# Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen[1].

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

## § 1.

## Summatorische Folgen.

Die verschiedenen Summationsmethoden für divergente Reihen lassen sich auf ein gemeinsames Prinzip zurückführen, wobei der folgende Satz eine entscheidende Rolle spielt.

Satz 1. *Sei* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ *eine Folge von Funktionen der reellen Veränderlichen* $x$, *und sei*

$$\lim_{x=\infty} \varphi_\nu(x) = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{A}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| \leqq M, \tag{B}$$

*wo* $M$ *von* $x$ *nicht abhängt. Wenn nun*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

*eine konvergente Reihe ist und den Wert* $s$ *hat, so konvergiert auch die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x),$$

*und es ist*

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = s.$$

*Dabei spielt es keine Rolle, ob man den Grenzprozeß* $x \to \infty$ *in stetiger Weise oder mit Beschränkung auf eine gewisse Auswahl von* $x$-*Werten, etwa ganzzahlige* $x$, *ausführt. In letzterem Fall brauchen die Funktionen* $\varphi_\nu(x)$ *auch nur für diese Auswahl definiert zu sein.*

---

[1]) Vgl. meine Note „Zur Theorie der divergenten Reihen", Math. Zeitschrift 6 (1920), S. 158—160 und die Berichtigung hierzu auf S. 302—303 dieser Abhandlung

Man beweist den Satz leicht durch Abelsche partielle Summation. Setzt man nämlich

$$(1)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = s_n,$$

so ist identisch

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = s\varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1}(s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] + (s_n - s)\varphi_n(x).$$

Beachtet man nun, daß wegen der Voraussetzung (B) der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty}[\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)]$$

existiert, und daß $\lim\limits_{n=\infty} s_n = s$ ist, so folgt aus der vorigen Gleichung, indem man zur Grenze $n = \infty$ übergeht:

$$(2)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = s\varphi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty}(s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)];$$

denn die rechts stehende Reihe ist ja absolut konvergent. In (2) steht nun links die oben mit $\Phi(x)$ bezeichnete Funktion. Da außerdem $|s_\nu - s|$ für genügend große $\nu$ beliebig klein wird, etwa

$$|s_\nu - s| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für} \quad \nu \geqq p,$$

so ist

$$\left|\sum_{\nu=p}^{\infty}(s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)]\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{\nu=p}^{\infty}|\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

und aus (2) folgt dann, indem man beiderseits noch $s$ subtrahiert:

$$|\Phi(x) - s| = \left|s[\varphi_0(x) - 1] + \sum_{\nu=0}^{\infty}(s_\nu - s)[\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)]\right|$$

$$\leqq |s| \cdot |\varphi_0(x) - 1| + \sum_{\nu=0}^{p-1}|s_\nu - s| \cdot |\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da dies für alle $x$ gilt, so folgt weiter mit Rücksicht auf die Voraussetzung (A) für genügend große $x$:

$$|\Phi(x) - s| < \varepsilon,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Eine Funktionenfolge $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots,$ die den Bedingungen von Satz 1 genügt, nennen wir eine *Folge summatorischer Funktionen* oder kürzer eine *summatorische Folge*.

Sei nun

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

eine beliebige Reihe, konvergent oder divergent. Wenn dann die Reihe

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x)$$

konvergiert, und wenn der Grenzwert

$$(5) \qquad \lim_{x=\infty} \Phi(x) = \sigma$$

existiert[2]), so nennen wir die Reihe (3) *mit Hilfe der summatorischen Folge* $\varphi_\nu(x)$ *summierbar, und erteilen ihr den Wert* $\sigma$:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sigma.$$

Wenn die Reihe (3) selbst konvergiert und im gewöhnlichen Sinne den Wert $s$ hat, so ist nach Satz 1 auch der Grenzwert $\sigma$ vorhanden, und es ist $\sigma = s$. Unsere Definition der Reihensumme erfüllt also die von Herrn Hardy als Konsistenzbedingung bezeichnete Forderung, daß nämlich die Definition im Fall der Konvergenz nicht zu einem der gewöhnlichen Definition widersprechenden Resultat führen darf.

Aus unserer Definition folgen sofort ein paar elementare Rechenregeln:

Satz 2. *Sind die Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$$

*mit Hilfe der summatorischen Folge* $\varphi_\nu(x)$ *summierbar, so gilt dasselbe von den Reihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} c\, a_\nu,$$

*und zwar ist*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \pm \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c\, a_\nu = c \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu.$$

Der Beweis ist trivial.

[2]) Die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ schließen wir aus.

## § 2.

## Fallende summatorische Folgen. — Beispiele.

Die Bedingung (B) von Satz 1 ist insbesondere dann erfüllt, wenn

$$(\mathrm{B}^*) \qquad 0 \leqq \varphi_{\nu+1}(x) \leqq \varphi_\nu(x) \leqq 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Eine solche summatorische Folge nennen wir *fallend.*

Wir wollen jetzt einige Beispiele von fallenden summatorischen Folgen angeben, wobei sich insbesondere zeigen wird, daß die bisher in der Literatur vorkommenden Summationsmethoden fast alle in unserer allgemeinen Definition enthalten sind[3]).

Beispiel 1. Arithmetische Mittel.

Sei $x$ positiv ganzzahlig, und

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\nu}{x} & \text{für} \quad \nu \leqq x \\ 0 & \text{für} \quad \nu > x. \end{cases}$$

Die Bedingungen (A) und (B$^*$) sind offenbar erfüllt; es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \frac{x-\nu}{x} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{x-1}}{x},$$

wo mit $s_0, s_1, \ldots$ die Partialsummen (vgl. (1)) bezeichnet sind. Daher

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{x-1}}{x}.$$

Beispiel 2. Methode von Cesàro und Knopp[4]).

Sei $x$ positiv ganzzahlig, und

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+k-1}\,\dfrac{x-2}{x+k-2} \cdots \dfrac{x-\nu}{x+k-\nu} & \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq x, \\ 0 & \text{für} \quad \nu > x, \end{cases}$$

wo $k$ eine positive Konstante ist; für $k = 1$ kommt das vorige Beispiel. Auch hier sind die Bedingungen (A) und (B$^*$) augenscheinlich erfüllt. Es ist

[3]) Nicht darin enthalten ist, soviel ich sehe, die Methode von Stieltjes. Aber auch diese läßt sich subsumieren, wenn man Folgen summatorischer Funktionen von zwei Veränderlichen in Betracht zieht. Wir sehen davon ab.

[4]) E. Cesàro, Sur la multiplication des séries, Bulletin des sciences mathématiques, sér. 2, **14** (1890), S. 114—120. — K. Knopp, Multiplikation divergenter Reihen, Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, 7 (1907), S. 1—12.

$$\Phi(x)=\sum_{\nu=0}^{x} a_\nu \varphi_\nu(x)=\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu\left[\varphi_\nu(x)-\varphi_{\nu+1}(x)\right]+s_x\varphi_x(x)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \frac{x}{x+k-1}\,\frac{x-1}{x+k-2}\cdots\frac{x-\nu}{x+k-\nu-1}\,\frac{k}{x}$$

$$=\frac{\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \binom{k+x-\nu-2}{x-\nu-1}}{\binom{k+x-1}{x-1}},$$

und daher

$$\sigma=\lim_{x=\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{x-1} s_\nu \binom{k+x-\nu-2}{x-\nu-1}}{\binom{k+x-1}{x-1}},$$

wie Cesàro (für ganzzahlige $k$) und Knopp (für beliebige $k$) angegeben haben.

Beispiel 3. Der Abelsche Stetigkeitssatz.

Sei

$$\varphi_\nu(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu.$$

Offenbar sind wieder die Bedingungen (A) und (B*) erfüllt, und es ist

$$\Phi(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu.$$

Daher, wenn $\frac{x}{x+1}=t$ gesetzt wird,

$$\sigma=\lim_{t=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu,$$

wobei $t$ wachsend gegen 1 wandern muß.

Beispiel 4. Exponentielle Summation von Borel[5]).

Sei

$$\varphi_\nu(x)=\frac{1}{\nu!}\int_0^x e^{-t}t^\nu dt.$$

Die Bedingung (A) ist hier offenbar erfüllt; ferner folgt durch partielle Integration:

$$\varphi_\nu(x)=\frac{1}{(\nu+1)!}e^{-x}x^{\nu+1}+\varphi_{\nu+1}(x),$$

---

[5]) E. Borel, Fondements de la théorie des séries divergentes sommables, Journal de mathématiques pures et appliquées, sér. 5, 2 (1896), S. 103–122. — Mémoire sur les séries divergentes, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, sér. 3, 16 (1899), S. 9–131. — Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

woraus man leicht erkennt, daß auch die Bedingung ($B^*$) erfüllt ist. Man erhält zunächst:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \int_0^x e^{-t} t^\nu dt.$$

Wenn aber diese Reihe für alle (beliebig großen) $x$ konvergiert, so wird ihr allgemeines Glied mit wachsendem $\nu$ (bei festem $x$) beliebig klein, und wegen

$$\int_0^x e^{-t} t^\nu dt > \int_0^x e^{-x} t^\nu dt = e^{-x} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$$

ist daher erst recht

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} = 0.$$

Das gilt für beliebig große $x$, woraus man leicht sieht, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu$$

beständig konvergiert. Folglich darf man oben in $\Phi(x)$ die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen und erhält:

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu \right) dt.$$

Daher schließlich

$$\sigma = \int_0^\infty e^{-t} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu \right) dt,$$

also die Borelsche Definitionsformel.

Beispiel 5. Verallgemeinerte exponentielle Summation.

Setzt man

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(k\nu + \delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu + \delta - 1} dt,$$

wo $k$ und $\delta$ positive Konstanten sind (für $k = \delta = 1$ ergibt sich das vorige Beispiel), so erhält man

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu + \delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu + \delta - 1} dt = \int_0^x e^{-t} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu + \delta)} t^{k\nu + \delta - 1} \right) dt;$$

denn die Vertauschung von Integration und Summation läßt sich genau wie vorhin begründen. Also ist

$$\sigma = \int_0^\infty e^{-t} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu + \delta)} t^{k\nu + \delta - 1} \right) dt.$$

Zur Rechtfertigung ist nur zu zeigen, daß

$$\varphi_\nu(x) \geqq \varphi_{\nu+1}(x)$$

ist, da ja die anderen Bedingungen für fallende summatorische Folgen offenbar erfüllt sind. Nun ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)\,\varphi_\nu(x) &= \int_0^\infty e^{-u}u^{k-1}du \cdot \int_0^x e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}dt \\
&\int_0^\infty \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_0^x e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}dt\Big)du \\
&> \int_0^x \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_0^{x-u} e^{-t}t^{k\nu+\delta-1}dt\Big)du \\
&= \int_0^x \Big(e^{-u}u^{k-1}\int_u^x e^{u-v}(v-u)^{k\nu+\delta-1}dv\Big)du.
\end{aligned}$$

Also durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)\,\varphi_\nu(x) > \int_0^x \Big(e^{-v}\int_0^v u^{k-1}(v-u)^{k\nu+\delta-1}du\Big)dv.$$

Das innere Integral läßt sich aber sofort auf eine Betafunktion zurückführen und hat den Wert

$$\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(k\nu+\delta)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\,v^{k\nu+k+\delta-1},$$

so daß die vorige Ungleichung übergeht in:

$$\varphi_\nu(x) > \frac{1}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^{-v}\,v^{k\nu+k+\delta-1}\,dv = \varphi_{\nu+1}(x). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Beispiel 6. Methode von Le Roy[6]).

Sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)}, \quad t = \frac{x}{x+1}.$$

Die Bedingung (A) ist hier offenbar erfüllt; ebenso die erste und dritte der Ungleichungen ($B^*$). Aber auch die zweite ist erfüllt; denn es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x) &= \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\Gamma(\nu t+t+1)}{\Gamma(\nu+2)} > \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{\Gamma(\nu t+2)}{\Gamma(\nu+2)} \\
&= \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)}\cdot\Big(1-\frac{\nu t+1}{\nu+1}\Big) \geqq 0.
\end{aligned}$$

[6]) E. Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, sér. 2, 2 (1900), S. 317—430.

Somit bilden die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ eine fallende summatorische Folge. Es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)},$$

und daher

$$\sigma = \lim_{t=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{\Gamma(\nu t+1)}{\Gamma(\nu+1)},$$

wo $t$ wachsend gegen 1 wandern muß.

Beispiel 7. Sei $\varphi_\nu(x) = \frac{x}{x+\nu}$. Die Bedingungen (A) und (B$^*$) sind offenbar erfüllt, und es ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\nu};$$

daher

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+\nu}.$$

Beispiel 8. Sei $\varphi_0(x) = 1$ und für $\nu \geqq 1$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1},$$

wo $k$ eine positive Zahl ist (für $k=1$ erhält man das vorige Beispiel). Hier sind die Bedingungen (A) und (B$^*$) ebenfalls erfüllt, und man erhält:

$$\Phi(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1},$$

$$\sigma = a_0 + \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{x}{x+k} \frac{x+1}{x+k+1} \cdots \frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1}.$$

Beispiel 9. Sei $f(x)$ eine für alle positiven $x$ definierte positive, monoton wachsende Funktion, und

$$\lim_{x=0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = 1.$$

Ferner sei $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ eine monoton nach Null abnehmende Folge positiver Zahlen. Dann bilden augenscheinlich die Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = f(\vartheta_\nu x)$$

eine summatorische Folge, und man erhält:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu f(\vartheta_\nu x),$$

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu f(\vartheta_\nu x).$$

Die Glieder der Reihe $\Phi(x)$ werden hier absolut um so kleiner, die Aussicht auf Konvergenz und Brauchbarkeit der Methode also um so größer, je rascher die Folge $\vartheta_\nu$ gegen Null konvergiert.

Beispiel 10. Sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}.$$

Die Bedingungen (A) und (B*) sind wieder erfüllt. Es ist zunächst

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{x(x+1)\ldots(x+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} t^\nu\, dt.$$

Wenn aber diese Reihe für beliebig große $x$ konvergiert, so sieht man leicht, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu$$

eine beständig konvergente Potenzreihe ist. Daher kann man in $\Phi(x)$ die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen und erhält:

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt.$$

Folglich

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt.$$

Beispiel 11. Mit $\varphi_\nu(x)$ ist auch, wie sofort zu sehen, $[\varphi_\nu(x)]^k$ eine fallende summatorische Folge, wenn $k$ irgendeine positive Zahl. Wendet man das etwa auf das erste Beispiel an, so erhält man die Methode von M. Rieß[7]). Die Anwendung auf das vierte Beispiel gibt mit $k=2$

$$\varphi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu!)^2} \int_0^x e^{-t} t^\nu\, dt \cdot \int_0^x e^{-u} u^\nu\, du = \frac{1}{(\nu!)^2} \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} (tu)^\nu\, dt\, du.$$

Daher ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu!)^2} \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} (tu)^\nu\, dt\, du$$

$$= \int_0^x \int_0^x e^{-t-u} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu!)^2} (tu)^\nu\right) dt\, du;$$

[7]) M. Rieß, Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, **152** (1911), S. 1651–1654.

die Vertauschung von Integration und Summation rechtfertigt sich genau wie im Beispiel 4.

Nach dieser Methode kann z. B. die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \nu!\, z^{\nu},$$

sobald $\Re(z) \geqq 0$ ist, summiert werden. Man erhält

$$\Phi(x) = \int_0^x \int_0^x e^{-t-u-ztu}\, dt\, du.$$

Also

$$\sigma = \lim_{x=\infty} \Phi(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t-u-ztu}\, dt\, du,$$

oder wenn man die Integration nach $t$ ausführt:

$$\sigma = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{1+zu}\, du.$$

Diese Beispiele mögen genügen; weitere lassen sich leicht bilden.

## § 3.

## Abhängigkeit des Reihenwertes von der summatorischen Folge.

Nach unserer Definition hängt der Wert einer divergenten Reihe außer von den Reihengliedern auch von der gewählten summatorischen Folge ab. Und zwar ist diese Abhängigkeit nicht nur eine begriffliche, sondern in hohem Maße auch eine effektive, indem sich der Wert einer Reihe mit der summatorischen Folge in weitem Umfang ändern kann. Beispielsweise ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}$$

mit Hilfe der fallenden summatorischen Folge

$$\varphi_{2\nu}(x) = \varphi_{2\nu+1}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

summierbar und hat den Wert 0. Mit Hilfe der Folge

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_{2\nu-1}(x) = \varphi_{2\nu}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

ist sie ebenfalls summierbar, hat aber den Wert 1; mit Hilfe der dritten Folge

$$\varphi_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\nu}$$

hat sie den Wert $\frac{1}{2}$. Allgemeiner beweisen wir jetzt

Satz 3. *Die Glieder der divergenten Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *seien reell, und die Folge der Partialsummen* $s_0, s_1, \ldots$ *sei beschränkt. Setzt man dann*

$$\liminf_{\nu=\infty} s_\nu = g, \quad \limsup_{\nu=\infty} s_\nu = G,$$

*und ist* $\gamma$ *eine beliebige Zahl des Intervalls* $g \leqq \gamma \leqq G$, *so gibt es fallende summatorische Folgen, mit deren Hilfe die Reihe summierbar ist und den Wert* $\gamma$ *hat.*

Aus der Folge der Partialsummen läßt sich eine Teilfolge $s_{\lambda_0}, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots$ herausheben mit dem Grenzwert $g$, ebenso eine Teilfolge $s_{\mu_0}, s_{\mu_1}, s_{\mu_2}, \ldots$ mit dem Grenzwert $G$. Ist dann $\nu$ irgendein Index, so gibt es einen kleinsten Index $\varrho$ und einen kleinsten Index $\sigma$ derart, daß

$$\nu \leqq \lambda_\varrho, \quad \nu \leqq \mu_\sigma$$

ist; wir setzen

$$\varrho = \varrho(\nu), \quad \sigma = \sigma(\nu).$$

Offenbar ist

$$\varrho(\nu+1) \geqq \varrho(\nu), \quad \sigma(\nu+1) \geqq \sigma(\nu) \tag{6}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varrho(\nu) = \infty, \quad \lim_{\nu=\infty} \sigma(\nu) = \infty. \tag{7}$$

Sind nun $\alpha, \beta$ zwei reelle Zahlen, und zwar

$$\alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0,$$

wobei jedoch nicht beidemal Gleichheit statthat, so sei

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\alpha \sum\limits_{\lambda=\varrho(\nu)}^{\infty} t^\lambda + \beta \sum\limits_{\lambda=\sigma(\nu)}^{\infty} t^\lambda}{(\alpha+\beta) \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} t^\lambda}, \quad t = \frac{x}{x+1}. \tag{8}$$

Augenscheinlich ist $0 < \varphi_\nu(x) \leqq 1$, und wegen (6) auch $\varphi_{\nu+1}(x) \leqq \varphi_\nu(x)$. Außerdem beweist man leicht, daß $\varphi_\nu(x)$ für $x \to \infty$, das ist $t \to 1$, dem Grenzwert 1 zustrebt, und somit bilden die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ eine fallende summatorische Folge. Wir wollen sie auf unsere Reihe anwenden. In der Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)] + s_n \varphi_n(x)$$

kann man, da wegen (7) $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(x) = 0$ ist, und da die $s_\nu$ nach Voraussetzung beschränkt sind, den Grenzprozeß $n \to \infty$ durchführen und erhält:

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu [\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)].$$

Nach der Definition von $\varphi_\nu(x)$ ist aber $\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x) = 0$, außer wenn in einer der Ungleichungen (6) das Größerzeichen gilt, wenn also $\nu$ gleich einem $\lambda_\varrho$ oder einem $\mu_\sigma$ ist. Man erhält danach

$$(9) \qquad \Phi(x) = \frac{\alpha \sum\limits_{\varrho=0}^{\infty} s_{\lambda_\varrho} t^\varrho + \beta \sum\limits_{\sigma=0}^{\infty} s_{\mu_\sigma} t^\sigma}{(\alpha+\beta) \sum\limits_{\varrho=0}^{\infty} t^\varrho} = \frac{\alpha \Omega_1(t) + \beta \Omega_2(t)}{(\alpha+\beta)\Omega_3(t)}.$$

Nun erkennt man leicht[8]), weil $\lim\limits_{\varrho=\infty} s_{\lambda_\varrho} = g$, $\lim\limits_{\sigma=\infty} s_{\mu_\sigma} = G$ ist:

$$\lim_{t=1} \frac{\Omega_1(t)}{\Omega_3(t)} = g, \qquad \lim_{t=1} \frac{\Omega_2(t)}{\Omega_3(t)} = G,$$

so daß aus (9) folgt:

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{\alpha g + \beta G}{\alpha + \beta}.$$

Die rechte Seite stellt aber bei geeigneter Wahl von $\alpha$, $\beta$ jede Zahl $\gamma$ des Intervalles $g \leqq \gamma \leqq G$ dar, und damit ist Satz 3 bewiesen.

## § 4.

## Beständige summatorische Folgen.

Mit der im vorigen Paragraphen behandelten Vielwertigkeit einer Reihe hängt es zusammen, daß oft zwei so nahe verwandte Reihen wie

$$(10) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

$$(11) \qquad 0 + a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

mit Hilfe derselben summatorischen Folge summierbar sind, aber verschiedene Werte haben. Mit Hilfe der summatorischen Folge

$$\varphi_{2\nu}(x) = \varphi_{2\nu+1}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu$$

ist beispielsweise

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 0,$$

$$0 + 1 - 1 + 1 - \dots = 1.$$

Da es nun eine durchaus wünschenswerte Rechenregel ist, daß die Reihen (10) und (11) nie verschiedene Werte haben, und daß auch durch Vorsetzen von beliebig vielen, etwa $p$ Nullen sich der Wert nicht ändert, ergibt sich, daß unsere Summationstheorie etwas zu allgemein ist. Wir schränken sie ein durch die Definition:

---

[8]) Vgl. § 83, Hilfssatz 1 meines Buches: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin 1913.

*Eine summatorische Folge* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ *heißt* ***beständig****, wenn die Grenzwerte*

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+p}(x),$$

*so oft sie beide existieren, einander gleich sind.*

In der Tat wird durch Beschränkung auf beständige summatorische Folgen der obige Übelstand vermieden. Denn es ist ja

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} + a_p + a_{p+1} + \ldots = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x),$$

$$0 + 0 + \ldots + \quad 0 \quad + a_0 + \quad a_1 \quad + \ldots = \lim_{x=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+p}(x),$$

so daß die beiden Reihensummen jetzt einander gleich sind. Allgemeiner beweist man sofort

Satz 4. *Wenn man bei einer Reihe, die mit Hilfe einer* ***beständigen*** *summatorischen Folge summierbar ist und den Wert $s$ hat, eine endliche Zahl von Gliedern an beliebigen Stellen hinzufügt oder wegläßt, und wenn die neue Reihe mit Hilfe derselben Folge ebenfalls summierbar ist, so hat sie den Wert* $1 \pm c$, *wo $c$ die Summe der hinzugefügten oder weggelassenen Glieder ist.*

Durch Beschränkung auf *beständige* summatorische Folgen wird auch die Vielwertigkeit einer Reihe erheblich eingeschränkt. Wenn z. B. die geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

mit Hilfe einer beständigen summatorischen Folge summierbar ist, so hat sie stets den Wert $\frac{1}{1-z}$. In der Tat, bezeichnet man ihren Wert zunächst mit $\sigma$, so ist auch

$$\sigma = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu = 1 + z \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = 1 + z\sigma,$$

also $\sigma = \frac{1}{1-z}$, w. z. b. w.

Es dürfte schwer sein, ein allgemeines Kriterium dafür anzugeben, daß eine summatorische Folge beständig ist. Es soll aber jetzt gezeigt werden, daß das bei den meisten Beispielen des § 2 der Fall ist.

Satz 5. *Die in den Beispielen* 1, 2, 3, 7, 8 *angegebenen summatorischen Folgen, ebenso die Folge des Beispiels* 9, *falls man* $\vartheta_\nu = \vartheta^\nu$

*wählt* $(0 < \vartheta < 1)$, *endlich die in Beispiel* 11 *erwähnte* ***Rießsche*** *Folge sind beständig.*

*Wenn nämlich mit ihrer Hilfe eine der beiden Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$
$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

*summierbar ist, so ist es auch die andere, und beide haben den gleichen Wert.*

Zum Beweis setzen wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x) = \Phi(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_{\nu+1}(x) = \Omega(x). \tag{12}$$

Dann ist zu zeigen, daß, wenn von den beiden Grenzwerten

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x), \quad \lim_{x=\infty} \Omega(x) \tag{13}$$

der eine existiert, stets auch der andere existiert, und daß dann beide einander gleich sind. Das ergibt sich aber sofort aus den folgenden Identitäten, die man ohne weiteres verifiziert:

Im Fall von Beispiel 1 ist

$$\Omega(x) = \frac{x-1}{x} \Phi(x-1).$$

Im Fall von Beispiel 2 ist

$$\Omega(x) = \frac{x-1}{x+k-1} \Phi(x-1).$$

Im Fall von Beispiel 3 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+1} \Phi(x).$$

Im Fall von Beispiel 7 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+1} \Phi(x+1).$$

Im Fall von Beispiel 8 ist

$$\Omega(x) = \frac{x}{x+k} \Phi(x+1).$$

Im Fall von Beispiel 9 mit $\vartheta_\nu = \vartheta^\nu$ ist

$$\Omega(x) = \Phi(\vartheta x).$$

Im Fall der Rießschen Folge (Beispiel 11) ist

$$\Omega(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^k \Phi(x-1).$$

Satz 6. *Die in den Beispielen 4, 5 angegebenen summatorischen Folgen sind beständig. Wenn nämlich mit ihrer Hilfe von den beiden Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$
$$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

*die erste summierbar ist, so ist es auch die zweite, und beide haben den gleichen Wert.*

Es ist zu zeigen, daß allemal die Gleichung gilt

$$\lim_{x=\infty} \Omega(x) = \lim_{x=\infty} \Phi(x), \tag{14}$$

sobald der rechts stehende Grenzwert existiert. Nun ist im Fall von Beispiel 4

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\Big) dt,$$

$$\Omega(x) = \int_0^x e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1}\Big) dt.$$

Also, wenn man $\Phi(x)$ partiell integriert,

$$\Phi(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} x^{\nu+1} + \int_0^x e^{-t}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1}\Big) dt = \Omega'(x) + \Omega(x).$$

Hieraus folgt aber in der Tat die Gleichung (14), sobald der rechts stehende Grenzwert existiert (vgl. die in [1]) angeführte Note).

Im Fall des Beispiels 5 ist

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+\delta-1} dt,$$

$$\Omega(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+k+\delta)} \int_0^x e^{-t} t^{k\nu+k+\delta-1} dt.$$

Schreibt man in der ersten dieser Formeln $\varrho$ statt $x$ und führt statt $t$ eine neue Integrationsveränderliche $v$ durch die Gleichung $t = \varrho - v$ ein, so folgt:

$$\Phi(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^{\varrho} e^{v-\varrho} (\varrho - v)^{k\nu+\delta-1} dv.$$

Da hier das Integral, wie leicht zu sehen, kleiner als $\varrho^{k\nu+\delta} : (k\nu + \delta)$ ist, konvergiert die Reihe in jedem endlichen Intervall von $\varrho$ gleichmäßig. Multipliziert man also mit $e^{\varrho}(x-\varrho)^{k-1}$ und integriert dann nach $\varrho$ von 0 bis $x$, so darf das gliedweise geschehen, und es ergibt sich:

$$\int_0^x \Phi(\varrho)e^\varrho(x-\varrho)^{k-1}d\varrho = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)}\int_0^x\left((x-\varrho)^{k-1}\int_0^\varrho e^v(\varrho-v)^{k\nu+\delta-1}dv\right)d\varrho$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)}\int_0^x\left(e^v\int_v^x(x-\varrho)^{k-1}(\varrho-v)^{k\nu+\delta-1}d\varrho\right)dv.$$

Da aber das innere Integral nach $\varrho$ gleich

$$\frac{\Gamma(k)\Gamma(k\nu+\delta)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}(x-v)^{k\nu+k+\delta-1}$$

ist, so folgt weiter:

$$\int_0^x \Phi(\varrho)e^\varrho(x-\varrho)^{k-1}d\varrho = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu\Gamma(k)}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^v(x-v)^{k\nu+k+\delta-1}dv$$

$$= \Gamma(k)\,e^x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+k+\delta)}\int_0^x e^{-t}t^{k\nu+k+\delta-1}dt.$$

Hier ist die rechtsstehende Summe gleich $\Omega(x)$, so daß man schließlich erhält:

$$\Omega(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}e^{-x}\int_0^x \Phi(\varrho)e^\varrho(x-\varrho)^{k-1}d\varrho = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x \Phi(x-t)e^{-t}t^{k-1}dt.$$

Wenn nun

$$(15) \qquad \lim_{x=\infty}\Phi(x) = \sigma$$

ist, so ergibt sich aus der letzten Gleichung, indem man beiderseits $\sigma$ subtrahiert:

$$(16) \quad \Omega(x)-\sigma = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x[\Phi(x-t)-\sigma]e^{-t}t^{k-1}dt - \frac{\sigma}{\Gamma(k)}\int_x^\infty e^{-t}t^{k-1}dt.$$

Hier hat das zweite Integral für $x\to\infty$ den Grenzwert Null. Ebenso aber auch das erste; denn wegen (15) ist $\Phi(x)$ beschränkt, also

$$|\Phi(x-t)-\sigma| < C,$$

wo $C$ von $x$ und $t$ nicht abhängt. Solange aber $0 \leqq t \leqq \frac{x}{2}$ ist, wird außerdem, wenn $\varepsilon$ beliebig klein,

$$|\Phi(x-t)-\sigma| < \varepsilon$$

sein, sofern nur $x$ genügend groß. Daher ergibt sich die Abschätzung:

$$\left|\int_0^x [\Phi(x-t)-\sigma]\, e^{-t} t^{k-1}\, dt\right| < \int_0^{\frac{x}{2}} \varepsilon e^{-t} t^{k-1}\, dt + \int_{\frac{x}{2}}^{x} C e^{-t} t^{k-1}\, dt$$

$$< \varepsilon \Gamma(k) + C \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-t} t^{k-1}\, dt.$$

In Formel (16) wird also in der Tat auch das erste Integral beliebig klein, und folglich ist

$$\lim_{x=\infty} \Omega(x) = \sigma,$$

w. z. b. w.

Der Satz 6 ist, soweit er sich auf das Beispiel 4 bezieht, bereits von Herrn Hardy bewiesen worden[9]); wir wollen diesen Teil des Satzes noch etwas umgestalten. Da die Funktion $\Phi(x)$ in Beispiel 4, wie leicht zu sehen, gleich

$$\int_0^x e^{-t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt = e^{-x} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{\nu-1}}{\nu!} x^\nu$$

ist (beide Seiten haben nämlich gleiche Ableitung nach $x$), so läßt sich die Gleichung (14) auch folgendermaßen schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1}\right) dt = \lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{\nu-1}}{\nu!} x^\nu,$$

falls die rechte Seite existiert. Setzt man hier $a_\nu = u_{\nu+1}$ und addiert alsdann die evidente Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-t} u_0\, dt = \lim_{x=\infty} e^{-x}\left(u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_0}{\nu!} x^\nu\right),$$

so erhält man den Satz, daß aus der Beziehung

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_\nu}{\nu} x^\nu = s$$

allemal folgt:

$$\int_0^\infty e^{-t}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u_\nu}{\nu!} t^\nu\right) dt = s.$$

Diesen Satz habe ich in meiner eingangs erwähnten Arbeit bewiesen. Er findet sich aber auch, entgegen meinen Angaben, bereits in der damals und jetzt zitierten Hardyschen Arbeit. Herr Hardy sagt allerdings

[9]) G. H. Hardy, Researches in the theory of divergent series and divergent integrals, The quarterly journal of pure and applied mathematics, 35 (1903), S. 22—66.

zunächst, daß aus der ersten Formel nicht die zweite folgt, meint das aber offenbar nur im Sinne eines *unmittelbaren* Folgens; denn er gewinnt einige Seiten später den richtigen Tatbestand. Dieser Umstand, auf den ich von anderer Seite aufmerksam gemacht worden bin, war mir damals leider entgangen, und ich benutze daher diese Gelegenheit zur Richtigstellung.

Herr Hardy zeigt auch a. a. O. an einem Beispiel, daß Satz 6 sich nicht umkehren läßt. Vielmehr kann es vorkommen, daß von den beiden Reihen dieses Satzes die zweite summierbar ist, die erste aber nicht, daß also von den Grenzwerten (13) nur der zweite existiert. Ein anderes Beispiel dieser Art erhält man, wenn man die Reihenglieder $a_\nu$ durch die Formel definiert:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} = f'(t) - f(t), \quad f(t) = 1 + e^t \frac{\sin(t^2)}{t}.$$

Dann ist nämlich

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t}[f''(t) - f'(t)]\,dt = e^{-x} f'(x) - 1$$

$$= \frac{\sin(x^2)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x^2) - 1,$$

$$\Omega(x) = \int_0^x e^{-t}[f'(t) - f(t)]\,dt = e^{-x} f(x) - 1$$

$$= \frac{\sin(x^2)}{x} - e^{-x} - 1.$$

Es ist also $\lim\limits_{x=\infty} \Omega(x) = -1$, während $\lim\limits_{x=\infty} \Phi(x)$ nicht existiert.

## § 5.

## Theoreme über einige besondere summatorische Folgen.

Wir beschäftigen uns zum Schluß noch kurz mit einigen speziellen summatorischen Folgen, die in der Literatur noch nicht vorkommen.

Satz 7. *Mit Hilfe der summatorischen Folge* (*siehe Beispiel* 8)

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_\nu(x) = \frac{x(x+1)\dots(x+\nu-1)}{(x+k)(x+k+1)\dots(x+k+\nu-1)} \qquad (k > 0)$$

*ist die Binomialreihe*

$$1 + \frac{\lambda}{1} z + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \dots,$$

*wenn* $\Re(\lambda) < k+1$ *ist, auf dem ganzen Einheitskreis summierbar und hat den Wert* $(1-z)^{-\lambda}$, *allenfalls* $z = 1$ *ausgenommen.*

Hier ist nämlich

$$\Phi(x) = 1 + \frac{\lambda}{1}\frac{x}{x+k}z + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\frac{x(x+1)}{(x+k)(x+k+1)}z^2 + \dots$$
$$= F(\lambda, x, x+k; z),$$

wo $F$ die hypergeometrische Reihe bedeutet. Wegen $\Re(\lambda) < k+1$ ist sie auf dem Einheitskreis konvergent, höchstens $z=1$ ausgenommen. Nun ist aber[10])

$$F(\lambda, x, x+k; z) = (1-z)^{-\lambda} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also in der Tat

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = (1-z)^{-\lambda}.$$

Satz 8. *Ist $f(z)$ ($z=$ reell) eine beschränkte integrierbare Funktion mit der Periode $2\pi$, und ist für einen gewissen Wert $z$ der Grenzwert*

$$\lim_{t=0} \frac{f(z+t)+f(z-t)}{2} = \psi(z)$$

*vorhanden, so ist die Fourierreihe von $f(z)$ für diesen Wert $z$ mit Hilfe der summatorischen Folge (siehe Beispiel 8 für $k=2$)*

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}$$

*summierbar und hat den Wert $\psi(z)$.*

Insbesondere ist also die Fourierreihe jeder stetigen Funktion summierbar, und ihr Wert ist gleich der Funktion.

Die Fourierreihe ist bekanntlich die folgende:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\nu(t-z)\,dt,$$

wofür man wegen der Periodizität von $f(z)$ auch schreiben kann:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\cos(\nu t)\,dt.$$

Bildet man daher mit Hilfe der obigen summatorischen Folge die Funktion $\Phi(x)$, so ist

[10]) Nach Formel (10) Seite 7 meiner Arbeit: Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter, zweiter Teil. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math. naturw. Klasse, Abteilung A, Jahrgang 1917, 1. Abhandlung.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\cos(\nu t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\cos\nu t\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} [f(z+t)+f(z-t)]\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\cos\nu t\right] dt.$$

Nun findet man leicht:

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x+\nu)(x+\nu+1)}\cos\nu t = \frac{x(x+1)}{2}\int\limits_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv,$$

so daß die vorige Formel übergeht in:

$$\Phi(x) = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left\{[f(z+t)+f(z-t)]\int\limits_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\} dt.$$

Wendet man diese Formel speziell auf die Funktion $f(z) = 1$ an, so ergibt sich, weil dann auch $\Phi(x) = 1$ sein muß:

$$1 = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left\{2\int\limits_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\} dt.$$

Wenn man diese Gleichung mit $\psi(z)$ multipliziert und dann von der vorigen subtrahiert, erhält man:

$$(17)\qquad \Phi(x) - \psi(z) = \frac{x(x+1)}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left\{F(z,t)\int\limits_{0}^{1} v^{x-1}\,\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right\} dt,$$

wobei

$$F(z,t) = f(z+t) + f(z-t) - 2\psi(z).$$

Wegen unserer Voraussetzungen über die Funktion $f(z)$ ist

$$|F(z,t)| < C,$$

wo $C$ von $z$ und $t$ nicht abhängt; außerdem für hinreichend kleine Werte von $t$ auch

$$|F(z,t)| < \varepsilon.$$

Zerlegt man daher in (17) das Integral nach $t$ in die Summe

$$(18)\qquad \int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}.$$

so ist, wenn $\delta$ klein genug gewählt wird, im ersten Integral der Integrand absolut kleiner als

$$\varepsilon\int_0^1 v^{x-1}\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv;$$

das Integral selbst ist also absolut kleiner als

$$\varepsilon\int_0^\delta\left(\int_0^1 v^{x-1}\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos t+v^2}\,dv\right)dt$$

$$=\varepsilon\int_0^1\left(v^{x-1}(1+v)(1-v)^2\int_0^\delta\frac{dt}{1-2v\cos t+v^2}\right)dv$$

$$=\varepsilon\int_0^1 v^{x-1}\,2\,(1-v)\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta\,(1+v)}{1-v}\,dv \qquad \left(\eta=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)$$

$$<\varepsilon\int_0^1 v^{x-1}(1-v)\,\pi\,dv=\frac{\varepsilon\pi}{x(x+1)}.$$

Im zweiten Integral von (18) ist der Integrand absolut kleiner als

$$C\int_0^1 v^{x-1}\frac{(1+v)(1-v)^2}{1-2v\cos\delta+v^2}\,dv<C\int_0^1 v^{x-1}\frac{2(1-v)^2}{\sin^2\delta}\,dv=\frac{4C}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)};$$

das Integral selbst ist also absolut kleiner als

$$\frac{4C\pi}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Setzt man diese Abschätzungen in (18) und (17) ein, so ergibt sich:

$$|\Phi(x)-\psi(z)|<\frac{x(x+1)}{2\pi}\left[\frac{\varepsilon\pi}{x(x+1)}+\frac{4C\pi}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\right]$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2C}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{x+2}.$$

Hier kann man $\varepsilon$ beliebig klein wählen, wodurch $\delta$ bestimmt wird. Durch Vergrößerung von $x$ erreicht man dann, daß auch das zweite Glied kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird, woraus folgt:

$$\lim_{x=\infty}\Phi(x)=\psi(z),$$

w. z. b. w.

Recht brauchbar scheint die summatorische Folge des Beispiels 10 zu sein, obwohl ich zur Zeit nicht entscheiden kann, ob sie beständig ist. Sie ist für Potenzreihen in einem größeren Bereich anwendbar als die Borelsche exponentielle Summation, wenn auch nicht wie die Methode von Le Roy im ganzen Mittag-Lefflerschen Stern.

Wir konstruieren zunächst in einer komplexen $z$-Ebene die Kurve mit der Gleichung

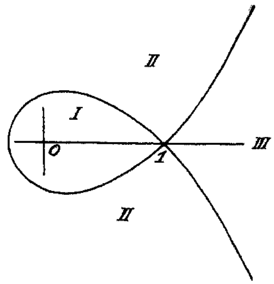
$$|z e^{-z}| = e^{-1},$$

oder wenn $z = \xi + i\eta$ gesetzt wird,

$$\eta^2 = e^{2\xi-2} - \xi^2 = (\xi - 1)^2 + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{2^\nu (\xi-1)^\nu}{\nu!}.$$

Die Kurve hat an der Stelle $z = 1$ einen Doppelpunkt und teilt die Ebene in die drei Gebiete I, II, III der Figur. Es ist

$$|z e^{-z}| < e^{-1} \text{ in I und III,}$$
$$|z e^{-z}| > e^{-1} \text{ in II.}$$




Man macht sich hiernach leicht eine Vorstellung von dem Verlauf der Kurvenschar

$$|z e^{-z}| = \text{konst.}$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 9. *Wenn $z$ nicht im Innern oder auf dem Rand des Gebietes* III *liegt, so ist die geometrische Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$$

*mit Hilfe der summatorischen Folge*

$$\varphi_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{x(x+1)\ldots(x+\nu)}$$

*summierbar und hat den Wert* $\frac{1}{1-z}$.

Nach den Ausführungen auf Seite 294 ist

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} e^{zt}\, dt,$$

oder wenn man $t = \frac{x}{z}(z-u)$ setzt,

$$\Phi(x) = x \int_0^z \left(\frac{u e^{-u}}{z e^{-z}}\right)^x \frac{du}{u}. \tag{19}$$

Wenn nun $z$ nicht im Gebiet III liegt (auch nicht auf dem Rand), so läßt sich der Integrationsweg für $u$ so abändern, daß auf ihm dauernd

$$|u e^{-u}| \leqq |z e^{-z}|$$

ist, und zwar Gleichheit nur im Endpunkt $u = z$. Insbesondere läßt es sich einrichten, daß der Quotient

$$(20) \qquad \frac{u e^{-u}}{z e^{-z}}$$

in der Nähe der Stelle $z$ *reell* und kleiner als 1 ist. Man kann dann das Integral in (19) in die Summe von zwei Integralen zerlegen, indem man zuerst von $u=0$ bis in beliebige Nähe von $u=z$ integriert, und dann über den Rest des Weges. Auf dem ersten Weg hat der absolute Betrag von (20) ein Maximum $g$, welches kleiner als 1 ist. Das Integral für diesen Teil des Weges ist daher $O(g^x)$. Auf dem Rest des Weges kann man

$$\frac{u e^{-u}}{z e^{-z}} = e^{-v}$$

setzen, wobei $v$ von der beliebig kleinen Zahl $\varepsilon$ bis 0 läuft. Man hat dann, wenn $\varepsilon$, also $v$, klein genug ist:

$$u = z + \frac{z}{z-1} v + a v^2 + b v^3 + \ldots,$$

also

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{z-1}(1 + \alpha v + \beta v^2 + \ldots) dv.$$

Setzt man das in (19) ein, so folgt:

$$(21) \qquad \Phi(x) = \frac{x}{z-1}\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx}(1 + \alpha v + \beta v^2 + \ldots) dv + O(x g^x).$$

Nun ist für $0 \leqq v \leqq \varepsilon$

$$|\alpha v + \beta v^2 + \ldots| < C v,$$

wo $C$ von $v$ nicht abhängt; also

$$\left|\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx}(\alpha v + \beta v^2 + \ldots) dv\right| < \int_{0}^{\varepsilon} e^{-vx} C v \, dv = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Daher nach (21):

$$\Phi(x) = \frac{x}{z-1}\int_{\varepsilon}^{0} e^{-vx} dv + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(x g^x) = \frac{1-e^{-\varepsilon x}}{1-z} + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(x g^x),$$

und folglich

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{1}{1-z};$$

w. z. b w.

Wenn man für $\Phi(x)$ den ursprünglichen Ausdruck einsetzt, besagt die soeben gewonnene Formel:

$$(22) \qquad \lim_{x=\infty} \int_{0}^{x} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} e^{zt} dt = \frac{1}{1-z}.$$

Ist $T$ ein abgeschlossenes Gebiet für die Variable $z$, welches keinen Punkt des Gebietes III (auch keinen Randpunkt von III) enthält, so sieht man aus unserem Beweisgang unschwer, daß der Grenzwert (22) in $T$ *gleichmäßig* erreicht wird.

Nun sei

$$(23) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

eine Potenzreihe mit endlichem, von Null verschiedenem Konvergenzradius. Die dadurch definierte Funktion $f(z)$ hat auf dem Konvergenzkreis wenigstens einen singulären Punkt und kann bei geradliniger analytischer Fortsetzung weitere singuläre Punkte haben. Wir konstruieren nun durch Drehung um den Nullpunkt und Ähnlichkeitstransformation mit dem Nullpunkt als Ähnlichkeitspunkt eine zur Randkurve des Gebietes III ähnliche Kurve, deren Ecke in einem singulären Punkt liegt. Wird diese Konstruktion für jeden singulären Punkt gemacht, so entsteht ein offenes oder geschlossenes krummliniges Polygon $P$, und wir behaupten, *daß die Reihe* (23) *im Innern dieses Polygons summierbar ist und den Wert* $f(z)$ *hat.*

In der Tat ist jetzt

$$\Phi(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu z^\nu t^\nu}{\nu!}\right) dt.$$

Da aber bekanntlich

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta,$$

wo der Integrationsweg $K$ den Nullpunkt umschließt, so folgt:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} \frac{z^\nu t^\nu}{\nu!} d\zeta\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} \left(\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{\frac{zt}{\zeta}} d\zeta\right) dt,\end{aligned}$$

oder durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$(24) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} e^{\frac{zt}{\zeta}} dt\right] d\zeta.$$

Wenn nun $z$ ein fester Punkt im Innern des Polygons $P$ ist, so enthält die geschlossene Kurve der $\zeta$-Ebene

$$(25) \qquad \frac{z}{\zeta} = \text{Rand von III}$$

die Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta = z$, läßt aber die singulären Punkte außerhalb. Man kann daher für $\zeta$ einen zulässigen Integrationsweg konstruieren derart, daß $\frac{z}{\zeta}$ nie dem Innern oder Rand von III angehört, und zwar umschließt dieser Weg notwendig den Punkt $z$; man braucht nur eine die Kurve (25) umschließende und ihr hinreichend benachbarte Kurve zu wählen. Dann nähert sich aber in (24) nach dem Gesagten das innere Integral für $x \to \infty$ dem Wert $\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}$, und zwar gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von $\zeta$. Also folgt aus (24)

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} d\zeta = f(z),$$

(Eingegangen am 2. April 1920.)