Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein).

Par

Mr. Emile Picard à Paris.

En traitant cette année dans mon cours de l'étude des *groupes de transformations* des équations différentielles linéaires, au sujet de laquelle je vous ai envoyé récemment un article pour votre journal (Math. Annalen, tome 46), je m'aperçois qu'une équation auxiliaire, jouant un rôle essentiel, est définie dans cet article d'une manière trop particulière qui pourrait conduire à restreindre la notion de groupe de transformations.

Si vous voulez bien vous reporter à l'endroit cité, je considère à un certain moment l'équation différentielle algébrique

$$f\left(x,\ V,\ \frac{dV}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^pV}{dx^p}\right)=0 \quad (p<m^2) \tag{4}$$

ayant avec l'équation (2) une solution commune σ n'appartenant pas à l'équation (3)

$$\varphi\left(x,\ V,\ \ldots,\frac{d^kV}{dx^k}\right)=0. \tag{3}$$

Je suppose ensuite que cette équation (4) est irréductible. Cela n'est pas nécessaire, il suffit de prendre parmi toutes les équations algébriques telles que (4), celle qui est *d'ordre moindre* (ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs). On peut d'ailleurs admettre que l'équation (4) est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$; il est clair alors que toute solution de f, qui n'appartient pas à (3), appartient à l'équation (2), car autrement la solution σ satisferait à une équation d'ordre inférieur à p.

Tous les raisonnements faits dans l'hypothèse plus particulière, que j'avais adoptée, subsistent intégralement, et c'est ainsi qu'on est conduit de la manière la plus satisfaisante à la notion de *groupe de transformations* d'une équation différentielle linéaire.

Permettez moi d'ajouter une remarque *sur l'extension des idées de Galois á la théorie des équations non linéaires.* Soit une équation différentielle algébrique

$$P\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0.$$

Je considère l'expression

$$V = R(y_1, y_2, \ldots, y_\mu, x)$$

R étant une fonction rationnelle arbitrairement choisie de μ intégrales quelconques $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ de l'équation précédente et de la variable x. On peut former l'équation d'ordre $m\mu$ à laquelle satisfait V, équation que nous désignerous par E. On aura d'ailleurs pour les y des fonctions rationnelles de V et de ses dérivées.

Si l'équation F est arbitraire, l'équation E n'aura aucune intégrale commune avec une équation algébrique d'ordre moindre, si ce n'est avec certaines équations faciles à former et provenant de la supposition que dans V deux ou plusieurs intégrales y sont identiques; nous désignerons par φ l'ensembles de ces équations.

Si on quitte le cas général, il peut arriver que E ait une intégrale commune, n'appartenant pas à φ, avec une équation différentielle algébrique d'ordre moindre; soit

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0$$

une telle équation. Parmi les équations de cette sorte, considérons celle qui est *d'ordre moindre* (ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs). Cette équation conduit à une théorie toute semblable à celle que nous avons développée pour les équations linéaires. On aura alors une relation algebrique entre les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ et leurs dérivées, *le groupe intervenant ici sera celui des opérations remplaçant dans cette relation ce système d'intégrales par un autre.*

Vous voyez que l'indétermination du nombre μ vient donner à cette théorie un tout autre caractère que pour le cas des équations linéaires où on pouvait se borner à prendre $\mu = m$.

Paris, le 27. Novembre 1895.