8.

Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.

(Von Herrn *L. Kronecker* zu Berlin.)

I. Wenn die Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung, in welcher der erste Coefficient ***Eins*** ist, alle imaginär und ihre analytischen Moduln sämmtlich gleich ***Eins*** sind, so müssen dieselben stets Wurzeln der Einheit sein.

Beweis. Es seien $a, b, c, \dots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots + N = 0,$$

in welcher $A, B, C, \dots N$ ganze Zahlen bedeuten. Da nun die Wurzeln $a, b, c, \dots$ lauter imaginäre Gröfsen mit dem Modul ***Eins*** sein sollen, so setze man, indem man $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet:

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad b = \cos\beta + i\sin\beta, \quad c = \cos\gamma + i\sin\gamma, \quad \dots$$

Alsdann erhält man, wenn die Coefficienten $A, B, C, \dots$ durch die Wurzeln ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} A &= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cdots \\ B &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha+\delta) + \cdots \\ C &= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\delta) + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also mufs A gleich einer Summe von n Gröfsen sein, deren jede gröfser als -1 und kleiner als $+1$ ist. Ebenso mufs B gleich einer Summe von $\frac{n(n-1)}{1.2}$ solchen Gröfsen sein, C gleich einer Summe von $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ solchen Gröfsen u. s. w. Da aber $A, B, C, \dots$ ganze Zahlen sein sollen, so sieht man, dafs jeder Coefficient der Gleichung $F(x) = 0$ nur eine begrenzte Anzahl von Werthen haben kann; und das Produkt aller dieser Anzahlen giebt offenbar die Anzahl aller derjenigen Werth*systeme* an, welche den Coefficienten $A, B, C, \dots$ überhaupt zukommen können. Hieraus geht hervor, ***dafs es für jeden bestimmten Grad n nur eine endliche Anzahl von Gleichungen geben kann, welche die im obigen Satze angegebenen Bedingungen erfüllen.***

Die Anzahl aller dieser Gleichungen $n$ten Grades sei r, und es sei ferner für irgend eine ganze Zahl k:

$$F_k(x) = (x-a^k)(x-b^k)(x-c^k)\ \dots$$

Dann genügt auch die Gleichung $F_k(x)=0$ allen in dem obigen Satze gemachten Voraussetzungen. Denn erstens sind die Coefficienten dieser Gleichung als symmetrische Functionen von $a, b, c, \dots$ offenbar ganze Zahlen, und zweitens sind die analytischen Moduln ihrer Wurzeln:

$$a^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha,\quad b^k = \cos k\beta + i\sin k\beta,\quad c^k = \cos k\gamma + i\sin k\gamma,\quad \dots$$

sämmtlich gleich *Eins*. Folglich müssen mindestens zwei unter den Gleichungen:

$$F(x)=0,\quad F_2(x)=0,\quad F_3(x)=0,\quad \dots\quad F_{r+1}(x)=0$$

identisch sein, d. h. es mufs zwei von einander verschiedene Zahlen h und k geben, für welche $F_h(x)=F_k(x)$ ist. Die Wurzeln der Gleichung $F_h(x)=0$, nämlich: $a^h, b^h, c^h, \dots$ müssen daher mit den Wurzeln der Gleichung $F_k(x)=0$, nämlich mit: $a^k, b^k, c^k, \dots$, abgesehen von der Ordnung, übereinstimmen.

Für irgend eine Gröfse der ersten Reihe z. B. a^h sei nun b^k diejenige aus der zweiten Reihe, welche derselben gleich wird, so dafs $a^h=b^k$ ist. Ebenso sei $b^h=c^k$, $c^h=d^k$, ... Wenn man so fortfährt, mufs man offenbar auch zu einer Gleichung kommen, in welcher a^k auf der rechten Seite steht. Man erhält also ein System von Gleichungen von folgender Form:

$$a^h=b^k,\quad b^h=c^k,\quad c^h=d^k,\quad \dots,\quad m^h=a^k.$$

Wird die Anzahl dieser Gleichungen mit μ bezeichnet, und eliminirt man aus denselben die $(\mu-1)$ Gröfsen: $b, c, d, \dots m$, so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$a^{h^\mu - k^\mu} = 1$$

Da nun, wie oben bemerkt, h und k von einander verschiedene ganze Zahlen sind, so zeigt diese Gleichung, dafs a in der That eine Wurzel der Einheit ist; und dieses Resultat gilt offenbar für *alle* Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$, da a ganz beliebig unter denselben gewählt worden ist.

II. Wenn eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, von denen der erste gleich *Eins* ist, lauter reelle Wurzeln hat, die in den Grenzen -2 und $+2$ liegen, die also durch $2\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $2\cos\gamma, \dots$ dargestellt werden können, so stehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sämmtlich in commensurablem Verhältnifs zu einem Rechten.

Beweis. Es sei $\Phi(y) = 0$ eine Gleichung von den angegebenen Eigenschaften, und $2\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $2\cos\gamma$, ... die Wurzeln derselben. Wenn man nun den Grad von $\Phi(y)$ mit ν bezeichnet, und man setzt:

$$x^\nu . \Phi\left(x + \frac{1}{x}\right) = F(x)$$

so ist $F(x) = 0$ offenbar eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind und der erste derselben gleich *Eins*. Ferner sieht man leicht, dafs die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\cos\alpha \pm i\sin\alpha, \quad \cos\beta \pm i\sin\beta, \quad \cos\gamma \pm i\sin\gamma, \quad \ldots$$

sind, also lauter imaginäre Gröfsen mit dem Modul *Eins*. Somit genügt die Gleichung $F(x) = 0$ allen in dem obigen ersten Satze aufgestellten Bedingungen, und durch Anwendung desselben ergiebt sich, dafs die Wurzeln: $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\cos\beta \pm i\sin\beta$, ... sämmtlich Wurzeln der Einheit sein müssen; ein Resultat, aus welchem die zu beweisende Eigenschaft der Winkelgröfsen α, β, γ, ... unmittelbar hervorgeht.