Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Die Aufgabe.

Poincaré und andere haben die Gestalt der Integralkurven der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad [kx + ly + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx$$

in der Umgebung des Nullpunktes untersucht. Dabei sind $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ Potenzreihen, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen[1]). Wenn weiter ein für allemal

$$kn - lm \neq 0$$

vorausgesetzt wird, so zeigt sich, daß die Integralkurven näherungsweise wie die Integralkurven der einfacheren Differentialgleichung

$$(kx + ly)\,dy = (mx + ny)\,dx$$

sich verhalten, und zwar sind die nachstehenden Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall:

$$(k - n)^2 + 4\,lm > 0, \qquad kn - lm > 0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Knotenpunkt*; d. h. alle in hinreichender Nähe des Nullpunktes verlaufenden Integralkurven gehen durch diesen hindurch und haben daselbst bestimmte Tangenten.

---

[1]) Über die Literatur vergleiche man die Artikel von Painlevé und Liebmann in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. 1. 1, §§ 24—30 und III D. 8, § 3. Eine ausführlichere Darstellung der wichtigsten Fälle findet sich in Abschnitt XII des Buches von Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Leipzig 1905.

Zweiter Fall:

$$(k-n)^2+4lm>0, \quad kn-lm<0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Sattelpunkt*; d. h. durch ihn gehen nur zwei Integralkurven, und zwar mit verschiedenen Tangentenrichtungen; sie teilen die Umgebung in vier Winkelräume, in denen die anderen Integralkurven verlaufen.

Dritter Fall:

$$(k-n)^2+4lm=0.$$

Der Nullpunkt ist wieder ein Knotenpunkt.

Vierter Fall:

$$(k-n)^2+4lm<0, \quad k+n\neq 0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Strudelpunkt*; d. h. die Integralkurven winden sich unendlich oft um ihn herum und haben ihn zum asymptotischen Punkt.

Fünfter Fall:

$$(k-n)^2+4lm<0, \quad k+n=0.$$

Der Nullpunkt ist im allgemeinen wieder ein Strudelpunkt. Ausnahmsweise kann er aber auch in einen *Wirbelpunkt* ausarten; d. h. die Integralkurven sind geschlossene Kurven mit dem Nullpunkt im Innern.

Man kommt zu diesen Resultaten, indem man die Differentialgleichung durch gewisse unendliche Reihen integriert. Da es sich aber hier um die *Gestalt* der Integralkurven handelt, also alles im Reellen sich abspielt, so erscheint die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ Potenzreihen sind, etwas weitgehend, und es liegt nahe, die Existenz und Gestalt der Integralkurven zu untersuchen, wenn im wesentlichen nur vorausgesetzt wird, daß die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Vergleich zu den linearen Gliedern verhältnismäßig klein sind. Dann läßt sich die Integration nicht mehr durch die Poincaréschen Reihen leisten; wir werden aber auf andere Weise zum Ziel kommen. Dabei wird sich in den vier ersten Fällen, falls nicht allzuwenig über $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ vorausgesetzt wird[2]), wieder das obige Resultat ergeben. Nur im fünften Fall tritt ein neuer Typus hinzu, indem es vorkommen kann, daß unendlich viele geschlossene Integralkurven auftreten, und gleichzeitig solche, die sich unendlich oft um den Nullpunkt herumwinden und dabei zwei geschlossene Integralkurven zu asymptotischen Linien haben; dafür hat bereits Herr Liebmann a. a. O. ein Beispiel angegeben.

Indem ich die anderen Fälle für eine Fortsetzung aufspare, behandle ich in dieser Arbeit nur den ersten und dritten Fall, wo also ein Knoten-

[2]) Man vergleiche dagegen die Beispiele auf Seite 128 unten und 131.

punkt zu erwarten ist. Die Konstanten k, l, m, n, die Variablen x, y sowie die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ werden natürlich durchweg reell vorausgesetzt. Als Hauptresultat wird sich dabei ergeben der

Fundamentalsatz. *Die Funktionen* $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ *mögen in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig sein und stetige partielle Ableitungen* f_x', f_y', φ_x', φ_y' *besitzen; ferner sei*

$$f(0, 0) = 0, \qquad \varphi(0, 0) = 0,$$

und endlich möge es eine positive Zahl δ *geben derart, daß*

$$\lim_{\substack{x=0\\ y=0}} \frac{|f_x'(x, y)| + |f_y'(x. y)| + |\varphi_x'(x, y)| + |\varphi_y'(x, y)|}{(|x| + |y|)^\delta} = 0$$

ist. Wenn dann einer der drei Fälle

(I) $\quad (k-n)^2 + 4lm > 0, \quad kn - lm > 0,$

(II) $\quad (k-n)^2 + 4lm = 0, \quad kn - lm \neq 0, \quad |l| + |m| = 0,$

(III) $\quad (k-n)^2 + 4lm = 0, \quad kn - lm \neq 0, \quad |l| + |m| > 0$

vorliegt, so geht durch jeden in genügender Nähe des Nullpunktes gelegenen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt x_0, y_0 *genau eine Integralkurve der Differentialgleichung* (A), *und all diese Kurven gehen auch durch den Nullpunkt.*

Im Fall (I) *haben alle Kurven im Nullpunkt eine gemeinsame Tangente mit Ausnahme einer einzigen, die eine andere Tangente hat.*

Im Fall (II) *geht in jeder Richtung genau eine Kurve durch den Nullpunkt.*

Im Fall (III) *haben ausnahmslos alle Kurven im Nullpunkt eine gemeinsame Tangente, und zwar gibt es unter diesen Kurven eine, die von allen anderen zugleich durchsetzt wird.*

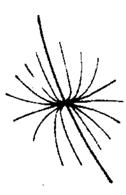
Fig. 1.

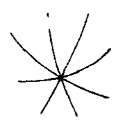
Fig. 2.

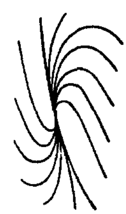
Fig. 3.

Die drei Fälle sind in den drei Figuren veranschaulicht. In Fig. 3 ist die stärker gezeichnete Kurve die, welche von allen anderen durchsetzt wird. Wesentlich ist also, daß ihr oberer Zweig nur auf der einen (rechten) Seite von anderen Kurven berührt wird, ihr unterer Zweig nur auf der anderen (linken) Seite.

Daß durch den Punkt x_0, y_0 genau eine Integralkurve geht, ist leicht zu sehen. Denn nach dem Mittelwertsatz ist

$$f(x_0, y_0) = x_0 f'_x(\vartheta x_0, \vartheta y_0) + y_0 f'_y(\vartheta x_0, \vartheta y_0) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

also nach unseren Voraussetzungen gewiß

$$|f(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$

und ebenso

$$|\varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur $|x_0|$, $|y_0|$ klein genug sind. Daraus ergibt sich, daß die Funktionen

$$(1) \qquad \begin{cases} kx + ly + f(x, y), \\ mx + ny + \varphi(x, y) \end{cases}$$

an der Stelle x_0, y_0 nicht beide zugleich verschwinden können; denn andernfalls würde daraus folgen:

$$\begin{aligned} (kn - lm)x_0 &= -n f(x_0, y_0) + l\varphi(x_0, y_0), \\ (kn - lm)y_0 &= m f(x_0, y_0) - k\varphi(x_0, y_0); \end{aligned}$$

also:

$$|x_0| \leqq \frac{|n f(x_0, y_0)| + |l\varphi(x_0, y_0)|}{|kn - lm|} < \varepsilon \frac{|n| + |l|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

$$|y_0| \leqq \frac{|m f(x_0, y_0)| + |k\varphi(x_0, y_0)|}{|kn - lm|} < \varepsilon \frac{|m| + |k|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

und daher durch Addition:

$$|x_0| + |y_0| < \varepsilon \frac{|n| + |l| + |m| + |k|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

was aber falsch ist, wenn ε klein genug, also wenn $|x_0|$, $|y_0|$ klein genug. Von den beiden Funktionen (1) ist daher mindestens eine an der Stelle x_0, y_0 und wegen der Stetigkeit auch in einer gewissen Umgebung dieser Stelle von Null verschieden. Ist das etwa die erste, so kann man der Differentialgleichung (A) die Form geben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx + ny + \varphi(x, y)}{kx + ly + f(x, y)}.$$

Hier ist die rechte Seite in der Umgebung von x_0, y_0 stetig und hat eine stetige partielle Ableitung nach y; daher ist gewiß die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und folglich geht *eine und nur eine* Integralkurve durch den Punkt x_0, y_0.

Wenn aber die erste der Funktionen (1) an der Stelle x_0, y_0 verschwindet, so ist, wie wir sahen, die zweite von Null verschieden, und man kann der Differentialgleichung die Form geben:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{kx + ly + f(x, y)}{mx + ny + \varphi(x, y)}.$$

Hier ist, wenn y als die unabhängig Veränderliche betrachtet wird, wieder die Lipschitz-Bedingung erfüllt, so daß auch jetzt eine und nur eine Integralkurve durch den Punkt x_0, y_0 geht.

Der übrige Inhalt des Fundamentalsatzes ist wesentlich schwieriger zu beweisen. Wir behandeln zuerst einige Spezialfälle, wobei wir zum Teil mit noch viel geringeren Voraussetzungen über die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ auskommen werden.

§ 2.

Der Spezialfall $k = 1$, $l = 0$, $n > 0$.

Hier handelt es sich um die Differentialgleichung

$$[x + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (n > 0),$$

die wir unter Einführung einer Hilfsveränderlichen t durch das System ersetzen:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - f(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -mx - ny - \varphi(x, y) \end{cases} \qquad (n > 0).$$

Von diesem beweisen wir den

Satz 1. *Sind ϑ, a, b positive Zahlen, die den Ungleichungen genügen:*

$$\vartheta n b > |m| a, \qquad \vartheta < 1;$$

sind ferner die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Bereich

$$|x| < a, \qquad |y| < b$$

definiert und stetig und genügen sie daselbst den Ungleichungen

$$|f(x, y)| \leqq \frac{\vartheta a}{a + b}(|x| + |y|),$$

$$|\varphi(x, y)| \leqq \frac{\vartheta n b - |m| a}{a + b}(|x| + |y|);$$

sind endlich x_0, y_0 irgend zwei Zahlen des Bereiches

$$|x_0| < a, \qquad |y_0| < b:$$

so haben die Differentialgleichungen (B) *mindestens ein System von Integralen $x = x(t)$, $y = y(t)$, welches für $t \geqq 0$ existiert, dauernd in dem Bereich $|x| < a$, $|y| < b$ bleibt und für $t = 0$ die Werte*

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0$$

annimmt. Für jedes solche Integralsystem ist

$$\lim_{t=\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t=\infty} y(t) = 0.$$

Im Definitionsbereich der Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ ist

$$|x + f(x, y)| < a + \frac{\vartheta a}{a+b}(a+b) < 2a,$$

$$|mx + ny + \varphi(x, y)| < |m|a + nb + \frac{\vartheta nb - |m|a}{a+b}(a+b)$$
$$= nb + \vartheta nb < 2nb.$$

Ferner gehört die Umgebung von x_0, y_0

$$|x - x_0| < a - |x_0|, \quad |y - y_0| < b - |y_0|$$

dem genannten Definitionsbereich an. Nach einem allgemeinen Existenzsatz[3]) gibt es also ein System von Integralen $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ mindestens im Intervall

$$0 \leqq t \leqq \mathrm{Min}\left(\frac{a-|x_0|}{2a}, \frac{b-|y_0|}{2nb}\right).$$

Möglicherweise gibt es sogar mehrere solche Systeme. Wir wollen zeigen, daß auch ein Integralsystem existiert, das sich bis zu beliebig großen Werten von t fortsetzen läßt. Dazu beweisen wir zunächst, daß, soweit sich ein Integralsystem fortsetzen läßt, stets die Ungleichungen gelten:

$$(1) \qquad |x(t)| < ae^{-\varrho t}, \quad |y(t)| < be^{-\varrho t},$$

wobei

$$(2) \qquad \varrho = (1-\vartheta)\,\mathrm{Min}(1, n),$$

also

$$(3) \qquad 0 < \frac{\vartheta}{1-\varrho} \leqq 1, \quad 0 < \frac{\vartheta n}{n-\varrho} \leqq 1.$$

Andernfalls sei nämlich t_1 die untere Grenze derjenigen Werte t, für welche die Ungleichungen (1) nicht beide gelten; dann ist

$$|x(t)| \leqq ae^{-\varrho t}, \quad |y(t)| \leqq be^{-\varrho t} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t_1,$$

und zwar gilt für $t = t_1$ mindestens einmal Gleichheit. Nun folgt aus den Differentialgleichungen (B), indem man die erste mit e^t, die zweite mit e^{nt} multipliziert und dann beide von 0 bis t_1 integriert:

$$e^{t_1} x(t_1) = x_0 - \int_0^{t_1} f(x(t), y(t))\, e^t dt,$$

$$e^{nt_1} y(t_1) = y_0 - \int_0^{t_1} [mx(t) + \varphi(x(t), y(t))]\, e^{nt} dt.$$

[3]) Satz 2 meiner Arbeit: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Math. Ann. **78** (1918), S. 378–384.

Daher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen:

$$e^{t_1}|x(t_1)| < a + \int_0^{t_1} \frac{\vartheta a}{a+b}(a e^{-\varrho t} + b e^{-\varrho t}) e^t dt$$

$$= a + \frac{\vartheta a}{1-\varrho}(e^{(1-\varrho)t_1} - 1) \leqq a + a(e^{(1-\varrho)t_1} - 1) = a e^{(1-\varrho)t_1},$$

und ebenso:

$$e^{n t_1}|y(t_1)| < b + \int_0^{t_1} \left[|m| a e^{-\varrho t} + \frac{\vartheta n b - |m| a}{a+b}(a e^{-\varrho t} + b e^{-\varrho t}) \right] e^{nt} dt$$

$$= b + \frac{\vartheta n b}{n-\varrho}(e^{(n-\varrho)t_1} - 1) \leqq b + b(e^{(n-\varrho)t_1} - 1) = b e^{(n-\varrho)t_1};$$

also schließlich:

$$|x(t_1)| < a e^{-\varrho t_1}, \qquad |y(t_1)| < b e^{-\varrho t_1},$$

im Widerspruch damit, daß mindestens einmal Gleichheit gelten muß. Damit sind die Ungleichungen (1) bewiesen.

Wenn nun kein Integralsystem bis zu beliebig großen Werten von t fortgesetzt werden könnte, so sei T die obere Grenze derjenigen Werte t, bis zu denen eine Fortsetzung möglich ist. Sei ferner t_0 eine Zahl, die beliebig wenig kleiner als T ist. Dann gibt es nach dem oben angezogenen allgemeinen Existenzsatz ein Integralsystem mindestens im Intervall

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + \operatorname{Min}\left(\frac{a - |x(t_0)|}{2a}, \frac{b - |y(t_0)|}{2nb}\right),$$

also wegen (1) mindestens im Intervall

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + \frac{1 - e^{-\varrho t_0}}{2 + 2n}.$$

Hier ist aber die rechte Seite größer als T, wenn nur t_0 nahe genug an T angenommen wird. Also gibt es ein Integralsystem, das sich über T hinaus fortsetzen läßt, im Widerspruch mit unserer Annahme.

Nachdem hiermit die Fortsetzbarkeit bis zu beliebig großen t sichergestellt ist, folgt sogleich aus (1):

$$\lim_{t=\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t=\infty} y(t) = 0,$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Setzt man in Satz 1 speziell $f(x, y) = 0$, so lautet die erste Differentialgleichung des Systems (B):

$$\frac{dx}{dt} = -x.$$

Daraus folgt:

$$x = x_0 e^{-t},$$

und wenn $x_0 \neq 0$, so ist also auch umgekehrt t eine eindeutige Funktion von x. Setzt man diese in $y = y(t)$ ein, so erweist sich y als eindeutige Funktion von x und genügt als solche der Differentialgleichung

$$x \frac{dy}{dx} = mx + ny + \varphi(x, y) \qquad (n > 0).$$

Wir erhalten somit

Satz 2. *Genügen die positiven Zahlen ϑ, a, b, n und die reelle Zahl m aen Ungleichungen:*

$$\vartheta n b > |m| a, \qquad \vartheta < 1;$$

ist ferner die Funktion $\varphi(x, y)$ im Bereich

$$|x| < a, \qquad |y| < b$$

definiert und stetig und genügt sie daselbst der Ungleichung

$$|\varphi(x, y)| \leqq \frac{\vartheta n b - |m| a}{a + b} (|x| + |y|);$$

sind endlich x_0, y_0 irgend zwei Zahlen des Bereiches

$$0 < |x_0| < a, \qquad |y_0| < b:$$

so hat die Differentialgleichung

$$x \frac{dy}{dx} = mx + ny + \varphi(x, y) \qquad (n > 0)$$

mindestens ein Integral y, das für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und für $x \to 0$ ebenfalls dem Grenzwert Null zustrebt.

§ 3.

Weitere Einschränkungen zur Erzwingung eines Knotenpunktes.

Nach Satz 1 münden die Integralkurven des Systems (B)

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

für $t \to \infty$ in den Nullpunkt ein. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß der Nullpunkt ein Knotenpunkt ist; denn die Kurven brauchen in ihm keine Tangenten zu haben und können ihn beispielsweise auch nach der Art eines Strudelpunktes unendlich oft umwinden. Ein Beispiel dafür ist das System

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2y}{\log(x^2 + y^2)},$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \frac{2x}{\log(x^2 + y^2)},$$

bei dem in hinreichender Nähe des Nullpunktes die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Durch Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r \cos \omega, \qquad y = r \sin \omega$$

geht aber das System über in:

$$\frac{dr}{dt} = -r, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\log r} = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}.$$

Hier kann man sofort integrieren und findet:

$$r = r_0 e^{-t}, \quad \omega = \omega_0 + \log\left(t + \log \frac{1}{r_0}\right) - \log\log \frac{1}{r_0}.$$

Für $t \to \infty$ nimmt also r nach Null ab, während ω unbegrenzt wächst, so daß der Nullpunkt ein Strudelpunkt ist und kein Knotenpunkt.

Um daher im Nullpunkt eine bestimmte Tangentenrichtung zu erzwingen, sind weitere Voraussetzungen notwendig. In dieser Richtung untersuchen wir zunächt die speziellere Differentialgleichung

$$\text{(C)} \qquad x\frac{dy}{dx} = ny + \varphi(x, y) \qquad (n > 1).$$

Satz 3. *Wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes stetig ist und der Bedingung genügt:*

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0,$$

dann gilt für jedes Integral $y = y(x)$ der Differentialgleichung (C), *welches für $x \to 0$ dem Grenzwert Null zustrebt*[4]), *die Gleichung*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x} = 0.$$

Man beachte, daß der Satz nicht mehr gelten würde, wenn in (C) $n \leqq 1$ wäre, weil ihm dann schon die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = ny$$

mit dem allgemeinen Integral $y = C|x|^n$ offenbar widersprechen würde.

Wir wollen Satz 3 jetzt für positive x beweisen; indem man $x = -x'$ setzt, ergibt er sich dann auch für negative x. Aus der Differentialgleichung (C) folgt, indem man sie mit x^{-n-1} multipliziert und dann von x_1 bis x_0 integriert:

$$x_0^{-n} y(x_0) - x_1^{-n} y(x_1) = \int_{x_1}^{x_0} \varphi(x, y(x))\, x^{-n-1}\, dx \qquad (0 < x_1 < x_0).$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 3 kann man aber nach Vorgabe einer beliebig kleinen Zahl ε ein so kleines x_0 angeben, daß

$$|\varphi(x, y(x))| < \varepsilon(x + |y(x)|) \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_0,$$

[4]) Nach Satz 2 gibt es solche Integrale.

und dann folgt aus der vorigen Gleichung:

$$(1)\quad x_1^{-n}|y(x_1)| < x_0^{-n}|y(x_0)| + \varepsilon \int_{x_1}^{x_0} (x + |y(x)|)\, x^{-n-1}\, dx \quad (0 < x_1 < x_0).$$

Wäre nun nicht, wie in Satz 3 behauptet,

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x} = 0,$$

so könnte man eine positive Zahl g angeben derart, daß

$$\limsup_{x=0} \frac{|y(x)|}{x} > g$$

ist[5]). Dann ließen sich zu jeder beliebig kleinen Zahl δ zwei Zahlen x_1 und G, und zwar

$$0 < x_1 < \delta, \qquad G > g$$

ausfindig machen derart, daß

$$\frac{|y(x_1)|}{x_1} > G > g,$$

$$\frac{|y(x)|}{x} < 2G \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_0 \ ^{6)}$$

ist. Aus (1) würde dann folgen:

$$G x_1^{1-n} < x_1^{-n}|y(x_1)| < x_0^{-n}|y(x_0)| + \varepsilon \int_{x_1}^{x_0} (x + 2Gx)\, x^{-n-1}\, dx$$

$$< x_0^{-n}|y(x_0)| + \frac{\varepsilon(1+2G)}{n-1}\, x_1^{1-n},$$

oder also:

$$G < x_0^{-n}|y(x_0)|\, x_1^{n-1} + \frac{\varepsilon}{n-1}(1+2G),$$

oder:

$$G\left(1 - \frac{2\varepsilon}{n-1}\right) < \frac{\varepsilon}{n-1} + x_0^{-n}|y(x_0)|\, x_1^{n-1},$$

und um so mehr:

$$g\left(1 - \frac{2\varepsilon}{n-1}\right) < \frac{\varepsilon}{n-1} + x_0^{-n}|y(x_0)|\, \delta^{n-1}.$$

Diese Ungleichung ist aber falsch, wenn ε und δ hinreichend klein gewählt sind (man beachte, daß x_0 zwar von ε, aber nicht von δ abhängt). Damit ist Satz 3 bewiesen.

---

[5]) Damit werden die beiden Fälle, daß der lim sup endlich oder unendlich ist, beide zugleich umfaßt.

[6]) Hier kann es nötig werden, für x_0 eine etwas kleinere Zahl zu wählen; doch bleibt x_0 dann fest und jedenfalls von δ unabhängig.

§ 4.

Der Fall $k = n = 1$, $l = m = 0$, wenn $f(x, y) = 0$ ist.

Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß Satz 3 für $n = 1$ nicht mehr gilt. Betrachten wir jetzt diesen Fall, also die Differentialgleichung

$$(D) \qquad x \frac{dy}{dx} = y + \varphi(x, y).$$

Speziell für $\varphi(x, y) = 0$ sind die Integralkurven die Geraden $y = Cx$, so daß *in jeder Richtung* eine Integralkurve durch ihn hindurchgeht (außer in Richtung der y-Achse). Wenn man in Analogie zu Satz 3 etwa vermutet, daß es bei dem System (D) ebenso ist, wenn nur

$$\lim_{\substack{x=0\\ y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0$$

vorausgesetzt wird, so ist diese Vermutung falsch. Vielmehr kann es dann beispielsweise sein, daß alle Integralkurven die Y-Achse berühren; z. B. bei der Differentialgleichung

$$x \frac{dy}{dx} = y - \frac{x}{\log \frac{1}{|x|}}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$y = x\left(C + \log \log \frac{1}{|x|}\right)$$

gilt offenbar für jedes Integral die Gleichung

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \infty.$$

Es kann aber auch sein, daß die Integralkurven im Nullpunkt überhaupt keine Tangenten haben; z. B. bei der Differentialgleichung

$$x \frac{dy}{dx} = y - \frac{x \cos \log \log \frac{1}{|x|}}{\log \frac{1}{|x|}}$$

mit dem allgemeinen Integral

$$y = x\left(C + \sin \log \log \frac{1}{|x|}\right)$$

ist offenbar

$$\limsup_{x=0} \frac{y}{x} = C + 1,$$

$$\liminf_{x=0} \frac{y}{x} = C - 1,$$

so daß keine Integralkurve im Nullpunkt eine Tangente hat.

Diese Beispiele lehren, daß wir, um zu erzwingen, daß in jeder Richtung Integralkurven durch den Nullpunkt gehen, von der Funktion $\varphi(x, y)$ etwas mehr voraussetzen müssen. Wir beweisen in dieser Hinsicht

Satz 4. *Wenn die Funktion $\varphi(x,y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig ist, und wenn es eine positive Zahl δ derart gibt, daß*

$$\lim_{\substack{x=0\\ y=0}} \frac{\varphi(x,y)}{(|x|+|y|)^{1+\delta}} = 0$$

ist, dann hat die Differentialgleichung (D) *sowohl für positive als für negative absolut hinreichend kleine x mindestens ein Integral $y = y(x)$, für welches der Grenzwert*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x}$$

existiert und einen vorgegebenen endlichen Wert c hat.

Es genügt wieder, den Beweis für positive x zu führen. Setzt man dann $y = xz$, so geht die Differentialgleichung (D) über in:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(x, xz)}{x^2}, \tag{1}$$

und es kommt nur darauf an, zu zeigen, daß diese neue Differentialgleichung ein Integral z hat, welches für $x \to +0$ dem Grenzwert c zustrebt. Zu dem Zweck definieren wir eine Funktion $\omega(x, z)$ durch die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\omega(x,z) = \frac{\varphi(x,xz)}{\delta x^{1+\delta}} \quad \text{für} \quad x > 0,\\ &\omega(0,z) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 4 ist dann $\omega(x, z)$ in einem gewissen Bereich

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad |z - c| \leqq b \tag{3}$$

stetig, und unsere Differentialgleichung geht über in:

$$\frac{1}{\delta x^{\delta-1}} \frac{dz}{dx} = \omega(x, z) \quad \text{für} \quad x > 0$$

oder wenn man $x^\delta = v$ setzt:

$$\frac{dz}{dv} = \omega\left(v^{\frac{1}{\delta}}, z\right). \tag{4}$$

Für diese Differentialgleichung ist aber $v = 0$ gar kein singulärer Punkt mehr, und sie hat nach dem in Fußnote [3]) angezogenen Existenzsatz mindestens ein Integral, das für $v = 0$, d. h. für $x = 0$ den Wert $z = c$ annimmt; w. z. b. w.

§ 5.

Der Fall $k = n = 1$, $l = 0$, $m \neq 0$, wenn $f(x, y) = 0$ ist.

Hier handelt es sich um die Differentialgleichung

$$(\mathrm{E}) \qquad x\frac{dy}{dx} = y + mx + \varphi(x, y) \qquad (m \neq 0).$$

Satz 5. *Wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig ist, und wenn es eine positive Zahl δ derart gibt, daß*

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{(|x| + |y|)^{1+\delta}} = 0$$

ist, dann gilt für jedes Integral $y = y(x)$ der Differentialgleichung (E), *welches für absolut hinreichend kleine, sei es positive oder negative, x existiert und für $x \to 0$ dem Grenzwert Null zustrebt*[7]), *zugleich die Beziehung*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{mx} = -\infty.$$

Auch hier genügt es wieder, den Satz für positive x zu beweisen. Wenn man die Differentialgleichung (E) durch mx^2 dividiert und dann von x_1 bis x_0 integriert, erhält man:

$$(1) \qquad \frac{y(x_1)}{mx_1} + \log\frac{1}{x_1} = \frac{y(x_0)}{mx_0} + \log\frac{1}{x_0} - \int_{x_1}^{x_0} \frac{\varphi(x, y(x))}{mx^2}\,dx \qquad (0 < x_1 < x_0).$$

Nun bezeichnen wir mit ϑ eine festgewählte Zahl des Intervalles

$$0 < \vartheta < \frac{\delta}{1+\delta}$$

und setzen

$$(1 - \vartheta)(1 + \delta) = 1 + \varrho,$$

so daß $\varrho > 0$ ist. Nach den Voraussetzungen von Satz 5 kann man dann x_0 so klein wählen, daß $x_0 < 1$ und

$$(2) \qquad |\varphi(x, y(x))| < (x + |y(x)|)^{1+\delta} < \frac{\vartheta}{2}(x + |y(x)|) \quad \text{für } 0 < x \leqq x_0.$$

Nun zeigen wir zunächst, daß

$$(3) \qquad \limsup_{x=0} \frac{|y(x)|}{x^{1-\vartheta}} = \text{endlich}$$

ist. Denn andernfalls könnte man eine beliebig große Zahl G und eine beliebig kleine Zahl x_1 ausfindig machen derart, daß

$$\frac{|y(x)|}{x^{1-\vartheta}} \leqq G \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_0$$

---

[7]) Nach Satz 2 gibt es solche Integrale.

und zwar Gleichheit für $x = x_1$. Dann würde aus (1) mit Rücksicht auf (2) folgen:

$$\frac{G x_1^{-\vartheta}}{|m|} = \frac{|y(x_1)|}{|m|\, x_1} < \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{\vartheta}{2}\, \frac{x + |y(x)|}{|m|\, x^2}\, dx$$

$$< \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{\vartheta}{2}\, \frac{x^{1-\vartheta} + G x^{1-\vartheta}}{|m|\, x^2}\, dx$$

$$< \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \frac{\vartheta(1+G)}{2|m|}\, \frac{x_1^{-\vartheta}}{\vartheta};$$

oder also:

$$G < |m|\, x_1^{\vartheta} \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| |m|\, x_1^{\vartheta} + \frac{1+G}{2}.$$

Da aber G beliebig groß und x_1 beliebig klein sein kann, ist das unmöglich. Damit ist die Formel (3) bewiesen. Da aber die gleiche Überlegung auch gilt, wenn ϑ durch eine etwas kleinere Zahl ersetzt wird, so kann der lim sup in (3) nur Null sein. Hiernach können wir $x_0 (< 1)$ so klein denken, daß außer der Ungleichung (2) auch die folgende besteht:

$$(4) \qquad |y(x)| < x^{1-\vartheta} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_0.$$

Dann folgt aber aus (1) mit Hilfe von (2) und (4):

$$\left|\frac{y(x_1)}{m x_1} + \log\frac{1}{x_1}\right| < \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{(x + |y(x)|)^{1+\delta}}{|m|\, x^2}\, dx$$

$$< \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{(x^{1-\vartheta} + x^{1-\vartheta})^{1+\delta}}{|m|\, x^2}\, dx$$

$$= \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{2^{1+\delta}\, x^{1+\varrho}}{|m|\, x^2}\, dx$$

$$< \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \frac{2^{1+\delta}}{|m|\varrho}\, x_0^{\varrho}.$$

Da das gilt, wie klein auch x_1 ist, so ergibt sich:

$$\limsup_{x=0} \left|\frac{y(x)}{m x} + \log\frac{1}{x}\right| = \text{endlich},$$

und folglich:

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{m x} = -\infty. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§ 6.

Existenz einer die Y-Achse berührenden Integralkurve im Fall $k=1$, $l=0$, $n \geqq 1$.

Wir wenden uns jetzt zu der Differentialgleichung

$$\text{(F)} \qquad [x + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (n \geqq 1).$$

Diese werden wir im nächsten Paragraphen auf die bereits behandelten Spezialfälle, wo $f(x, y) = 0$ ist, dadurch zurückführen, daß wir eine die Y-Achse berührende Integralkurve als neue krummlinige Y-Achse einführen. Um zunächst die Existenz einer derartigen Integralkurve beweisen zu können, müssen wir über die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ etwas mehr voraussetzen.

Satz 6. *Sind a, b, δ positive Zahlen, die den Ungleichungen genügen:*

$$a + b \leqq 1, \qquad |m|\,a \leqq \frac{nb\delta}{4};$$

sind ferner die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Bereich

$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b$$

definiert und stetig und genügen sie daselbst den Ungleichungen

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq \frac{na\delta}{2}\left(\frac{|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|}{2}\right)^{\delta}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqq \frac{nb\delta}{4}\left(\frac{|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|}{2}\right)^{\delta}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|);$$

ist endlich $f(0, 0) = 0$, $\varphi(0, 0) = 0$: so hat die Differentialgleichung (F) *in dem Intervall*

$$0 \leqq |y| < \frac{b\delta}{2(1+\delta)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

mindestens ein Integral der Form $x = \Omega(y)$, wo $\Omega(y)$ in diesem Intervall stetig ist und eine stetige Ableitung $\Omega'(y)$ besitzt. Außerdem ist

$$\lim_{y=0} \frac{\Omega(y)}{|y|^{1+\sigma}} = 0, \quad \lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{|y|^{\sigma}} = 0 \quad \text{für } \sigma < \delta,$$

so daß die Kurve $x = \Omega(y)$ im Nullpunkt die Y-Achse berührt.

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir zunächst, daß aus unsern Voraussetzungen weiter folgt:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} |f(x, y)| \leqq na\delta(|x| + |y|)^{1+\delta}, \\ |\varphi(x, y)| \leqq \dfrac{nb\delta}{4}(|x| + |y|)^{1+\delta}. \end{cases}$$

Nun definieren wir gewisse Funktionen

$$x_\nu = x_\nu(t), \qquad y_\nu = y_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

einer Variablen t, die $\geqq 0$ sein soll, rekursorisch durch die Formeln

$$(2) \qquad x_1 = 0, \qquad y_1 = 0,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} x_{\nu+1} = e^{-t}\int\limits_t^\infty f(x_\nu, y_\nu)\, e^t\, dt, \\ y_{\nu+1} = e^{-nt}\left\{\frac{b}{2} + \int\limits_t^\infty [m x_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)]\, e^{nt}\, dt\right\}. \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß diese Integrale existieren, und daß die Funktionen x_ν, y_ν den Ungleichungen genügen:

$$(4) \qquad \begin{cases} |x_\nu| \leqq a e^{-nt(1+\delta)} \leqq a e^{-nt}, \\ |y_\nu| \leqq b e^{-nt}, \end{cases}$$

also für $t \geqq 0$ nie aus dem Definitionsbereich von $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ herausfallen, so daß die sukzessive Berechnung möglich ist. In der Tat sind die Ungleichungen (4) für $\nu = 1$ wegen (2) richtig. Gelten sie aber für einen bestimmten Wert ν, so ist auf Grund unserer Voraussetzungen über die Zahlen a, b

$$|x_\nu| + |y_\nu| \leqq e^{-nt},$$

$$|m x_\nu| \leqq |m|\, a e^{-nt(1+\delta)} \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)}.$$

Also folgt aus (3) mit Rücksicht auf (1):

$$|x_{\nu+1}| \leqq e^{-t}\int\limits_t^\infty na\delta\, e^{-nt(1+\delta)} e^t\, dt = \frac{na\delta}{n\delta + n - 1} e^{-nt(1+\delta)} \leqq a e^{-nt(1+\delta)},$$

weil in (F) ja $n \geqq 1$ sein soll. Ebenso:

$$|y_{\nu+1}| \leqq e^{-nt}\left\{\frac{b}{2} + \int\limits_t^\infty \left[\frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)}\right] e^{nt}\, dt\right\}$$

$$= e^{-nt}\left\{\frac{b}{2} + \frac{b}{2} e^{-nt\delta}\right\} \leqq b e^{-nt}.$$

Die Ungleichungen (4) bleiben also auch richtig, wenn man ν durch $\nu + 1$ ersetzt, und gelten daher allgemein.

Nun beweisen wir die weiteren Ungleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} |x_\nu - x_{\nu-1}| \leqq \frac{a e^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} \leqq \frac{a e^{-nt}}{2^{\nu-1}}, \\ |y_\nu - y_{\nu-1}| \leqq \frac{b e^{-nt}}{2^{\nu-1}}. \end{cases}$$

Zunächt ist nämlich

$$x_2 - x_1 = 0, \qquad y_2 - y_1 = \frac{b}{2} e^{-nt},$$

so daß für $\nu = 2$ die Formeln (5) richtig sind. Wenn sie aber für irgend einen Wert ν gelten, so ist mit Rücksicht auf die Voraussetzungen von Satz 6 und mit Rücksicht auf (4)

$$|f(x_\nu, y_\nu) - f(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})| \leqq \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

$$|\varphi(x_\nu, y_\nu) - \varphi(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})| \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}}.$$

Daher folgt aus (3):

$$|x_{\nu+1} - x_\nu| \leqq e^{-t} \int_t^\infty \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}} e^t dt = \frac{na\delta}{2^\nu} \frac{e^{-nt(1+\delta)}}{n\delta + n - 1} \leqq \frac{ae^{-nt(1+\delta)}}{2^\nu},$$

weil ja $n \geqq 1$ ist; und ebenso:

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{-nt} \int_t^\infty \left[\frac{|m|\, ae^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}} \right] e^{nt} dt$$

$$\leqq e^{-nt} \int_t^\infty \frac{nb\delta}{2} \frac{e^{-nt\delta}}{2^{\nu-1}} dt = \frac{be^{-nt(1+\delta)}}{2^\nu} \leqq \frac{be^{-nt}}{2^\nu}.$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Ungleichungen (5) bewiesen. Aus ihnen ergibt sich aber sofort die Existenz der Grenzwerte

$$(6) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_\nu = x = x(t), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} y_\nu = y = y(t), \end{cases}$$

und zwar gilt die Fehlerabschätzung:

$$(7) \qquad \begin{cases} |x - x_\nu| \leqq \dfrac{ae^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} \leqq \dfrac{ae^{-nt}}{2^{\nu-1}}, \\[2ex] |y - y_\nu| \leqq \dfrac{be^{-nt}}{2^{\nu-1}}. \end{cases}$$

Außerdem ist wegen (4) auch

$$(8) \qquad \begin{cases} |x| \leqq ae^{-nt(1+\delta)} \leqq ae^{-nt}, \\ |y| \leqq be^{-nt}, \end{cases}$$

so daß auch die Funktionswerte von x, y nie aus dem Definitionsbereich von $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ herausfallen.

Aus den Voraussetzungen von Satz 6 folgt dann weiter wegen (4), (8) und (7):

$$|f(x, y) - f(x_\nu, y_\nu)| \leqq \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_\nu, y_\nu)| \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

und daher ist

$$\lim_{\nu=\infty} \int_t^\infty f(x_\nu, y_\nu) e^t dt = \int_t^\infty f(x, y) e^t dt,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_t^\infty [m x_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)] e^{nt} dt = \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt.$$

Somit erhält man schließlich aus (3), indem man ν unbegrenzt wachsen läßt:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = e^{-t} \int_t^\infty f(x, y) e^t dt, \\ y = e^{-nt} \left\{ \frac{b}{2} + \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt \right\}. \end{cases}$$

Multipliziert man aber diese Gleichungen mit e^t bzw. e^{nt} und differenziert sie dann nach t, so folgt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -ny - mx - \varphi(x, y). \end{cases}$$

Daraus erkennt man, daß die Kurve mit den Gleichungen

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

eine Integralkurve der Differentialgleichung (F) ist, die wegen (8) für $t \to \infty$ in den Nullpunkt einmündet. Wir wollen jetzt zeigen, daß sie im Nullpunkt die positive Y-Achse berührt und daß sie auch eine Gleichung der Form $x = \Omega(y)$ hat.

Nach (1) und (8) ist

$$(11) \qquad |mx + \varphi(x, y)| \leqq |m| a e^{-nt(1+\delta)} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)} \leqq \frac{nb\delta}{2} e^{-nt(1+\delta)}.$$

Daher

$$\left| \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt \right| \leqq \int_t^\infty \frac{nb\delta}{2} e^{-nt\delta} dt = \frac{b}{2} e^{-nt\delta}.$$

Aus der zweiten Gleichung (9) folgt somit

$$(12) \qquad y \geqq \frac{b}{2} e^{-nt} (1 - e^{-nt\delta}).$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\frac{1}{n\delta}\log(1+\delta)=t_0, \tag{13}$$

$$\frac{b\delta}{2(1+\delta)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}=y_0, \tag{14}$$

so ist nach (12) insbesondere

$$y(t_0)\geqq y_0.$$

Für $t>t_0$ aber ist $(1+\delta)e^{-nt\delta}<1$, also

$$1-e^{-nt\delta}>\delta e^{-nt\delta},$$

so daß aus (11) und (12) folgt:

$$ny>|mx+\varphi(x,y)|,$$

und folglich nach der zweiten Gleichung (10):

$$\frac{dy}{dt}<0 \quad \text{für} \quad t>t_0. \tag{15}$$

Wenn daher t von t_0 an unbegrenzt wächst, so nimmt y dauernd ab, und zwar von einem Wert, der mindestens gleich y_0 ist, angefangen bis herab nach Null (wegen (8)). Daher ist auch umgekehrt im Intervall

$$0<y<y_0 \tag{16}$$

t eine eindeutige Funktion von y. Setzt man diese in die Funktion $x=x(t)$ ein, so erweist sich auch x als eine Funktion von y:

$$x=\Omega(y),$$

die im Intervall (16) existiert, eine stetige Ableitung $\Omega'(y)$ besitzt[8]) und für $y\to 0$ wegen (8) ebenfalls dem Grenzwert Null zustrebt. Wir können also zum Intervall (16) noch den Anfangspunkt $y=0$ hinzunehmen und definieren

$$\Omega(0)=0. \tag{17}$$

Aus (12) und (8) folgt weiter:

$$\lim_{y=0}\frac{\Omega(y)}{y^{1+\sigma}}=\lim_{t=\infty}\frac{x(t)}{[y(t)]^{1+\sigma}}=0 \quad \text{für} \quad \sigma<\delta, \tag{18}$$

---

[8]) Es ist nämlich

$$\Omega'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{x+f(x,y)}{ny+mx+\varphi(x,y)},$$

und hier sind Zähler und Nenner *stetige* Funktionen von t.

woraus sich auch die Differenzierbarkeit an der Stelle $y = 0$ ergibt, und zwar ist

$$\Omega'(0) = 0. \tag{19}$$

Endlich folgt aus (10), (11) und (12):

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |x + f(x, y)| \leqq a e^{-nt(1+\delta)} + na\delta\, e^{-nt(1+\delta)},$$

$$\left|\frac{dy}{dt}\right| \geqq ny - |mx + \varphi(x, y)| \geqq \frac{nb}{2} e^{-nt}[1 - (1+\delta) e^{-nt\delta}].$$

Daher für genügend große t

$$|\Omega'(y)| = \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\left|\frac{dx}{dt}\right|}{\left|\frac{dy}{dt}\right|} < K e^{-nt\delta},$$

wo K eine Konstante. Mit Rücksicht auf (12) folgt hieraus noch:

$$\lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{y^\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta, \tag{20}$$

woraus sich wegen (19) die Stetigkeit von $\Omega'(y)$ auch an der Stelle $y = 0$ ergibt.

Damit ist Satz 6 bewiesen, soweit er sich auf positive y bezieht. Man findet aber, indem man statt der Gleichungen (3) die folgenden zugrunde legt:

$$x_{\nu+1} = e^{-t} \int_t^\infty f(x_\nu, y_\nu) e^t\, dt,$$

$$y_{\nu+1} = e^{-nt} \left\{ -\frac{b}{2} + \int_t^\infty [m x_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)] e^{nt}\, dt \right\},$$

durch genau die gleichen Schlüsse, wobei nur y jetzt negativ, und $\frac{dy}{dt}$ positiv ausfällt, daß auch für negative y ein Integral $x = \Omega(y)$ existiert mit den entsprechenden Eigenschaften. Der Beweis von Satz 6 ist damit vollendet.

§ 7.

Die Integralkurve des § 6 wird als krummlinige Y-Achse eingeführt.

Wir wollen die Differentialgleichung (F) jetzt weiter behandeln und dabei über $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ die in dem Fundamentalsatz Seite 123 formulierten Voraussetzungen machen. Dann gilt für $f(x, y)$ in hinreichender Nähe des Nullpunktes der Mittelwertsatz

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = (x_1 - x_2) f'_x(\xi, \eta) + (y_1 - y_2) f'_y(\xi, \eta),$$
$$\xi = \vartheta x_1 + (1 - \vartheta) x_2, \quad \eta = \vartheta y_1 + (1 - \vartheta) y_2, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

und entsprechend für $\varphi(x, y)$. Aus den Voraussetzungen über die partiellen Ableitungen schließt man aber weiter, daß in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes alle Bedingungen von Satz 6 erfüllt sind. Nach diesem Satz gibt es also ein Integral $x = \Omega(y)$, für welches

$$(1) \qquad \lim_{y=0} \frac{\Omega(y)}{|y|^{1+\sigma}} = 0, \qquad \lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{|y|^{\sigma}} = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma < \delta$$

ist. Setzt man $x = \Omega(y)$ in die Differentialgleichung (F) ein, so sieht man weiter, daß für die Funktion $\Omega(y)$ die folgende Identität besteht:

$$(2) \qquad \Omega(y) + f(\Omega(y), y) = [m\,\Omega(y) + n\,y + \varphi(\Omega(y), y)]\,\Omega'(y).$$

Nach dem, was wir in § 1 bewiesen haben, geht durch jeden Punkt in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes eine und nur eine Integralkurve, und nach Satz 1 münden sie alle in den Nullpunkt ein. Eine von ihnen hat die Gleichung $x = \Omega(y)$ und berührt daher im Nullpunkt die Y-Achse. Ob auch die andern im Nullpunkt eine bestimmte Tangente haben, wissen wir zunächst nicht. Um diese Frage zu prüfen, führen wir neue Variabeln ein, indem wir setzen:

$$(3) \qquad x = \xi + \Omega(\eta), \qquad y = \eta,$$

oder nach ξ, η aufgelöst:

$$(4) \qquad \xi = x - \Omega(y), \qquad \eta = y.$$

Die Differentialgleichung (F) geht dadurch über in:

$$\begin{aligned}&[\xi + \Omega(\eta) + f(\xi + \Omega(\eta), \eta)]\,d\eta \\ &= [m\,\xi + m\,\Omega(\eta) + n\,\eta + \varphi(\xi + \Omega(\eta), \eta)]\,[d\xi + \Omega'(\eta)\,d\eta].\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$P(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi + \Omega(\eta), \eta) - f(\Omega(\eta), \eta)}{\xi} & \text{für} \quad \xi \neq 0, \\ f'_x(\Omega(\eta), \eta) & \text{für} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

und ebenso

$$Q(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\xi + \Omega(\eta), \eta) - \varphi(\Omega(\eta), \eta)}{\xi} & \text{für} \quad \xi \neq 0, \\ \varphi'_x(\Omega(\eta), \eta) & \text{für} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

so ist nach dem Mittelwertsatz

$$P(\xi, \eta) = f'_x(\vartheta\xi + \Omega(\eta), \eta) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

wo übrigens ϑ noch von ξ und η abhängt, und eine analoge Darstellung gilt für $Q(\xi, \eta)$. Daraus erkennt man $P(\xi, \eta)$ und $Q(\xi, \eta)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes als stetige Funktionen von ξ, η, und aus unseren Voraussetzungen sowie aus der ersten Gleichung (1) folgt leicht:

$$(5) \qquad \lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{P(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{\delta}} = 0, \qquad \lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{Q(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{\delta}} = 0.$$

Der Differentialgleichung aber läßt sich die Form geben:

$$[\xi + \Omega(\eta) + f(\Omega(\eta), \eta) + \xi P(\xi, \eta)] d\eta$$
$$= [m\xi + m\Omega(\eta) + n\eta + \varphi(\Omega(\eta), \eta) + \xi Q(\xi, \eta)] [d\xi + \Omega'(\eta) d\eta],$$

und diese vereinfacht sich wegen der Identität (2) zu:

$$\xi [1 + P(\xi, \eta) - m\Omega'(\eta) - Q(\xi, \eta)\Omega'(\eta)] d\eta$$
$$= [m\xi + n\eta + m\Omega(\eta) + \varphi(\Omega(\eta), \eta) + \xi Q(\xi, \eta)] d\xi,$$

oder kürzer:

$$\xi [1 + R(\xi, \eta)] d\eta = [m\xi + n\eta + S(\xi, \eta)] d\xi, \tag{6}$$

wobei wegen (5) und den beiden Gleichungen (1) auch

$$\lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{R(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^\sigma} = 0, \qquad \lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{S(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{1+\sigma}} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta. \tag{7}$$

Die hier eingeführten Funktionen $R(\xi, \eta)$, $S(\xi, \eta)$ sind in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig. Dasselbe gilt, wenn

$$\frac{m\xi + n\eta + S(\xi, \eta)}{1 + R(\xi, \eta)} = m\xi + n\eta + \Phi(\xi, \eta)$$

gesetzt wird, auch von $\Phi(\xi, \eta)$, und wegen (7) ist

$$\lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{\Phi(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{1+\sigma}} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung aber nimmt die einfache Form an:

$$\xi d\eta = [m\xi + n\eta + \Phi(\xi, \eta)] d\xi. \tag{9}$$

Sie hat jedenfalls die Integralkurve $\xi = 0$, welcher nach (4) die im Nullpunkt die Y-Achse berührende Kurve $x = \Omega(y)$ entspricht. Für die übrigen Integralkurven unterscheiden wir drei Fälle.

Erster Fall: $m = 0$, $n > 1$. Dann ist für jedes andere Integral nach Satz 3

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi} = 0,$$

also auch

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi + \Omega(\eta)} = \lim_{\xi=0} \frac{\frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\Omega(\eta)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi}} = 0;$$

das besagt aber, daß jede von der Integralkurve $x = \Omega(y)$ verschiedene Integralkurve im Nullpunkt die X-Achse berührt. Damit ist für die spezielle Differentialgleichung

$$[x + f(x, y)] dy = [ny + \varphi(x, y)] dx \qquad (n > 1) \tag{Ia}$$

der Fundamentalsatz bewiesen.

Zweiter Fall: $m = 0$, $n = 1$. Dann gibt es nach Satz 4 sowohl für positive als für negative ξ eine Integralkurve, für welche

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi}$$

einen vorgegebenen endlichen Wert c hat; also ist auch

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi + \Omega(\eta)} = \lim_{\xi=0} \frac{\frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\Omega(\eta)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi}} = c,$$

und zwar hat x das gleiche Vorzeichen wie ξ. Damit wird der Fundamentalsatz für die spezielle Differentialgleichung

$$\text{(IIa)} \qquad [x + f(x, y)]\, dy = [y + \varphi(x, y)]\, dx$$

bewiesen sein, sobald wir noch zeigen können, daß in jeder Richtung *nur eine* Integralkurve durch den Nullpunkt geht. Nun geht aber die Differentialgleichung (IIa) durch die Substitution $y = xz$ über in:

$$x[x + f(x, xz)]\, dz = [\varphi(x, xz) - z f(x, xz)]\, dx,$$

oder wenn man zwei Funktionen $\psi(x, z)$, $\omega(x, z)$ durch die Gleichungen

$$\psi(x, z) = \begin{cases} |x|^{-1-\delta} f(x, xz) & \text{für } \; x \neq 0, \\ 0 & \text{für } \; x = 0, \end{cases}$$

$$\omega(x, z) = \begin{cases} |x|^{-1-\delta} \varphi(x, xz) & \text{für } \; x \neq 0, \\ 0 & \text{für } \; x = 0 \end{cases}$$

definiert, in:

$$\text{(10)} \quad [1 + \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^{\delta} \cdot \psi(x, z)]\, dz = [\omega(x, z) - z\, \psi(x, z)]\, |x|^{\delta - 1} dx.$$

Auf Grund der Voraussetzungen des Fundamentalsatzes erkennt man aber, daß die Funktionen $\psi(x, z)$, $\omega(x, z)$ in einem gewissen Bereich

$$|x| < a, \qquad |z - c| < b$$

stetige partielle Ableitungen nach z haben (insbesondere auch stetig für $x = 0$). Daher ist für die Differentialgleichung (10), wenn man noch $|x|^{\delta} = v$ setzt und z als Funktion von v sucht, die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und folglich gibt es *nur ein* Integral, welches für $v = 0$, d. h. $x = 0$ den Wert $z = c$ annimmt. Jeder vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahl, der nicht in die Y-Achse fällt (d. h. $c =$ endlich), wird also *nur von einer* Integralkurve der Differentialgleichung (IIa) berührt. Das gleiche gilt aber auch von der positiven und negativen Y-Achse, wie man erkennt, wenn man in (IIa) x und y ihre Rollen tauschen läßt.

Dritter Fall: $m \neq 0$, $n = 1$. Dann ist nach Satz 5

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{m\,\xi} = -\infty;$$

also

$$\lim_{y=0} \frac{y}{m\,(x-\Omega(y))} = \mp\infty.$$

Hieraus folgt im Verein mit der ersten Gleichung (1):

$$\lim_{y=0} \frac{x}{y} = 0,$$

so daß die Integralkurven die Y-Achse berühren. Und zwar hat

$$m\,(\Omega(y) - x)$$

in hinreichender Nähe des Nullpunkts stets das gleiche Vorzeichen wie y. Die Integralkurven liegen also für positive y sämtlich auf der einen, für negative y auf der andern Seite der Kurve $x = \Omega(y)$. Damit ist der Fundamentalsatz auch bewiesen für die Differentialgleichung

$$\text{(IIIa)} \qquad [x + f(x, y)]\,dy = [m\,x + y + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (m \neq 0).$$

§ 8.

Zurückführung des allgemeinen Falles auf die behandelten Spezialfälle mit Hilfe einer affinen Transformation.

Wir wollen jetzt die allgemeine Differentialgleichung (A) durch eine reelle affine Transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y, \end{cases} \qquad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$$

in die im vorigen Paragraphen behandelten Differentialgleichungen überzuführen versuchen. Dabei wird es gelingen, die in dem Fundamentalsatz unterschiedenen drei Fälle (I), (II), (III) der Reihe nach gerade auf die Differentialgleichungen (Ia), (IIa), (IIIa) zurückzuführen[9]), womit der Fundamentalsatz vollständig bewiesen sein wird.

Durch die Transformation (1) geht die Differentialgleichung (A) über in die folgende:

$$(2) \qquad [\varkappa X + \lambda Y + F(X, Y)]\,dY = [\mu X + \nu Y + \Phi(X, Y)]\,dX.$$

[9]) Diese Transformation ist von allen Autoren bereits benutzt worden und wird hier nur der Vollständigkeit halber nochmals durchgeführt.

Dabei ist

$$(3)\quad \begin{cases} \varkappa = (k\alpha_1 + l\alpha_2)\beta_2 - (m\alpha_1 + n\alpha_2)\beta_1, \\ \lambda = (k\beta_1 + l\beta_2)\beta_2 - (m\beta_1 + n\beta_2)\beta_1, \\ \mu = -(k\alpha_1 + l\alpha_2)\alpha_2 + (m\alpha_1 + n\alpha_2)\alpha_1, \\ \nu = -(k\beta_1 + l\beta_2)\alpha_2 + (m\beta_1 + n\beta_2)\alpha_1, \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} F(X, Y) = \beta_2 f(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y) - \beta_1 \varphi(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y), \\ \Phi(X, Y) = -\alpha_2 f(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y) + \alpha_1 \varphi(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y). \end{cases}$$

Die in dem Fundamentalsatz über $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ gemachten Voraussetzungen übertragen sich daher unmittelbar auf $F(X, Y)$ $\Phi(X, Y)$.

Nun müssen wir die drei Fälle des Fundamentalsatzes trennen.

Erster Fall:

$$(k - n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm > 0.$$

Hier hat die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} k-\varrho & l \\ m & n-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

zwei verschiedene reelle Wurzeln von gleichem Vorzeichen. Wir bezeichnen die absolut kleinere mit ϱ, die absolut größere mit σ; also ist

$$|\sigma| > |\varrho| > 0, \qquad \frac{\sigma}{\varrho} > 1.$$

Nun wählen wir die Transformationskoeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ so, daß

$$\varrho\alpha_1 = k\alpha_1 + l\alpha_2, \qquad \sigma\beta_1 = k\beta_1 + l\beta_2,$$
$$\varrho\alpha_2 = m\alpha_1 + n\alpha_2, \qquad \sigma\beta_2 = m\beta_1 + n\beta_2$$

ist. Das ist möglich, weil ja ϱ, σ die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung sind. Hierdurch werden α_1, α_2 bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt; ebenso β_1, β_2. Man sieht auch sofort, daß $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, daß die getroffene Wahl also zulässig ist. Die Proportionalitätsfaktoren wollen wir so wählen, daß

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{\varrho}$$

ist. Dann ergeben sich für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus (3) die Werte:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \varrho\alpha_1\beta_2 - \varrho\alpha_2\beta_1 = 1, \\ \lambda &= \sigma\beta_1\beta_2 - \sigma\beta_2\beta_1 = 0, \\ \mu &= -\varrho\alpha_1\alpha_2 + \varrho\alpha_2\alpha_1 = 0, \\ \nu &= -\sigma\beta_1\alpha_2 + \sigma\beta_2\alpha_1 = \frac{\sigma}{\varrho} > 1. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (2) ist daher die folgende:

$$[X + F(X, Y)]\,dY = [\nu Y + \Phi(X, Y)]\,dX \qquad (\nu > 1);$$

sie hat also die Form der Differentialgleichung (Ia) des vorigen Paragraphen.

Zweiter Fall:

$$(k-n)^2+4lm=0, \quad kn-lm \neq 0, \quad |l|+|m|=0.$$

Hier ist $l=m=0$, $k=n\neq 0$. Die Differentialgleichung (A) nimmt also, wenn man sie durch k dividiert, bereits die Form (IIa) des vorigen Paragraphen an; eine affine Transformation ist nicht mehr nötig.

Dritter Fall:

$$(k-n)^2+4lm=0, \quad kn-lm \neq 0, \quad |l|+|m|>0.$$

Wenn jetzt $l=0$, so ist $k=n\neq 0$, $m\neq 0$. Die Differentialgleichung (A) geht daher schon, indem man sie durch k dividiert, in die Form (IIIa) über, und es ist keine affine Transformation mehr nötig. Daher sei jetzt

$$l \neq 0.$$

Dann folgt aus

$$(k+n)^2-4(kn-lm)=(k-n)^2+4lm=0,$$

weil $kn-lm\neq 0$ ist, gewiß auch

$$k+n\neq 0.$$

Für die Transformationskoeffizienten wählen wir nun die Werte

$$\alpha_1=0, \quad \beta_1=\frac{-2}{k+n},$$

$$\alpha_2=1, \quad \beta_2=\frac{k-n}{l(k+n)}.$$

Dann ist $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$, die Wahl also zulässig. Für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ findet man aber aus (3) sogleich die Werte:

$$\varkappa=1, \quad \lambda=0, \quad \mu=-l\neq 0, \quad \nu=1,$$

so daß die transformierte Differentialgleichung (2) die Form (IIIa) des vorigen Paragraphen hat.

(Eingegangen am 21. 12. 1921.)