

Über trilinear verwandte Felder als Raumbilder.

(Fortsetzung des Aufsatzes „über das Coincidenzproblem“).

Von Theodor Schmid in Steyr.

In einem V. Artikel über trilineare Verwandtschaft (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 111) gibt Herr Guido Hauck eine „Zusammenfassung und wichtige Specialfälle“ bekannt. Darauf hinweisend erlaube ich mir hier noch einiges über die Bedeutung der Coincidenzlinien und ihrer Bilder — der Kernlinien — mitzutheilen. Im zweiten Abschnitte wird eine Erweiterung des Coincidenzproblemcs behandelt, welche zu einer Fläche dritter Ordnung und einem Complex dritten Grades führt.

Die Verwandtschaft zwischen drei projectiv trilinearen Feldern ist bestimmt durch die drei Hauptgeraden r', s'', t''' , die sechs Kernpunkte $S', T', R'', T'', S''', T'''$ und die drei Kernlinien zweiten Grades, von welchen jede durch ein Paar von gegnerischen Kernpunkten und je einen Eckpunkt des Hauptdreieckes geht. Eine solche Kernlinie gibt die Beziehung zwischen den betreffenden gegnerischen Kernbüscheln an. Durch die Annahme zweier Punktetripel sind die drei Kernlinien bestimmt; durch die Annahme eines Geradentripels bleibt die Wahl zweier Kernlinien beliebig, die dritte Kernlinie ist dann bestimmt.

Bei besonderer Wahl der Kernlinien ergibt sich auch eine besondere Verwandtschaft. Wenn z. B. die gegnerischen Kernbüschel congruent sind, so sind die Kernlinien Kreise oder gleichseitige Hyperbeln, je nachdem die Büschel gleichstimmig oder ungleichstimmig verlaufen.

Wenn die Kernlinien drei Kreise, oder ein Kreis und zwei gl. Hyperbeln sind, so ist die Charakteristik $C = -1$; aber nicht bloß für die trilinearen Hauptreihen, sondern für sämtliche Tripel zugeordneter Punkte ist

$$\frac{S' P'}{P' T'} \cdot \frac{T'' P''}{P'' R''} \cdot \frac{R''' P'''}{P''' S'''} = -1.$$

Wenn die Kernlinien drei gl. Hyperbeln, oder zwei Kreise und eine gl. Hyperbel sind, so ist die Charakteristik $C = +1$; aber nicht bloß für die trilinearen Hauptreihen, sondern für sämtliche Tripel zugeordneter Punkte ist

$$\frac{S' P'}{P' T'} \cdot \frac{T'' P''}{P'' R''} \cdot \frac{R''' P'''}{P''' S'''} = +1.$$

Die unendlich ferne Gerade ist in allen drei Feldern sich selbst zugeordnet und ist daher die Fluchtgerade aller drei Felder. Überdies bildet sie mit den Halbierungsgeraden von je zwei Kernstrecken Tripel von zugeordneten Geraden.

Die Halbierungsgeraden der drei Kernstrecken sind einander zugeordnet und sind zugleich die Fluchtgeraden, da jede von ihnen auch den unendlich fernen Geraden der beiden anderen Felder zugeordnet ist.

Sectiv trilineare Felder sind durch drei Hauptpunkte, sechs Kerngerade und drei Kerncurven zweiten Grades bestimmt, von welchen jede zwei gegnerische Kerngerade und eine Seite des Hauptdreieckes berührt. Sind die gegnerischen Kernreihen congruent, so sind die Kerncurven Parabeln, und die Charakteristik ist $C = -1$.

I. Übertragungen von Grundgebilden.

1. Je zwei Bilder einer Punktreihe g , etwa g' und g''' , sind projectiv. Schneidet die Gerade die Coincidenzlinie L , so liegt der Schnittpunkt von g' und g''' auf der Kernlinie $L'L''$ und die Bilder der Punktreihe sind perspectiv. Gehört die Gerade der Congruenz L an, so ist g' mit g''' vereinigt und die Doppelpunkte der beiden projectiven Reihen liegen auf der Kernlinie. Die Beziehung wird singulär, wenn die Gerade durch einen oder zwei Sehpunkte geht.

2. Je zwei Bilder eines Feldes ε , etwa ε' und ε''' , sind collinear. T'' und R''' sind entsprechende Punkte für die Bilder jeder Ebene als Bilder des Schnittpunktes derselben mit der Augenachse s . Die Schnittpunkte der Ebene ε mit der Coincidenzlinie L ergeben die drei Doppelpunkte der Bildfelder. Diese Doppelpunkte liegen also auf der Kernlinie $L'L''$ und werden als drei von den Schnittpunkten derselben mit jenem Kegelschnitte erhalten, welchen die Bilder eines Büschels P der Ebene ε erzeugen¹⁾.

Zwei oder drei Doppelpunkte sind vereinigt, wenn die Ebene ε durch eine Tangente von L geht, beziehungsweise eine Schmiegungelebene von L ist. Nur wenn die Coincidenzlinie L ausartet, können die Bilder ε' und ε''' perspectiv sein. So sind die Bilder der Ebenen des Büschels m (oder auch des Büschels l)²⁾ perspectiv mit $m' = m'''$ als Collineationsachse. Wenn eine Coincidenzebene ζ vorhanden ist, so sind die Bilder aller Ebenen perspectiv mit $T'' = R'''$ als Centrum. Die ersten und dritten Bilder der Ebenen

¹⁾ Der vierte Schnittpunkt ist der Schnittpunkt von $P' T''$ und $P''' R'''$ als Bilder jenes Strahles, welcher die Augenachse s trifft.

²⁾ I. Aufsatz, n^o. 2 und 3.

des Büschels v , wobei v'' eine Fluchtgerade ist, sind affine Felder; ist jedoch überdies die Kernlinie ein Kreis, so ergeben sich conforme Felder. Zwei von den Ebenen des Büschels v haben dann congruente erste und dritte Bilder, nämlich zwei von den Geraden der Augenebene ω , welche die Gerade v treffen, ergeben congruente Punktreihen. Wenn alle drei Kernlinien Kreise sind (oder ein Kreis und zwei gl. Hyperbeln) und $S'T' + R''T''' + R'''S'' = 0$ ist, so gibt es eine Ebene mit drei congruenten Bildern¹⁾. Die Beziehung wird singulär, wenn die Ebene durch einen, zwei oder alle drei Sehpunkte geht. Die Bilder des Feldes ω sind projectiv trilineare Reihen auf den Hauptgeraden r' , s'' , t''' .

3. Denkt man sich eine Gerade p der Bezugsebene δ als erstes und drittes Bild einer Geraden g und weist so jeder Geraden von δ eine solche von L zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung der Congruenz L auf die Ebene δ .

Wenn die Gerade p ein Strahlenbüschel beschreibt, so entspricht ihm in der Congruenz L eine Kegel- oder Regelfläche zweiten Grades, je nachdem der Mittelpunkt des Büschels auf der Kernlinie liegt oder nicht. Betrachtet man einen Punkt der Bezugsebene als $P' = Q'''$, so kann der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen zu $T''P'$ und $R'''Q'''$ als $P''' = Q'$ aufgefasst werden. Die Bilder $g' = g'''$ der Verbindungsgeraden von P und Q ergeben involutorische Punktreihen. Wählt man den Pol von $T''R'''$ in Bezug auf die Kernlinie als $P' = Q'''$, so wird $P''' = Q'$ auf der Geraden $T''R'''$ unbestimmt, also bilden die Verbindungsgeraden $g' = g'''$ ein Strahlenbüschel.

Die Bilder der zweifach schneidenden Erzeugenden jenes Hyperboloides, welches durch die Coincidenzlinie L und jenen Sehstrahl aus T bestimmt ist, dessen erstes Bild durch R''' und dessen unbestimmtes drittes Bild durch den Pol von $T''R'''$ in Bezug auf die Kernlinie geht, ergeben involutorische Punktreihen.

4. Wenn die Gerade p eine Curve zweiter Classe umhüllt, so entspricht ihr in der Congruenz L eine Regelfläche vierten Grades mit L als Doppellinie. Die Verbindungsgerade der beiden Bilder eines Punktes P ist das erste und dritte Bild der einzigen Geraden, welche durch P geht und der Congruenz L angehört. Einer Curve zweiter Classe c_g , welche von zwei projectiven Punktreihen g' und g''' erzeugt wird, entspricht daher eine Regelfläche vierten Grades, welche L als Doppellinie und die Gerade g als einfache Linie besitzt.

Sie hat das dreifach zu zählende Ebenenbüschel g als Doppel-torse; die Curve c_g ist ihre erste und dritte Contour. Für die Bilder der Ebenen eines Büschels mit der Achse g er-

¹⁾ Hauck, V Art., p. 232.

geben die Doppelpunkte eine cubische Punktinvolution auf der Kernlinie $L'L''$; die Doppelgeraden bilden eine cubische Tangenteninvolution auf der Curve c_g . Wenn die Gerade g die Coincidenzlinie L in einem Punkte trifft, so gehen die cubischen Involutionen in quadratische über, und die Regelfläche vierten Grades zerfällt in einen Kegel und ein Hyperboloid.

5. Wählt man die Bilder A' und A''' irgend eines Punktes A , und fasst man A''' als erstes Bild B' eines andern Punktes B und A' als drittes Bild C''' eines Punktes C auf, so muss B''' auf einem gewissen Strahle des Kernbüschels R''' und C' auf einem Strahle des Büschels T' liegen. Betrachtet man nun den Schnittpunkt dieser beiden Strahlen als B''' und C' , so bestimmen die drei Punkte A, B, C eine Ebene, für welche das erste und dritte Bild cyklisch projective Felder sind. Wählt man den Punkt A auf jener Geraden k , welche die Tangente der Kernlinie bei R''' als erstes Bild und jene bei T' als drittes Bild hat, so wird $B''' = C'$ auf der Geraden $T'R'''$ unbestimmt und kann auch auf der Verbindungsgeraden $A'A'''$ gewählt werden, auf welcher daher cyklisch projective Reihen entstehen. Die beiden Punktreihen k' und k''' erzeugen eine Curve zweiter Classe c_k , welche die Kernlinie bei T' und R''' berührt.

Die ersten und dritten Bilder der Ebenen des Büschels, dessen Achse k die Tangente der Kernlinie bei R''' als erstes Bild und jene bei T' als drittes Bild hat, sind cyklisch projective Felder; die ersten und dritten Bilder der Erzeugenden jener Regelfläche vierten Grades, welche L als Doppellinie und k als einfache Linie hat, sind cyklisch projective Reihen und umhüllen die von k' und k''' erzeugte Curve zweiten Grades.

6. Das Projectionssystem des Monge zeigt besondere Verhältnisse. Es ergeben sich symmetrische Involutionen auf den Ordnern (das sind die Geraden, welche zu einer Bildachse normal sind), beziehungsweise auf den Geraden, welche zu $m' = m'' = m'''$ normal sind. Die ersten und dritten Bilder der Ebenen, welche zur Geraden m normal sind, ergeben cyklisch projective Felder. Da nämlich die Vereinigung der ersten und dritten Bildebene auch durch Drehung von 120° um die Gerade m bewerkstelligt werden kann, so ergeben die gleichseitigen Dreiecke, welche auf einer zu m normalen Ebene liegen und auf m ihren Mittelpunkt haben, cyklisch projective erste und dritte Bilder. Reelle cyklisch projective Reihen gibt es hier nur auf der unendlich fernen Geraden ($k' = k'''$).

7. Die Bilder eines Strahlenbündels P sind projectiv trilineare Strahlenbüschel P', P'', P''' , deren Kernstrahlen durch die sechs Kernpunkte der Verwandtschaft gehen. Da sich diese Büschel

durch Projection aus den trilinearen Hauptreihen r', s'', t''' ergeben, so erhält man ihre Charakteristik, indem man jene der Reihen durch das Tripelverhältnis $\frac{S' P' T'' P'' R''' P'''}{P' T'' \cdot P'' R''' \cdot P''' S''}$ und durch -1 dividiert.¹⁾

II. Erweiterung des Coincidenzproblemcs.

Unter Voraussetzung jener Übertragungsart, wie sie im zweiten Abschnitt des früheren Aufsatzes benützt wurde, seien nun zwei Aufgaben gestellt:

1. „Es sind Punkte aufzusuchen, für welche die drei Bilder auf einer Geraden liegen“.²⁾

Denkt man sich eine Gerade p der Bezugsebene δ als Vereinigung des zweiten und dritten Bildes (g'', g''') einer Geraden g , ferner dieselbe Gerade p als Vereinigung des dritten und ersten Bildes (h''', h') einer Geraden h , endlich auch als Vereinigung des ersten und zweiten Bildes ($i' i''$) einer Geraden i , so wird jene Gerade von den Bildern g', h'', i''' in drei Punkten P', P'', P''' geschnitten, welche die Bilder des Schnittpunktes P von g, h und i sind.

In drei projectiv trilinearen Feldern gibt es auf jeder Geraden ein Tripel von zugeordneten Punkten.

Wenn p die unendlich ferne Gerade f von δ ist, so gehen die Bilder g', h'', i''' in die drei Fluchtgeraden u', v'', w''' über, und F', F'', F''' sind die Bilder des Schnittpunktes F von u, v, w .

In drei projectiv trilinearen Feldern gibt es drei unendlich ferne, zugeordnete Punkte, nämlich die unendlich fernen Punkte der drei Fluchtgeraden.³⁾

Man überträgt nun das ganze (aus den Geraden p bestehende) Strahlenfeld δ aus dem neuen Sehpunkte R_1 auf die Bildebene α , aus S_1 auf β und aus T_1 auf γ , ferner verbindet man diese drei neuen Felder beziehungsweise mit R, S und T , so entstehen drei collineare Bündel R, S, T . Je zwei dieser Bündel erzeugen eine der drei Coincidenzlinien und die zugehörige Congruenz. Alle drei Bündel erzeugen eine Fläche φ dritter Ordnung, nämlich je drei entsprechende Ebenen ergeben drei Schnittgerade g, h, i und einen Schnittpunkt P , dessen Bilder auf der Geraden p liegen.

Die Punkte, für welche die drei Bilder auf einer Geraden liegen, bilden eine Fläche dritter Ordnung, welche durch die drei Coincidenzlinien geht.

¹⁾ G. Hauck, IV. Artikel, p. 34.

²⁾ In dieser Aufgabe ist die frühere enthalten: „Es sind die Punkte zu suchen, für welche zwei Bilder vereinigt sind.“

³⁾ G. Hauck, II. Artikel, §. 2.

Weiset man jedem Punkte P der Fläche φ die Gerade p der Ebene δ zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung der Fläche φ auf der Ebene δ . Den Punkten R, S, T entsprechen die Verbindungsgeraden von R'' mit R''' , bzw. S' mit S''' und T' mit T''' ; dem Gegenpunkte F entspricht die unendlich ferne Gerade f von δ .

Jedem Strahlenbüschel der Ebene δ entspricht die von den zugehörigen drei Ebenenbüscheln erzeugte Linie dritter Ordnung des zweiten Systems von φ . Die drei Bilder einer solchen Linie sind das Erzeugnis des Strahlenbüschels und je eines projectiven Tangentensystems dreier Curven zweiter Classe, also Linien dritter Ordnung mit dem Mittelpunkt des Strahlenbüschels als gemeinsamem Doppelpunkt.

Jeder ebenen Linie dritter Ordnung von φ entspricht eine Curve dritter Classe von δ , welche von den drei collinearen Feldern $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ durch jene Geraden erzeugt wird, auf welchen drei zugeordnete Punkte liegen. Diese Punkte selbst bilden drei collineare Linien dritter Ordnung. Der Schnittlinie von φ mit der Ebene ω entspricht insbesondere jene Curve dritter Classe, welche von den trilinearen Reihen r', s', t''' durch die Geraden erzeugt wird, auf welchen zwei zugeordnete Punkte liegen. Zwei solche Curven dritter Classe haben neun gemeinsame Tangenten, von welchen drei den gemeinsamen Punkten der beiden Linien von φ entsprechen; die übrigen sechs sind Hauptgerade der Abbildung auf δ , indem ihnen nicht bloß ein Punkt, sondern eine Gerade von φ entspricht, nämlich eine Gerade, durch welche drei entsprechende Ebenen der Bündel R, S und T gehen. Die drei Coincidenzlinien haben also sechs gemeinsame Sehnen.

Es gibt im allgemeinen keinen Punkt, wohl aber sechs Gerade, für welche alle drei Bilder vereinigt sind.

Jedem Strahlenbüschel, welches einen der fünfzehn Schnittpunkte der sechs Hauptgeraden als Mittelpunkt hat, entspricht eine gerade Punktreihe von φ . Den sechs Curven zweiter Classe, von welchen eine je fünf der sechs Hauptgeraden berührt, entsprechen ebenfalls gerade Punktreihen von φ . Einer Coincidenzlinie (sowie jeder Linie dritter Ordnung des ersten Systems von φ) entspricht eine Curve fünfter Classe von δ , welche die sechs Hauptgeraden als Doppeltangenten hat. Diese Curve ergibt sich als Erzeugnis der Kernlinie und des fremden Bildes der Coincidenzlinie.

Wenn die drei Kernlinien 1, 2, 3 oder 4 gemeinsame Punkte haben, so besitzt die Fläche φ 1, 2, 3 oder 4 Knotenpunkte, und für diese Punkte sind alle drei Bilder vereinigt. Bei beliebiger Wahl der sechs Kernpunkte können die Kernlinien höchstens zwei gemeinsame Punkte haben. Durch Annahme dieser beiden Tripel von vereinigten Bildern ist die Verwandtschaft vollkommen bestimmt. Sind je zwei zugeordnete Kernpunkte (R'' und R''' ;

S' und S''' ; T' und T''') vereinigt, so dass sie die Eckpunkte des Hauptdreieckes bilden, dann können sich alle drei Kernlinien in eine einzige Linie zweiter Ordnung vereinigen. In diesem Falle sind für die Punkte der einzigen Coincidenzlinie und für die Geraden der zugehörigen Congruenz alle drei Bilder vereinigt; für jeden anderen Punkt des Raumes liegen die drei Bilder auf einer Geraden (der Pascal'schen Linie eines der Kernlinie eingeschriebenen Sechseckes), welche das erste, zweite und dritte Bild jener Geraden ist, die durch den Punkt geht und der Congruenz angehört. Für die Hauptreihen r', s', t''' ist die Charakteristik $C = -1$ (Menelaos).

Beim Projectionssystem des Monge besteht die Fläche φ aus den beiden Coincidenzebenen und aus der unendlich fernen Ebene.

2. „Es sind die Geraden¹⁾ aufzusuchen, für welche die drei Bilder durch einen Punkt gehen“.

Denkt man sich einen Punkt Q der Bezugsebene δ als die Bilder A', B', C'' der Punkte A, B, C einer Geraden g , und legt man durch Q eine beliebige Gerade g' als erstes Bild der Geraden g , so ergeben sich B' und C' auf g' . Nun können die Bilder B''' und C'' gefunden werden, welche mit C''' und B'' verbunden das zweite und dritte Bild (g'' und g''') einer Geraden g liefern, deren Bilder durch den Punkt Q gehen. Dreht sich g' um den Punkt Q , so beschreiben die Punkte B', C', B''', C'' projective Punktreihen auf den Strahlen $S'B', T'C', S'''B''', T''C''$ und daher g'' und g''' projective Strahlenbüschel.

In drei projectiv trilinearen Feldern bilden die Tripel von zugeordneten Geraden, welche durch einen Punkt gehen (oder welche zu einander parallel sind), drei projective Strahlenbüschel.

Jedem Punkte Q von δ sind die drei einander entsprechenden Strahlen RA, SB, TC der oben behandelten, collinearen Bündel R, S, T zugeordnet. Alle Geraden, welche solche drei Strahlen schneiden, bilden eine Regelfläche zweiten Grades q ; die Bilder dieser Geraden gehen durch den Punkt Q . Den sämtlichen Punkten der Ebene δ entspricht ein Bündel von Flächen zweiten Grades, und die Geraden der dabei in Betracht kommenden Regelscharen bilden einen Complex dritten Grades²⁾. Nämlich die durch einen Punkt P gehenden Geraden bilden eine Kegelfläche dritter Ordnung, welche von den trilinearen Ebenenbüscheln PR, PS, PT durch jene Geraden erzeugt wird, durch welche drei zugeordnete Ebenen gehen. Die auf einer Ebene ε liegenden Complexstrahlen bilden eine Curve dritter Classe, welche von den drei als Schnitte der Bündel R, S, T sich ergebenden, collinearen Feldern durch jene Geraden erzeugt wird, auf welchen

¹⁾ Unter diesen Geraden sind auch jene, für welche zwei Bilder vereinigt sind.

²⁾ Reye, Geometrie der Lage, II. Abth., p. 231. 2. Aufl.

drei zugeordnete Punkte liegen. Die drei Bilder dieser Curve dritter Classe sind collinear und erzeugen eine Linie dritter Ordnung durch die Punkte, in welchen drei entsprechende Gerade zusammen treffen.

Jeder geraden Punktreihe p der Ebene δ entspricht die von den zugehörigen drei Strahlenbüscheln (R, S, T) erzeugte Congruenz vom Bündel- und Feldgrade 3 im Complexe.¹⁾

Die Geraden, für welche die drei Bilder durch einen Punkt gehen, bilden einen Complex dritten Grades, welcher die Sehnencongruenzen der drei Coincidenzlinien enthält, und für welchen R, S und T drei singuläre Punkte sind.

Besitzt die Fläche φ Knotenpunkte, so sind dieselben singuläre Punkte des Complexes. Haben die Bündel R, S, T selbstentsprechende Ebenen, so sind dieselben singuläre Ebenen des Complexes. Wenn eine Coincidenzebene vorhanden ist, so zerfällt der Complex in einen linearen und einen quadratischen.

Beim Projectionssystem von Monge ergeben sich drei lineare Complexe, deren Träger die Geraden m, r_∞ und t_∞ sind.

Nachträgliche Bemerkung. In meinem ersten Aufsätze „über das Coincidenzproblem“ wäre an einigen Stellen etwas einzuschalten. Auf Seite 163, $n^0. 2$: Die beiden Bündel R und T erzeugen außer dem Strahlenfelde, welches auf der selbstentsprechenden Ebene liegt, eine Congruenz vom Feldgrade 2. Auf Seite 164, $n^0. 3$: Die Bündel erzeugen außer den beiden Strahlenfeldern, welche auf den selbstentsprechenden Ebenen liegen, eine Congruenz vom Feldgrade 1. Auf Seite 165 ist bei $n^0. 4$ anzufügen: Die Congruenz geht in das Strahlenfeld ζ und in den linearen Complex, dessen Träger s ist, über.

Als ich unlängst Gelegenheit fand, die früheren Jahrgänge dieser Monatshefte durchzusehen, bemerkte ich erst, dass Herr W. Fiedler, von welchem der Grundgedanke des Coincidenzproblems überhaupt herrührt, bereits vor mir einen Aufsatz über dieses Problem veröffentlichte (III. Jahrg., Seite 193), in welchem er den besonderen Fall der Übertragung nach Monge mit gewohnter Meisterschaft behandelte und auch Andeutungen über den allgemeinen Fall machte. Meine ausführlichere Untersuchung dürfte dennoch nicht überflüssig sein.

¹⁾ Sturm, Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade, Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 101, S. 188.