma un quadrato perfetto.

Rileviamo particolarmente il caso in cui la forma fondamentale F sia la forma principale
$$F = [1, 0, -\Delta]$$
a determinante positivo Δ e il determinante d della φ sia reale. Distinguendo i due casi di d positivo o negativo le (7), (7*) danno per le condizioni d'involuzione

$$d = d_1 > 0 \begin{cases} b b_0 + d_1 = \Delta a a_0 \\ b_1 = 0 \end{cases}, \qquad d = d_1 < 0 \begin{cases} b b_0 - d_1 = \Delta a a_0 \\ b_2 = 0 \end{cases}.$$

Dunqne: *Le forme φ di Dirichlet a determinante reale in involuzione colla forma principale* $[1, 0, -\Delta]$ *hanno l'una o l'altra delle espressioni seguenti, secondo che il loro determinante è positivo o negativo:*

$$\text{(A)} \qquad \varphi = \left(a_1 + i a_2 \sqrt{D},\quad i b_2 \sqrt{D},\quad -\Delta(a_1 - i a_2 \sqrt{D})\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \varphi = \left(a_1 + i a_2 \sqrt{D},\quad b_1,\quad \Delta(a_1 - i a_2 \sqrt{D})\right).$$

Vediamo di qui che la ricerca di tutte le forme φ di asseguato determinante reale $\pm m$ (m positivo) in involuzione con $[1, 0, -\Delta]$ equivale alla ricerca di tutte le possibili rappresentazioni del numero m per la forma reale ternaria
$$\Delta(X^2 + DY^2) - DZ^2$$
ovvero per l'altra
$$\Delta(X^2 + DY^2) - Z^2,$$
problema che sappiamo dunque completamente risolvere. Facilmente si potrebbe dimostrare che alla teoria sopra esposta si riconduce altresì l'altro problema del campo ternario: *Determinare il gruppo delle sostituzioni lineari a coefficienti interi riproduttivo della forme ternarie*
$$\Delta(X^2 + DY^2) - DZ^2, \quad \Delta(X^2 + DY^2) - Z^2,$$
ove D, Δ sono interi positivi arbitrarii. Ma di questa come di altre questioni che si collegano alle attuali ricerche non tratteremo in questo luogo.

§ 33.

Condizioni d'ortogonalità.

Affinchè la forma $\varphi = (a, b, c)$ sia ortogonale alla forma fondamentale $F = [A, B, C]$ è necessario e sufficiente che i due punti $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$ indici delle radici di φ si trovino in linea retta col centro del circolo (5) (§ 32) e siano coniugati armonici rispetto al circolo stesso. Ora dalle formole del § precedente, per l'equazione della retta che unisce questi due punti troviamo

$$\left(a_1 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - a_2\sqrt{D} \cos \frac{\psi}{2}\right) \xi - \left(a_1 \cos \frac{\psi}{2} + a_2\sqrt{D} \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}\right) \eta$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - b_2\sqrt{D} \cos \frac{\psi}{2} = 0$$

ed il centro del circolo avendo le coordinate $-\frac{B_1}{A}$, $\frac{B_2\sqrt{D}}{A}$, la prima condizione ci dà

$$\text{(a)} \quad \sqrt{D}(a_2 B_1 - a_1 B_2 - A b_2) \cos\frac{\psi}{2} - (a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1) \operatorname{sen}\frac{\psi}{2} = 0.$$

L'altra che i punti $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$ siano coniugati rispetto al circolo (5) si traduce nell' equazione

$$A(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) + B_1(\xi_1 + \xi_2) - B_2\sqrt{D}(\eta_1 + \eta_2) + C = 0,$$

la quale, sostituendovi i valori effettivi di $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, diventa

$$\text{(b)} \quad A(b_1^2 + D b_2^2 - \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$+ C(a_1^2 + D a_2^2) = 0.$$

Questa ci dimostra che *anche per le forme φ ortogonali ad una forma indefinita di Hermite la norma del determinante deve essere un quadrato perfetto.*

Procedendo colla equazione (a) come nel § precedente diamo alle condizioni d'ortogonalità la forma:

$$\begin{cases} A(b_1^2 + D b_2^2 - \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad\qquad + C(a_1^2 + D a_2^2) = 0, \\ (a_1 B_2 - a_2 B_1 + A b_2)(\varrho + d_1) + (a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1) d_2 = 0 \end{cases}$$

che valgono nel caso generale, mentre se il determinante d della forma φ è reale negativo dobbiamo sostituirvi le altre

$$\begin{cases} A(b_1^2 + D b_2^2 + d_1) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad\qquad + C(a_1^2 + D a_2^2) = 0, \\ a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1 = 0. \end{cases}$$

Rileveremo anche qui il caso particolare che la forma fondamentale F sia la principale $F = [1, 0, -\Delta)$ e il determinante d assegnato delle forme φ sia reale. Troviamo subito per queste forme le espressioni stesse (A), (B) del § precedente colla differenza che nel caso attuale le forme del tipo (A) hanno determinante negativo e quelle del tipo (B) determinante positivo.

§ 34.

Riduzione a forma reale.

Il gruppo Φ rispetto alle cui sostituzioni abbiamo sopra costruita la teoria dell' equivalenza delle forme φ è un gruppo automorfo che lascia invariata la sfera indicatrice della forma fondamentale F ed il suo equatore; esso è quindi riducibile a forma reale. Ora, limitandoci per brevità al caso di $F=[1, 0, -\Delta]$, vogliamo appunto effettuare la riduzione del gruppo Φ e contemporaneamente delle forme φ a forma reale; in tal modo si renderà manifesta la relazione delle presenti ricerche con quelle sviluppate da Fricke nell' ultimo lavoro citato (Annalen Bd. 39). Nelle sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \gamma\end{pmatrix}$ scindiamo ciascun coefficiente nella sua parte reale ed immaginaria, ponendo:

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D}, \quad \beta=\beta_1+i\beta_2\sqrt{D}, \quad \gamma=\gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D},$$
$$\delta=\delta_1+i\delta_2\sqrt{D}.$$

Troviamo così nel gruppo Φ quattro specie di sostituzioni cioè le due specie

$$\left.\begin{array}{l}
\text{I)}\ \begin{pmatrix}\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D}, & \Delta(\gamma_1-i\gamma_2\sqrt{D}) \\ \gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D}, & \alpha_1-i\alpha_2\sqrt{D}\end{pmatrix} \\
\text{II)}\ \begin{pmatrix}\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D}, & -\Delta(\gamma_1-i\gamma_2\sqrt{D}) \\ \gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D}, & -(\alpha_1-i\alpha_2\sqrt{D})\end{pmatrix}
\end{array}\right\} \alpha_1^2+D\alpha_2^2-\Delta(\gamma_1^2+D\gamma_2^2)=1$$

che costituiscono il gruppo riproduttivo di $F=[1, 0, -\Delta]$ ed altre due specie della medesima forma, ove però si ha

$$\alpha_1^2+D\alpha_2^2-\Delta(\gamma_1^2+D\gamma_2^2)=-1,$$

le quali trasformano F nella sua contraria.

Le forme φ sulle quali eseguiamo le sostituzioni di Φ sono delle due specie (§§ 32, 33)

$$\text{(A)}\quad \varphi=(a_1+ia_2\sqrt{D})x^2+2ib_2\sqrt{D}\,xy-\Delta(a_1-ia_2\sqrt{D})\,y^2,$$

$$\text{(B)}\quad \varphi=(a_1+ia_2\sqrt{D})x^2+2b_1xy+\Delta(a_1-ia_2\sqrt{D})\,y^2.$$

Ora se eseguiamo sulle variabili x, y la sostituzione

$$\begin{cases} x = \sqrt{\Delta}\,X - i\sqrt{\Delta}\,Y, \\ y = -X - iY \end{cases}$$

e chiamiamo φ' le forme trasformate, divise per $-2i\sqrt{\Delta}$ nel caso (A) e per $-2\sqrt{\Delta}$ nel caso (B), troviamo rispettivamente:

$$(\mathrm{A}^*)\quad \varphi' = \sqrt{D}(b_2 - a_2\sqrt{\Delta})\,X^2 + 2a_1\sqrt{\Delta}\,XY + \sqrt{D}(b_2 + a_2\sqrt{\Delta})\,Y^2,$$

$$(\mathrm{B}^*)\quad \varphi' = (b_1 - a_1\sqrt{\Delta})\,X^2 - 2a_2\sqrt{D}\sqrt{\Delta}\,XY + (b_1 + a_1\sqrt{\Delta})\,Y^2,$$

dove attualmente il segno del determinante positivo o negativo distingue le forme φ' derivate dalle forme φ in involuzione con F da quelle derivate da forme ortogonali a F. Si osserverà che i coefficienti delle φ' sono reali e contengono le sole irrazionalità $\sqrt{D}$, $\sqrt{\Delta}$. Corrispondentemente il gruppo Φ si trasforma nel gruppo Φ composto dalle sostituzioni reali della forma seguente a determinante $+1$:

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{\Delta}, & \sqrt{D}(\alpha_2 - \gamma_2\sqrt{\Delta}) \\ -\sqrt{D}(\alpha_2 + \gamma_2\sqrt{\Delta}), & \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{II}^*)\qquad \begin{pmatrix} \sqrt{D}(\alpha_2 - \gamma_2\sqrt{\Delta}), & -(\alpha_1 - \gamma_1\sqrt{\Delta}) \\ \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{\Delta}, & \sqrt{D}(\alpha_2 + \gamma_2\sqrt{\Delta}) \end{pmatrix},$$

e dalle sostituzioni della medesima forma il cui determinante però è eguale a -1.

§ 35.

Forme di Hermite in involuzione colla forma fondamentale od ortogonali a questa.

Diciamo che una forma *definita* di Hermite $F' = [A', B', C')$ è in involuzione colla forma fondamentale indefinita $F = [A, B, C]$ se il punto indice di F' (§ 24) giace sulla sfera indicatrice di F. La condizione d'involuzione si trova subito espressa dall' equazione

$$(1)\qquad AC' + A'C - BB_0' - B_0B' = 0,$$

ove il 1° membro, come facilmente si dimostra è un *invariante simultaneo* delle due forme.

Diciamo poi che una forma *indefinita* $F' = [A', B', C']$ è ortogonale a $F = [A, B, C]$ se le due sfere indicatrici di F, F' sono ortogonali. Tale condizione d'ortogonalità si trova ancora espressa dalla (1). Ora se a queste forme F' applichiamo le sostituzioni del solito gruppo Φ, esse si trasformano evidentemente in forme della medesima specie. Dopo di ciò è chiaro il significato da darsi all' *equivalenza rispetto al gruppo* Φ di due tali forme F' e considerazioni affato analoghe a quelle del § 31 serviranno a definire le forme ridotte delle due specie e a dimostrare i teoremi fondamentali della teoria dell' equivalenza.

Ma possiamo riportare immediatamente questa teoria a quella dei §§ precedenti relativa a forme φ con determinante reale mediante le osservazioni seguenti:

1°. *Se le sfere indicatrici di due forme indefinite di Hermite si tagliano, il loro circolo d'intersezione è il circolo indicatore di una forma φ di Dirichlet a determinante reale, in involuzione con ambedue.*

Per le equazioni dei due circoli massimi di queste sfere sul piano $\xi\eta$ abbiamo infatti, se $[A, B, C]$, $[A', B', C']$ sono le due forme:

$$Azz_0 + Bz + B_0z_0 + C = 0,$$
$$A'zz_0 + B'z + B_0'z_0 + C' = 0$$

e i valori di z ai due punti d'intersezione sono quindi le radici dell' equazione di 2° grado

$$\begin{vmatrix} Az + B_0, & Bz + C \\ A'z + B_0', & B'z + C' \end{vmatrix} = 0,$$

ossia le radici della forma di Dirichlet

$$\varphi = \begin{vmatrix} Ax + B_0y, & Bx + Cy \\ A'x + B_0'y, & B'x + C'y \end{vmatrix}$$

che si può scrivere sotto la forma

$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_0} & \frac{\partial F}{\partial y_0} \\ \frac{\partial F'}{\partial x_0} & \frac{\partial F'}{\partial y_0} \end{vmatrix}.$$

La forma φ è un *covariante simultaneo* delle forme F, F' e il suo determinante è reale poichè si ha identicamente

$$(AC' - A'C + B_0B' - BB_0')^2 - 4(AB' - A'B)(B_0C' - B_0'C) =$$
$$= (AC' - A'C + BB_0' - B_0B')^2 - 4(AB_0' - A'B_0)(BC' - B'C).$$

Il circolo indicatore di φ è appunto il circolo d'intersezione delle due sfere indicatrici di F, F'.

Supponiamo ora che F' sia una forma definita in involuzione con F e dimostriamo:

2°. *La forma φ covariante simultaneo di F, F' ha un circolo indicatore che taglia la sfera indicatrice di F ortogonalmente nel punto indice di F'.*

La proprietà da dimostrarsi essendo invariantiva, la verifichiamo nel modo più semplice sottoponendo F, F', φ aduna trasformazione

$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a coefficienti complessi e a determinante $+1$ che cangi la sfera indicatrice di F nel piano $\eta = 0$*). Per le forme trasformate avremo dunque $A = C = 0$, $B = -B_0$, cioè B sarà puramente immaginario e la condizione d'involuzione (1) darà $B' = B_0'$, cioè il coefficiente medio di F' diventa reale. Dopo ciò troviamo per la forma φ

$$\varphi = -B(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)$$

e però, essendo A', B', C' reali e $B'^2 - A'C'$ essendo negativo come determinante della F', le due radici di φ sono coniugate immaginarie, quindi il circolo indicatore di φ è ortogonale al piano $\eta = 0$. Inoltre per le coordinate del punto d'incontro del circolo con questo piano troviamo

$$\xi = -\frac{B'}{A'}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{\sqrt{A'C' - B'^2}}{A'},$$

formole che definiscono appunto l'indice di F'.

Notiamo anche qui il caso in cui si assuma la forma principale $F = [1, 0, -\Delta]$ a forma fondamentale, ove la condizione (1) d'involuzione o di ortogonalità prende semplicemente la forma

$$C' = \Delta A',$$

e indicando con Δ' il determinante di F' si ha

$$B'B_0' - \Delta A'^2 = \Delta'.$$

Nel caso del campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$ ponendo adunque

$$B' = X + iY\sqrt{D}, \quad A' = Z$$

vediamo che la ricerca delle forme F' di assegnato determinante Δ' equivale a quella della rappresentazione del numero Δ' per mezzo della forma ternaria

$$X^2 + DY^2 - \Delta Z^2.$$

Alla presente teoria si può altresì ricondurre il problema di costruire il gruppo riproduttivo di questa forma ternaria.

---

*) È appena necessario avvertire che i coefficienti della sostituzione, come i coefficienti delle forme trasformate, non saranno più interi.