2.

Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.

Second mémoire.

(Par M. *Charles Hermite,* à Paris.)

Dans mon premier mémoire qui a eu pour principal objet l'étude des formes biquadratiques, j'ai eu soin de considérer séparément, la théorie *algébrique* et la théorie *arithmétique* de ces formes. Relativement aux formes *quadratiques,* une pareille distinction serait inutile, en raison du petit nombre de notions algébriques qu'il est nécessaire d'établir comme base des considérations arithmétiques. Mais dès qu'on s'élève aux formes *binaires* de degré quelconque, on voit la théorie algébrique, prendre un développement inattendu et digne du plus grand intérèt. En effet, en présence des éléments analytiques nouveaux, dont elle manifeste l'existence, les notions les plus simples et les plus faciles qui nous sont requises par l'étude des formes quadratiques, viennent alors s'offrir sous un tout autre aspect, et parfois donnent naissance à des notions nouvelles. Je me propose d'en montrer ici un exemple, en traitant de la distribution en ordres des formes *cubiques* et *biquadratiques.*

M. *Eisenstein,* dans son beau mémoire intitulé: Nouveaux théorèmes d'arithmétique transcendante, publié tome 35 de ce journal, a déjà remarqué que la présence des formes adjointes dans la théorie des formes quadratiques *ternaires,* conduisait à faire reposer la distribution en ordres de ces formes, sur un principe nouveau et différent de celui que M. *Gauss* a donné pour les formes *binaires.* Nous allons voir que pour les formes *cubiques* et *biquadratiques,* le principe de M. *Eisenstein,* va lui-même se présenter sous un jour plus étendu, et conduira à trois subdivisions différentes de la totalité des formes qui possèdent les mêmes *invariants fondamentaux.*

C'est là d'ailleurs un résultat qui appartient en propre aux formes dont nous parlons; de sorte que la forme du cinquième degré et celle de degrés plus élevés, donnent lieu pour la distribution en ordres à des considérations toutes différentes. Plusieurs autres faits se présenteront, comme nous l'avons déjà annoncé dans la suite de ces recherches, pour manifester dans des circonstances variées, cette différence de nature qu'on rapproche naturellement de cette différence analytique si profonde, entre les racines des équations des quatre premiers degrés, qui s'expriment par simples radicaux, et celles de degrés plus élevés qu'il est impossible d'obtenir de cette manière.

Dans l'espérance que de pareilles considérations intéresseraient peut-être, j'ai développé avec détails, l'application aux formes du *cinquième* degré des propositions algébriques générales sur lesquelles reposent la distribution en ordre des formes binaires. Plusieurs des résultats qui se présenteront dans cette application, se retrouveront d'ailleurs et joueront un rôle important dans l'étude spéciale des formes du cinquième degré, à laquelle je consacrerai prochainement un nouveau mémoire.

I.

Principe de la distribution en ordres des formes binaires.

Il est un point de vue sous lequel la notion des ordres de classes quadratiques de même *déterminant* s'étend immédiatement à toutes les formes, quel que soit leur degré et le nombre de leurs indéterminées. Ainsi, en ne considérant que les formes *binaires,* et leur appliquant la méthode suivie par M. *Gauss* dans le §. 226 des „Disquisitiones Arithmeticae", on peut nommer *primitives,* toutes les formes

$$f = (a, b, c, \ldots \widehat{)(x, y})^m$$

de mêmes *invariants,* dans lesquelles le plus grand commun diviseur de $a, b, c,$ etc. est l'unité. Cela dit, l'ordre *proprement primitif,* sera défini comme réunissant toutes les formes dans lesquelles le plus grand commnn diviseur de

$$a,\ mb,\ \frac{m.m-1}{1.2}c, \text{ etc.}$$

sera l'unité, et ensuite on obtiendra autant d'ordres *improprement primitifs* que le plus grand commun diviseur de ces mêmes nombres pourra recevoir de valeurs distinctes.

Maintenant, si l'on passe aux formes

$$F = (A, B, C, \ldots \widehat{)(x, y})^m,$$

dont les coefficients $A, B, C, \ldots$ ont un plus grand commun diviseur δ, on pourra les nommer *dérivées* des formes primitives $f = \frac{1}{\delta} F$. Cela posé, pour chaque valeur de δ, on aura un groupe de formes dérivées, dont la distribution en ordres suivra immédiatement celles des formes primitives qui leur correspondent. Rien de plus facile, on le voit, que cette première extension des principes de Mr. *Gauss* qu'il nous a suffi d'indiquer en peu de mots. Mais dès qu'on considère d'autres formes que les formes *quadratiques* à deux indéterminées, on voit intervenir de nouveaux éléments analytiques qui jouent dans toute la théorie un rôle essentiel; ce sont les formes *adjointes*, et les formes nommées *covariants* par Mr. *Sylvester*. Ces deux genres de formes ne sont pas essentiellement distincts, comme on le sait, dans la théorie des formes *binaires;* ils se ramènent aux seuls covariants dont je crois devoir encore rappeler la propriété caractéristique.

Soit

$$f = (a, b, c, \ldots \widehat{\;)\;}(x, y)^m$$

une forme binaire, et supposons qu'on ait identiquement:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{\;)\;}(\xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y)^m = (A, B, C, \ldots \widehat{\;)\;}(x, y)^m,$$

on donnera le nom de *covariant* de f, à toute fonction $\varphi(a, b, c, \ldots; x, y)$ rationnelle et entière en $a, b, c, \ldots; x, y$, qui satisfait à la condition

$$(A.) \quad (\xi\eta' - \eta\xi')^s \varphi(a, b, c, \ldots; \xi x + \xi' y, \eta x + \eta' y) = \varphi(A, B, C, \ldots; x, y),$$

l'exposant de la puissance à laquelle est élevé le déterminant de la substitution $\xi\eta' - \eta\xi'$, étant *entier* et *positif*. Cela posé, il est bien facile de reconnaître que le plus grand commun diviseur des coefficients d'un *covariant* quelconque φ, de la forme f, sera un élement numérique, caractéristique de la classe entière à laquelle appartient cette forme. Nommant pour un instant, φ', une expression *semblable* à φ, mais se rapportant à une forme f' arithmétiquement équivalente à f, il suit de l'équation $(A.)$, que φ et φ' seront elles mêmes arithmétiquement *équivalentes*, et auront nécessairement le même plus grand commun diviseur pour leurs coefficients. L'ensemble des classes, f, f_1, f_2, etc. qui ont les mêmes *invariants*, peut être ainsi divisé en ordres, en appliquant le principe même de Mr. *Gauss*, tel que nous l'avons présenté tout-à-l'heure, aux *covariants* φ, φ_1, φ_2, etc. qui leur correspondent respectivement. Et par là, on voit s'offrir autant de divisions en ordres, que de covariants distincts, de sorte que l'idée arithmétique très simple, qui nous a été donnée par la théorie des formes quadratiques, reçoit par le fait de l'existence des divers covariants, un développement aussi intéressant que difficile à suivre. On est conduit en effet à ces problèmes, sources de belles recherches analytiques:

1°. Trouver tous les covariants des formes d'un degré donné.

2°. Trouver comment dépendent des *invariants* fondamentaux, les diviseurs d'un *covariant* quelconque, qui fournissent les caractères d'une division en ordres, relative à ce covariant.

3°. Comparer entre elles toutes les divisions en ordre qui reposent sur la considération des divers covariants.

C'est la solution de ces questions que nous nous proposons d'offrir pour les formes *cubiques* et *biquadratiques.* Elle se fonde principalement sur les propositions générales que nous allons établir.

II.

Propositions sur les covariants des formes binaires.

1re Proposition. Soient g et h, deux covariants quelconques de la forme

$$f = \widehat{(a, b, c, \ldots)}(x, y)^m,$$

de sorte qu'en faisant:

$$\widehat{(a, b, c, \ldots)}(kx + \varkappa y, lx + \lambda' y)^m = \widehat{(A, B, C, \ldots)}(x, y)^m$$

et pour abréger:

$$\omega = k\lambda - \varkappa l,$$

on ait:

$$(1.)\quad \omega^s g(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y, lx + \lambda y) = g(A, B, C, \ldots;\ x, y),$$

$$(2.)\quad \omega^t h(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y, lx + \lambda y) = h(A, B, C, \ldots;\ x, y).$$

Je dis qu'en posant:

$$(3.)\quad g\left(a, b, c, \ldots;\ xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y, yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right) = \theta(a, b, c, \ldots;\ x, y, X, Y),$$

on aura l'identité

$$(4.)\quad \omega^s \theta(a, b, c, \ldots;\ kx + \varkappa y, lx + \lambda y, X, \omega^{t+1} Y) = \theta(A, B, C, \ldots;\ x, y, X, Y).$$

Ainsi les coefficients des divers termes en X et Y dans cette fonction θ, se vérifieront de même forme que (1.) et (2.), et seront dèslors des covariants de f.

Soit:

$$\xi = kx + \varkappa y, \qquad \eta = lx + \lambda y$$

$$u = xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y, \quad v = yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y;$$

nommons U et V, ce que deviennent respectivement u et v, quand on remplace les coefficients $a, b, c, \ldots$ qui entrent dans la forme h, par $A, B, C, \ldots$ de sorte que;

$$(5.) \quad U = xX - \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} Y, \quad V = yX + \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} Y,$$

je vais établir comme lemme, qu'on aura:

$$(6.) \quad \begin{cases} kU + \varkappa V = \xi X - \omega^{t+1} \dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} Y, \\ lU + \lambda V = \eta X + \omega^{t+1} \dfrac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} Y. \end{cases}$$

J'observe pour cela que l'identité (2.), ou ce qui revient au même, celle-ci:

$$\omega^t h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta) = h(A, B, C, \ldots;\ x, y)$$

donne par la différentiation:

$$(7.) \quad \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} = \omega^t \left\{ k \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + l \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\},$$

$$(8.) \quad \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} = \omega^t \left\{ \varkappa \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \xi} + \lambda \cdot \frac{\partial h(a, b, c, \ldots;\ \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}.$$

Or les équations (5.) donnent immédiatement:

$$kU + \varkappa V = (kx + \varkappa y) X + \left\{ \varkappa \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - k \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} \right\} Y,$$

$$lU + \lambda V = (lx + \lambda y) X + \left\{ \lambda \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial x} - l \cdot \frac{\partial h(A, B, C, \ldots;\ x, y)}{\partial y} \right\} Y,$$

et en substituant les valeurs des deux dérivées partielles que fournissent les équations (7.) et (8.), il vient précisément l'équation (6.) que nous nous proposions d'établir.

Cela posé, revenons à la relation (1.), que nous allons réproduire en écrivant U et V au lieu de x et y, savoir:

$$(9.) \quad \omega^s g(a, b, c, \ldots;\ kU + \varkappa V, lU + \lambda V) = g(A, B, C, \ldots;\ U, V),$$

et à la relation (3.) par laquelle est définie la fonction θ:

$$(10.) \quad g(a, b, c, \ldots;\ u, v) = \theta(a, b, c, \ldots;\ x, y, X, Y).$$

Si dans cette dernière identité nous substituons $A, B, C, \ldots$ à $a, b, c, \ldots,$ il faudra aussi mettre U et V au lieu de u et v, et il viendra:

$$g(A, B, C, \ldots; \; U, V) = \theta(A, B, C, \ldots; \; x, y, X, Y),$$

ou bien, à cause de l'équation (9.):

$$\omega^s g(a, b, c, \ldots; \; kU + \varkappa V, lU + \lambda V) = \theta(A, B, C, \ldots; \; x, y, X, Y).$$

Maintenant il résulte du lemme précédemment établi (équat. 6.) que $kU + \varkappa V$, $lU + \lambda V$, qui entrent dans le premier membre, sont ce que deviennent respectivement u et v, lorsqu'on y remplace x et y par ξ et η, et qu'on multiplie Y par ω^{t+1}. L'expression $g(a, b, c, \ldots; \; kU + \varkappa V, lU + \lambda V)$ n'est donc autre chose, en vertu de l'équation (10.), que $\theta(a, b, c, \ldots; \; \xi, \eta, X, \omega^{t+1} Y)$, et nous obtenons de la sorte la relation que nous voulions établir, savoir:

$$\omega^s \theta(a, b, c, \ldots; \; \xi, \eta, X, \omega^{t+1} Y) = \theta(A, B, C, \ldots; x, y, X, Y).$$

On peut aisément juger par cette première proposition, de la multitude des *covariants* qui existent pour une forme donnée. Ainsi, en prennant g et h égaux à f, qui est évidemment un *covariant* par rapport à elle même, on en obtiendra un certain nombre, avec lesquels on pourra encore employer le même théorème. Si donc on ne retrouve pas ainsi des formes obtenues précédemment, on verra de nouveaux covariants naître de tous ceux qui se sont déjà présentés, et il semble bien difficile de déduire de là une expression analytique générale pour tant de quantités qui peuvent, tout en restant dans le même principe, naître les unes des autres, de tant de manières différents. Voici ce qu'il m'a été donné de trouver après de longues méditations sur ce sujet.

2^e^ *Proposition.* Nommons *covariants associés* à h, ceux qui résultent de la première proposition lorsqu'on suppose g égal à la forme f: je dis que tout covariant de f, quelqu'il soit, ou au moins son produit par une puissance entière de h, sera une fonction rationnelle et entière des *covariants associés.*

Pour mieux préciser d'abord, cette notion des *covariants associés,* reprenons l'éxpression analytique qui leur donne naissance, savoir:

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\!\widehat{\;}\!\left(xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y, \; yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right)^m.$$

Il conviendra, en nommant n le degré de h en x et y, d'écrire $\frac{1}{n} Y$ au lieu de Y. Cela étant, si l'on met en évidence les coefficients des divers termes en X et Y, il est clair que celui de X^m, sera la forme proposée f, et en faisant:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{\;)(}\; xX - \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}Y,\; yX + \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}Y)^m = (f, h_1, h_2, \ldots h_m \widehat{\;)(}\; X, Y)^m,$$

ces quantités $h_1, h_2, \ldots h_m$ seront ce que nous nommons dorénavant les *covariants associés* à h.

Cela posé, soit $\pi(a, b, c, \ldots;\, x, y)$ un covariant quelconque de f; nous pourrons écrire les deux identités:

$$(a, b, c, \ldots \widehat{\;)(}\; xX + x'Y, yX + y'Y)^m = (A, B, C, \ldots \widehat{\;)(}\; X, Y)^m$$

$$(xy' - yx')^\mu \pi(a, b, c, \ldots;\, xX + x'Y, yX + y'Y) = \pi(A, B, C, \ldots;\, X, Y),$$

μ étant un certain nombre entier. Maintenant faisons:

$$x' = -\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial y},\quad y' = \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial h}{\partial x},$$

les coefficients $A, B, C, \ldots$ deviendront respectivement f, h_1, h_2, etc., et le déterminant $xy' - yx'$, la forme h elle même. Supposons encore dans la seconde équation $X = 1$, $Y = 0$, son second membre se réduira évidemment au coefficient de la puissance la plus élevée de X, fonction rationnelle et entière de $A, B, C, \ldots$ que nous désignerons par $(A, B, C, \ldots)$. Il vient donc ainsi l'équation suivante:

$$(11.)\quad h^\mu \pi(a, b, c, \ldots;\, x, y) = (f, h_1, h_2, \ldots)$$

par laquelle notre proposition se trouve démontrée.

Pour en montrer immédiatement une application, nous allons faire voir que tous les covariants d'une forme quadratique $f = (a, b, c \widehat{\;)(}\; x, y)^2$, s'obtiennent en multipliant une puissance de f par une puissance de l'invariant $b^2 - ac$.

Remarquons d'abord que le second membre de la relation (11.), est homogène en f, h_1, h_2, etc., car il provient de l'expression $(A, B, C, \ldots)$ qui est nécessairement homogène en $A, B, C, \ldots$ puisqu'en général tout covariant d'une forme est une fonction entière homogène des coefficients de cette forme. Cela étant, on trouve en prennant $h = f$:

$$(a, b, c \widehat{\;)(}\; xX - \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX + \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}Y)^2 = (f, 0, (ac - b^2)f \widehat{\;)(}\; X, Y)^2,$$

et:

$$f^\mu . \pi(a, b, c;\, x, y) = (f, 0, (ac - b^2)f).$$

Or le second membre, devant être homogène par rapport aux deux quantités

f et $(ac-b^2)f$, ne peut être que le produit d'une puissance de f par une fonction de l'invariant, et pour qu'un tel résultat soit aussi homogène en a, b, c, cette fonction de l'invariant doit être proportionnelle à une simple puissance. Donc tout covariant de la forme quadratique proposée, fonction rationnelle et entière de x, y, et a, b, c, par définition, est compris dans la formule $(b^2-ac)^i.f^k$, i et k étant entiers.

Si simple et si prévu que fût ce résultat, je n'ai pas cru inutile de l'établir rigoureusement, à cause des conséquences qui s'en déduiront par l'application de la loi de réciprocité: conséquences que j'ai déjà indiquées dans le journal de Mr. *Thompson*. D'ailleurs il montre sous un certain point de vue, comment les formes *quadratiques* se distinguent de formes *cubiques* et *biquadratiques*, dont nous allons nous occuper, tout en partageant avec elles une propriété caractéristique que nous verrons tout-à-coup disparaître dans les formes du *cinquième* degré. Nous ferons précéder ces questions de quelques remarques sur le système particulier des covariants qui sont associés à la forme proposée.

III.

Sur le système des covariants associés à la forme proposée.

On l'obtient en mettant en évidence, les divers termes en X et Y, dans l'expression

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(xX-\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX+\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}Y\right)^m,$$

de sorte que si nous faisons:

$$\left(a, b, c, \ldots\right)\!\!\widehat{}\!\!\left(xX-\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}Y,\quad yX+\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}Y\right)^m = (f, f_1, f_2, \ldots f_m)\widehat{}(X, Y)^m,$$

les covariants associés à f, se trouveront désignés par f_1, f_2, ... f_m. Leurs premiers termes s'obtiennent facilement; car en faisant $y=0$, dans les expressions

$$xX-\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}Y \quad \text{et} \quad yX+\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}Y,$$

elles deviennent simplement:

$$xX-bY \quad \text{et} \quad aY.$$

En faisant pour abréger $\dfrac{1}{m.m-1\ldots m-i+1}\cdot\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}=\varphi_i(x,y)$, on trouvera ainsi:

$$f_i = \varphi_i(-b, a)\,x^{(i+1)m-2i}+\cdots$$

Ce coefficient $\varphi_i(-b, a)$, est divisible par a, comme on le voit aisément; il s'ensuit, qu'en employant la méthode donnée dans mon premier mémoire, pour déduire un covariant de son premier terme, on obtiendra la forme f en facteur commun dans la série entière des covariants associés. Cette remarque faite, je vais étudier de plus près les quotients $\frac{1}{a}\varphi_i(-b, a)$, en supposant à i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, pour lesquelles on trouve les coefficients de f; suivant l'ordre alphabétique:

$$\frac{1}{a}\varphi_1(-b, a) = 0,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b, a) = -b^2 + ac,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b, a) = 2b^3 - 3abc + a^2 d,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b, a) = -3b^4 + 6acb^2 - 4bda^2 + ea^3,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b, a) = 4b^5 - 10acb^3 + 10b^2 da^2 - 5bea^3 + fa^4.$$

Introduisons pour cela, les expressions suivantes; savoir:

A, invariant de $\varphi_2(x, y) = b^2 - ac$,
B, id. $\varphi_3(x, y) = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$,
C, id. $\varphi_4(x, y) = ae - 4bd + 3c^2$,
D, id. $\varphi_5(x, y) = (af - 3be + 2cd)^2 - 4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2)$,

on verifiera sans peine les relations:

$$\frac{1}{a}\varphi_2(-b, a) = -A,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_3(-b, a) = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\partial B}{\partial d},$$

$$\frac{1}{a}\varphi_4(-b, a) = a^2 C - 3A^2,$$

$$\frac{1}{a}\varphi_5(-b, a) = \tfrac{2}{3}A\frac{\partial B}{\partial d} - \tfrac{1}{2}a^2\frac{\partial B}{\partial f}.$$

Cela posé, soient g, g', les invariants analogues à A, C, mais relatifs aux formes

$$\frac{1}{m.m-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\!\left(X, Y\right)^2$$

$$\frac{1}{m.m-1.m-2.m-3}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)\!\widehat{}\!(X, Y)^4,$$

et h, et h', les quantités:

$$h = \frac{1}{m(m-2)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$h' = \frac{1}{4m(m-3)}\left(\frac{\partial g'}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g'}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

on aura ces expressions des premiers covariants associés de f, savoir:

$$\begin{aligned} f_2 &= -f.g, \\ f_3 &= f.h, \\ f_4 &= f.(f^2 g' - 3g^2), \\ f_5 &= f.(2gh - f^2 h'). \end{aligned}$$

Cela résulte immédiatement, de ce que leurs termes les plus élevés en x, ont précisément pour coefficients les quantités $\varphi_2(-b, a)$, $\varphi_3(-b, a)$, etc. Mais je ne m'arreterai pas à le vérifier, m'étant seulement proposé de faire voir, comment viennent s'offrir dans ma théorie, les covariants auxquels Mr. ***Sylvester*** a donné les désignations de ***Hessieurs*** ou ***Démanants,*** et qui ont été nommés précédemment g, g', g''.

IV.

Division en ordres des formes cubiques.

D'après ce que nous avons dit en commençant, le point de départ de cette théorie de la division en ordres, est la recherche complète de tous les covariants des formes *cubiques.* Nous allons nous en occuper, en nous fondant sur les propositions générales précédemment établies.

Soit la forme proposée:

$$f = (a, b, c, d)\widehat{}(x, y)^3,$$

on trouvera d'abord pour ses covariants associés, f_1 étant identiquement nul, les expressions $f_2 = -fg$, $f_3 = -fh$. Afin d'introduire par la suite $2g$ au lieu de g, nous écrivons: $f_2 = -\frac{1}{2}fg$, et nous aurons ces valeurs:

$$g = (2(b^2 - ac), bc - ad, 2(c^2 - bd))\widehat{}(x, y)^2,$$

$$h = (2b^3 - 3abc + a^2 d, b^2 c + abd - 2ac^2, -c^2 b + 2b^2 d - acd, -2c^3 + 3bcd - ad^2)\widehat{}(x, y)^3.$$

Cela posé, recherchons si d'autres covariants ne naitraient pas, par exemple, du développement de:

$$\left(a, b, c, d\right)\!\!\widehat{\;}\!\!\left(xX - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}X\right)^3.$$

Or on trouve sans peine que:

$$\left(a, b, c, d\right)\!\!\widehat{\;}\!\!\left(xX - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}X\right)^3 = (f, h, \varDelta f, \varDelta h)\widehat{\;}(X, Y)^3,$$

$\varDelta$ désignant l'invariant unique de f, savoir:

$$\varDelta = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 4ac^3 + 4db^3 + a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2.$$

Ce sont donc encore f et h qui se présentent, mais accompagnés maintenant de ***l'invariant*** $\varDelta$. Notre seconde proposition (§. II.) conduit ainsi à ces deux conclusions:

> Tout covariant θ de la forme ***cubique*** f, est exprimable, soit de cette manière:
>
> $$(1.)\qquad \theta = \frac{\Pi(f, g, h)}{f^\mu},$$
>
> soit de la suivante:
>
> $$(2.)\qquad \theta = \frac{\Phi(f, h, \varDelta)}{g^\nu},$$
>
> les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants μ et ν, étant entiérs. Or de là il est facile de conclure, que θ peut également s'exprimer par une fonction entière de f, g, h et $\varDelta$.

Pour établir la démonstration, j'observe d'abord, que deux quelconques de ces trois quantités, f, g, h, peuvent être regardées comme entièrement indépendantes. On le voit en considérant un cas particulier. Soit p. ex. $f = x^3 + y^3$, on trouvera: $g = -2xy$, $h = x^3 - y^3$: quantités qui, envisagées deux à deux, ne peuvent être liées par aucune relation, indépendante de x et y. Mais entre f, g, et h, une telle relation existe nécessairement, et s'obtient en comparant les invariants des deux formes $(a, b, c, d)\widehat{\;}(x, y)^3$ et $(f, 0, -\frac{1}{2}fg, fh)\widehat{\;}(X, Y)^3$, qui sont respectivement $\varDelta$ et $f^4h^2 - \frac{1}{2}f^4g^3$. Or la seconde, résultant de la première, par la substitution linéaire au déterminant f, qui donne naissance aux covariants associés à f, on trouvera:

$$\varDelta f^6 = f^4h^2 - \tfrac{1}{2}\varDelta f^4 g^3,$$

et plus simplement:

$$(3.)\qquad \varDelta f^2 + \tfrac{1}{2}g^3 = h^2.$$

(Cette équation a été recemment indiquée par Mr. *Cayley*, dans un mémoire intitulé: Nouvelles recherches sur les covariants.)

Cela posé, j'observe que les numérateurs dans les expressions (1.) et (2.) de θ, pourront être ramenés en vertu de cette relation, à contenir seulement la première puissance de h; ainsi on pourra écrire:

$$\Pi(f,g,h) = \Pi_0(f,g,\Delta) + h\Pi_1(f,g,\Delta),$$
$$\Phi(f,h,\Delta) = \Phi_0(f,g,\Delta) + h\Phi_1(f,g,\Delta),$$

les nouvelles fonctions, Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1, étant essentiellement entières en f, g, et Δ.

Égalons maintenant les deux expressions du covariant θ, il viendra:

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f,g,\Delta) + \frac{h}{f^\mu}\Pi_1(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f,g,\Delta) + \frac{h}{g^\nu}\Phi_1(f,g,\Delta).$$

Or je dis qu'on devra avoir séparement:

$$(4.)\qquad \frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f,g,\Delta),$$

$$(5.)\qquad \frac{1}{f^\mu}\Pi_1(f,g,\Delta) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_1(f,g,\Delta).$$

Effectivement, s'il n'en était pas ainsi, on aurait entre f, g, h, une équation essentiellement distincte de (3.), contenant h au premier degré seulement. Il serait donc possible, en éliminant cette quantité, d'obtenir entre f et g, une relation indépendante de x et y; contrairement à ce que nous avons précédemment établi. Or l'égalité (4.), lorsqu'on a chassé les dénominateurs, prouve immédiatement que Π_0 est divisible par f^μ, et Φ_0 par g^ν. Une conséquence toute semblable se tire de l'égalité (5.). Ainsi nous avons ce théorème:

> Tout covariant de la forme cubique proposée f, est une fonction entière de f, g, h et de l'invariant Δ; le covariant h, pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette fonction.

Delà découlent beaucoup de conséquences sur lesquelles nous aurons à revenir dans la suite de ces recherches. En nous bornant maintenant à ce qui se rapporte à la division en ordres des formes *cubiques*, nous voyons que cette division peut être faite de trois manières différentes.

Soient en effet: f, f', f'', $\dots f^{(i)}$ les formes par lesquelles on peut représenter la totalité des classes *cubiques* différentes pour un même invariant Δ; à ces formes correspondront d'une part, les covariants *quadra-*

tiques, g, g', g'', ... $g^{(i)}$, et de l'autre les covariants *cubiques*, h, h', h'', ... $h^{(i)}$. Cela posé, chacun de ces trois groupes de formes, que pour abréger nous nommerons (f), (g) et (h), pourra tout d'abord être individuellement divisé en ordres, en appliquant le principe de Mr. *Gauss*, tel que nous l'avons présenté (§. I.). Or en réunissant dans le même groupe, toutes les formes de (f), dont les covariants quadratiques appartiennent au même ordre dans (g), on obtiendra une seconde division en ordres de (f), que nous dirons attachée à g. Et semblablement, si l'on prend pour point de départ la division en ordres de (h), et qu'on réunisse encore dans un même groupe les formes de (f), dont les covariants *cubiques* appartiennent au même ordre de (h), on arrivera à une troisième division en ordre de (f), que nous dirons attachée à h. De ces deux dernières divisions, celle qui est attachée à g, a la plus grande importance; comme nous nous reservons de le montrer dans un autre mémoire. Elle sert de base en effet à la détermination complète du nombre des classes cubiques pour un invariant donné: recherche que Mr. *Eisenstein* a déjà traité d'une manière aussi ingénieuse qu'élegante, mais seulement dans un cas particulier. Pour ce qui regarde la division en ordres attachée au covariant h, je ne puis la justifier que par l'analogie avec la précédente, car jusqu'ici je n'ai pas encore été amené à en faire usage, et à la caractériser par quelque propriété arithmétique particulière. Cependant dans plusieurs circonstances, j'ai vu le covariant h, jouer un rôle important, et j'en vais citer un exemple, qui se rapporte précisément à la recherche du nombre des classes *cubiques*. Il est nécessaire dans la méthode que j'ai suivie, d'obtenir l'expression analytique de toutes les formes, pour lesquelles le covariant quadratique est le même. Or f désignant une forme determinée dont le covariant quadratique est g, toutes les autres qui auront le même covariant, seront données par la formule: $tf+uh$, h étant le covariant cubique de f; t et u des constantes liées par la relation

$$t^2 - \Delta u^2 = 1.$$

Il me reste encore à indiquer comment les diviseurs communs des coefficients de f, g, ou h, dépendent de Δ. Or en nommant λ, μ, ν, ces diviseurs, et remarquant que les invariants de f, g, h, à savoir: Δ, Δ, et Δ^3, sont respectivement des fonctions homogènes du 4^e du 2^e et encore du 4^e ordre, des coefficients de ces formes, on voit immédiatement que:

$$\begin{array}{ll} \lambda^4 \text{ est un diviseur de } & \Delta, \\ \mu^2 \text{ id. } \ldots\ldots & \Delta, \\ \nu^4 \text{ id. } \ldots\ldots & \Delta^3. \end{array}$$

A ces relations, il faut aussi joindre les suivantes:

$$\begin{array}{ll} \lambda^2 \text{ est un diviseur des coefficients de } & g, \\ \lambda^3 \text{ id. } \ldots\ldots\ldots\ldots & h, \\ \mu \text{ id. } \ldots\ldots\ldots\ldots & 2h. \end{array}$$

Les deux premières sont évidentes, et la troisième suit de l'équation

$$6h = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x},$$

dont le second membre contient le facteur *trois*, qui est amené par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

V.

Division en ordres des formes biquadratiques.

La recherche du système complet des covariants est le point de départ de cette question; comme de la précédente. Nous allons la traiter en nous proposant de mettre dans tout son jour, l'analogie que nous avons reconnue à cet égard, entre les formes *cubiques* et *biquadratiques*.

Soit, en conservant les dénominations de mon premier mémoire,

$$f = (a, b, c, b', a'\widehat{)}(x, y)^4$$

la forme proposée; ses covariants associés seront d'après les formules générales données à la fin du (§. III.):

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, \\ f_2 &= -fg, \\ f_3 &= fh, \\ f_4 &= f(if^2 - 3g^2), \end{aligned}$$

i étant *l'invariant quadratique* $aa' - 4bb' + 3c^2$; g et h, les *covariants* que nous avons déjà considérés, savoir:

$$g = (b^2 - ac,\ \tfrac{1}{2}(bc - ab'),\ \tfrac{1}{6}(3c^2 - 2bb' - aa'),\ \tfrac{1}{2}(b'c - a'b),\ b'^2 - a'c\widehat{)}(x, y)^4,$$

$$h = (p,\ q,\ r,\ s,\ r',\ q',\ p',\widehat{)}(x, y)^6,$$

en faisant pour abréger:

$$p = 2b^3 - 3abc + a^2b', \quad 6q = 6b^2c - 9ac^2 + 2abb' + a^2a' \text{ etc.}$$

Cela posé, les covariants associés à g, résulteront de l'identité suivante:

$$\left(a, b, c, b', a'\right)\!\left(xX - \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}Y,\ yX + \frac{1}{4}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}Y\right)^2$$

$$= \left(f, \tfrac{1}{2}h, -\tfrac{1}{4}f(jf+ih), -\tfrac{1}{8}h(jf+ih), -jg^3+\tfrac{7}{16}h(jf+ih)^2\right)\!\left(X, Y\right)^4,$$

qu'on vérifiera par un calcul un peu long, quoique sans difficulté, en réduisant les covariants à leurs premiers termes. Il en résulte que nous retrouvons les quantités f, g, h, accompagnées des deux invariants i et j. Ainsi la seconde proposition du (§. II.) conduit à ces deux conclusions:

Tout covariant θ de la forme biquadratique f, est exprimable, soit de cette manière:

$$(1.)\qquad \theta = \frac{\pi(f, g, h;\, i)}{f^\mu},$$

soit de la suivante:

$$(2.)\qquad \theta = \frac{\Phi(f, g, h;\, i, j)}{g^\nu};$$

les deux numérateurs étant des fonctions rationnelles et entières des diverses quantités qui y entrent, et les exposants, μ, ν, étant entiers.

Je vais maintenant établir que θ peut également s'exprimer par une fonction entière de f, g, h, i et j. J'observe d'abord que f et g ne sauraient être liés par aucune relation indépendante de x et y; comme on le voit en considérant le cas particulier de $f = x^4 + y^4$, qui donne $g = -x^2y^2$. Mais une telle relation existe entre f, g, et h, et a été établie dans mon premier mémoire, savoir:

$$4g^3 - igf^2 - jf^3 = h^2.$$

Or on voit que les numérateurs dans les expressions (1. et 2.) de θ, pourront être ramenés à l'aide de cette relation, à ne contenir que la première puissance de h. Ainsi on pourra écrire:

$$\Pi(f, g, h;\, i) = \Pi_0(f, g;\, i, j) + h\Pi_1(f, g;\, i, j),$$

$$\Phi(f, g, h;\, i, j) = \Phi_0(f, g;\, i, j) + h\Phi_1(f, g;\, i, j),$$

les nouvelles fonctions Π_0, Π_1, Φ_0, Φ_1, étant essentiellement entières en f, g, h, i et j. Il suit de là, en égalant les deux expressions du covariant θ:

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f, g;\, i\, j) + \frac{h}{f^\mu}\Pi_1(f, g;\, i, j) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f, g;\, i, j) + \frac{h}{g^\nu}\Phi_1(f, g;\, i, j);$$

donc, achevant de raisonner absolument comme nous l'avons fait pour les formes

cubiques, on obtiendra les équations séparées:

$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_0(f,g;i,j) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_0(f,g;i,j),$$
$$\frac{1}{f^\mu}\Pi_1(f,g;i,j) = \frac{1}{g^\nu}\Phi_1(f,g;i,j),$$

desquelles il résulte que Π_0 et Π_1 sont divisibles par f^μ; Φ_0 et Φ_1 par g^μ. Ainsi nous avons ce théorème:

Tout covariant de la forme ***biquadratique*** f, est une fonction rationnelle et entière de f, g, h, et des deux invariants i, j, le covariant h pouvant être regardé comme entrant seulement au premier degré dans cette relation.

Pour procéder maintenant à la division en ordres, il conviendra d'introduire au lieu de g et h, $6g$ et $6h$, qui ne contiendront aucun coefficient fractionnaire. La méthode que nous avons employée pour les formes ***cubiques,*** donnera alors trois divisions différentes de l'ensemble des classes distinctes qui ont les mêmes invariants i et j. L'une sera directement déduite de la considération des diviseurs communs aux coefficients des formes qui représentent ces classes; les autres seront respectivement attachées à $6g$ et $6h$. Mais moins avancés dans l'étude arithmétique des formes ***biquadratiques,*** nous ne pouvons encore, comme nous l'avons annoncé pour les formes ***cubiques,*** attribuer à aucune de ces divisions, d'autres propriétés que celles-là mêmes qui leur servent de définition. Nous nous bornerons donc à la recherche des relations qui existent entre les diviseurs des coefficients des formes f, $6g$, $6h$, et les invariants i, j, recherche qui exige plus de développement que dans la théorie des formes cubiques; car elle dépend de la détermination des divers invariants de $6g$ et $6h$. Nous nous occuperons, d'abord à cet égard, de la forme g, mais en nous plaçant à un point de vue plus général, afin d'en tirer occasion de présenter quelques remarques sur un beau théorème qu'a donné Mr. ***Hesse,*** et qu'on peut énoncer ainsi:

Soit F une forme biquadratique composée linéairement en f et g, savoir

$$F = tf - ug,$$

t et u étant des constantes: si l'on nomme G le covariant déduit de F, comme g de f, on aura:

$$G = u'g - t'f,$$

u' et t', désignant de nouvelles constantes.

Une nouvelle démonstration de ce théorème résulte d'abord immédiatement de notre proposition, que tous les covariants des formes biquadratiques sont des fonctions entières de f, g, h. Effectivement, la forme G, qui sera évidemment un covariant de f, doit être, comme cela se voit à priori, du *quatrième* degré en x et y. Or les seuls covariants du 4^e degré, qui puissent résulter d'une fonction entière de f, g, h, sont des fonctions linéaires de f et g. G est donc, comme la forme F elle même, une expression de cette nature. Cela étant, on trouvera, comme il suit, t' et u', au moyen de t et u. Nommons: I, J et H, les quantités analogues à i, j, et h, pour la forme F. Entre ces quantités on aura la relation

$$4G^3 - IGF^2 - JF^3 = H^2,$$

que j'écrirai ainsi:

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J\widehat{)(}G, F)^3 = H^2.$$

Or on reconnait immédiatement par l'expression de H au moyen des dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dG}{dy}$, que l'on a:

$$H = (tu' - ut')h.$$

Nous pouvons donc poser:

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J\widehat{)(}G, F)^3 = H^2 = (tu' - ut')^2 h^2$$
$$= (tu' - ut')^2 (4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j\widehat{)(}g, f)^3,$$

et en observant que les équations

$$F = tf - ug, \quad G = u'g - t'f$$

donnent:

$$f = \frac{uG + u'F}{tu' - ut'}, \quad g = \frac{tG + t'F}{tu' - ut'},$$

$$(4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J\widehat{)(}G, F)^3$$
$$= (tu' - ut')^2 \left(4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j\widehat{)(}\frac{tG + t'F}{tu' + ut'}, \frac{uG + u'F}{tu' + ut'}\right)^3,$$

cette dernière relation peut elle même évidemment se ramener à la suivante:

$$(3.) \qquad (tu' - ut'\widehat{)(}4, 0, -\tfrac{1}{3}I, -J\widehat{)(}G, F)^3$$
$$= (4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j\widehat{)(}tG + t'F, uG + u'F)^3,$$

que nous allons traiter comme identique par rapport à G et F.

A cet effet je désigne pour un instant par $\varphi(t, u)$, la forme cubique $(4, 0, -\tfrac{1}{3}i, -j\widehat{)(}t, u)^3$. On trouvera, en égalant les coefficients de G^3 et

G^2F^2, ces deux équations:

$$4(tu'-ut') = \varphi(t,u),$$
$$0 = t'\frac{d\varphi}{dt}+u'\frac{d\varphi}{du},$$

desquelles on tirera:

$$t' = -\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{du}, \quad u' = \frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{dt}:$$

expressions bien simples comme on voit.

Mais notre principal objet est d'obtenir les invariants I et J, qu'il nous faudra tout-à-l'heure employer dans le cas particulier où $F=6g$. Soient dans ce but, χ et ψ, les covariants quadratique et cubique de φ, savoir:

$$\chi = (\tfrac{4}{3}i,\, 2j,\, \tfrac{1}{9}i^2)\widehat{\ }(t,u)^2,$$
$$\psi = (-16j,\, -\tfrac{8}{9}i^2,\, -\tfrac{4}{3}ij,\, -\tfrac{2}{27}i^3-4j^2)\widehat{\ }(t,u)^3,$$

on trouvera, en employant les valeurs obtenues pour t' et u':

$$\left(4,0,-\tfrac{1}{3}i,-j\right)\widehat{\ }\left(tG-\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{du}F,\; uG+\frac{1}{12}\cdot\frac{d\varphi}{dt}F\right)^3$$
$$= \left(\varphi,0,-\frac{1}{4^2}\varphi\chi,\; \frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\ }\left(G,F\right)^3;$$

car nous avons été amenés à faire usage précédemment de la substitution qui donne naissance aux covariants associés. L'équation (3.) devient ainsi, en remplaçant $tu'-ut'$ par $\frac{1}{4}\varphi$:

$$\tfrac{1}{4}\varphi(4,0,-\tfrac{1}{3}I,-J)\widehat{\ }(G,F)^3 = \left(\varphi,0,-\frac{1}{4^2}\varphi\chi,\;\frac{1}{4^3}\varphi\psi\right)\widehat{\ }\left(G,F\right)^3,$$

et l'on en tire:

$$I = \tfrac{3}{4}\chi = (i,\, \tfrac{3}{2}j,\, \tfrac{1}{12}i^2)\widehat{\ }(t,u)^2,$$
$$J = -\tfrac{1}{16}\psi = \left(j,\, \tfrac{1}{18}i^2,\, \tfrac{1}{12}ij,\, \frac{54j^2-i^3}{6^3}\right)\widehat{\ }\left(t,u\right)^3.$$

En particulier, si l'on suppose $t=0$, $u=-6$, afin d'obtenir $F=6g$, on trouvera:

$$I = 3i^2, \quad J = i^3-54j^2.$$

C'est là le résultat que nous voulions établir pour arriver à caractériser les nombres entiers, diviseurs des coefficients de $6g$.

Nous allons maintenant procéder à une recherche analogue relativement aux coefficients de la forme $6h$. Cette recherche tout d'abord semble plus difficile; car nous ne possedons aucune proposition sur les invariants des formes du 6^e^ degré. Mais il se présente ici le premier exemple d'un fait remarquable, que nous verrons plus tard se reproduire dans bien des circonstances. La forme h possède en effet cette singulière propriété que tous ses invariants, sont ou le discriminant, ou les puissances du discriminant de la forme biquadratique proposée f. Voici, je crois la manière la plus facile, de le démontrer. Imaginons que par une substitution S, au déterminant *un*, on fasse évanouir dans f, les coefficients de x^3y et xy^3, de sorte que la transformée obtenue soit:

$$F = (A, 0, C, 0, A')\widehat{\ }(X, Y)^4.$$

Cette substitution effectuée dans h, donnera précisement pour transformée la forme H qu'on déduirait de F, par le même loi que h de f. Or on trouve ainsi:

$$H = (0, \tfrac{1}{6}A(AA'-9C^2), 0, 0, 0, -\tfrac{1}{6}A'(AA'-9C^2), 0)\widehat{\ }(X, Y)^6.$$

Cela posé, un invariant quelconque de h, fonction homogène de p, q, r, s, r', q', p', ne changera pas de valeur en substituant à ces coefficients ceux de la transformée H. Mais par là, cet invariant devient une fonction homogène des deux seules quantités $A(AA'-9C^2)$ et $A'(AA'-9C^2)$, et même une fonction qui ne doit pas changer par rapport à la substitution $X = -Y'$, $Y = X'$; il ne peut donc être que *proportionnel* à une puissance du produit $AA'(AA'-9C^2)^2$. Or ce produit s'exprime aisément en i et j: car F étant une transformée de f par une substitution au déterminant 1, on a:

$$i = AA' + 3C^2, \quad j = C(AA'-C^2)$$

et par suite le discriminant $\varDelta$ a pour valeur:

$$\varDelta = i^3 - 27j^2 = AA'(AA'-9C^2)^2;$$

d'où résulte ce que nous avons annoncé.

Ceci établi, on sait par un théorème de M. *Cayley*, que l'expression

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2$$

est un invariant de la forme $(p, q, r, s, r', q', p')\widehat{\ }(x, y)^6$, de sorte qu'on doit avoir, en désignant par μ une quantité numérique:

$$pp' - 6qq' + 15rr' - 10s^2 = \mu\varDelta.$$

Or en supposant $b = 0$, $b' = 0$, on trouve de suite que μ doit être $\frac{1}{6}$; nous avons donc pour la forme $6h$, un invariant de *second degré* par rapport à ses coefficients, et dont la valeur est $6\varDelta$. Ce dernier résultat et les expressions précedemment obtenues pour les invariants de $6g$, donnent les conséquences suivantes:

Désignant par λ, μ, ν, les diviseurs des coefficients des formes f, $6g$, $6h$,

$$\begin{array}{lll} \lambda^2 & \text{est un diviseur de l'invariant} & i, \\ \lambda^3 & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & j, \\ \mu^2 & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 3i^2, \\ \mu^3 & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & i^3-54j^2, \\ \nu^2 & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 6\Delta, \text{ ou: } 6(i^3-27j^2). \end{array}$$

A ces relations il faut aussi joindre celles-ci qu'il nous suffira d'indiquer:

$$\begin{array}{lll} \lambda^2 & \text{est un diviseur des coefficients de} & 6g, \\ \lambda^3 & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 6h, \\ \mu & \text{id.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 8h. \end{array}$$

Comme pour les formes cubiques, la dernière resulte de l'équation

$$8h = \frac{dg}{dx}\cdot\frac{df}{dy} - \frac{dg}{dy}\cdot\frac{df}{dx}.$$

Je terminerai par une remarque qui ne sera pas peut-être sans importance au point de vue arithmétique, et qui se tire des formules que j'ai données pour le théorème de M. ***Hesse***. Elle consiste en ce que le discriminant Δ, est un *facteur* dans le covariant G, et les deux invariants I et J de la forme $F = i^2 f + 9jg$.

VI.

Sur les covariants des formes du cinquième degré.

Il a été précédement établi, que tous les covariants des formes cubiques et biquadratiques s'expriment en fonction rationnelle et entière de deux d'entre eux, et de la forme proposée. Ces deux covariants fondamentaux ont, comme nous l'avons vu, une origine commune, et se trouvent dans le groupe des covariants associés à la forme primitive. Or cette proprieté fondamentale n'existe plus pour les formes du ***cinquième*** degré, et il devient alors impossible d'exprimer tous les covariants en fonction entière de ceux que nous avons défini comme associés à la proposée. Effectivement, les formules générales données à la fin du (§. III.) mettent en évidence ces quatre covariants associés, g, g', h, h', dont voici les premiers termes:

$$\begin{aligned} g &= (b^2 - ac)x^6 + \ldots, \\ g' &= (ae - 4bd + 3c^2)x^2 + \ldots, \\ h &= (2b^3 - 3abc + a^2 d)x^9 + \ldots, \\ h' &= \{(af - 3be + 2cd)^2 - 4b(ae - 4bd + 3c^2)\}x^5 + \ldots, \end{aligned}$$

la forme primitive étant supposée:

$$f = (a, b, c, d, e, f\widehat{)(}x, y)^5.$$

Or il existe au moins un covariant *cubique*, qu'on pourra par exemple définir comme l'invariant j de la forme *biquadratique* suivante:

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\widehat{\Big)\Big(} X, Y\right)^4,$$

et qui ne pourra jamais s'exprimer par une fonction entière de g, g', h, h', qui sont respectivement des degrés, 6, 2, 9 et 5.

Il existe donc bien au point de vue algébrique, un caractère important qui appartient exclusivement aux formes de degrés moindres que *cinq;* mais il y a même pour ces formes, des propriétés qu'on doit regarder comme exceptionnelles, et qui peuvent veritablement les faire considérer comme des cas singuliers dans les théories générales. Ainsi: les formes cubiques ne possèdent point de covariants linéaires, qui se présentent pour toutes les autres formes de degrés impairs. Les formes biquadratiques n'ont pas non plus de covariants quadratiques, qui présentent au contraire pour toutes les autres formes de degrés pairs. Or de là découlent dans la nature de ces formes de profondes différences, que nous nous attacherons à apprécier et à faire ressortir dans la suite de nos recherches.

Paris, Juillet 1854.