

34.

Zur Theorie der Anziehung und der Wärme.(Von Herrn *Jacob Amsler*, Privatdocenten an der Universität in Zürich.)

Man bezeichne durch dw das Element einer geschlossenen Oberfläche F , durch α , β , γ die Winkel, welche ihre (nach aussen gerichtete) Normale mit den Coordinaten-Axen bildet. Ferner setze man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ [U', U] &= \frac{\partial U'}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U'}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) &= \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.\end{aligned}$$

Alsdann findet folgende, leicht zu verificirende Gleichung Statt:

$$A. \quad \int U' \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) dw = \iiint U' \delta U dx dy dz + \iiint [U', U] dx dy dz.$$

Die Integrationen erstrecken sich über die Oberfläche F und den davon eingeschlossenen Raum. Die Gröfsen U' und U sind ganz willkürlich; nur müssen sie und ihre ersten Differentialquotienten innerhalb der Grenzen der Integration stetige Functionen von x , y , z sein.

Unter denselben Bedingungen, und wenn ausserdem k_1 , k_2 , k_3 stetige Functionen von x , y , z sind, gilt die allgemeine Gleichung

$$\begin{aligned}(B.) \quad & \int U' \left(k_1 \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + k_2 \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + k_3 \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma \right) dw \\ &= \iiint U' \left\{ \frac{\partial \left(k_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(k_3 \frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ &+ \iiint \left\{ k_1 \frac{\partial U'}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + k_2 \frac{\partial U'}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + k_3 \frac{\partial U'}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right\} dx dy dz.\end{aligned}$$

Die Grenzen der Integration sind dieselben, wie bei der (A.).

Beide Gleichungen lassen sich leicht verallgemeinern, den Fall, daß statt einer einzigen geschlossenen und zusammenhängenden Oberfläche F , deren mehrere gegeben sind. Man darf nur jedes Integral durch eine Summe von ähnlichen Integralen ersetzen, welche sich respective über die verschie-

denen Oberflächen und die davon eingeschlossenen Räume erstrecken. Zu den bekannten zahlreichen, wichtigen Anwendungen der Gleichungen (A.) und (B.) wollen wir im Folgenden einige neue hinzufügen.

I.

Liouville (Additions aux connaissances des tems, pour l'an 1845)

gibt einen sehr einfachen Beweis des Satzes, daß die Gleichungen, welche die Bedingungen des *electrischen Gleichgewichts* ausdrücken, nur einer einzigen Lösung fähig sind. In der Theorie des inducirten *Magnetismus* giebt es einen ähnlichen Satz. Es seien $M_1, M_2, \dots M_m$ beliebige, der gegenseitigen Einwirkung ausgesetzte Körper, welche die Fähigkeit haben, unter dem Einfluß magnetischer Kräfte vorübergehend magnetisch zu werden. Es sei V das Potential der festen magnetischen Kräfte, Q als Potential des durch Induction erzeugten Magnetismus. Nach *Poisson (Mém. de l'Institut. T. VI et VII.)* findet sich Q aus folgender Gleichung:

$$(1.) \quad Q = - \sum_1^m \iiint k_i \left[Q_i + V_i, \frac{1}{\varrho_i} \right] dx_i dy_i dz_i.$$

Die Integrationen im zweiten Gliede erstrecken sich über die von den Körpern $M_1, M_2, \dots M_m$ eingenommenen Räume. Zur Abkürzung wurde

$$\varrho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

gesetzt; Q_i, V_i sind dieselben Functionen von x_i, y_i, z_i wie Q und V von x, y, z . Der Coëfficient k hängt von dem größern oder geringern Vermögen des Körpers M ab, magnetisch zu werden; man könnte ihn deshalb füglich den magnetischen *Inductionscoëfficienten* nennen. Die Gröfse k ändert sich im allgemeinen mit x, y, z , ist aber immer *endlich* und *positiv*. Überdies darf man sie als eine innerhalb jedes der gegebenen Körper stetige Function betrachten. Denn, würde bei einem Körper diese Bedingung nicht erfüllt und wäre k längs einer beliebigen Oberfläche f discontinuirlich, so könnte man den Körper als aus zwei oder mehreren Körpern bestehend betrachten, die sich längs der Oberfläche f berühren. Innerhalb jedes dieser Körper wäre nun k stetig.

Der angekündigte Satz lautet:

„Es giebt nur eine einzige Function Q , welche der Bedingungs-
gleichung des magnetischen Gleichgewichts (1.) genügt.“

Beweis. Man setze, es gebe zwei Functionen Q und Q' , welche der Gleichung (1.) genügen. Dann muß

$$Q' = - \sum_1^m \iiint k_\lambda \left[Q'_\lambda + V_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda} \right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$$

sein. Subtrahirt man diese Gleichung von der (1.) und setzt $W = Q - Q'$, so erhält man

$$(2.) \quad W = - \sum_1^m \iiint k_\lambda \left[W_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda} \right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß $W = 0$ die einzige reelle Function ist, welche dieser Gleichung genügt.

Aus (2.) folgt

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \sum_1^m \iiint k_\lambda \left[W_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda} \right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

oder, was Dasselbe ist:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \sum_\mu^m \iiint k_\mu \left[W_\mu, \frac{1}{\varrho_\mu} \right] dx_\mu dy_\mu dz_\mu.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2$ durch eine Summe von sechsfachen Integralen ausgedrückt. Auf dieselbe Weise bilde man $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2$ und setze die gefundenen Werthe in den Ausdruck

$$(3.) \quad P = \iiint [W, W] dx dy dz \\ = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right\} dx dy dz.$$

Die Integration erstrecke sich über den Raum einer unendlich großen Kugel. Führt man die angedeuteten Multiplicationen unter den Integralzeichen aus, so nimmt P , wie leicht zu sehen, folgende Gestalt an:

$$(4.) \quad P = \sum_1^m \iiint k_\lambda [W_\lambda, g] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

wenn zur Abkürzung

$$g = \sum_\mu^m \iiint k_\mu [W_\mu, h] dx_\mu dy_\mu dz_\mu \text{ und}$$

$$h = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda}, \frac{1}{\varrho_\mu} \right] dx dy dz$$

gesetzt wird.

Die Werthe von h und g lassen sich in endlicher Form angeben. Man setze in (A.) $U' = \frac{1}{\varrho_\lambda}$ und betrachte U als Potential einer unendlich kleinen

Kugel, deren Mittelpunkt die Coordinaten x_μ, y_μ, z_μ hat. Ihre Dichtigkeit sei $= 1$, ihr Volumen $= u$. Alsdann erhält man

$$\int \frac{1}{\varrho_\lambda} \frac{\partial U}{\partial n} dw = \iiint \frac{1}{\varrho_\lambda} \delta U dx dy dz + \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda}, U \right] dx dy dz.$$

Nach einem bekannten Satze ist für alle Punkte *aufserhalb* des kleinen Raums u , $\delta U = 0$; dagegen für Punkte *innerhalb* desselben ist $\delta U = -4\pi$. Also ergibt sich

$$\iiint \frac{1}{\varrho_\lambda} \delta U dx dy dz = -4\pi \iiint \frac{dx dy dz}{\varrho_\lambda} = -\frac{4\pi u}{\varrho_{\lambda,\mu}},$$

wenn $\varrho_{\lambda,\mu} = \sqrt{(x_\lambda - x_\mu)^2 + (y_\lambda - y_\mu)^2 + (z_\lambda - z_\mu)^2}$ ist. In den beiden übrigen Integralen kann man $U = \frac{u}{\varrho_\mu}$ setzen, welches

$$\int \frac{1}{\varrho_\lambda} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\varrho_\mu} dw + \frac{4\pi}{\varrho_{\lambda,\mu}} = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda}, \frac{1}{\varrho_\mu} \right] dx dy dz$$

gibt.

Erwägt man nun, daß das erste Integral, über die Oberfläche einer unendlich grossen Kugel ausgedehnt, verschwindet, so folgt

$$h = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda}, \frac{1}{\varrho_\mu} \right] dx dy dz = \frac{4\pi}{\varrho_{\lambda,\mu}}.$$

Hiemit geht der Werth von g in

$$g = 4\pi \sum_1^m \iiint k_\mu \left[W_\mu, \frac{1}{\varrho_{\lambda,\mu}} \right] dx_\mu dy_\mu dz_\mu$$

über. Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (2.), so zeigt sich, daß

$$g = -4\pi W_\lambda,$$

also, wegen (4.),

$$P = -4\pi \sum_1^m \iiint k_\lambda [W_\lambda, W_\lambda] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda.$$

ist. Diese Gleichung, verbunden mit (3.), giebt schliesslich:

$$(5.) \quad 0 = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \\ + 4\pi \sum_1^m \iiint k_\lambda \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_\lambda} \right)^2 \right\} dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda.$$

Eine Summe von reellen Quadraten, multiplicirt mit reellen und positiven Grössen, kann aber nur verschwinden, wenn jeder Term für sich verschwindet. Also muß nothwendig

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

für alle Punkte des Raums sein, und folglich, wegen (2.), auch $W = 0$. Also hat man identisch $Q = Q'$; was zu beweisen war.

Übrigens sieht man leicht, daß auch kein imaginärer, von 0 verschiedener Ausdruck für W der Gleichung (2.) genügt. Es sei nämlich $W = W' + iW''$, wo W' und W'' reell sind, so zieht man aus der Gleichung (2.):

$$W' = - \sum_1^m \iiint k_\lambda \left[W'_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda} \right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \quad \text{und}$$

$$W'' = - \sum_1^m \iiint k_\lambda \left[W''_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda} \right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

woraus, wie vorher, $W' = 0$, $W'' = 0$ folgt.

Diesen Beweis habe ich in nicht wesentlich anderer Gestalt schon früher veröffentlicht (Neue Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft von 1848). Er vereinfacht sich etwas, wenn man die Körper M_1 , M_2 , ... M_m als homogen betrachtet, da alsdann die Gleichung (1.) die Form

$$(6.) \quad Q = - \sum_1^m k_\lambda \int \frac{\partial(V_\lambda + Q_\lambda)}{\partial n_\lambda} \frac{dw_\lambda}{\varrho_\lambda}$$

annimmt.

Herr *Kirchhoff* machte mich darauf aufmerksam, daß sich in diesem Falle die Gleichung (5.) einfacher folgendermaßen herleiten läßt. Es ist

$$(7.) \quad W = - \sum_1^m k_\lambda \int \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n} \right) \frac{dw_\lambda}{\varrho_\lambda};$$

woraus, nach einer bekannten Eigenschaft der Oberflächenpotentiale,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)' - \left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)'' = 4\pi k \frac{\partial W}{\partial n}$$

folgt, wenn die Werthe von $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)$ für Punkte unendlich nahe an der Oberfläche, außerhalb und innerhalb, resp. durch $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)'$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)''$ bezeichnet werden. Also ist auch

$$(8.) \quad \sum_1^m \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n} \right)' dw_\lambda = \sum_1^m (1 + 4\pi k_\lambda) \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n} \right)'' dw_\lambda.$$

Mit Hülfe der Gleichung (A.) zeigt sich aber leicht, daß

$$- \sum_1^m \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n} \right)' dw_\lambda = \iiint [W, W] dx dy dz,$$

$$\sum_1^m \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n} \right)'' dw_\lambda = \sum_1^m \iiint [W_\lambda, W_\lambda] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \quad \text{ist.}$$

Die dreifachen Integrationen in diesen Gleichungen erstrecken sich in der ersten über den ganzen unendlichen Raum *aufserhalb* der Körper M_1, M_2, \dots , in der letzten über den Raum *innerhalb*. Verbindet man sie mit der Gleichung (8.), so erhält man die Gleichung (5.), woraus man wie oben weiter schließt.

Übrigens läßt sich dieses Verfahren auch, mit einiger Modification, auf die allgemeine Form der Gleichung (2.) ausdehnen.

II.

Einfacher noch läßt sich der analoge Satz in der Theorie der *Wärme* nachweisen.

Die Temperatur u eines beliebigen Puncts im Innern eines festen Körpers ist als Function der Zeit t vollkommen bestimmt, wenn folgende Data bekannt sind:

1) Die Temperatur des Körpers, zur Zeit $t=0$, als Function der Coordinaten, $u_{t=0} = f(x, y, z)$.

2) Die Temperatur der Umgebung, als Function

$$v = \varphi(x, y, z, t)$$

der Coordinaten der Oberfläche und der Zeit.

3) Die innere Leitungsfähigkeit des Körpers. Diese kann von einem Punct zum andern, und im selben Puncte, nach den verschiedenen Richtungen hin verschieden sein. Sie sei k_1 nach der Richtung der x Axe, k_2 und k_3 nach der Richtung der y und z Axe. k_1, k_2, k_3 sind als gegebene Functionen von x, y, z zu betrachten. Eben so

4) Die äußere Leitungsfähigkeit h , und

5) Die spezifische Wärme η . Zur Vereinfachung sei dieselbe auf die Einheit des Volumens bezogen, statt, wie gewöhnlich, auf die Einheit der Masse.

Die Temperatur u wird als Function der Coordinaten und der Zeit durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(1.) \quad \eta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(k_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z},$$

$$(2.) \quad k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + k_3 \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + h \psi(u, v) = 0,$$

$$(3.) \quad u_{t=0} = f(x, y, z).$$

Die erste dieser Gleichungen gilt für alle Punkte im *Innern* des Körpers, die zweite für die Punkte der *Oberfläche*. α, β, γ haben dieselbe Bedeutung wie oben. Die Größen η, k_1, k_2, k_3, h sind ihrer Natur nach *positiv*; ausserdem betrachten wir sie als unabhängig von u und, mit Ausnahme von h , als stetige Functionen von x, y, z . Die Function $\psi(u, v)$ ist so beschaffen, daß für $u > u', \psi(u, v) > \psi(u', v)$, also immer

$$(4.) \quad (u - u')(\psi(u, v) - \psi(u', v)) \geq 0$$

ist. In der Regel setzt man $\psi(u, v) = u - v$. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

„Es gibt nur eine Function u , welche die Bedingungen (1, 2 und 3.) „gleichzeitig erfüllt.“

Beweis. Man setze wieder die Möglichkeit zweier Lösungen u und u' des Problems. Macht man $u - u' = w$, so erhält man, in Folge der vorstehenden Gleichungen:

$$(5.) \quad \eta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial(k_1 \frac{\partial w}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(k_2 \frac{\partial w}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(k_3 \frac{\partial w}{\partial z})}{\partial z},$$

$$(6.) \quad k_1 \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + k_2 \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + k_3 \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma + h\varphi = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\varphi = \psi(u, v) - \psi(u', v)$$

gesetzt ist. Die erste Gleichung gilt für alle Punkte im *Innern*, die zweite für Punkte der *Oberfläche*. Ausserdem hat man für alle Punkte im Innern:

$$(7.) \quad w = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Macht man in der Gleichung (B.), $U = U' = w$, und wendet die Gleichungen (5.) und (6.) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & - \int h w \varphi dw \\ &= \iiint \eta w \frac{\partial w}{\partial t} dx dy dz + \iiint \left\{ k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \end{aligned}$$

oder, wenn man η als von t unabhängig betrachtet:

$$(8.) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \left\{ \int h w \varphi dw + \iiint \left(k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right\},$$

wo $p = \iiint \eta w^2 dx dy dz$ ist.

Der in der Parenthese enthaltene Ausdruck ist positiv, wenn u und u' , also auch w reell ist. Denn nach (4.) ist $h w \varphi$ eine positive Gröfse und das letzte Integral in (8.) besteht aus einer Summe reeller Quadrate, multiplicirt

mit positiven Coëfficienten. Die Seite rechts der Gleichung (8.), d. h. der Differentialquotient von p , nach t genommen, ist daher *negativ*, wenn er von 0 verschieden ist, welches im übrigen auch der Werth von w sein mag. Hieraus folgt, dafs wenn t wächst, die Function p immer abnehmen mufs, wenigstens nie zunehmen kann. Aber für $t=0$ ist $w=0$, für alle Werthe von x, y, z , über welche die Integrationen in der Gleichung (8.) ausgedehnt sind; also ist $p=0$. Da aber p mit wachsendem t nicht zunehmen und, als Summe von reellen Quadraten, multiplicirt mit positiven Coëfficienten, auch nicht negativ werden kann, so folgt, dafs für jeden Werth von t , $p=0$ sein mufs. Aber aus

$$p = \int \eta w^2 dx dy dz = 0$$

folgt, dafs identisch $w=0$, also $u=u'$ ist. Das Problem läfst also *nur eine* Lösung zu.

Ganz wie in der vorigen Nr. läfst sich nun weiter zeigen, dafs auch kein von 0 verschiedener imaginärer Ausdruck von w den Gleichungen (5, 6, 7.) gleichzeitig genügt.

In der Theorie der Wärme wendet man zuweilen den Satz an, dafs, wenn v , mit wachsendem t , sich einer constanten Grenze v_0 nähert, v_0 ebenfalls die Grenze von u ist, für $t=\infty$. Ich glaube nicht, dafs bis jetzt ein Beweis dieses Satzes gegeben worden ist; man begnügte sich, einen Erfahrungssatz der Physik auf ein rein analytisches Problem zu übertragen. Der strenge Beweis ergiebt sich aber sehr leicht mit Hülfe der Gleichung (8.). Es sei z. B. von Anfang an $v=v_0=\text{Const.}$, so werden offenbar die Gleichungen (1 und 2.) erfüllt, wenn man $u=v_0$ setzt. Es sei ferner u' die Function, welche den Gleichungen (1, 2, 3.) gleichzeitig genügt. Offenbar werden die Gleichungen (5 und 6.), also auch die Gleichung (8.) erfüllt, wenn man $w=v_0-u'$ setzt. Da nun der Differentialquotient von $p=\frac{1}{2}\int \eta (v_0-u')^2 dx dy dz$, nach t genommen, beständig negativ ist, so lange w endlich ist, so folgt, dafs sich für $t=\infty$, $w=(v_0-u')$ der Grenze 0 für alle Werthe von x, y, z nähern mufs; d. h. es wird $u_{t=\infty}=v_0$.

Die hier angestellten Betrachtungen lassen sich leicht verallgemeinern. Man kann z. B. setzen, dafs k_1, k_2, k_3, h, η Functionen von t und selbst von u seien. Diese Functionen sind aber gewissen Bedingungen unterworfen, wenn der bewiesene Satz gelten soll. Man kann ferner annehmen, dafs statt eines einzigen Körpers ein System von Körpern gegeben ist, mit beliebigen Anfangstemperaturen, und dafs sie in einem diathermalen Mittel von beliebig

veränderlicher Temperatur, der gegenseitigen Einwirkung, theils durch Strahlung, theils in Folge von Berührung ausgesetzt sind. Sind die Gröfsen k oder η längs einer Fläche discontinuirlich, so findet für die Punkte derselben eine Gleichung von der Form (2.) Statt.

Dafs das Problem des Gleichgewichts der Temperaturen *nur eine* Lösung zuläfst, folgt als Corollar aus dem Vorigen. Der selbständige Beweis liefse sich auf die Gleichung

$$0 = \int h w \varphi dw + \iiint \left\{ k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

gründen; aus welcher folgt, dafs für alle Punkte im Innern:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

also $w = \text{Const.}$ ist. Ausserdem folgt $w = 0$ für alle Punkte der Oberfläche, also, da w eine stetige Function ist, $\text{Const.} = 0$, oder $u = u'$.

III.

Man setze, es sei in der Gleichung (2.) der vorigen Nr. $\psi(u, v) = u - v$. Bekanntlich kann die Bestimmung der Function u , welche den Gleichungen (1, 2, 3.) genügt, auf die Bestimmung einer andern Function U zurückgeführt werden, welche folgenden Gleichungen genügt:

$$(1.) \quad \eta \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \left(k_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(k_3 \frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial z},$$

$$(2.) \quad k_1 \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + k_2 \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + k_3 \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma + hU = 0.$$

$$(3.) \quad U_{t=0} = F(x, y, z).$$

Die erste Gleichung gilt für Punkte im *Innern*, die zweite für Punkte der *Oberfläche*. Beiden kann gleichzeitig durch einen Ausdruck von der Form

$$aPe^{-\mu t}$$

genügt werden. a ist eine willkürliche Constante, P findet sich aus der partiellen Differentialgleichung

$$(4.) \quad -\mu \eta P = \frac{\partial \left(k_1 \frac{\partial P}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k_2 \frac{\partial P}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(k_3 \frac{\partial P}{\partial z} \right)}{\partial z}.$$

Die Constante μ ist eine Wurzel der Gleichung

$$(5.) \quad k_1 \frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + k_2 \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta + k_3 \frac{\partial P}{\partial z} \cos \gamma + hP = 0.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen transcendent und hat unendlich viele Wurzeln. Bezeichnet man dieselben durch $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m, \dots$ und deutet die von ihnen abhängigen Gröfßen durch die nämlichen Indices an, so hat die allgemeinste Function, welche den Gleichungen (1 und 2.) genügt, die Form

$$(6.) \quad U = \sum a_m P_m e^{-\mu_m t}.$$

Die Constanten a sind so zu bestimmen, dafs die Gleichung (3.) erfüllt wird, d. h. so, dafs für alle Punkte im Innern des Körpers,

$$(7.) \quad F(x, y, z) = \sum a_m P_m$$

ist. Die Möglichkeit, auf diesem Wege die Aufgabe zu lösen, hängt von folgenden Bedingungen ab.

1) Für $t = \infty$ darf U nicht unendlich und auch zu keiner periodischen Function von t werden. Denn nach der vorigen Nr. mufs sogar $U_{t=\infty} = 0$ sein. Es ist also nöthig, dafs die Gleichung (5.) reelle und positive Wurzeln habe. Falls es imaginäre oder negative Wurzeln giebt, müssen die davon abhängigen Glieder aus dem Ausdruck (6.) wegfallen.

2) Die Lösung der allgemeinen Aufgabe setzt voraus, dafs eine ganz willkürlich gegebene Function $F(x, y, z)$ sich innerhalb bestimmter Grenzen in eine Reihe von der Form (7.) entwickeln lasse. Hiezu ist nöthig, dafs die Reihe unendlich viele Glieder, also die Gleichung (5.) unendlich viele reelle und positive Wurzeln habe. Dafs Dieses auch *genügend* sei, mufs besonders nachgewiesen werden.

Poisson zeigt, dafs *alle* Wurzeln der Gleichung (5.) *reell* sind. (*Théor. math. de la chaleur, p. 178.*) Dafs sie auch *positiv* sind, weiset er nur in besonderen Fällen aus der Form der Gleichung nach. (*Ibid. p. 294.*) *Poisson* geht von der Gleichung

$$\iiint \eta P P_1 dx dy dz = 0$$

aus, in welcher P und P_1 den Wurzeln $\mu = \lambda^2$ und $\mu_1 = \lambda_1^2$ entsprechen. Diese Gleichung gilt aber nur, wenn λ^2 und $\eta \lambda_1^2$ verschieden sind. Nemlich es ist allgemein $(\lambda^2 - \lambda_1^2) \iiint \eta P P_1 dx dy dz = 0$. Setzt man nun $\lambda = g + g' \sqrt{-1}$, $\lambda_1 = g - g' \sqrt{-1}$, so folgt, dafs

$$2gg' \sqrt{-1} \iiint (G^2 + G'^2) \eta dx dy dz = 0$$

sein mufs. Hieraus folgt aber nur, dafs $gg' = 0$ sein, d. h., dafs λ^2 *reell* sein mufs; dafs $g' = 0$, folglich λ^2 *positiv* sein mufs, folgt auf diesem Wege nicht.

Indessen kann der Beweis auch allgemein gegeben werden.

Es seien nemlich μ und μ_1 zwei Wurzeln der Gleichung (5.), und P und P_1 die entsprechenden Integrale der Gleichung (4.). In der Gleichung (B.) setze man

$$U = e^{-\mu t} P, \quad U' = P,$$

so erhält man, wenn man den Factor $e^{-\mu t}$ wegläßt und die Gleichungen (4 und 5.) anwendet:

$$(8). \quad 0 = -\mu \iiint \eta P P_1 dx dy dz \\ + \iiint \left\{ k_1 \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial y} + k_3 \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial z} \right\} dx dy dz + \int h P P_1 dw.$$

Nun nehme man an, die Gleichung (5.) habe eine Wurzel von der Form $\mu = \mu' + \mu'' \sqrt{-1}$, wo μ' und μ'' reell sind, so müßte, da sich P als reelle Function von μ , x , y , z voraussetzen läßt, eine zweite Wurzel von der Form $\mu_1 = \mu' - \mu'' \sqrt{-1}$ vorkommen. Diese Werthe in P und P_1 substituirt, würden

$$P = G + G' \sqrt{-1}, \quad P_1 = G - G' \sqrt{-1}$$

geben, und dadurch geht die Gleichung (8.) in

$$0 = -(\mu' + \mu'' \sqrt{-1}) \iiint \eta (G^2 + G'^2) dx dy dz + \int (G^2 + G'^2) h dw \\ + \iiint \left\{ k_1 \left(\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial x} \right)^2 \right) + k_2 \left(\left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial y} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + k_3 \left(\left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial z} \right)^2 \right) \right\} dx dy dz$$

über. In dieser Gleichung sind alle Glieder reell, außer den in μ'' multiplicirten. Diese also müssen besonders verschwinden; d. h. es muß

$$0 = \sqrt{-1} \mu'' \iiint \eta (G^2 + G'^2) dx dy dz,$$

also $\mu'' = 0$, $\mu = \mu_1$ und folglich $G' = 0$, $P = P_1 = G$ sein. Die obige Gleichung wird demnach zu

$$0 = -\mu \iiint \eta P^2 dx dy dz + \int P^2 h dw \\ + \iiint \left\{ k_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz.$$

Diese Gleichung kann aber offenbar nur bestehen, wenn μ *positiv* ist. Denn wäre μ negativ, so bestände ihr zweites Glied aus einer Summe reeller und positiver Größen, und könnte also nicht verschwinden. *Alle* Wurzeln der Gleichung (5.) müssen also *reell* und *positiv* sein.

Zürich, den 5ten Januar 1851.