

## Evoluten als Contourcurven windschiefer Flächen.

Von Eduard Janisch in Prag.

Die Aufgaben, welche wir uns hier in erster Linie stellen wollen, lassen sich kurz wie folgt charakterisieren. Wir nehmen — ein rechtwinkliges Coordinatensystem vorausgesetzt — in der  $xz$ -Ebene eine Curve  $C_1$ , in der  $yz$ -Ebene eine Curve  $C_2$  an und fragen nun nach einer Curve  $C$  in der  $xy$ -Ebene von der Beschaffenheit, dass ihre Normalen die Projectionen der Erzeugenden der durch die drei Curven  $C, C_1, C_2$  als Leitlinien bestimmten windschiefen Fläche sind. Die Evolute der  $C$  ist hiernach die Contour für die  $xy$ -Ebene der resultierenden Fläche unter Voraussetzung orthogonaler Projection. Sind  $T, P_1^*, P_2^*$  bezw. die drei in einer Erzeugenden  $\varepsilon$  der windschiefen Fläche gelegenen Punkte von  $C, C_1, C_2$  und kennt man die respectiven Tangenten  $t, t_1, t_2$  an jene Curven in den drei Punkten, so ist dadurch die Möglichkeit geboten, den Krümmungsmittelpunkt  $N$  der  $C$  für den Punkt  $T$  zu construieren. Denn bezeichnen wir mit  $N^*$  denjenigen Punkt auf  $\varepsilon$ , dessen Projection auf die  $xy$ -Ebene  $N$  ist, und heißt  $n$  die Normale im Punkte  $T$  der  $C$ , d. i. die Projection der  $\varepsilon$  auf die  $xy$ -Ebene, so besteht bekanntlich die Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse  $(TP_1^*P_2^*N^*)$  und  $\varepsilon(t, t_1, t_2, n)$ , also auch die von  $(TP_1P_2N)$  und  $(t, TQ_1, TQ_2, n)$ , wenn  $P_1, P_2$  die Projectionen von  $P_1^*, P_2^*$  auf die  $xy$ -Ebene sind und  $Q_1, Q_2$  bezw. die Schnittpunkte von  $t_1, t_2$  mit der nämlichen Ebene bedeuten. Danach findet man  $N$  als den dem Strahle  $n$  des Strahlenbüschels  $(t, TQ_1, TQ_2, n)$  entsprechenden Punkt in der mit dem Büschel projectiven Reihe  $(T, P_1, P_2, N)$  auf  $n$ . Die Details der Construction werden wir in speciellen Fällen erörtern.

Wir beginnen sogleich mit dem einfachsten Falle:  $C_1$  und  $C_2$  seien gerade, zur  $x$ -Axe parallele Linien. Die Gleichungen der ersteren seien  $(\eta = 0, \zeta = m)$ , die der letzteren  $(\xi = 0, \zeta = n)$ . Sind nun  $x, y$  die Coordinaten eines Punktes  $T$  der noch unbekannten  $C$ , so haben wir für die Normale  $n$  zunächst die Gleichung:

$$(X - x) dx + (Y - y) dy = 0.$$

Dieselbe Gleichung muss sich aber den Bedingungen unserer Aufgabe gemäß ergeben als Gleichung der Projection auf die  $xy$ -Ebene der durch  $T$  gehenden die Geraden  $C_1$  ( $\eta = 0$ ,  $\zeta = m$ ),  $C_2$  ( $\xi = 0$ ,  $\zeta = n$ ) schneidenden Geraden. Wir finden diese Projectionsgleichung durch Elimination von  $Z$  aus den Gleichungen der beiden Ebenen ( $T, C_1$ ), ( $T, C_2$ ), welche lauten:

$$\frac{Z}{m} + \frac{Y}{y} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{Z}{n} + \frac{X}{x} = 1$$

oder 
$$\frac{Z}{m} + \frac{Y-y}{y} = 0$$

und 
$$\frac{Z}{n} + \frac{X-x}{x} = 0.$$

Wir erhalten so:  $(X-x)ny - (Y-y)mx = 0$  und damit resultiert als Differentialgleichung der Curve  $C$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mx}{ny}$$

oder 
$$mx dx + ny dy = 0.$$

Das Integral kann sofort hingeschrieben werden; wir können es in der Form darstellen:

$$mx^2 + ny^2 = mnc \quad (c \text{ eine Constante}).$$

Setzen wir  $nc = a^2$ ,  $mc = \pm b^2$ , so haben wir mithin als Gleichung der Curve  $C$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Curve ist ein Central kegelschnitt.

In sinngemäßer Anwendung des oben Gesagten gilt daher für Central kegelschnitte der Satz:

„Ist  $T$  ein Punkt einer Ellipse oder Hyperbel,  $t$  seine Tangente,  $n$  seine Normale,  $N$  der Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , sind ferner  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  mit resp. der Haupt- und Nebenachse der Curve und  $p_1, p_2$  bezw. die durch  $T$  zur Haupt- und Nebenachse gezogenen Parallelen, so sind die Doppelverhältnisse  $(TNp_1p_2)$  und  $(tnp_1p_2)$  einander gleich.“

Dass man auf Grund dieses Satzes mannigfaltige Krümmungsmittelpunkteconstructionen für Central kegelschnitte anzugeben vermag, ist evident. Zunächst kann man ganz allgemein auf  $t$  einen beliebigen Punkt  $S$  wählen und aus ihm die Reihe  $T, P_1, P_2$  projectieren. Da die projectiven Büschel  $S(TNp_1p_2)$  und  $(tnp_1p_2)$  den Strahl  $ST$  oder  $t$  entsprechend gemein haben, so liegen die Schnittpunkte von  $SN$  und  $n$  (d. i.  $N$ ), von  $SP_1$  und  $p_1$ , endlich von  $SP_2$  und  $p_2$  in einer Geraden. Am einfachsten gestalten sich die Constructionen für die Fälle: 1.  $S$  kommt in den Schnittpunkt der Tangente mit der Haupt- oder mit der Nebenachse zu liegen, 2.  $S$  ist der unendlichferne Punkt der Tangente.

Wir können wie folgt verfahren:

1. „Verbindet man den Schnittpunkt der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  und der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$ achse mit dem Schnittpunkte der Normalen  $n$  und der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$ achse, bringt die Verbindungslinie zum Schnitte mit der Parallelen durch  $T$  zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$ achse und zieht durch den Schnittpunkt die Parallele zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$ achse, so erhält man im Schnitte der Normalen  $n$  mit letztgenannter Parallelen den Krümmungsmittelpunkt  $N$ .“

2. „Zieht man durch die Schnittpunkte der Haupt- und der Nebenachse mit der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  die Parallelen zur Tangente  $t$  in  $T$ , so treffen diese bzw. die Parallelen durch  $T$  zur Haupt- und Nebenachse in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Krümmungsmittelpunkt  $N$  geht.“

Nicht unbemerkt möge bleiben, dass die Relation  $(TN P_1 P_2) = (t n p_1 p_2)$  die Existenz der folgenden drei Gleichungen nach sich zieht:

$$(TN P_1 P_2) = (n t p_2 p_1), (TN P_1 P_2) = (p_2 p_1 n t), (TN P_1 P_2) = (p_1 p_2 t n),$$

von denen jede zur Ableitung von Krümmungsmittelpunktconstruktionen verwendet werden kann. Auf eine ausführliche Erörterung verzichten wir jedoch hier wie in der Folge grundsätzlich.

Wir lassen jetzt an Stelle der vorhin vorausgesetzten orthogonalen Projection eine Centralprojection treten und formulieren unsere Aufgabe so: Es ist in der  $xy$ -Ebene eine Curve zu bestimmen von der Beschaffenheit, dass die durch irgend einen Punkt  $T$  der Curve gezogene Transversale, welche die Geraden  $(\eta = 0, \zeta = m)$ ,  $(\xi = 0, \zeta = n)$  schneidet, aus dem festen Punkte  $\Pi(x, \beta, \gamma)$  auf die  $xy$ -Ebene als Normale in  $T$  projiciert wird.

Die aus dem Punkte  $T(x, y)$  der  $xy$ -Ebene nach den obigen beiden Leitgeraden gezogene Transversale, ist wie im vorigen Abschnitte die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$yZ + m(Y - y) = 0 \text{ und } xZ + n(X - x) = 0.$$

Es gelten also für diese Gerade die Gleichungen:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{n}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{m}} = \frac{Z}{-1}.$$

Die zu ihr durch das Projectionscentrum  $\Pi$  parallel geführte Gerade (der Fluchtstrahl) hat die Gleichungen:

$$\frac{X-\alpha}{\frac{x}{n}} = \frac{Y-\beta}{\frac{y}{m}} = \frac{Z-\gamma}{-1}.$$

Hierin  $Z=0$  gesetzt, ergeben sich die Coordinaten des Verschwindungspunktes:

$$X = \alpha + \gamma \frac{x}{n}, \quad Y = \beta + \gamma \frac{y}{m}$$

und es lautet die Gleichung der Centralprojection der betrachteten Geraden:

$$\frac{X-x}{Y-y} = \frac{x-\alpha-\gamma \frac{x}{n}}{y-\beta-\gamma \frac{y}{m}}.$$

Soll nun diese übereinstimmen mit der Normalen in  $T$ , dann muss sein

$$\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{dy}{dx} = \frac{x-\alpha-\gamma \frac{x}{n}}{y-\beta-\gamma \frac{y}{m}}$$

und wir haben als Differentialgleichung unserer Curve:

$$m[(n-\gamma)x - \alpha n] dx + n[(m-\gamma)y - \beta m] dy = 0.$$

Das Integral derselben lautet:

$$m(n-\gamma)x^2 + n(m-\gamma)y^2 - 2mn\alpha x - 2mn\beta y = \text{Const.}$$

oder

$$m(n-\gamma)\left(x - \frac{n\alpha}{n-\gamma}\right)^2 + n(m-\gamma)\left(y - \frac{m\beta}{m-\gamma}\right)^2 = \text{Const.}$$

Diese Gleichung gehört, wenn wir vorerst die Fälle  $\gamma=m$  oder  $\gamma=n$  außer Betracht lassen, einem Centralkegelschnitt an, dessen Achsen den Coordinatenachsen parallel laufen und dessen Mittelpunkt die Coordinaten  $x_0 = \frac{n\alpha}{n-\gamma}$ ,  $y_0 = \frac{m\beta}{m-\gamma}$  besitzt. Man erkennt leicht, dass der Mittelpunkt der Schnitt der Centralprojectionen der beiden Geraden ( $\eta=0$ ,  $\zeta=m$ ), ( $\xi=0$ ,  $\zeta=n$ ) ist.

Deshalb führen die weiteren Schlüsse, die wir ziehen können, offenbar zu keinem neuen Ergebnis. Wir erhalten wiederum den oben gefundenen Satz.

Nehmen wir aber an, es sei  $\gamma=n$ , dann lautet die Gleichung der resultierenden Curve:

$$n(m-n)y^2 - 2mn\alpha x - 2mn\beta y = \text{Const.}$$

oder

$$(m-n)\left(y - \frac{m\beta}{m-n}\right)^2 - 2m\alpha x = \text{Const.}$$

Die Curve ist eine Parabel, deren Achse mit der Centralprojection der Geraden ( $\eta=0, \zeta=m$ ) auf die  $xy$ -Ebene zusammenfällt. Wenn wir nun noch bemerken, dass die unendlichferne Gerade die Centralprojection der Geraden ( $\zeta=0, \zeta=n$ ) ist, so können wir für die Parabel den Satz aussprechen:

„Ist  $T$  ein Punkt einer Parabel,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt,  $P_1$  der Schnittpunkt der Normalen  $n$  in  $T$  mit der Parabelachse,  $P_{\infty}$  der unendlich ferne Punkt der Normalen, ist ferner  $t$  die Tangente in  $T$  und sind  $p_1, p_2$  bzw. die durch  $T$  parallel und senkrecht zur Parabelachse gezogenen Geraden, so besteht die Gleichheit der Doppelverhältnisse  $(TN P_1 P_{\infty})$  und  $(t n p_1 p_2)$ .“

Man sieht, dass dieser Satz in dem oben für Centralkegelschnitte ausgesprochenen enthalten ist, wenn man die unendlich ferne Gerade als Nebenachse der Parabel gelten lässt. Die aus diesem Satze fließenden Krümmungsmittelpunkt-Constructionen für die Parabel sind daher ebenfalls in den bezüglichen Constructionen für die Centralkegelschnitte enthalten. Wir können es so unterlassen, dieselben hier anzuführen. Die erste der Constructionen ist zudem sehr bekannt.

Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall: Die beiden geraden Leitlinien seien die Geraden ( $\eta=\mu\xi, \zeta=m$ ), ( $\eta=\nu\xi, \zeta=n$ ). Irgend eine Gerade, welche durch den Punkt  $T(x, y, 0)$  einer Curve  $C$  in der  $xy$ -Ebene geht, und die erste jener beiden Geraden schneidet, wird dargestellt sein durch die Gleichungen:

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{\mu\xi-y} = \frac{Z}{m}.$$

Daraus erhalten wir die Gleichungen der Ebene durch  $(x, y, 0)$  und ( $\eta=\mu\xi, \zeta=m$ ), wenn wir  $\xi$  eliminieren. Wir haben

$$\xi-x = \frac{m(X-x)}{Z}, \quad \mu\xi-y = \frac{m(Y-y)}{Z},$$

$$\text{also ist } (y-\mu x)Z = m[\mu(X-x) - (Y-y)]$$

die gesuchte Gleichung. Analog wird

$$(y-\nu x)Z = n[\nu(Y-x) - (Y-y)]$$

die Ebene darstellen, welche durch  $(x, y, 0)$  und ( $\eta=\nu\xi, \zeta=n$ ) geht. Für die Projection der Schnittlinie beider Ebenen auf die  $xy$ -Ebene resultiert dann die Gleichung

$$\frac{y - \mu x}{y - \nu x} = \frac{m [\mu (X - x) - (Y - y)]}{n [\nu (X - x) - (Y - y)]}$$

oder geordnet

$$\begin{aligned} (X - x) [\mu \nu (m - n) x + (\nu n - \mu m) y] = \\ = (Y - y) [\nu m - \mu n) x + (n - m) y]. \end{aligned}$$

Soll nun wiederum diese Gleichung die Normale im Punkte  $(x, y)$  der Curve  $C$  darstellen, so ergibt sich für die Curve die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} [(\nu m - \mu n) x + (n - m) y] dx + \\ + [\mu \nu (m - n) x + (\nu n - \mu m) y] dy = 0, \end{aligned}$$

wie man sieht eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir können offenbar behufs Erzielung einer Vereinfachung die einer Coordinatentransformation gleichkommende Bedingung  $\nu = -\mu$  einführen und zur Abkürzung setzen:  $m + n = p$ ,  $m - n = q$ . Dann geht die Differentialgleichung über in:

$$(\mu p x + q y) dx + (\mu^2 q x + \mu p y) dy = 0.$$

Durch die Substitution  $\xi = y - \lambda_1 x$ ,  $\eta = y - \lambda_2 x$  kann bekanntlich eine solche Gleichung überführt werden in

$$k \eta d\xi + \xi d\eta = 0,$$

denn setzt man hierin die Werte für  $\xi$  und  $\eta$  ein, so bekommt man

$$k (y - \lambda_2 x) (dy - \lambda_1 dx) + (y - \lambda_1 x) (dy - \lambda_2 dx) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} [(k + 1) \lambda_1 \lambda_2 x - (k \lambda_1 + \lambda_2) y] \cdot dx + \\ + [-(k \lambda_2 + \lambda_1) x + (k + 1) y] \cdot dy = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung mit der vorgelegten Differentialgleichung identisch wird, wenn die Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \frac{k \lambda_1 + \lambda_2}{k + 1} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{q}{p}, \frac{k \lambda_2 + \lambda_1}{k + 1} = -\mu \cdot \frac{q}{p}.$$

Hieraus ziehen wir:

$$\lambda_1 = \frac{\mu^2 - k}{(k - 1) \mu} \cdot \frac{q}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - k \mu^2}{(k - 1) \mu} \cdot \frac{q}{p}$$

und durch Multiplication

$$\mu^2 (k - 1)^2 = (\mu^2 - k) (1 - k \mu^2) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^2.$$

Das Integral der Differentialgleichung lautet:

$$\xi^k \eta = \text{Const. oder } (y - \lambda_1 x)^k (y - \lambda_2 x) = \text{Const.}$$

Uns interessieren hier nur die besonderen Fälle  $k=1$ ,  $k=-2$ , welche Kegelschnittgleichungen als Integralgleichungen liefern.

1. Für  $k=1$  erhalten wir  $(y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) = \text{Const.}$  als Gleichung der Curve  $C$ . Nun geht aber für  $k=1$  die obige Relation zwischen  $k$ ,  $\mu$  und  $\frac{q}{p}$  über in

$$0 = (\mu^2 - 1)(1 - \mu^2) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

welche  $\mu = \pm 1$  bedingt. Die geometrische Bedeutung dessen geht dahin, dass die beiden Geraden  $(\eta = \mu \xi, \zeta = m)$ ,  $(\eta = \nu \xi = -\mu \zeta, \zeta = n)$  sich senkrecht kreuzen, welche Annahme bereits zu Anfang dieser Arbeit ihre Erledigung gefunden hatte.

2.  $k=-2$ . Hiefür ergibt sich die Integralgleichung  $(y - \lambda_1 x)^2 = C(y - \lambda_2 x)$ , welche einer durch den Coordinatenursprung gehenden Parabel angehört, die dort von der Geraden  $y - \lambda_2 x = 0$  berührt wird, und welche eine zur Geraden  $y - \lambda_1 x = 0$  parallele Achse besitzt. Setzen wir in die oben gefundenen Ausdrücke für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  den Wert  $k=-2$  ein und dividieren wir  $\lambda_1$  durch  $\lambda_2$ , so ergibt sich

$$\frac{\mu^2 + 2}{1 + 2\mu^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda_1^2 \text{ (wegen } \lambda_1 \lambda_2 = 1)$$

Daraus folgt für  $\mu^2$ :

$$\mu^2 = \frac{\lambda_1^2 - 2}{1 - \lambda_1^2}.$$

Da nun  $\mu$  reell vorausgesetzt wird, so genügt  $\lambda_1$  der Ungleichung

$$\frac{1}{2} < \lambda_1^2 < 2.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung orientieren wir uns über die Lage, welche der als Coordinatenanfangspunkt unserer Parabel dienende Punkt derselben gegen ihren Scheitel besitzt. Seien  $x, y$  die Coordinaten unseres Ursprunges 0 für die Parabelaxe als  $x$ -Achse und die Scheiteltangente als  $y$ -Achse und möge  $2p$  der Parameter sein, dann hat die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Tangente in 0 gegen die Parabelachse den Wert  $\frac{p}{y}$ . Die-

selbe Größe besitzt aber auch den Wert  $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{\lambda_1^2 - 1}{2\lambda_1}$ . Für den Grenzwert  $\lambda_1 = \sqrt{2}$  ergibt sich demnach  $y = 2p\sqrt{2}$  und folglich  $x = 4p$ , für  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir  $y = \infty$  und  $x = \infty$ , für

$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \dots y = 2p\sqrt{2}$  und  $x = 4p$ . Zwischen  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $\sqrt{2}$  gelegene Werte für  $\lambda_1$  ergeben durchwegs Parabelpunkte, die von der Scheiteltangente um mehr als  $4p$  abstehen. Jeder solche Parabelpunkt kann daher als Ursprung  $O$  gewählt werden und, wenn wir bemerken, dass die bestehende Relation  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  nichts anderes bedeutet, als dass die Coordinatenachsen die Winkel zwischen der Normalen in  $O$  und der durch  $O$  gezogenen Achsenparallelen halbieren, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

„Durch jeden Punkt der Parabel  $y^2 = 2px$ , dessen Abscisse größer als  $4p$  ist, gehen zwei bestimmte rücksichtlich der Halbierungslinie des Winkels zwischen der Normalen im betreffenden Punkte und der durch ihn gezogenen Achsenparallelen symmetrische Gerade  $p_1, p_2$ , welche von der Normalen  $n$  in irgend einem anderen Parabelpunkte  $T$  in zwei Punkten  $P_1, P_2$  geschnitten werden, die mit dem Punkte  $T$  und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $N$  einen Wurf bilden, welcher projectiv ist mit dem Büschel der vier durch  $T$  gehenden Strahlen  $p_1 (\parallel p_1), p_2 (\parallel p_2), t$  (der Tangente in  $T$ ) und  $n$ “.

Ganz ähnliche Sätze werden für alle anderen Curven gelten, deren Gleichungen aus der obigen Integralgleichung hervorgehen, wenn für  $k$  andere Werte als  $-2$  angenommen werden.

Wir haben bei den vorausgehenden Untersuchungen das Verhältnis  $\frac{q}{p}$  endlich und von Null verschieden vorausgesetzt. Letzteres ist wohl selbstverständlich; es kann aber ganz wohl angenommen werden  $q = m + n = 0$  und dann ist  $\frac{q}{p} = \infty$ . Für diesen Fall nimmt unsere Differentialgleichung eine wesentlich einfachere Gestalt an. Wir finden:

$$y dx + \mu^2 x dy = 0,$$

und das Integral lautet nun:

$$x y^{\mu^2} = \text{Const.}$$

— die Gleichung der sogenannten höheren Hyperbeln. Demnach gilt der Satz:

„Ist  $T$  ein Punkt der Curve  $x y^{\mu^2} = \text{Const.}$ ,  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$ ,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt und sind  $p_1, p_2$  die durch  $T$  gehenden Parallelen zu den Geraden  $y = \mu x, y = -\mu x$ , ferner  $P_1, P_2$  die resp. Schnittpunkte von  $n$  mit letzteren zwei Geraden, so besteht die Doppelverhältnisleichung:  $(TN P_1 P_2) = (tn p_1 p_2)$ .“

Man bemerkt, dass für  $\mu^2 = 1$  eine gleichseitige Hyperbel resultiert, für welche sich der eben ausgesprochene Satz unschwer als Specialfall des oben für Centralkegelschnitte abgeleiteten allgemeinen Satzes erkennen lässt.



Wiederum zu einem Satze über Kegelschnitte führt die Bestimmung einer windschiefen Fläche, welche eine gerade Leitlinie  $l$ , ferner eine Richtebene besitzt, und deren Erzeugenden sich auf die  $xy$ -Ebene als Normalen ihrer Spurcurve projectieren. Wir beschränken uns auf die Betrachtung eines besonderen Falles: Die Richtebene  $R$  sei zur  $xz$ -Ebene normal und die gegebene gerade Leitlinie  $l$  liege in der  $xz$ -Ebene, so dass beiden Gebilden bezw. die Gleichungen zugewiesen werden können:

$$R (\zeta = \mu' \xi), \quad l (\eta = 0, \quad \zeta = \mu \xi + m)$$

Sind nun  $x, y$  die Coordinaten eines Punktes  $T$  der Spurcurve der Fläche in der  $xy$ -Ebene, so ergeben sich die Projectionsgleichungen der durch ihn parallel zur Ebene  $\zeta = \mu' \xi$  gelegten die  $l$  schneidenden Geraden aus den beiden Gleichungen:

$$Z = \mu' (X - x), \quad (\mu x + m) (Y - y) = y (\mu (X - x) - Z).$$

Durch Elimination von  $Z$  ergibt sich hieraus insbesondere:

$$(\mu - \mu') y (X - x) = (\mu x + m) (Y - y)$$

die Gleichung der Projection jener Geraden auf die  $xy$ -Ebene. Damit nun diese Gleichung übereinstimmt mit jener der Normalen in  $T$  für die Spurcurve, muss sein:

$$(\mu x + m) dx + (\mu - \mu') y dy = 0.$$

Ist  $\mu$  von Null verschieden, dann darf unbeschadet der Allgemeinheit  $m = 0$  angenommen werden und obige Differentialgleichung lautet jetzt:

$$\mu x dx + (\mu - \mu') y dy = 0.$$

Das Integral derselben ist:

$$\mu x^2 + (\mu - \mu') y^2 = \text{Const.}$$

Die Gleichung eines Centralkegelschnittes mit dem Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt und den Coordinatenachsen als Achsen.

Es gilt demnach für Centralkegelschnitte der Satz:

„Die Tangente  $t$  in einem Punkte  $T$ , die Normale  $n$ , die Verbindungslinie  $p_1$  von  $T$  mit dem Mittelpunkte und die Parallele  $p_2$  zur Neben}achse durch  $T$  bilden ein Büschel von vier Strahlen, Haupt} deren Doppelverhältnis  $(t n p_1 p_2)$  gleich ist mit dem Doppelverhältnis  $(T N P_1 P_2 \infty)$  der vier Punkte  $T, N$  (dem Krümmungsmittelpunkte)  $P_1$  (dem Schnittpunkte der Normalen mit der Haupt}Neben}achse),  $P_2 \infty$  (dem unendlich fernen Punkte der Normalen).“

Auf Grund dieses Satzes haben wir die folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes  $N$  einer Ellipse oder Hyperbel für den Punkt  $T$ :

„Man projiciere aus einem beliebigen Punkte  $\Sigma$  der Tangente  $t$  den Schnittpunkt  $P_1$  der Normalen  $n$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse auf den durch  $T$  gehenden Durchmesser  $p_1$  und verbinde den erhaltenen Punkt mit dem Schnittpunkte der Parallelen zu  $n$  durch  $\Sigma$  mit der Parallelen durch  $T$  zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse. Die sich ergebende Verbindungslinie geht durch  $N$ .“

Besonders einfach gestaltet sich diese Construction, wenn  $\Sigma$  mit dem unendlich fernen Punkt von  $t$  oder mit einem der Schnittpunkte von  $t$  mit den Achsen identificiert wird. Die Constructionen sind die folgenden:

„Man ziehe durch den Schnittpunkt  $P_1$  der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse die Parallele zur Tangente  $t$  und durch den Schnittpunkt dieser Parallelen mit dem durch  $T$  gehenden Durchmesser  $p_1$  die Parallele zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse, dann geht die letztere Parallele, durch den Krümmungsmittelpunkt  $N$ .“

„Man führe durch den Schnittpunkt der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse die Parallele zur Normalen  $n$  und verbinde ihren Schnittpunkt mit der Parallelen zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse durch  $T$  mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes, alsdann erhält man mit dieser Verbindungslinie eine  $N$  enthaltende Gerade.“

Es bleibt uns jetzt noch übrig, den vorhin ausgeschlossenen Fall  $\mu = 0$  zu erörtern. Diese Annahme für  $\mu$  bedeutet, dass an Stelle der gegen die  $xy$ -Ebene geneigten Leitlinie  $l$  der windschiefen Fläche eine zur  $x$ -Achse parallele Gerade der  $xz$ -Ebene tritt. Die Differentialgleichung der Spurecurve der windschiefen Fläche lautet in diesem Falle:

$$m dx - \mu' y dy = 0.$$

Das Integral erhält die Form:

$$2 m x - \mu' y^2 = \text{Const.}$$

Wir haben es demnach mit einer Parabel zu thun, welche die  $x$ -Achse zur Achse besitzt, und können also den Satz aufstellen:

„Ist  $T$  ein Punkt einer Parabel,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt,  $P_1$  der Schnittpunkt der Normalen  $n$  in  $T$  mit der Parabelachse und  $P_{2\infty}$  der unendlich ferne Punkt von  $n$ , bedeutet ferner  $t$  die Tangente in  $T$ ,  $p_1$  die durch  $T$  gehende Achsenparallele und  $p_2$  die durch  $T$  gehende Achsennormale, so besteht die Doppelverhältnissgleichheit  $(TN P_1 P_{2\infty}) = (t n p_1 p_2)$ .“

Man sieht, dass  $p_1$  hier genau so wie vorhin bei dem entsprechenden Satze für Centralkegelschnitte mit dem durch den Curvenpunkt  $T$  gehenden Durchmesser übereinstimmt, weshalb alle vorhin für die Ellipse und Hyperbel aufgestellten Constructionen ohneweiters auf die Parabel übertragen werden können. Denselben Satz haben wir übrigens bereits von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus auf Seite 101 abgeleitet.

Zu einem neuen Parabelsatze gelangen wir jedoch, wenn wir nach der windschiefen Fläche fragen, deren Erzeugenden sich auf die  $xy$ -Ebene als Normalen der Spurcurve der Fläche projicieren, und welche die gleichseitige Hyperbel ( $\xi = 0$ ,  $\eta \zeta = mn$ ) und die selbe schneidende Gerade ( $\eta = m$ ,  $\zeta = n$ ) zu Leitlinien besitzt.

Sei  $T(x, y)$  ein Punkt der unbekannten Spurcurve der Fläche mit der  $xy$ -Ebene, dann ist die durch ihn gehende Erzeugende zunächst in der Ebene  $Z(m - y) = n(Y - y)$  enthalten. Ferner ist sie aber auch eine Erzeugende des die Leithyperbel aus  $T(x, y)$  projicierenden Kegels, dessen Gleichung wir nun aufzustellen haben. Wir schreiben zu dem Behufe die Gleichungen der durch die Punkte  $(0, \eta, \zeta)$  und  $T(x, y, 0)$  gehenden Geraden an:

$$\frac{X-x}{-x} = \frac{Y-y}{\eta-y} = \frac{Z}{\zeta}.$$

Es ist also:

$$\eta = y - x \frac{Y-y}{X-x}, \quad \zeta = -x \frac{Z}{X-x}$$

und, wenn  $(0, \eta, \zeta)$  einen Punkt der Leithyperbel bedeutet, dann besteht die Gleichung

$$mn = -\frac{xZ}{X-x} \left( y - x \frac{Y-y}{X-x} \right),$$

welche dem projicierenden Kegel angehört. Setzen wir hierin

$$Z = \frac{n}{m-y} (Y-y),$$

so ergibt sich:

$$m(m-y)(X-x)^2 + xy(X-x)(Y-y) - x^2(Y-y)^2 = 0,$$

oder zerlegt

$$[(m-y)(X-x) + x(Y-y)][m(X-x) - x(Y-y)] = 0.$$

Der erste Factor gleich Null gesetzt liefert die Projectionsgleichung der durch  $T$  und durch den Schnittpunkt der Leithyperbel und der Leitgeraden gezogenen geraden Linie. Dagegen gibt der zweite Factor gleich Null gesetzt die Gleichung der

Projection auf die  $xy$ -Ebene der durch  $T$  gehenden Erzeugenden unserer windschiefen Fläche. Den Bedingungen unserer Aufgabe gemäß muss nun aber der Quotient  $\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dx}{dy}$  erachtet werden, so dass schließlich als Differentialgleichung der  $xy$ -Spurcurve der gesuchten windschiefen Fläche die Gleichung

$$x dx + m dy = 0$$

gefunden wird, deren Integral durch

$$x^2 + 2 m y = \text{Const.}$$

gegeben ist. Man sieht, dass diese Gleichung einer die  $y$ -Achse zur Achse besitzenden Parabel angehört.

Wenn wir also durch einen Punkt  $T(x, y)$  der in der  $xy$ -Ebene gelegenen Parabel  $x^2 + 2 m y = \text{Const.}$  diejenige Gerade  $n^*$  ziehen, welche die Hyperbel  $H$  ( $\xi = 0, \eta \zeta = m n$ ) und die Gerade  $L$  ( $\eta = m, \zeta = n$ ), bzw. in den Punkten  $P_1^*, P_2^*$  schneidet, so ist die Projection der  $n^*$  auf die  $xy$ -Ebene die Normale  $n$  jener Parabel im Punkte  $T$  und die Schnittpunkte  $P_1, P_2$  der  $n$  mit der  $y$ -Achse und der Geraden  $\eta = m$  sind bzw. die Projectionen der Punkte  $P_1^*, P_2^*$ . Die Tangente in  $P_1^*$  an die  $H$  schneidet die  $y$ -Achse (d. i. die Parabelachse) in einem Punkte  $P_1'$ , welcher vom Coordinatenanfangspunkte  $O$  doppelt so weit entfernt ist als  $P_1$  und mit  $P_1$  auf derselben Seite der  $x$ -Achse liegt. Die Verbindungslinie  $TP_1$  oder  $p_1$  ist alsdann die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und die Tangentialebene in  $P_1^*$  an die durch die Parabel, die  $H$  und die  $L$  als Leitlinien bestimmte windschiefe Fläche, während die zur  $x$ -Achse Parallele  $p_2$  durch  $T$  die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene  $P_2^*$  vorstellt. Durch eine naheliegende Reihe von weiteren Schlüssen, welche wir füglich unterdrücken können, kommen wir so zu folgendem Satze:

„Sind  $U, V$  zwei Punkte auf der Achse der Parabel  $x^2 = 2 m y$ , deren Entfernung dem Parameter  $m$  gleichkommt, während die Richtung von  $U$  nach  $V$  die positive ist, und nennen wir  $P_2$  den Schnittpunkt der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  der Parabel und der durch  $U$  gehenden Achsennormalen,  $P_1$  dagegen den Schnittpunkt von  $n$  mit der Parabelachse,  $P_1'$  weiters jenen Punkt der Parabelachse, welche mit  $V$  eine Strecke abgrenzt, die von  $P_1$  halbiert wird, sind endlich die Achsennormale durch  $T$  und die Linie  $TP_1'$ , bzw. mit  $p_2, p_1$  bezeichnet und sei  $N$  der Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , dann gilt die Doppelverhältnisleichheit

$$(TN P_1 P_2) = (tn p_1 p_2).“$$

Die auf Grund dieses Satzes sich ergebenden Constructionen brauchen wir jetzt wohl nicht mehr zu beschreiben. Es möge nur

bemerkt werden, dass man zweckmäßig einen der Punkte  $U, V$  in den Scheitel der Parabel verlegen kann.

Als nächsten Gegenstand unserer Untersuchungen wählen wir die windschiefe Fläche, deren Spurcurve mit der  $x y$ -Ebene dieselbe Eigenschaft aufweist wie die der bisher betrachteten Flächen; als Leitlinien der Flächen sollen aber die Curven ( $\zeta^{k-1}\xi = a^k$ ,  $\eta = 0$ ), ( $\zeta^{k-1}\eta = -b^k$ ,  $\xi = 0$ ) fungieren. Diese Curven sind jeweils gleichartige höhere Parabeln oder Hyperbeln, wenn wir  $k$  rational voraussetzen, und man weiß, dass die Tangente in irgend einem Punkte auf der Achse der  $\xi$  (resp. der  $\eta$ ) eine Strecke von der Länge  $k\xi$  (resp.  $k\eta$ ) abschneidet, wofern  $\xi$  ( $\eta$ ) die entsprechende Coordinate des betrachteten Punktes bedeutet.

Unsere erste Aufgabe ist es nun, die Gleichungen der beiden Kegel aufzustellen, welche diese Curven aus einem Punkte  $T(x, y)$  der  $x y$ -Ebene projicieren. Wir haben als Gleichungen der Erzeugenden des Kegels, welche durch den Punkt  $(\xi, 0, \zeta)$  der erstgenannten der beiden Curven geht:

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{-y} = \frac{Z}{\zeta}.$$

Es ist also:

$$\zeta = -\frac{yZ}{Y-y}, \quad \xi = x - y \frac{X-x}{Y-y}$$

und daher lautet die Gleichung des Kegels:

$$\left(-y \frac{Z}{Y-y}\right)^{k-1} \cdot \frac{x(Y-y) - y(X-x)}{Y-y} = a^k.$$

Vertauschen wir hierin  $x$  mit  $y$ ,  $X$  mit  $Y$  und  $a^k$  mit  $-b^k$ , so erhalten wir die Gleichung des anderen Kegels:

$$\left(-x \frac{Z}{X-x}\right)^{k-1} \cdot \frac{y(X-x) - x(Y-y)}{X-x} = -b^k.$$

Dividieren wir die Gleichungen beider Kegel durcheinander, so ergibt sich sofort die Gleichung der Projection auf die  $x y$ -Ebene der ihnen gemeinschaftlichen Erzeugenden. Wir finden:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{X-x}{Y-y}\right)^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

und, wenn wir die  $k^{\text{te}}$  Wurzel ziehen:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\frac{1}{k}} \cdot \frac{X-x}{Y-y} = \frac{a}{b}.$$

Setzen wir  $\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{dy}{dx}$ , so resultiert die Differentialgleichung

$$ax^{1-\frac{1}{k}} dx + by^{1-\frac{1}{k}} dy = 0,$$

deren Integral die Form hat:

$$ax^{2-\frac{1}{k}} + by^{2-\frac{1}{k}} = \text{Const.}$$

Für alle durch eine Gleichung dieser Art dargestellten Curven gilt somit der Satz:

„Die Normale  $n$  im Punkte  $T$  schneidet die  $x$ -Achse in einem Punkte  $P_1$ , die  $y$ -Achse in einem Punkte  $P_2$ , welche beiden Punkte mit  $T$  und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $N$  einen Wurf ( $TNP_1P_2$ ) bilden, der projectiv ist mit dem Wurf der vier Strahlen ( $tnp_1p_2$ ), von denen  $t$  die Tangente in  $T$ ,  $p_1p_2$ , bezw. die durch  $T$  gehenden Geraden bedeuten, welche die Punkte  $P_1', P_2'$  der  $x$ -Achse, resp. die  $y$ -Achse enthalten, die vom Koordinatenanfangspunkt  $k$ -mal so weit entfernt sind als bezw. die Punkte  $P_1, P_2$ .“

Wir setzen der Reihe nach für  $k$  die Werte  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$  und erhalten für  $k = \frac{1}{3}$  die Curve  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \text{Const.}$ , für  $k = \frac{2}{3}$  die Curve  $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = \text{Const.}$  und endlich für  $k = \frac{3}{4}$  die Curve  $a x^{\frac{2}{3}} + b y^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$

Die Gleichung  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \text{Const.}$  ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch den Koordinatenanfangspunkt geht und zu den Coordinatenachsen parallele Asymptoten besitzt. Wir können so auf folgende Art den Krümmungsmittelpunkt  $N$  für eine Stelle  $T$  einer solchen Hyperbel construieren:

„Man ziehe durch einen beliebigen Punkt  $O$  der Curve die Parallelen zu den Asymptoten und bezeichne mit  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  in  $T$  mit diesen Parallelen. Alsdann schneide man auf  $OP_1, OP_2$  je ein Drittel ihrer Längen von  $O$  aus ab, wodurch die Punkte  $P_1', P_2'$  erhalten werden, und verbinde die respectiven Schnittpunkte von  $TP_1', TP_2'$  und von den Parallelen zur Tangente  $t$  durch  $P_1, P_2$ . Die resultierende Verbindungslinie geht durch  $N$ .“

Die Gleichung  $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = \text{Const.}$  können wir, falls die Constante  $= c\sqrt{c}$  gesetzt wird, auch schreiben:  $a^2x + b^2y = c^3 - 2ab\sqrt{xy}$  oder  $4a^2b^2xy = (c^3 - a^2x - b^2y)^2$  oder endlich

$$(a^2x - b^2y)^2 - 2c^3(a^2x + b^2y) + c^6 = 0.$$

Es ist dies augenscheinlich die Gleichung einer Parabel, welche die Abscissen- und Ordinatenachse berührt. Wir vermögen also folgende Construction anzugeben:

„Sind  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  einer Parabel mit zwei in einem Punkte  $O$  (auf der Directrix) sich schneidenden auf einander normalen Tangenten der Curve und sind  $OP_1, OP_2$  diejenigen Punkte auf  $OR_1, OP_2$ , für welche gilt  $OP' = \frac{2}{3} OP, OR_2 = \frac{2}{3} OP_2$ , so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte der durch  $P_1, P_2$  zur Tangente  $t$  in  $T$  gezogenen Parallelen mit bezw. den Geraden  $TP_1', TP_2'$  durch den Krümmungsmittelpunkt  $N$  der Stelle  $T$ .“

Die Gleichungen  $ax^{\frac{2}{3}} + by^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$  kann bei geeigneter Wahl der Constanten die Evolute einer Ellipse darstellen und da  $b$  auch negativ sein darf, ebenso die Evolute einer Hyperbel. Setzen wir schließlich, was ebenfalls zulässig ist,  $a=b$  voraus, so haben wir die Gleichung einer Astroide vor uns. Für diese drei Curven gilt übereinstimmend die folgende Krümmungsmittelpunkt-construction:

„Sind  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  mit der  $x$ -, bezw. der  $y$ -Achse und  $P_1', P_2'$  die Endpunkte der Strecken  $OP_1' = \frac{3}{4} OP_1, OP_2' = \frac{3}{4} OP_2$ , dann schneiden die Tangentenparallelen durch  $P_1, P_2$  die Geraden  $TP_1'$ , resp.  $TP_2'$  in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Krümmungsmittelpunkt  $N$  der Stelle  $T$  geht.“

Besonders vortheilhaft für die praktische Ausführung darf diese Construction jedoch nicht bezeichnet werden, da die Winkel zwischen  $n$  und den Strahlen  $TP_1', TP_2'$  verhältnismäßig klein ausfallen. Weitaus günstiger gestaltet sich die nachstehende Construction, welche die neben der projectiven Beziehung zwischen der Reihe  $(T, N, P_1, P_2)$  und dem Büschel  $(t, n, TP_1', TP_2')$  bestehende Projectivität der Büschel  $(OT, ON, OP_1, OP_2)$  und  $(n, t, TP_2', TP_1')$  benützt. Als Vervollständigungscentrum der letztgenannten Büschel findet man leicht den unendlich fernen Punkt von  $n$  und somit können wir sagen:

„Zieht man durch den Schnittpunkt der Tangente  $t$  mit der  $x$ -Achse die Parallele zur Normalen  $n$ , dann schneidet diese Parallele die  $\left. \begin{matrix} TP_2' \\ TP_1' \end{matrix} \right\}$  in einem Punkte, welcher mit dem Coordinatenanfangspunkt  $O$  verbunden eine durch  $N$  gehende Gerade liefert.“

Nicht unerwähnt möge zum Schlusse des Abschnittes bleiben, dass die Annahme  $k=\infty$  wiederum zu Beginn dieser Arbeit discutierte Fall zweier gerader Leitlinien ( $\zeta=a, \eta=0$ ), ( $\zeta=b, \eta=0$ ) führt.

Bemerkenswerte Resultate liefert weiters die Annahme zweier gleichseitiger Hyperbeln  $H_1$  ( $\eta = m$ ,  $\zeta(\xi - p) = a^2$ ),  $H_2$  ( $\eta = -m$ ,  $\zeta(\xi + p) = a^2$ ) als Leitlinien einer windschiefen Fläche von der hier stets vorausgesetzten besonderen Eigenschaft.

Um dies darzulegen bestimmen wir vorerst wiederum die Gleichung eines Kegels mit der Spitze  $T(x, y)$  in der  $xy$ -Ebene und der Hyperbel  $H_1$  als Leitlinie. Die Gleichungen einer Erzeugenden des Kegels sind:

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{m-y} = \frac{Z}{\zeta}.$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$\xi = x + (m-y) \frac{X-x}{Y-y}, \quad \zeta = (m-y) \frac{Z}{Y-y}$$

und nach Substitution dieser Werte in die Gleichungen  $\zeta(\xi - p) = a^2$  die Gleichung des Kegels ( $T, H_1$ ):

$$(m-y) \frac{Z}{Y-y} \left[ (x-p) + (m-y) \frac{X-x}{Y-y} \right] = a^2.$$

Die Gleichung des Kegels ( $T, H_2$ ) wird alsdann lauten:

$$-(m+y) \frac{Z}{Y-y} \left[ (x+p) - (m+y) \frac{X-x}{Y-y} \right] = a^2.$$

Dividieren wir beide Gleichungen durcheinander, so kommt

$$[(x-p)(m-y) + (x+p)(m+y)] + [(m-y)^2 - (m+y)^2].$$

$$\frac{X-x}{Y-y} = 0$$

als Gleichung der Projection auf die  $xy$ -Ebene der beiden Kegeln gemeinsamen Erzeugenden.

Setzen wir nun nach durchgeführter Reduction in jener Gleichung  $\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{dy}{dx}$ , so resultiert die Differentialgleichung der Schnittlinie unserer windschiefen Fläche mit der  $xy$ -Ebene:

$$(mx + py) dx + 2my dy = 0.$$

Wir können diese Differentialgleichung aus der Gleichung:

$$k y d\xi + \xi d\eta = 0$$

ableiten, wenn wir hierin einführen:  $\xi = y - \lambda_1 x$ ,  $\eta = y - \lambda_2 x$ . Man findet als zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad k \lambda_1 + \lambda_2 = -(k+1) \frac{p}{2m}, \quad k \lambda_2 + \lambda_1 = 0.$$



Aus denselben folgt nach Elimination von  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$k p^2 = -2(k-1)^2 m^2,$$

woraus bei gegebenem  $p$  und  $m$  der Wert von  $k$  bestimmt werden kann.

Für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  erhalten wir:

$$\lambda_1 = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{p}{2m}$$

und es lautet sodann das Integral der vorgelegten Differentialgleichung:

$$(y - \lambda_1 x)^k (y - \lambda_2 x) = \text{Const.}$$

Für  $k = 1$  und  $k = -2$  stellt die Gleichung Kegelschnitte dar.

1.  $k = 1$ . Diese Annahme bedingt nach obiger Gleichung für  $k$  das Verschwinden von  $p$ . Die ursprüngliche Differentialgleichung reducirt sich in diesem Falle auf:

$$x dx + 2y dy = 0,$$

deren Integral sofort durch die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 = \text{Const.}$$

darzustellen ist. Sie gehört einer Ellipse an, deren lineare Excentricität der halben Nebenachse gleichkommt oder, was dasselbe sagt, deren Hauptachse die Diagonale des über der Nebenachse als Seite construierten Quadrates ist. Für eine solche besondere Ellipse können wir also den Satz aussprechen:

„Irgend zwei in gleichen beliebigen Abständen von der Hauptachse gezogene Parallelen zu dieser werden von der Normalen  $n$  des Punktes  $T$  in zwei Punkten  $P_1, P_2$  geschnitten, welche mit  $T$  und dem Krümmungsmittelpunkt  $N$  einen Wurf  $(T N P_1 P_2)$  bilden, der projectiv ist mit dem Wurfe  $(t n p_1 p_2)$  der vier durch  $T$  gehenden Strahlen  $t$  (Tangente in  $T$ ),  $n$  und  $p_1, p_2$ , d. s. jene beiden Geraden, welche  $T$  verbinden mit zwei auf den erwähnten Achsenparallelen gelegenen Punkten  $P'_1, P'_2$ , die resp. doppelte Entfernung von der Nebenachse besitzen, wie die correspondierenden Punkte  $P_1, P_2$  und die mit letzteren auch je auf derselben Seite der Nebenachse liegen.“

Man wird bemerken, dass wenn die eine der in diesem Satze genannten Achsenparallelen durch  $T$  gehend angenommen wird, die andere nothwendig den Schnittpunkt der Normalen mit der Nebenachse enthält. Darin drückt sich ein leicht zu formulirender Normalensatz für diese besondere Ellipse aus.

2.  $k = -2$ . Hiefür nimmt die allgemeine Integralgleichung die Gestalt an:

$$(y - \lambda_1 x)^2 = C(y - \lambda_2 x) \quad (C \text{ die Constante})$$

Die Gleichung definiert eine Parabel, welche in dem ihr angehörenden Coordinaten-Ursprung von der Geraden  $y = \lambda_2 x$  berührt wird.

Die  $y = \lambda_1 x$  ist zugleich eine Parallele zur Achse der Parabel. Als Bedingung für die Zulässigkeit der Annahme  $k = -2$  finden wir aus der Gleichung  $k p^2 = -2(k-1)^2 m^2 : p = 3m$ , d. h. die Mittelpunkte der Hyperbeln  $H_1, H_2$  liegen in der Geraden  $\sigma$  ( $y = \frac{1}{3}x$ ). Die Werte für  $\lambda_1, \lambda_2$  sind dann bezw.  $-1, -\frac{1}{2}$  und die Gleichung der Parabel kann schließlich geschrieben werden:

$$(y+x)^2 = C\left(y + \frac{1}{2}x\right).$$

Der Ursprung ist demnach jener Punkt der Curve, dessen Tangente gegen die Achse einen Winkel vom tangens  $\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

einschließt. Wenn man noch bemerkt, dass die in die  $x$ -Achse fallende Sehne der Parabel halb so lang ist wie die in der  $y$ -Achse gelegene, so können wir folgenden Satz aussprechen:

„Zieht man durch den Punkt  $O$  ( $x = \frac{9}{2}s, y = 3s$ ) der Parabel  $y^2 = 2sx$ , dessen Tangente gegen die Parabelachse unter einem Winkel vom tangens  $\frac{1}{3}$  geneigt ist, zwei unter je  $45^\circ$  gegen die Curvenachse geneigte Gerade  $l_1, l_2$ , von denen mit  $l_1$  jene bezeichnet ist, deren Sehne die Hälfte der Sehne von  $l_2$  beträgt, ferner durch  $O$  noch die Gerade  $\sigma$ , welche durch die Gleichung  $y - 3s = 2\left(x - \frac{9}{2}s\right)$  dargestellt wird, dann schneidet die Normale  $n$  in irgend einem Punkte  $T$  der Parabel zwei beliebige gleichweit von  $l_1$  abstehende Geraden  $p_1, p_2$  in zwei Punkten  $P_1, P_2$ , welche mit  $T$  und dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $N$  einen Wurf ( $TNP_1P_2$ ) bilden, der projectiv ist mit dem Wurf ( $tnp_1p_2$ ) der vier Strahlen  $t$  (der Tangente in  $T$ ),  $n$  und  $p_1, p_2$  (den respectiven Verbindungslinien von  $T$  mit zwei Punkten  $P_1', P_2'$  auf  $p_1$ , bezw.  $p_2$ , welche von  $P_1, P_2$  die nämlichen Abstände besitzen als die Schnittpunkte  $O_1, O_2$  von  $\sigma$  mit  $p_1, p_2$ ).“

Wir fügen hinzu, dass, wenn etwa  $p_1$  durch  $T$  geht, die Normale  $n$  nothwendig den Punkt  $O_2$  enthält, und dass daher auch die Normale im zweiten Schnittpunkt  $T'$  der  $p_1$  und der Parabel ebenfalls durch denselben Punkt  $O_2$  geht.

„Zieht man also zur Geraden  $y - 3s = x - \frac{9}{2}s$  eine Parallele, welche die Parabel  $y^2 = 2sx$  in zwei Punkten  $T, T'$  schneidet, so

gehen die Parabelnormalen in diesen Punkten durch einen Punkt  $O_2$  auf der Geraden  $y - 3s = 2\left(x - \frac{9}{2}s\right)$ , die nebenbei bemerkt selbst eine Normale der Parabel ist und zwar im Punkte  $(x = 2s, y = -2s)$ . Die Strecken  $O_2 T$  und  $O_2 T''$  werden zudem von der Geraden  $y - 3s = x - \frac{9}{2}s$  halbiert und die Entfernung des Punktes  $O_2$  von der Geraden  $y - 3s = -x + \frac{9}{2}s$  ist weiters dreimal so groß wie die Entfernung der  $T T''$  von der  $y - 3s = x - \frac{9}{2}s$ .“

Eine gewisse Analogie dieses Satzes mit dem oben für die besondere Ellipse  $x^2 + 2y^2 = \text{Const.}$  gefundenen Normalensatze ist hiernach jedenfalls zu constatieren.

Die windschiefen Flächen, welche wir in diesem Abschnitte heranziehen wollen, mögen die Gerade ( $\eta = 0, \zeta = -m$ ) zur einen Leitlinie besitzen, während die zweite Leitlinie eine unendlich ferne höhere Hyperbel oder Parabel sein möge, d. h. die Flächen sollen einen Kegel von der Gleichung  $\zeta^{k-1} \eta = \xi^k$  zum Richtkegel besitzen.

Die Gleichung der Projection irgend einer Erzeugenden einer derartigen windschiefen Fläche auf die  $xy$ -Ebene wird hiernach erhalten werden durch Elimination von  $Z$  aus den beiden Gleichungen

$$yZ = m(Y - y) \text{ und } Z^{k-1}(Y - y) = (X - x)^k.$$

Sie lautet also:

$$\left(\frac{m}{y}\right)^{k-1} = \left(\frac{X-x}{Y-y}\right)^k \text{ oder } \left(\frac{m}{y}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{X-x}{Y-y}$$

und die Differentialgleichung der in der  $xy$ -Ebene gelegenen Curve der windschiefen Fläche hat demgemäß die Form:

$$m^{\frac{k-1}{k}} dx + y^{\frac{k-1}{k}} dy = 0.$$

Das Integral erhält den Wert:

$$m^{\frac{k-1}{k}} x + \frac{y^{\frac{2k-1}{k}}}{\frac{2k-1}{k}} = \text{Const.}$$

Die Normale  $n$  in irgend einem Punkte  $T(x, y)$  einer von der durch diese Gleichung dargestellten Curven (ersichtlich höhere Parabeln oder Hyperbeln) kann nun aufgefasst werden als Projection auf die  $xy$ -Ebene einer Erzeugenden  $n^*$  des Kegels  $Z^{k-1}(Y - y) = (X - x)^k$ , dessen Spitze  $T$  ist. Die  $n^*$  ist dann

zugleich Erzeugende unserer windschiefen Fläche. Die asymptotische Ebene der  $n^*$ , d. i. die Tangentialebene an die windschiefe Fläche im unendlich fernen Punkt  $P_{2\infty}$  von  $n^*$ , ist die Tangentialebene längs  $n^*$  an jenen Kegel. Uns interessiert von dieser Ebene nur die Schnittlinie  $p_2$  mit der  $xy$ -Ebene. Da die  $p_2$  durch  $T$  geht, so brauchen wir zu ihrer Bestimmung lediglich einen zweiten Punkt. Als solcher mag am zweckmäßigsten der in die  $y$ -Achse fallende Punkt construiert werden. Eine leichte Überlegung lehrt aber, dass dieser Punkt von der Projection von  $T$  in die  $y$ -Achse  $k$ -mal so weit entfernt ist als der Schnittpunkt der  $n$  und der  $y$ -Achse. Nicht unerwähnt mag bleiben, dass hingegen der Schnittpunkt der  $x$ -Achse und der  $p_2$  von der Projection von  $T$  in die  $x$ -Achse  $\frac{1}{k}$ -mal so weit entfernt ist wie der Schnittpunkt  $P_1$  von  $n$  und der  $x$ -Achse.

Für die Curven, deren Gleichung von der Form

$$\frac{2k-1}{k} m^{\frac{k-1}{k}} x + y^{\frac{k-1}{k}} = \text{Const.}$$

ist, sind wir jetzt in der Lage, den Satz auszusprechen:

„Bedeutet  $t$ ,  $n$  bzw. die Tangente und die Normale im Punkte  $T$ , ist  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt,  $P_1$  der Schnittpunkt von  $n$  mit der  $x$ -Achse, dagegen  $p_1$  die Parallele durch  $T$  zur  $x$ -Achse, endlich  $P_{2\infty}$  der unendlich ferne Punkt von  $n$  und wird  $p_2$  als Verbindungslinie von  $T$  mit jenem Punkte der  $y$ -Achse construiert, welcher der Größe und dem Vorzeichen nach  $\frac{1}{k}$  mal soweit entfernt ist von der Projection von  $T$  in die  $y$ -Achse

wie der Schnittpunkt von  $n$  mit der  $x$ -Achse, dann gilt die Gleichung  $(TN P_1 P_{2\infty}) = (t n p_1 p_2)$  und es ist also u. a. die Verbindungslinie von  $N$  mit dem Schnittpunkte der  $p_1$  und der Parallelen zur  $t$  durch  $P_1$  parallel zur  $p_2$ “.

Wählen wir für  $k$  insbesondere die Werte  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$ , dann bezieht sich dieser Satz auf eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Asymptote die  $x$ -Achse ist, bzw. (für  $k = \frac{2}{3}$ ) auf eine Parabel, von der die Scheiteltangente mit der  $x$ -Achse coineidiert.

Die Größe der Integrationsconstanten ist für den geometrischen Inhalt des Satzes, wie man bemerken wird, in diesen beiden speciellen Fällen sowohl, als auch ganz im allgemeinen belanglos. Diese Constante kann ohneweiters gleich Null gesetzt werden.

Wir müssen jetzt noch erwähnen, dass wir bei Aufstellung obiger Integralgleichung stillschweigend vorausgesetzt haben,  $\frac{k-1}{k}$  sei von  $-1$  verschieden. Ist dies nicht der Fall, ist also  $k = \frac{1}{2}$ , dann lautet die zu integrierende Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{m} + \frac{dy}{y} = 0$$

und wir finden als Integral die Gleichung der logarithmischen Linie:

$$y = C e^{-\frac{x}{m}} \quad (C \text{ die Constante}).$$

Für diese Curve gilt der Satz von vorhin offenbar ebenfalls, nur hat man unter  $k$  den besonderen Wert  $\frac{1}{2}$  zu verstehen.

Wir lassen jetzt an Stelle einer der sonst gegeben gewesenen Leitlinien unserer windschiefen Fläche eine Leitfläche, und zwar einen Leitecylinder treten. Später werden wir Fälle behandeln, bei denen beide Leitlinien durch Leitecylinder ersetzt sind.

Wir beginnen mit folgenden Beispielen: Der Leitecylinder habe die Gleichung  $\zeta^{k-1}\xi = a^k$  und als Leitlinie fungiere 1. die Gerade ( $\eta = 0, \zeta = m$ ), 2. die unendlich ferne Gerade der Ebene  $\zeta = \mu \eta$ .

Ist  $T(x, y)$  ein Punkt einer der Spurecurven in der  $xy$ -Ebene der unter diesen Voraussetzungen resultierenden windschiefen Flächen, dann liegen die durch ihn gehenden Erzeugenden der Flächen in der durch  $T(x, y)$  gelegten Tangentialebene an den Cylinder  $\zeta^{k-1}\xi = a^k$ , d. h. in der Verbindungsebene der Geraden:

( $\zeta = 0, \xi = x$ ),  $\left(\xi = \frac{x}{k}, \zeta = \left(\frac{k a^k}{x}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right)$ , welch' letztere Gerade die Berührungserzeugende des Cylinders darstellt. Die Gleichung jener Ebene lautet mithin:

$$\frac{Z}{X-x} = \frac{k(k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{\frac{k}{k-1}}}$$

und wir erhalten nun:

1. durch Elimination von  $Z$  aus dieser Gleichung mittelst der Gleichung  $\frac{Z}{Y-y} = -\frac{m}{y}$ :

$$\frac{m}{y} \cdot \frac{Y-y}{X-x} = \frac{k(k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{(k-1)x^{\frac{k}{k-1}}}$$

und nach Einführung von  $\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{dx}{dy}$  die Differentialgleichung:

$$(k-1) m x^{\frac{k}{k-1}} dx + k (k a^k)^{\frac{1}{k-1}} y dy = 0,$$

deren Integral

$$2(k-1)^2 m x^{\frac{2k-1}{k-1}} + k(2k-1)(k a^k)^{\frac{1}{k-1}} y^2 = \text{Const.}$$

Die in der  $xy$ -Ebene gelegene Spurcurve von der im Falle 1 sich ergebenden windschiefen Fläche darstellt.

Für alle durch eine Gleichung von dieser Form repräsentierten Curven gilt nun der Satz:

„Ist  $T$  ein Punkt der Curve,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt,  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$ , ist  $P_1$  als Schnittpunkt von  $n$  mit jener zur  $y$ -Achse Parallelen construiert, deren Abstand von dieser Achse das  $\frac{1}{k}$ -fache des Abstandes von  $T$  von derselben Achse beträgt, bedeutet ferner  $p_1$  die durch  $T$  gelegte Parallele zur  $y$ -Achse, hingegen  $p_2$  die Parallele durch  $T$  zur  $x$ -Achse und endlich  $P_2$  den Schnittpunkt von  $n$  und der  $x$ -Achse, dann gilt die Doppelverhältnisleichheit  $(TN P_1 P_2) = (t n p_1 p_2)$  und die Verbindungslinie des Schnittpunktes der  $p_1$  mit der zur Tangente  $t$  Parallelen durch  $P_1$  und des Schnittpunktes von  $p_2$  mit der gleichfalls zur Tangente  $t$  Parallelen durch  $P_2$  enthält den Punkt  $N$ .“

Ein besonderes Interesse von allen den Curven, auf welche dieser Satz Anwendung finden darf, beanspruchen diejenigen, deren Gleichung für den Nullwert der Integrationsconstanten zum Vorschein kommt. Wir können der Integralgleichung alsdann augenscheinlich die Form geben  $y^{k'-1} x = \text{Const.}$  und ersehen hieraus, dass die fraglichen Curven höhere Parabeln und Hyperbeln sind. Die Relation, welche zwischen  $k'$  und  $k$  besteht, lautet:

$$-\frac{2(k-1)}{2k-1} = k' - 1 \quad \text{oder} \quad k' = \frac{1}{2k-1},$$

also ist

$$k = \frac{1+k'}{2k'},$$

welcher Wert für  $k$  im Texte des obigen Satzes zu substituieren wäre, falls er für die Curve  $y^{k'-1} x = \text{Const.}$  gelten soll.

Für  $k' = -1, \frac{1}{2}, 2$ , welche Werte zu Parabelgleichungen, bzw. zur Gleichung der gleichseitigen Hyperbel führen, ergeben sich insbesondere  $k = 0, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ .

Wir haben jetzt noch nachzutragen, dass für den Wert  $k = \frac{1}{2}$  an Stelle der vorstehenden Integralgleichung die folgende tritt:

$$-\frac{m}{2} \log x + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \frac{y^2}{2} = m \log C \text{ oder } Cx = e^{\frac{2y^2}{am}}.$$

Unser Satz bleibt für diese Curve natürlich aufrecht, wofern statt „das  $\frac{1}{k}$ -fache“, das „doppelte“ gelesen wird. In dieser Fassung gilt er daher auch für die Curve  $x = e^{-y^2}$ , welche bekanntlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielt.

2. Eliminieren wir  $Z$  aber aus der Gleichung

$$\frac{Z}{X-x} = \frac{k (k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{k-1}}}$$

vermittelst der Gleichung  $Z = \mu (Y - y)$ , so ergibt sich:

$$\mu \frac{Y-y}{X-x} = \frac{k (k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{k-1}}}$$

und mithin die Differentialgleichung

$$\mu (1-k) x^{\frac{k}{k-1}} dx + k (k a^k)^{\frac{1}{1-k}} dy = 0,$$

deren Integral wiederum eine höhere Parabeln und Hyperbeln darstellende Gleichung von der Form:

$$\mu (k-1)^2 x^{\frac{2k-1}{k-1}} + k (1-2k) (k a^k)^{\frac{1}{k-1}} y = \text{Const.}$$

ist.

Wir können so den Satz aufstellen:

„Bleibt die Bedeutung von  $T, N, t, n, P_1, p_1, p_2$  für eine der durch jene Gleichung dargestellten Curven dieselbe wie im Satze von vorhin und verstehen wir unter  $P_2 \infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , dann gilt  $(TNP_1 P_2 \infty) = (tnp_1 p_2)$  und es liegt mithin  $N$  auf der zur  $p_2$  geführten Parallelen durch den Schnittpunkt der  $p_1$  und der zur  $t$  durch  $P_1$  gezogenen Parallelen.“

Erhält  $k$  die Werte  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ , dann haben wir einen Parabelsatz, bzw. einen Satz für die gleichseitige Hyperbel.

Für  $k = \frac{1}{2}$  finden wir schließlich einen Satz für die logarithmische Linie, da für diesen Wert unsere Integralgleichung lautet:

$$\frac{\mu}{2} \log x + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} y = \frac{\mu}{2} \log C \text{ oder } x = C e^{-\frac{4}{\mu} y}.$$

Wir setzen in diesem Abschnitte die Untersuchungen des vorigen fort, d. h. wir wollen den Cylinder  $\zeta^{k-1} \xi = a^k$  als Leitcylinder beibehalten, an Stelle der geraden Leitlinien des vorigen Abschnittes hingegen krumme einführen, und zwar 1. ( $\xi = 0$ ,  $\zeta^{k-1} \eta = b^k$ ) und 2. und die unendlich ferne Curve des Kegels  $\zeta^{l-1} \eta = \xi^l$ .

1. Durch Elimination von  $Z$  aus

$$\frac{Z}{X-x} = \frac{k (k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{\frac{k}{k-1}}}$$

mit Hilfe der Gleichung

$$\left( -x \frac{Z}{X-x} \right)^{k-1} \cdot \frac{y(X-x) - x(Y-y)}{X-x} = b^k$$

bekommen wir

$$\left[ \frac{k (k a^k)^{\frac{1}{k-1}}}{(k-1) x^{\frac{k}{k-1}}} \right]^{k-1} \cdot \frac{y(X-x) - x(Y-y)}{X-x} = b^k$$

und also nach Ersetzung von  $\frac{Y-y}{X-x}$  durch  $-\frac{dx}{dy}$  die Differentialgleichung

$$a' x dx + (-b' x + a' y) dy = 0,$$

worin  $a'$  und  $b'$  bezw. bedeuten

$$\frac{k^k \cdot a^k}{(k-1)^{k-1}} \text{ und } b^k.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung wird durch den Ausdruck

$$(y - \lambda_1 x)^l (y - \lambda_2 x) = \text{Const.}$$

dargestellt, wofern  $l$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  die drei Gleichungen

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad l \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad l \lambda_2 + \lambda_1 = \frac{b'}{a'}$$

befriedigen. Wir haben also

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-l^2} \frac{b'}{a'}, \quad \lambda_2 = -\frac{l}{1-l^2} \frac{b'}{a'}$$



und finden  $l$  aus der Gleichung:

$$-\frac{l}{(1-l^2)^2} = \left(\frac{a'}{b'}\right)^2.$$

Wir ersehen hieraus, dass die GröÙe  $l$  den Wert  $-2$  annimmt, wenn das Verhältnis  $\frac{a'}{b'} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$  ist. Es wird in diesem Falle:

$$\lambda_1 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_2 = \mp \sqrt{2}$$

und es lautet unsere Integralgleichung:

$$\left(y \pm \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = C(y \pm x\sqrt{2}).$$

Es ist dies die Gleichung einer Parabel, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht und daselbst von der Geraden  $y = \pm x\sqrt{2}$  berührt wird, während die  $y = \pm \frac{x}{2}\sqrt{2}$  zur Parabelachse parallel läuft. Der Winkel, welchen die Tangente im Ursprung mit der Achse einschließt, besitzt somit den Tangens

$$\frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Beziehen wir die Parabel auf ihre Achse und die Scheiteltangente als Coordinatenachsen und weisen wir ihr die Gleichung  $y^2 = 2sx$  zu, so bekommt der alte Ursprung die Coordinaten  $(x=4s, y=2s\sqrt{2})$ . Die alte Ordinatenachse erhält, wie man leicht findet, die Gleichung

$$y - 2s\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (x - 4s).$$

Wir construieren sie daher am bequemsten als Verbindungslinie der Punkte  $(x=4s, y=2s\sqrt{2})$  und  $(x=2s, y=0)$  und können nun den Satz aussprechen:

„Ziehen wir durch den Punkt  $O$   $x=4s, y=2s\sqrt{2}$  der Parabel  $y^2 = 2sx$  die Gerade  $Oy'$  ( $y - 2s\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (x - 4s)$ ) und die auf ihr normale Gerade  $Ox'$ , sodann in irgend einem Punkte  $T$  der Parabel die Tangente  $t$ , die Normale  $n$ , bezeichnen mit  $p_1$  die Parallele zur  $Oy'$  durch  $T$ , mit  $P_1$  den Schnittpunkt von  $n$  mit derjenigen Parallelen zur  $Oy'$ , welche  $\frac{1}{k}$ -mal so weit von ihr

(der  $Oy'$ ) entfernt ist wie  $T$ , endlich mit  $P_2$  den Schnittpunkt von  $n$ , mit der  $Oy'$  und mit  $p_2$  die Verbindungslinie von  $T$  mit jenem Punkte auf  $Oy'$ , dessen Entfernung von  $O$  das  $k$ -fache der Entfernung des Punktes  $P_2$  ausmacht, wobei unter  $k$  ein beliebiger Wert verstanden ist, dann besteht, wenn noch mit  $N$  der Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$  benannt wird, die Relation  $(TN P_1 P_2) = (t n p_1 p_2)$ .“

2. Die Elimination von  $Z$  aus den Gleichungen

$$\frac{Z}{X-x} = \frac{k(k a^k)^{\frac{1}{l-k}}}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{\frac{k}{k-1}}} \text{ und } Z^{l-1}(Y-y) = (X-x)^l$$

liefert hingegen

$$\left(\frac{k}{1-k}\right)^{l-1} (k a^k)^{\frac{l-1}{k-1}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{k(l-1)}{k-1}}} = \frac{X-x}{Y-y},$$

und also wegen  $\frac{X-x}{Y-y} = -\frac{dy}{dx}$  die Differentialgleichung

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{l-1} (k a^k)^{\frac{l-1}{k-1}} x^{-\frac{k(l-1)}{k-1}} dx + dy = 0,$$

deren Integral wir kurz darstellen können durch

$$C x^{\frac{2k-k l-1}{k-1}} + y = C',$$

wofern nicht  $\frac{k(l-1)}{k-1} = -1$  ist, denn im letzteren Falle hat das Integral die Form:

$$x = C' e^{Cy}.$$

Für jede durch die eine oder die andere dieser Integralgleichungen dargestellte Curve gilt nun der Satz:

„Verstehen wir unter  $T$  einen Punkt der Curve, unter  $N$  den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt, unter  $t, n$  bezw. die Tangente und die Normale in  $T$ , unter  $p_1$  die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $T$  und unter  $B_1$  den Schnittpunkt von  $n$  mit derjenigen Parallelen zur  $y$ -Achse, welche  $\frac{1}{k}$ -mal so weit von ihr entfernt ist wie  $T$ , endlich unter  $P_{2\infty}$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , dagegen unter  $p_2$  die Verbindungslinie von  $T$  mit jenem Punkt der  $y$ -Achse welcher von der Projection von  $T$  in die nämliche Achse einen  $l$ -mal so großen Abstand besitzt wie der Schnittpunkt von  $n$  mit der  $y$ -Achse, dann besteht die Beziehung  $(TN P_1 P_{2\infty}) = (t n p_1 p_2)$ .“

Setzen wir  $\frac{2k-k l-1}{k-1} = -1$ , so stellt die Integralgleichung eine gleichseitige Hyperbel vor und es ist im vorsteh-

henden Satze  $\frac{1}{k} = \frac{3-l}{2}$  anzunehmen. Nehmen wir etwa  $l = -1, 3$ , dann ist  $\frac{1}{k} = 2, 0$  zu erachten u. s. w. Für  $\frac{2k-k l-1}{k-1} = 2$

haben wir eine Parabel und müssen  $\frac{1}{k} = l$  wählen. Desgleichen ergibt sich eine Parabel für  $\frac{2k-k l-1}{k-1} = \frac{1}{2}$ , also für  $\frac{1}{k} = 3 - 2l$  (z. B.  $l = 2, \frac{1}{k} = -1; l = 0, \frac{1}{k} = 3; l = 3, \frac{1}{k} = -3$ ).

Ähnliche Relationen lassen sich natürlich für jede beliebige höhere Hyperbel oder Parabel in gleicher Art feststellen. Auch für die logarithmische Curve gibt die charakteristische Beziehung  $\frac{k(l-1)}{k-1} = -1$  für  $\frac{1}{k}$  einen solchen Ausdruck, nämlich wiederum  $\frac{1}{k} = l$ , was zur Bemerkung Veranlassung gibt, dass für die logarithmische Linie und für die Parabel der obige Satz identisch gleichlautend wird.

Schreiben wir die Gleichung einer höheren Parabel oder Hyperbel in der Form  $x^m = a^{m-1}y$  auf, so bestimmen sich für diese Curve zusammengehörige Werte für  $k$  und  $l$  allgemein aus der Gleichung:  $2k - kl - 1 = m(k - 1)$  und da zu jedem Werte von  $k$  ein bestimmter Punkt  $P_1$  auf  $n$  gehört, ferner jedem  $k$  ein einziger Wert von  $l$  entspricht, jedem Werte von  $l$  aber wiederum ein ganz bestimmter Strahl  $p_2$  durch  $T$  zugeordnet ist, so herrscht in diesem Sinne zwischen dem Büschel der  $p_2$  und der Reihe der  $P_1$  Projectivität. Damit steht auch die vom Büschel der  $p_2$  auf unendlich fernen Geraden ausgeschnittene Reihe in projectiver Beziehung zur Reihe der  $P_1$ . Wir finden als Perspectivitäts (Vervollständigungs)achse der beiden Reihen die  $p_1$  (die Parallele durch  $T$  zur  $y$ -Achse), denn für  $k = 1$  wird  $l = 1$ , d. h.  $P_1$  fällt nach  $T$  und  $p_2$  coïncidiert mit  $n$  und für  $k = 0$  ist  $l = \infty$ , d. h.  $P_1$  ist der unendlich ferne Punkt und  $p_2$  fällt in die  $p_1$ . Construieren wir nun etwa noch das Paar  $(P_1', p_2')$  für  $k = \frac{1}{2}, l = m$ , so kann man zu jeder beliebigen  $p_2$  durch  $T$  den zugehörigen Punkt  $P_1$  bestimmen und umgekehrt.

Wir fragen in diesem Abschnitte nach den windschiefen Flächen, welche die Cylinder  $\zeta^{k-1}\xi = a^k, \zeta^{l-1}\eta = b^l$  zu Leitflächen besitzen.

Die Tangentialebene durch einen Punkt  $T(x, y)$  der  $xy$ -Ebene an den ersten der beiden Cylinder enthält dessen Erzeugende

$\xi = \frac{x}{k}$ ,  $\zeta = \left( \frac{k a^k}{x} \right)^{\frac{k}{k-1}}$  und besitzt also die Gleichung

$$\frac{Z}{X-x} = \frac{(a k)^{\frac{k}{k-1}}}{(1-k) x^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Analog findet man als Gleichung der Tangentialebene durch den nämlichen Punkt an den zweiten Cylinder

$$\frac{Z}{Y-y} = \frac{(b l)^{\frac{l}{l-1}}}{(1-l) y^{\frac{l}{l-1}}}$$

und es ergibt sich so für die Spurcurve der windschiefen Fläche in der  $xy$ -Ebene die Differentialgleichung:

$$(1-k)(b l)^{\frac{l}{l-1}} x^{\frac{k}{k-1}} dx + (1-l)(a k)^{\frac{k}{k-1}} y^{\frac{l}{l-1}} dy = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$(k-1)^2 (2l-1) (b l)^{\frac{l}{l-1}} x^{\frac{2k-1}{k-1}} + \\ + (l-1)^2 (2k-1) (a k)^{\frac{k}{k-1}} y^{\frac{2l-1}{l-1}} = \text{Const.}$$

Für jede durch eine solche Gleichung dargestellte Curve können wir behaupten:

„Bedeutend  $t$ ,  $n$  wie bisher die Tangente, bezw. die Normale im Curvenpunkte  $T$ , sind ferner  $p_1$ ,  $p_2$  die durch  $T$  gezogenen Parallelen zur  $x$ -Achse, resp. zur  $y$ -Achse, sind dann noch  $p_1$ ,  $p_2$  zwei ebenfalls zur  $x$ -Achse, bezw. zur  $y$ -Achse Parallele, deren Entfernungen von den bezüglichen Achsen der Größe und dem Zeichen nach das  $\frac{1}{l}$ -fache der Ordinate, resp. das  $\frac{1}{k}$ -fache der Abscisse von  $T$  ausmachen und sind endlich  $P_1$ ,  $P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  mit  $p_1$ ,  $p_2$ , während  $N$  den Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$  bezeichnet, so gilt die Doppelverhältnissgleichheit  $(TN P_1 P_2) = (tn p_1 p_2)$ .“

Ist insbesondere  $l=k$ , dann stellt obige Gleichung im allgemeinen dieselben Curven dar, welche uns bereits früher (S. 110) begegnet sind. Die Kegelschnittgleichungen, welche in unserer

Integralgleichung enthalten sind, bekommen wir für 1.)  $\frac{2k-1}{k-1} = -1$ ,  $\frac{2l-1}{l-1} = -1$  also  $k=l=\frac{2}{3}$ , 2.)  $\frac{2k-1}{k-1} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{2l-1}{l-1} = \frac{1}{2}$  also  $k=l=\frac{1}{3}$ .

Im ersten Falle hat die resultierende Gleichung die Form:  $\frac{A}{x} + \frac{B}{y} = C$ . Wir haben es mit einer gleichseitigen Hyperbel zu thun, die auf zwei durch einen ihrer Punkte gezogene Asymptotenparallele als Coordinatenachsen bezogen ist. Die Geraden  $p_1, p_2$  haben die  $1\frac{1}{2}$ -fache Entfernung von den zu ihnen parallelen Coordinatenachsen wie bezw. die Geraden  $p_1, p_2$ .

Im zweiten Falle ergibt sich eine Gleichung von der Form:  $A\sqrt{x} + B\sqrt{y} = C$ , welche eine auf zwei zu einander normale Tangenten bezogene Parabel darstellt. Hier haben die Geraden  $p_1, p_2$  je die dreifache Entfernung von den Coordinatenachsen wie  $p_1, p_2$ .

Für  $\frac{2k-1}{k-1} = \frac{2l-1}{l-1} = \frac{2}{3}$  oder  $k=l=\frac{1}{4}$  erhalten wir die

Gleichung  $Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} = C$ , welche bei geeigneter Wahl von  $a$  und  $b$  der Evolute einer Hyperbel oder Ellipse, oder einer Astroide angehört. Für jede dieser Curven werden die Distanzen der Geraden  $p_1, p_2$  von den bezüglich parallelen Coordinatenachsen das Vierfache der Entfernungen der Geraden  $p_1, p_2$  ausmachen.

Setzen wir die Integrationsconstante gleich Null voraus, dann sind die durch die Integralgleichung dargestellten Curven wiederum höhere Parabeln und Hyperbeln, wofern  $k$  von  $l$  verschieden ist. Wir können in diesem Falle der Gleichung die Form geben:  $x^m = a^{m-1}y$  und müssen für  $k$  und  $l$  solche Werte wählen, welche der Bedingungsgleichung  $\frac{(2k-1)(l-1)}{(2l-1)(k-1)} = m$  genügen. Man kann

demnach bei diesen Curven  $P_1$  etwa beliebig auf  $n$  annehmen und findet jeweils einen ganz bestimmten zweiten Punkt auf  $n$  als Punkt  $P_2$  und umgekehrt. Die zugehörigen Parallelstrahlenbüschel der  $p_1$  und  $p_2$  sind damit als projectiv auf einander bezogen nachgewiesen. Ihr Directionscentrum  $\Sigma$  liegt im Schnitte der beiden Geraden  $\zeta = \frac{2m-1}{m-1}x$ ,  $\eta = \frac{m-2}{m-1}y$ , da für  $k$  bzw.  $l=0$  der

entsprechende Wert für  $l$  bzw.  $k$  den Wert  $\frac{m-1}{2m-1}$  erhält. Wenn man nun das Directionscentrum  $\Sigma$  construirt hat und bemerkt, dass notwendig (wegen  $k=\frac{1}{2}$ ,  $l=\frac{1}{2}$  als ein Paar zusammengehöriger Werte) die resp. zweimal so weit als  $T$  von der  $x$  nach der  $y$ -Achse abstehenden Parallelen zu diesen Achsen ein Paar entsprechender Strahlen  $p_1, p_2$  vorstellen, ebenso wie die durch  $T$  gehenden Parallelen zu den Achsen, so ist es leicht, zu jedem Punkt  $P_1$  den beigeordneten Punkt  $P_2$  und umgekehrt zu ermitteln.

Für  $m=-1$  haben wir die gleichseitige Hyperbel  $xy=a^2$ .  $\Sigma$  hat die Coordinaten:  $\xi = \frac{3}{2}x$ ,  $\eta = \frac{3}{2}y$  und die zwi-

schen  $k$  und  $l$  bestehende Relation kann geschrieben werden:  
 $2 \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l} - 3 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{l} \right) + 4 = 0$ . Man wird leicht nachweisen, dass diese Gleichung außer für  $\frac{1}{k} = 2, \frac{1}{l} = 2$  durch kein anderes ganzzahliges Wertepaar für  $\frac{1}{k}$  und  $\frac{1}{l}$  zu befriedigen ist. Dagegen haben wir für  $m = 2$ , wozu die Parabel  $x^2 = ay$  gehört, die Relation:  
 $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l} - 3 \frac{1}{l} + 2 = 0$ , welche natürlich wiederum  $\frac{1}{k} = 2, \frac{1}{l} = 2$  als Lösungen besitzt, daneben aber noch die folgenden ganzzahligen Wertepaare:  $\frac{1}{k} = 4, \frac{1}{l} = -2; \frac{1}{k} = 5, \frac{1}{l} = -1$ .  $\Sigma$  hat hier die Coordinaten  $\xi = 3x, \eta = 0$ .

Es erübrigt uns jetzt, zu bemerken, dass für  $k = \frac{1}{2}$  oder  $l = \frac{1}{2}$  oder  $k$  und  $l = \frac{1}{2}$  an Stelle der gefundenen Integralgleichung andere zu setzen sind. So für  $l = \frac{1}{2}$  die Gleichung:

$$y = C e^{\frac{4(k-1)^2 x \frac{2k-1}{k-1}}{(2k-1)(ak)_{k-1} \cdot b}}.$$

Für die durch eine solche Gleichung dargestellten Exponentialcurven bleibt unser Satz aufrecht. Es ist nur statt das „ $\frac{1}{l}$ -fache“, das „doppelte“ zu lesen.

Setzen wir bloß  $k = \frac{1}{2}$ , so erhalten wir eine Integralgleichung, die aus vorstehender in naheliegender Weise abzuleiten ist. Sie wird dieselben Curven repräsentieren.

Setzen wir hingegen  $k = \frac{1}{2}$  und  $l = \frac{1}{2}$ , so lautet die Integralgleichung:

$$x^a y^b = \text{Const.}$$

d. i. die Gleichung höherer Hyperbeln oder Parabeln. Für diese Curven sagt indessen unser entsprechend modificierter Satz nur etwas, das oben schon erkannt wurde.

Wir gehen nunmehr daran, unsere bisherige Fragestellung wesentlich zu erweitern. Wir suchen jetzt nicht mehr in der  $xy$ -Ebene, sondern auf irgend einer passend gewählten Fläche  $F$  eine Curve — sie sei  $C^*$  genannt — von der Beschaffenheit, dass die durch jeden Punkt  $T^*$  derselben gehende Erzeugende der durch  $C^*$  und zwei weitere gegebene Curven  $C_1, C_2$  bestimmten wind-

schiefen Fläche sich auf die  $xy$ -Ebene als Normale im Punkte  $T$  der Curve  $C$  projiciere, wo  $T$  und  $C$  bzw. die Projectionen von  $T^*$  und  $C^*$  bedeuten. Der Krümmungsmittelpunkt  $N$  für die Stelle  $T$  der  $C$  erscheint dann als Projection des Berührungspunktes  $N^*$  der durch die maßgebende Erzeugende der windschiefen Fläche gelegten zur  $xy$ -Ebene normalen Tangentialebene. Man sieht jetzt schon, dass die Construction des Punktes  $N$  leicht möglich wird, wenn man die Tangentialebenen an die windschiefe Fläche in den drei Punkten bestimmen kann, welche eine Erzeugende mit den Curven  $C^*$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  gemein hat. Der Gang unserer Untersuchungen wird der sein, dass wir vorerst die Fläche  $F$  unbestimmt lassen; alsdann stellen wir die Gleichungen der durch einen Punkt  $T^*$  ( $x, y, z$ ) des Raumes gehenden die  $C_1$  und die  $C_2$  schneidenden Geraden auf, bestimmen insbesondere die Gleichung der Projection dieser Geraden auf die  $xy$ -Ebene, überführen diese Gleichung in die Differentialgleichung der Curve  $C$ , worin  $z$  vorkommt und nun so gewählt wird, dass die vorgelegte Differentialgleichung leicht integriert werden kann.

Wir beginnen wiederum mit dem allereinfachsten Beispiele: Die Leitlinien  $C_1$  und  $C_2$  seien bzw. die Geraden  $G^*$  ( $\eta = 0, \zeta = m$ ),  $H^*$  ( $\xi = 0, \zeta = n$ ). Die durch irgend einen Punkt  $T^*$  ( $x, y, z$ ) des Raumes gehende Schneidende jener beiden Geraden liegt in den Ebenen:

$$\frac{Z-z}{Y-y} = -\frac{m-z}{y} \quad \text{und} \quad \frac{Z-z}{X-x} = -\frac{n-z}{x}.$$

Der gesuchten Transversalen Projection auf die  $xy$ -Ebene hat demnach die Gleichung:

$$\frac{X-x}{Y-y} = \frac{x(m-z)}{y(n-z)}$$

und die Differentialgleichung der Curve  $C$  lautet:

$$x(m-z)dx + y(n-z)dy = 0 \quad \text{oder} \quad Mdx + Ndy = 0, \quad \text{wobei} \\ M = x(m-z), \quad N = y(n-z)$$

zu setzen ist.

$$\text{Ist } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{oder also} \quad x \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{dann wird } Mdx + Ndy$$

ein vollständiges Differential. Setzt man  $z = \frac{x^2 + y^2}{2p}$ , so ist jene Bedingung augenscheinlich erfüllt und die Differentialgleichung der  $C$  hat die Form:

$$x(2pm - x^2 - y^2)dx + y(2pn - x^2 - y^2)dy = 0$$

und das Integral — die Gleichung der  $C$  — ist dargestellt durch:

$$4p(mx^2 + ny^2) - (x^2 + y^2)^2 = \text{Const.}$$

Setzt man speciell  $n = -m$ , dann haben wir die Gleichung:

$$4mp(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = \text{Const.}$$

vor uns, welche den Cassini'schen Curven zukommt. Wird noch die Constante gleich Null gemacht, so ist die Curve  $C$  eine Lemniscate.

Die Curve  $C^*$ , welche im Vereine mit den Geraden  $G^*$  ( $\eta = 0$ ,  $\zeta = m$ ),  $H^*$  ( $\xi = 0$ ,  $\zeta = -m$ ) als Leitlinie unserer windschiefen Fläche fungiert, ist in diesem speciellen Falle jene Curve auf dem Rotationsparaboloide  $2pz = x^2 + y^2$ , die sich auf die  $xy$ -Ebene als Cassini'sche Linie  $C$  projiziert. Nennen wir die Schnittpunkte irgend einer Erzeugenden der windschiefen Fläche mit  $C^*$ ,  $G^*$ ,  $H^*$  bzw.  $T^*$ ,  $P^*$ ,  $Q^*$  und die Projectionen dieser Punkte auf die  $xy$ -Ebene  $T$ ,  $P$ ,  $Q$ , so liegt  $T$  auf  $C$ ,  $P$  und  $Q$  sind die Schnittpunkte der Normalen in  $T$  an  $C$  mit der  $x$ -Achse, bzw. mit der  $y$ -Achse. Man bemerkt, dass der Halbierungspunkt  $S$  der Strecke  $PQ$  offenbar der Schnittpunkt der Erzeugenden  $T^*P^*Q^*$  mit der  $xy$ -Ebene ist, und dass die durch  $S$  parallel zur  $x$ -Achse, resp. zur  $y$ -Achse gelegten Geraden  $p$ ,  $q$  die Schnittlinien der  $xy$ -Ebene mit den Tangentialebenen der windschiefen Fläche in  $P^*$  und  $Q^*$  bedeuten. Es handelt sich nun noch um die in die  $xy$ -Ebene fallende Gerade der Tangentialebene in  $T^*$ . Diese Gerade ergibt sich aber als Verbindungslinie  $t'$  von  $S$  mit dem Schnittpunkte  $T'$  der Tangente  $t^*$  an die  $C^*$  in  $T^*$  mit der  $xy$ -Ebene. Da die Projection der  $t^*$  durch die Tangente  $t$  im Punkte  $T$  der  $C$  repräsentiert wird und die  $t^*$  jedenfalls in der Tangentialebene des Rotationsparaboloides  $2pz = x^2 + y^2$  im Punkte  $T^*$  liegt, so finden wir  $T'$  im Schnittpunkte von  $t$  mit der Symmetralen der Strecke  $OT$  ( $O$  der Coordinatenanfangspunkt), weil diese Symmetrale bekanntlich die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und jener Paraboloid-Tangentialebene ist.

Auf Grund dieser Überlegungen kommen wir zu folgendem Satze über die Cassini'schen Linien:

„Ist  $T$  irgend ein Punkt der Cassini'schen Linie

$$4mp(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = \text{Const.}$$

mit dem Centrum  $O$ ,  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$ , und sind  $P$ ,  $Q$  die Schnittpunkte von  $n$  mit der  $x$ -Achse, resp. mit der  $y$ -Achse, heißt  $S$  der Halbierungspunkt von  $PQ$ , nennen wir ferner  $p$  die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $S$ ,  $q$  die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $S$  und  $t'$  die Verbindungslinie von  $S$  mit dem Schnittpunkte  $T'$  der Symmetralen von  $OT$  und der Tangente  $t$ ,  $N$  endlich den Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , dann gilt die Doppelverhältnissgleichheit  $(T'NPQ) = (t'npq)$ “

Es ist klar, dass sich nach diesem Satze in mannigfaltigster Art Constructionen für  $N$  angeben lassen. Es handelt sich ja lediglich darum, den dem Strahle  $n$  im Büschel  $S$  ( $t'$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ) zugeordneten Punkt  $N$  der projectiven Reihe  $(T, N, P, Q)$  zu ermitteln. Um



nur ein Beispiel anzuführen, beziehen wir etwa die Reihe  $(T, N, P, Q)$  auf die von der unendlich fernen Geraden ausgeschnittene Reihe des Büschels  $S(t', n, p, q)$ . Die Directionsachse beider Reihen, welche durch  $N$  geht, ist durch zwei der folgenden Schnittpunkte bestimmt: 1. Durch den Schnittpunkt der Parallelen durch  $P$  zur  $y$ -Achse und der Parallelen durch  $Q$  zur  $x$ -Achse, 2. durch den Schnittpunkt der Parallelen durch  $T$  zur  $\left. \begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} \right\}$ -Achse mit der Parallelen zu  $t'$  durch  $\left. \begin{smallmatrix} Q \\ P \end{smallmatrix} \right\}$ .

Es sei wiederum nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass die aus der bewiesenen Doppelverhältnissgleichheit folgenden weiteren drei Relationen  $(TNPQ) = (nt'qp)$ ,  $(TNPQ) = (qpnt')$ ,  $(TNPQ) = (pqtn)$  ebenfalls für constructive Zwecke vortheilhaft ausgenützt werden können. So wird man u. a. bei Verwendung der Gleichung  $(TNPQ) = (nt'qp)$  analog wie vorhin finden, dass  $N$  auf der Parallelen zur  $\left. \begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} \right\}$ -Achse liegt, welche durch den Schnittpunkt der  $OT$  und der Parallelen zur  $t'$  durch den Punkt  $\left. \begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix} \right\}$  geht.

Außer der Annahme  $z = \frac{x^2 + y^2}{2p}$  möge noch die Erörterung der Annahme  $\frac{m-z}{n-z} = \frac{s}{x}$  hier Platz finden. In diesem Falle hat die Differentialgleichung der Curve  $C$  die Form:

$$s dx + y dy = 0$$

und das Integral ist durch die Parabelgleichung

$$2sx + y^2 = \text{Const.}$$

dargestellt.

Die Curve  $C^*$  liegt alsdann auf dem gleichseitig-hyperbolischen Cylinder  $x(m-z) - s(n-z) = 0$ , welcher die Gerade  $(x=s, z=m)$  zur Achse besitzt. Verstehen wir unter  $T^*, P^*, Q^*$  die analogen Punkte wie oben, unter  $T, P, Q$  deren Projectionen auf die Ebene  $z=m$ , ferner unter  $p, q, t'$  die Schnittlinien der Ebene  $z=m$  mit den Tangentialebenen an die resultierende windschiefe Fläche in den Punkten  $P^*, Q^*, T^*$ , so haben wir  $p$  mit der Schnittlinie der Ebenen  $z=m, x=0$  zusammenfallend,  $q$  durch  $P$  parallel zur  $y$ -Achse,  $t'$  durch  $P$  und einen gleich näher zu bezeichnenden Punkt  $T''$  auf  $t$  gehend, anzunehmen. Dieser Punkt  $T''$  ist der Schnittpunkt der Tangente in  $T^*$  an  $C^*$  und der Ebene  $z=m$  und liegt als solcher in  $t$  und in der Schnittlinie derselben Ebene  $z=m$  und der Tangentialebene an den hyperbolischen Cylinder in  $T^*$ . Letztere Schnittlinie ist aber parallel zur  $y$ -Achse und von  $T$  ebensoweit entfernt wie die  $x=s$ , da die Ebenen  $x=s$  und  $z=m$  die Asymptotenebenen unseres Cylinders sind.

Man wird nach den vorstehend dargelegten Beziehungen jetzt leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

„Zieht man in der Ebene der Parabel  $y^2 = 2sx$  irgend zwei zur Scheiteltangente Parallele vom Abstände  $s$  ( $x = a$ ,  $x = a - s$ ), construirt man hierauf in einem Punkte  $T$  der Parabel die Tangente  $t$  und die Normale  $n$ , deren Schnittpunkt mit der Curvenachse  $P$  sei, während der Schnittpunkt mit der  $x = a$  mit  $Q$  bezeichnet werde, ermittelt man ferner den Schnittpunkt  $T'$  der  $t$  und derjenigen Parallelen zur Scheiteltangente, welche von  $T$  ebensoweit entfernt ist, wie die  $x = a - s$ , und verbindet  $P$  mit  $T'$  durch die Gerade  $t'$ , dann gilt, wenn noch mit  $q$  die durch  $P$  gelegte Parallele zur Scheiteltangente und mit  $p$  der Kürze halber die Parabelachse benannt ist, die Doppelverhältnissgleichheit  $(TNPQ) = (t'n p q)$ . ( $N$  der Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ ).“<sup>4</sup>

Da der Strahl  $p$  durch den ihm entsprechenden Punkt  $P$  geht, so können wir zur Construction von  $N$  unter Zugrundelegung dieses Satzes etwa so verfahren, dass wir durch  $T$  und  $Q$  Parallele zur Parabelachse  $p$  ziehen und die Schnittpunkte dieser beiden Parallelen mit bzw.  $t'$  und  $Q$  mit einander verbinden. Die erhaltene Verbindungslinie geht alsdann durch  $N$ .

An zweiter Stelle betrachten wir die windschiefen Flächen, welche die  $y$ -Achse und die Gerade  $\zeta = \mu \xi + m$  der  $xz$ -Ebene zu Leitlinien besitzen. Man findet als Gleichung der Projection auf die  $xy$ -Ebene der durch den Punkt  $T^*(x, y, z)$  gehenden Schneidenden der beiden Leitgeraden:

$$x[(\mu x - z) + m](Y - y) = y(\mu x - z)(X - x)$$

und hat als Differentialgleichung der Curve  $C$ :

$$x(\mu x - z + m) dx + y(\mu x - z) dy = 0.$$

Setzen wir hierin  $z = \mu x + m'$ , so kommt:

$$(m - m') x dx - m' y dy = 0$$

mit der Integralgleichung:

$$(m - m') x^2 - m' y^2 = c^3 \text{ (Const.),}$$

d. i., wenn vorläufig  $c$ ,  $m$  und  $m'$  positiv und  $m - m' > m'$  oder  $2m' < m$  vorausgesetzt wird, die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel. Die Halbachsenquadrate sind gegeben durch:

$$a^2 = \frac{c^3}{m - m'}, \quad b^2 = \frac{c^3}{m'}$$

und das Quadrat der linearen Excentricität durch

$$e^2 = a^2 + b^2 = \frac{m}{m'} a^2.$$

Da nun der Schnittpunkt der Geraden  $\zeta = \mu x + m$  mit der  $x$ -Achse die Abscisse  $\left(-\frac{m}{\mu}\right)$  besitzt, der Schnittpunkt der Ebene  $\zeta = \mu x + m'$  mit derselben Achse aber zur Abscisse  $\left(-\frac{m'}{\mu}\right)$  hat, so finden wir, dass das Verhältniss  $-\frac{m}{\mu} : -\frac{m'}{\mu}$  den Wert  $\frac{m}{m'} = \frac{e^2}{a^2}$  annimmt, wodurch, wenn die Größen  $m$  und  $m'$  gegeben sind, ein Aufschluss über die Gestalt der Hyperbel  $C$  gewährt wird.

Ist nun  $T^*$  ein Punkt der Hyperbel  $C^*$ , welche in der Ebene  $\zeta = \mu x + m'$  gelegen ist und die Hyperbel  $C$  der  $xy$ -Ebene zur Projection hat, und sind  $P^*, Q^*$  die Schnittpunkte der durch  $T^*$  gehenden Erzeugenden der windschiefen Fläche mit der Leitgeraden ( $\eta = 0, \zeta = \mu \xi + m$ ), bzw. mit ( $\xi = 0, \zeta = 0$ ), dann sind die Projectionen von  $P^*$  und  $Q^*$  auf die  $xy$ -Ebene die Schnittpunkte der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  der Hyperbel  $C$  mit der  $x$ -Achse, resp. mit der  $y$ -Achse.  $Q$  ( $\equiv Q^*$ ) ist der Schnittpunkt der betrachteten Erzeugenden der windschiefen Fläche mit der  $xy$ -Ebene und die Schnittlinien der Tangentialebenen in  $T^*, P^*, Q^*$  an die Fläche mit der  $xy$ -Ebene — die Geraden  $t', p, q$  — sind der Reihe nach: Die durch  $Q$  nach dem Schnittpunkt  $T'$  von  $t$  (der Tangente in  $T$  an die  $C$ ) und der Geraden  $p'$  ( $x = -\frac{m'}{\mu}$ ) gezogene Gerade, die durch  $Q$  nach dem Punkte  $P'$  ( $x = -\frac{m}{\mu}, y = 0$ ) gehende Linie und die Ordinatenachse. Wählt man  $P'$  beliebig, so ist immer  $p'$  mit  $P'$  auf derselben Seite der Ordinatenachse gelegen und die Entfernung der  $p'$  von der Ordinatenachse beträgt  $\overline{OP'} \cdot \frac{a^2}{e^2}$ . Man sieht hiernach, dass, wenn  $P'$  ein Brennpunkt von  $C$  ist,  $p'$  mit dessen Polare zusammenfällt. Für diesen bemerkenswerten Specialfall formulieren wir unseren Satz:

„Ist  $T$  ein Punkt der Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$  und sind  $P, Q$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  mit der Haupt-, resp. mit der Nebenachse, ist ferner  $F$  ein Brennpunkt und  $f$  seine Polare, endlich  $T'$  der Schnittpunkt der Tangente  $t$  mit  $f$ , dann ist das Büschel der vier Strahlen  $Q T', Q T, Q F, Q O$  projectiv mit der Reihe der vier Punkte  $T, N, P, Q$ . ( $N$  der Krümmungsmittelpunkt).“

„Zieht man also durch einen Punkt  $T$  einer Hyperbel die Parallele zur Nebenachse, bringt sie zum Schnitt mit der Verbindungslinie des Schnittpunktes der Normalen mit der Nebenachse und des Schnittpunktes der Tangente mit der Polaren eines Brennpunktes  $F$ , zieht man ferner durch den Schnittpunkt der Normalen mit der Hauptachse ebenfalls die Parallele zur Nebenachse und bringt diese Parallele zum Schnitt mit der Verbindungslinie des

Brennpunktes  $F$  und des Schnittpunktes der Normalen und der Nebenachse, so geht die Verbindungslinie der erhaltenen zwei Punkte durch den Krümmungsmittelpunkt  $N^a$ .

Oder:

„Verbindet man den Schnittpunkt der Tangente und der Nebenachse mit dem Schnittpunkt der Normalen und der Hauptachse, ebenso den Schnittpunkt der Normalen und der Nebenachse mit einem Brennpunkt und sodann den Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien mit dem Schnittpunkt der Tangente und der Polaren jenes Brennpunktes, so erhält man in der Verbindungslinie dieser Schnittpunkte eine durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Gerade.“

Man weist jetzt unschwer nach, dass genau derselbe Satz und dieselben Constructionen ihre Gültigkeit auch für die Ellipse behalten. Es braucht lediglich  $m$  und  $m'$  negativ in Rechnung gezogen und  $m'$  dem absoluten Betrage nach  $> m$  vorausgesetzt werden.

An dritter Stelle sei die windschiefe Fläche mit der Richtebebene  $\zeta = \nu \xi$  und der in der  $xy$ -Ebene gelegenen Leitgeraden  $\eta = \mu \xi$  herangezogen.

Die durch den Punkt  $T^*(x, y, z)$  zur Richtebebene Parallele, die  $\eta = \mu \xi$  Schneidende projiciert sich in die  $xy$ -Ebene als die Gerade

$$[\mu z + \nu(y - \mu z)](X - x) = z(Y - y).$$

Die Differentialgleichung der Curve  $C$  lautet also:

$$z dx + [\mu z + \nu(y - \mu x)] dy = 0.$$

Die einfachste Substitution für  $z$  ist wohl:  $z = -\frac{\nu}{\mu} y$  wodurch jene Differentialgleichung übergeführt wird in:

$$y dx + \mu^2 x dy = 0,$$

deren Integral durch

$$x y^{\mu^2} = \text{Const.}$$

dargestellt ist. Analoge Schlüsse, wie in den unmittelbar vorangehenden Abschnitten führen zu dem Satze:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  der Curve  $C$  ( $x y^{\mu^2} = \text{Const.}$ ) die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bezeichnet man mit  $N$  den Krümmungsmittelpunkt, mit  $P$  den Schnittpunkt der Normalen und der Geraden  $p$  ( $y = \mu x$  oder  $y = -\mu x$ ), mit  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , mit  $q$  die durch  $P$  gehende Parallele zur  $y$ -Achse, endlich mit  $t'$  die Verbindungslinie von  $P$  und von  $T'$  (dem Schnittpunkte der  $t$  und der  $x$ -Achse), dann besteht die Doppelverhältnissgleichheit  $(T N P Q_\infty) = (t' n p q)$ .“

Von besonderem Interesse ist der Specialfall  $\mu = \pm 1$ . Wir erhalten als Curve  $C$  die gleichseitige Hyperbel  $xy = \text{Const.}$  und für dieselbe auf Grund des voranstehenden Satzes u. a. die folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes  $N$  für einen Punkt  $T$ .

„Sind  $a', a''$  die Achsen einer gleichseitigen Hyperbel,  $a_1, a_2$ , deren Asymptoten,  $\alpha', \alpha''$ , die durch einen Punkt  $T$  der Curve gehenden Parallelen zu  $a',$  bzw.  $a'',$   $T_1$  und  $T_2$  die Schnittpunkte der Tangente  $t$  in  $T$  mit  $a_1$ , resp.  $a_2$ ,  $P'$  und  $P''$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  in  $T$  mit  $\alpha',$  resp.  $\alpha''$ , dann laufen die Verbindungslinien der Schnittpunktepaare  $(P' T_1, \alpha')$  und  $(P'' T_1, \alpha'')$ ,  $(P' T_2, \alpha')$  und  $(P'' T_2, \alpha'')$ , bzw. parallel zu  $a_2, a_1$  und schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte  $N$ .“

Eine wesentlich einfachere Gestalt nimmt die Differentialgleichung der  $C$  an, wenn wir  $\mu = 0$  setzen, d. h. wenn die windschiefe Fläche die Abscissenachse zur Leitergeraden besitzt. Wir finden:

$$z dx + v y dy = 0$$

und substituieren vorerst hierin

$$z = v y \cdot k \frac{a^2 x^\sigma}{y^{\rho + \sigma}}.$$

Dadurch geht die Differentialgleichung über in:

$$k a^2 x^\sigma dx + y^{\rho + \sigma} dy = 0,$$

welche, wofern weder  $\sigma$  noch  $\rho + \sigma$  den Wert  $(-1)$  besitzt, die Gleichung

$$k a^2 \frac{x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$$

zum Integrale hat.

Da nun, wie leicht nachzuweisen ist, die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene in einem Punkte  $T^*(x, y, z)$  der Fläche  $F$  ( $z y^{\rho+\sigma+1} = k v a^2 x^\sigma$ ) construiert werden kann als Verbindungslinie der Punkte  $M_0(x, \frac{\rho+\sigma}{\rho+\sigma+1} y)$ ,  $N_0(\frac{\sigma-1}{\sigma} x, y)$ , so gilt für jede durch eine Gleichung der obigen Form dargestellte Curve der Satz:

„Zieht man im Punkte  $T(x, y)$  einer solchen Curve die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bezeichnet man mit  $N$  den Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , mit  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  mit der  $x$ -Achse, mit  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , weiters mit  $T'$  den Schnittpunkt von  $t$  mit der Verbindungslinie der Punkte  $M_0(x, \frac{\rho+\sigma}{\rho+\sigma+1} y)$  und  $N_0(\frac{\sigma-1}{\sigma} x, y)$  und nennt  $p$  die  $x$ -Achse,  $q$  die durch  $P$  gelegte Parallele zur  $y$ -Achse, endlich  $t'$  die Linie  $P T'$ , dann besteht die Doppelverhältnissgleichung  $(T N P Q_\infty) = (t' n p q)$ .“

Für  $\rho = 0$ ,  $\sigma = 1$  haben wir Gleichung eines Centralkegelschnittes  $kx^2 + y^2 = \text{Const.}$  vor uns. Die Gerade  $M_0 N_0$  fällt in die  $y$ -Achse, also in eine Achse der Curve.  $T'$  ist hiernach der Schnittpunkt von  $t$  mit jener Achse, in welcher  $P$  nicht liegt.

$\rho = 0$ ,  $\sigma = -\frac{1}{2}$  liefert eine auf zwei zu einander normale Tangenten bezogene Parabel. In diesem Falle sind  $M_0$  und  $N_0$  die Punkte:  $M_0 \left(x, \frac{1}{3} y\right)$ ,  $N_0 \left(3x, y\right)$ .  $M_0 N_0$  geht also durch den Coordinatenanfangspunkt.

$\rho = 0$ ,  $\sigma = -1$  gibt eine auf zwei durch einen Curvenpunkt  $O$  gehende Asymptotenparallelen bezogene gleichseitige Hyperbel und es kommen  $M_0$  und  $N_0$  die Coordinatenwerte zu:  $M_0 \left(x, \frac{2}{3} y\right)$ ,  $N_0 \left(\frac{3}{2} x, y\right)$  und  $M_0 N_0$  geht wieder durch  $O$ .

$\rho = 0$ ,  $\sigma = -\frac{1}{3}$  führt u. a. zur Evolute eines Centralkegelschnittes, eventuell zur Astroide. Hier haben  $M_0$  und  $N_0$  die Coordinaten:  $M_0 \left(x, \frac{1}{4} y\right)$ ,  $N_0 \left(4x, y\right)$  und  $M_0 N_0$  geht wie überhaupt für alle Curven, die für  $\rho = 0$  resultieren, durch den Coordinatenanfangspunkt.

Setzen wir die Integrationsconstante gleich Null, so stellt unsere Gleichung höhere Parabeln oder Hyperbeln dar. Wir können der Integralgleichung in diesem Falle die Form geben:  $y^\mu = a^{\mu+1} x$  und haben dann  $\frac{\rho + \sigma + 1}{\sigma + 1} = \mu$  zu setzen, also  $\rho = (\mu - 1)(\sigma + 1)$ . Dies substituiert in die Ausdrücke für die Coordinaten von  $M_0$  und  $N_0$ , erhalten wir  $M_0 \left(x, \frac{\mu \sigma + \mu - 1}{\mu \sigma + \mu - 2} y\right)$ ,  $N_0 \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} x, y\right)$ , worin  $\sigma$  ein arbiträrer Wert ist. Wie wir aber auch  $\sigma$  wählen, die  $M_0 N_0$  geht nothwendig durch einen festen Punkt  $T'$  auf  $t$ , weil die Wahl von  $\sigma$  die Lage der Punkte  $T, N, P, Q_\infty$  und damit den Wert des Doppelverhältnisses  $(TNPQ_\infty)$  nicht beeinflusst, ebensowenig die Lage von  $n, p, q$ . Deshalb muss auch der Ort von  $t'$  für jedes  $\sigma$  derselbe sein, wenn, wie unser Satz behauptet, stets  $(TNPQ_\infty) = (t'npq)$  sein soll. Die Reihen  $(M_0)$ ,  $(N_0)$  müssen folglich perspectiv sein und der Punkt  $T'$  auf  $t$  wird das Perspectivitätscentrum vorstellen. In der That erhält die Verbindungsgerade  $M_0 N_0$  die Gleichung:

$$\frac{X - x}{Y - \frac{\mu \sigma + \mu - 1}{\mu \sigma + \mu - 2} y} = \frac{x - \frac{\sigma - 1}{\sigma} x}{\frac{\mu \sigma + \mu - 1}{\mu \sigma + \mu - 2} y - y} = \frac{(\mu \sigma + \mu - 2) x}{\sigma y}$$

oder

$$(X-x) \sigma y = [(\mu \sigma + \mu - 2) Y - (\mu \sigma + \mu - 1) y] x$$

oder

$$\sigma [(X-x) y - \mu x (Y-y)] = x [(\mu - 2) Y - (\mu - 1) y],$$

d. h. die  $M_0 N_0$  geht für jedes  $\sigma$  durch den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$y(X-x) = \mu x(Y-y) \text{ und } (\mu - 2) Y = (\mu - 1) y,$$

dem sonach die Coordinaten zukommen:

$$X = 2 \frac{\mu - 1}{\mu - 2} x, \quad Y = \frac{\mu - 1}{\mu - 2} y.$$

Dass dieser Punkt, wie wir oben bereits erkannt haben, auf der Tangente  $t$  im Punkte  $T(x, y)$  der  $y^\mu = a^{\mu-1} x$  liegt, verificieren wir jetzt analytisch sehr leicht. Die Gleichung der  $t$  lautet nämlich:

$$Y - y = \frac{y}{\mu x} (X - x)$$

und sie wird ersichtlich durch die gefundenen Werte für  $X, Y$  befriedigt. Da  $\frac{Y}{X} = \frac{y}{2x}$  ist, so lässt sich  $T'$  sehr leicht construieren. Man erhält den Punkt als Schnittpunkt der  $t$  mit der Verbindungslinie des Coordinatenanfangspunktes und des Punktes  $(2x, y)$ . — Für die Parabel  $y^2 = 2px$  ergibt sich insbesondere  $T'$  als der unendlich ferne Punkt der  $t$  und die auf unserem Satze basierte Construction von  $N$  stellt sich als sehr bekannt heraus.

Wir haben nun noch zu erwähnen, dass unsere allgemeine Integralgleichung, falls etwa  $\rho + \sigma = -1$  ist, zu ersetzen ist durch die Gleichung:

$$y = C e^{-\frac{k}{\sigma+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma+1}}.$$

Der obige Satz bleibt für die durch eine solche Gleichung dargestellten Curven bestehen, nur hat man die Coordinatenwerte von  $M_0$  und  $N_0$  zu ändern. Es ist:  $M_0(x, \frac{1}{2}y)$ ,  $N_0(2x, y)$ . Die Verbindungslinie  $M_0 N_0$  hat also die Gleichung  $\frac{Y}{X} = \frac{y}{2x}$ , d. h. der Punkt  $T'$  hat für die Exponentialcurven dieselbe Lage wie für die höheren Parabeln und Hyperbeln.

Setzen wir neben  $\rho + \sigma = -1$  auch noch  $\sigma = -1$ , demnach  $\rho = 0$  voraus, so lautet die Integralgleichung:

$$x^k y = \text{Const.}$$

Im übrigen gilt dasselbe wie unmittelbar vorher, so dass wir auch von dieser Seite her unsere früheren Resultate hinsichtlich der höheren Parabeln und Hyperbeln bestätigt finden.

Wir kehren jetzt zurück zur ursprünglichen Differentialgleichung  $z dx + v y dy = 0$  und substituieren noch  $z = v(ax - \beta y)$ , wodurch sie übergeht in

$$(ax - \beta y) dx + y dy = 0.$$

Wie bei ähnlichen Gelegenheiten discutieren wir hier wiederum lediglich den Fall, für welchen das Integral jener Gleichung die Form einer Parabelgleichung  $(y - \lambda_1 x)^2 = C(y - \lambda_2 x)$  annimmt.

Indem wir in die Gleichung  $-2\eta d\xi + \xi d\eta = 0$  für  $\xi$  und  $\eta$  einsetzen:  $\xi = y - \lambda_1 x$ ,  $\eta = y - \lambda_2 x$ , erhalten wir eine homogene Differentialgleichung, welche mit der vorgelegten identisch wird, wenn die Gleichungen bestehen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 = \beta, \quad \lambda_1 = 2\lambda_2.$$

Für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ergeben sich hiernach die Werte:

$$\lambda_1 = 2\frac{\beta}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta}{3}$$

und es muss die Bedingungsgleichung

$$9\alpha = 2\beta^2$$

erfüllt sein.

Die resultierende Parabelgleichung lautet also:

$$\left(y - 2\frac{\beta}{3}x\right)^2 = C\left(y - \frac{\beta}{3}x\right).$$

Gleichzeitig erhält die Schnittlinie der Ebene  $z = v(ax - \beta y)$  mit der  $xy$ -Ebene  $ax - \beta y = 0$  die Gleichung:

$$y = \frac{2}{9}\beta x.$$

Schreiben wir zur Abkürzung für  $\frac{\beta}{3} \dots + \gamma$ , so lauten die beiden Gleichungen:

$$(y - 2\gamma x)^2 = C(y - \gamma x) \quad \text{und} \quad y = \frac{2}{3}\gamma.$$

Für den Winkel  $\varphi$ , welchen die Curventangente  $y = \gamma x$  im Ursprung  $O$  mit der Achse der Parabel einschließt, erhalten wir:

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma - \gamma}{1 + 2\gamma \cdot \gamma} = \frac{\gamma}{1 + 2\gamma^2}.$$

Bezeichnen wir mit  $y_0$  den Abstand des Punktes  $O$  von der Parabelachse und mit  $r$  den Parameter, dann ist auch  $\tan \varphi = \frac{r}{y_0}$  und man findet bei gegebenen  $y_0$  die zugehörigen Werte von  $\gamma$  als Wurzeln der Gleichung:



also

$$r(1 + 2\gamma^2) = \gamma y_0,$$

$$\gamma = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 8r^2}}{4r}.$$

Man sieht daher, dass für jeden Punkt einer Parabel  $y_0^2 = 2rx_0$ , dessen  $y_0 > 2r\sqrt{2}$  oder dessen  $x_0 > 4r$  ist, zwei reelle Werte von  $\gamma$  angegeben werden können, d. h. man kann durch jeden solchen Punkt zwei auf einander senkrechte Geraden legen, welche, wenn man auf sie als Coordinatenachsen die Parabel bezieht, für diese die Gleichung  $(y - 2\gamma x)^2 = C(y - \gamma x)$  ergeben. Die Abscissenachse schließt dabei immer mit der Tangente im betreffenden Punkte einen Winkel vom Tangens  $\gamma$  ein. Durch den Punkt  $(x_0 = 4r, y_0 = 2r\sqrt{2})$  ist als Grenzfall jedoch nur ein einziges Coordinatensystem dieser Art möglich.

Wir erläutern diese Beziehungen an zwei einfachen Beispielen und beginnen mit dem erwähnten Grenzfall.

Man findet  $\gamma = \frac{y_0}{4r} = \frac{2r\sqrt{2}}{4r} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Die Tangente im Punkte  $(4r, 2r\sqrt{2})$  hat die Gleichung  $\eta - 2r\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\xi - 4r)$  und die neue Abscissenachse ist dargestellt durch

$$\eta - 2r\sqrt{2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2} + \gamma}{1 - \frac{\gamma}{4}\sqrt{2}} (\xi - 4r) = \sqrt{2} \cdot (\xi - 4r);$$

sie geht also durch den Punkt  $\xi = 2r$  der Parabelachse. Dagegen geht die neue Ordinatenachse durch den Punkt  $(\xi = 8r, \eta = 0)$  und besitzt die Gleichung  $\eta - 2r\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\xi - 4r)$ . Die Gerade  $y = \frac{2}{3}\gamma x$  im neuen System hat dann noch auf die Parabelachse und die Scheiteltangente bezogen die Gleichung  $\eta - 2r\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} - \frac{2}{3}\gamma}{1 + \frac{2}{3}\gamma\sqrt{2}} (\xi - 4r) = \frac{2\sqrt{2}}{5} (\xi - 4r)$ ; sie geht durch den Punkt  $\xi = -r$  der Parabelachse.

„Schneidet mithin die Normale  $n$  in einem Punkte  $T$  der Parabel  $\eta^2 = 2r\xi$  die Gerade  $p$  ( $\eta - 2r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\xi - 4r)$ ) im Punkte  $P$ , ist  $Q_\infty$  der unendlich ferne Punkt von  $n, q$  die Parallele zu  $\eta - 2r\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - 4r)$  durch  $P$ ,  $T''$  der Schnittpunkt der

Tangente  $t$  in  $T$  mit der Geraden  $\eta - 2r\sqrt{2} = \frac{2}{5}\sqrt{2} \cdot (\xi - 4r)$  und  $t'$  die Verbindungslinie  $PT'$ ,  $N$  der Krümmungsmittelpunkt, dann gilt  $(TNPQ_\infty) = (t'npq)$ .“

Wählen wir  $y_0 = 3r$ , dann finden wir  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ . Die bezüglichen Parabelgleichungen lauten:

$$(y - 2x)^2 = C(y - x) \text{ und } (y - x)^2 = C\left(y - \frac{x}{2}\right).$$

Dazu gehören die Geraden  $y = \frac{2}{3}x$ , resp.  $y = \frac{1}{3}x$ .

Wir discutieren zuerst die zum Werte  $\gamma_1 = 1$  gehörige Parabelgleichung  $(y - 2x)^2 = C(y - x)$ . In diese Form lässt sich die Scheitelgleichung  $\eta^2 = 2r\xi$  der Parabel überführen, wenn der Punkt  $\left(\frac{9}{2}r, 3r\right)$  zum Ursprung gewählt wird und die Abscissen- und Ordinatenachse je unter  $45^\circ$  gegen die Tangente  $\eta - 3r = \frac{1}{3}\left(\xi - \frac{9}{2}r\right)$  in diesem Punkte geneigt sind. Als Abscissenachse muss insbesondere die Gerade  $\eta - 3r = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\left(\xi - \frac{9}{2}r\right) = 2\left(\xi - \frac{9}{2}r\right)$  gewählt werden, welche durch den Punkt  $\xi = 3r$  der Parabelachse geht.

Die Gleichung der Geraden  $y = \frac{2}{3}x$  wird aus der Gleichung  $\eta - 3r = \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{3}}\left(\xi - \frac{9}{2}r\right) = \frac{4}{7}\left(\xi - \frac{9}{2}r\right)$  erhalten; die Gerade geht durch den Punkt  $(\xi = r, \eta = r)$ .

Dagegen können wir die Scheitelgleichung  $\eta^2 = 2r\xi$  in die für  $\gamma_2 = \frac{1}{2}$  resultierende Form  $(y - x)^2 = C\left(y - \frac{x}{2}\right)$  überführen, wenn wir denselben Punkt  $\left(\frac{9}{2}r, 3r\right)$  zum Ursprung nehmen, die Abscissen- und Ordinatenachse jetzt aber gegen die Parabelachse unter je  $45^\circ$  geneigt annehmen. Die Abscissenachse als diejenige der beiden Coordinatenachsen, in welche die kleinere Sehne fällt, bekommt somit die Gleichung  $\eta - 3r = \xi - \frac{9}{2}r$  und geht also durch den Punkt  $\left(\xi = \frac{3}{2}r, \eta = 0\right)$ , während die Gerade  $y = \frac{1}{3}x$

übereinstimmt mit der Geraden  $\eta - 3r = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) =$   
 $= \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right)$ , welche den Parabelpunkt  $\left( \xi = \frac{1}{2}r, \eta = r \right)$  enthält.

„Zieht man demnach im Punkte  $T$  der Parabel  $y^2 = 2rx$  die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bestimmt den Schnittpunkt von  $n$  mit der Geraden  $p$   $\left( \eta - 3r = \xi - 9r \right.$  oder  $\left. \eta - 3r = 2 \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) \right)$ , ferner den Schnittpunkt  $T'$  von  $t$  und der Geraden  $\left( \eta - 3r = \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) \right.$  oder  $\left. \eta - 3r = \frac{4}{7} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) \right)$  und nennt  $t'$  die Verbindungslinie  $PT'$ ,  $q$  die Senkrechte durch  $P$  auf die  $p$ ,  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , endlich  $N$  den Krümmungsmittelpunkt, dann besteht die Doppelverhältnissgleichheit  $(TNPQ_\infty) = (t'npg)$ .“

Wir betrachten jetzt die windschiefe Fläche mit der  $xy$ -Ebene als Richtebene und der Geraden  $(\eta = 0, \zeta = \mu\xi)$  als Leitlinie. Die Gleichung der Ebene, welche durch diese Gerade und durch den Punkt  $T^*(x, y, z)$  geht, finden wir durch Elimination von  $\xi$  aus den Gleichungen:

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{-y} = \frac{Z-z}{\mu\xi-z}.$$

Sie lautet:  $(\mu x - z)(Y - y) - \mu y(X - x) + y(Z - z) = 0$ . Als Differentialgleichung der Curve  $C$  ergibt sich dergestalt:

$$(\mu x - z)dx + \mu y dy = 0.$$

Wir setzen nun für  $z$  der Reihe nach: 1)  $z = \nu x$ , 2)  $x = \mu(x - m)$ , 3)  $z = \mu((1 - \alpha)x - m)$ , 4)  $z = \mu((1 - \alpha)x + \beta y)$ .

1.  $z = \nu x$  überführt die vorgelegte Differentialgleichung in die folgende:

$$(\mu - \nu)x dx + \mu y dy = 0.$$

Das Integral ist die Gleichung eines Centralkegelschnittes:

$$(\mu - \nu)x^2 + \mu y^2 = \text{Const.}$$

Wir haben daher den Satz:

„Ist  $T'$  der Schnittpunkt der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  eines Centralkegelschnittes mit der <sup>Neben</sup>Hauptachse und nennt man  $t'$  die Parallele durch  $T'$  zur Normalen  $n$  in  $T$ , ferner  $P$  den Schnitt-

punkt von  $n$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$ achse,  $p$  die durch den Mittelpunkt gelegte Parallele zu  $n$ ,  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$  und  $q_\infty$  die unendlich ferne Gerade und schließlich  $N$  den Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , dann besteht die Doppelverhältnisleichheit  $(TNPQ_\infty) = (t'npq_\infty)$ . Zieht man also z. B. durch  $T$  die Parallele zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$ achse und bringt sie zum Schnitte mit  $t'$ , so geht die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkt durch  $N$ .“

2. Die Substitution  $z = \mu(x - m)$  liefert die Differentialgleichung:

$$m dx + y dy = 0$$

der Parabel:

$$2mx + y^2 = \text{Const.}$$

„Bestimmt man daher den Schnittpunkt  $T'$  der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  der Parabel  $y^2 = 2mx$  mit der Geraden  $x = s$  und zieht durch ihn die Parallele  $t'$  zur Normalen  $n$  in  $T$ , ferner durch den Punkt  $x = s + m$  der Parabelachse die  $p$  ebenfalls parallel zur  $n$  und bezeichnet man mit  $P$  den Schnittpunkt der  $n$  und der Parabelachse, mit  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , mit  $N$  den Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$  und noch mit  $q_\infty$  die unendlich ferne Gerade, dann gilt die Doppelverhältnisleichheit  $(TNPQ_\infty) = (t'npq_\infty)$ .“

3. Für  $z = \mu((1 - \alpha)x - m)$  erhalten wir:

$$(\alpha x + m) dx + y dy = 0$$

und als Integralgleichung:

$$\alpha \left( x + \frac{m}{\alpha} \right)^2 + y^2 = \text{Const.},$$

d. i. die Gleichung eines Centralkegelschnittes mit dem Punkte  $\left( x = -\frac{m}{\alpha}, y = 0 \right)$  als Mittelpunkt. Die  $x$ -Achse ist zugleich eine Achse des Kegelschnittes. Setzen wir vorerst  $\alpha$  positiv und  $< 1$  voraus, dann haben wir es mit einer Ellipse zu thun, deren große Achse in die Abscissenachse fällt. Ist  $b^2$  das Quadrat der halben Nebenachse, dann ist  $a^2 = \frac{b^2}{\alpha}$  das Quadrat der halben Hauptachse und weiters  $e^2 = a^2 - b^2 = b^2 \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ ,  $\frac{e^2}{a^2} = 1 - \alpha$ . Da die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Ebene  $z = \mu((1 - \alpha)x - m)$  die Gerade  $x = \frac{m}{1 - \alpha}$  ist, so erkennen wir, dass diese Gerade mit dem Mittelpunkte der Ellipse nicht auf derselben Seite der Ordinatenachse liegt. Das Verhältniss des Abstandes  $s = \frac{m}{1 - \alpha}$  jener

Geraden von der  $y$ -Achse zum Abstände  $\left(-\frac{m}{\alpha}\right)$  des Centrums von derselben Achse ist ausgedrückt durch:  $-\frac{s \alpha}{m} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} = -\frac{b^2}{e^2}$ .

Es ist also  $s = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{m}{\alpha}$  und  $s + \frac{m}{\alpha}$  (die Entfernung der Geraden von der Nebenachse) hat den Wert:  $\frac{m}{\alpha} \cdot \frac{a^2}{e^2}$ .

„Bestimmt man also auf der Hauptachse einer Ellipse zwei Punkte  $M, M'$ , deren Entfernungen vom Centrum sich verhalten wie  $a^2 : e^2$  und zieht durch den Punkt  $M$  die Parallele zur Nebenachse, bezeichnet den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  der Ellipse mit  $T'$ , mit  $t'$  die Parallele zur Normalen  $n$  in  $T'$ , mit  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  mit der Hauptachse und mit  $p$  die Parallele durch den Punkt  $M'$  zu  $n$ , mit  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ , mit  $q_\infty$  die unendlich ferne Gerade der Ebene und endlich mit  $N$  der Krümmungsmittelpunkt der Stelle  $T$ , dann ist stets  $(T N P Q_\infty) = (t' n p q_\infty)$ .“

Fällt  $M'$  mit einem Brennpunkt  $F$  zusammen, so ist hiernach die Parallele zur Nebenachse durch  $M$  identisch mit der Polaren  $f$  von  $F$ . Schließlich sei bemerkt, dass die Gültigkeit des Satzes auch für die Hyperbel leicht nachgewiesen werden kann.

4. Wird  $z = \mu((1 - \alpha)x + \beta y)$  gesetzt, so resultiert die Differentialgleichung:

$$(\alpha x - \beta y) dx + y dy = 0,$$

mit welcher wir uns schon im vorigen Abschnitte beschäftigt haben. (S. 136). Wir haben dort gefunden, dass für  $9\alpha = 2\beta^2$  das Integral durch die Parabelgleichung:

$$\left(y - 2\frac{\beta}{3}x\right)^2 = C\left(y - \frac{\beta}{3}x\right)$$

dargestellt wird. Die Schnittlinie der Ebene  $z = \mu((1 - \alpha)x + \beta y)$  mit der  $xy$ -Ebene bekommt alsdann die Gleichung:  $y = -\frac{1 - \alpha}{\beta}x = -\frac{2\beta^2 - 9}{9\beta}x$ . Setzen wir wiederum a)  $\frac{\beta}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , b)  $\frac{\beta}{3} = 1$ , c)  $\frac{\beta}{3} = \frac{1}{2}$ , so haben wir für die letzterwähnte Gerade die Gleichungen: a)  $y = 0$ , b)  $y = \frac{1}{3}x$ , c)  $y = -\frac{1}{3}x$ . Wird die jeweils resultierende Parabelgleichung auf die Scheitelgleichung  $\eta^2 = 2r\xi$  transformiert, dann kommen jenen Geraden im neuen Coordinatensystem bzw. die Gleichungen zu: a)  $\eta - 2r\sqrt{2} = \sqrt{2}(\xi - 4r)$ ,

$$b) \quad \eta - 3r = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) = \xi - \frac{9}{2}r, \text{ d. h. die Gerade ist}$$

unter  $45^\circ$  gegen die Parabelachse geneigt, c)  $\eta - 3r =$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{3}} \left( \xi - \frac{9}{2}r \right) = 2 \left( \xi - \frac{9}{2}r \right).$$

„Ist demnach mit  $T$  ein Punkt der Parabel  $\eta^2 = 2r\xi$  bezeichnet, mit  $t$  seine Tangente, mit  $n$  die Normale, mit  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt, mit  $Q_\infty$  der unendlich ferne Punkt in  $n$ , mit  $q_\infty$  die unendlich ferne Gerade, und heißt  $P$  der Schnittpunkt von  $n$  mit der Geraden  $\eta - 3r = 2 \left( \xi - \frac{9}{2}r \right)$ , resp. mit der Geraden  $\eta - 3r = \xi - \frac{9}{2}r$  oder mit der Geraden  $\eta - 2r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\xi - 4r)$ , während  $p$  die zu  $n$  Parallele durch den Punkt  $\left( \xi = \frac{9}{2}r, \eta = 3r \right)$ , bzw. für den letzten Fall durch den Punkt  $(\xi = 4r, \eta = 2r\sqrt{2})$  sein möge, dann gilt  $(TNPQ_\infty) = (t'npq_\infty)$ , wofern noch  $t'$  die Parallele zu  $n$  durch den Schnittpunkt von  $t$  mit bzw. einer der Geraden  $\eta - 3r = \xi - \frac{9}{2}r$ ,  $\eta - 3r = 2 \left( \xi - \frac{9}{2}r \right)$  oder endlich  $\eta - 2r\sqrt{2} = \sqrt{2}(\xi - 4r)$  bedeutet.“

„Es geht darum allemal die Verbindungslinie von  $T'$  mit dem Schnittpunkt von  $p$  und der durch  $P$  zur  $t$  parallel gezogenen Geraden durch  $N$ .“

Als letzte der windschiefen Flächen mit zwei geraden Leitlinien sei noch diejenige betrachtet, welche die Geraden  $L_1$  ( $\xi = s, \zeta = \mu\eta$ ),  $L_2$  ( $\xi = -s, \zeta = -\mu\eta$ ) zu Leitlinien besitzt.

Für die Ebene durch einen Punkt  $T^*(x, y, z)$  und durch  $L_1$  erhält man die Gleichung durch Elimination von  $\eta$  aus:

$$\frac{X-x}{s-x} = \frac{Y-y}{\eta-y} = \frac{Z-z}{\mu\eta-z}.$$

Sie lautet:  $(s-x)[Z-z] - \mu(Y-y) = (z - \mu y)(X-x)$ .  
Die Gleichung der Ebene durch  $T^*$  und  $L_2$  ist alsdann:

$$-(s+x)[(Z-z) + \mu(Y-y)] = (z + \mu y)(X-x).$$

Wenn nun  $T^*$  ein Punkt der windschiefen Fläche ist, so hat hiernach die Projection der durch ihn gehenden Erzeugenden auf

die  $xy$ -Ebene die Gleichung

$$\mu (s^2 - x^2) (Y - y) + (sz - \mu xy) (X - x) = 0,$$

wofern die Differentialgleichung besteht:

$$\mu (s^2 - x^2) dx + (-\mu xy + sz) dy = 0.$$

Führen wir hierin ein:  $sz - \mu xy = \lambda y (s - x)$ , so erhalten wir:

$$\mu (s + x) dx + \lambda y dy = 0$$

und haben die Integralgleichung:

$$\mu (s + x)^2 + \lambda y^2 = \text{Const.}$$

Sind  $\mu$  und  $\lambda$  gleichbezeichnet, so haben wir es mit einer Ellipse, im Gegenfalle mit einer Hyperbel zu thun. Wir begnügen uns mit der Discussion des ersteren Falles und machen die weitere beschränkende Voraussetzung  $\lambda > \mu$ . Das Verhältnis  $\frac{\lambda}{\mu}$  ist alsdann gleich dem Verhältnis der Halbachsenquadrate  $\frac{a^2}{b^2}$ .

Die durch die Gleichung  $sz = y [\lambda s - (\lambda - \mu)x]$  dargestellte Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid, welches mit der  $xy$ -Ebene die Geraden  $A_1 (y = 0)$ ,  $A_2 \left(x = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} s\right)$  gemein hat, und für welches die  $xz$ - und die  $yz$ -Ebene als Richtebenen gelten können. Wir bemerken noch, dass die Leitlinie  $L_1 (\xi = s, \zeta = \mu \eta)$  dem Paraboloides als Erzeugende angehört. Ist daher von irgend einem Punkte  $T^*$  desselben die Projection  $T$  auf die  $xy$ -Ebene gegeben, dann finden wir die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene an die Fläche in jenem Punkte als Verbindungslinie der Projectionen von  $T$  in  $A_1$  und  $A_2$ . Ist speciell  $T$  ein Punkt der Ellipse  $\mu (x + s)^2 + \lambda y^2 = \text{Const.}$ , bezeichnet  $n$  die Normale in  $T$  und sind  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte von  $n$  mit den Geraden  $x = s, x = -s$ , dann bedeutet  $n$  die Projection der durch  $T^*$  gehenden  $n^*$ , welche die Geraden  $L_1$  und  $L_2$  in zwei Punkten  $P_1^*, P_2^*$  schneidet, deren Projectionen somit, bzw. die Punkte  $P_1, P_2$  sind.  $P_1^*$  — als auf  $L_1$  gelegen — gehört gleich  $T^*$  unserem hyperbolischen Paraboloides an. Die beiden durch  $P_1^*$  gehenden Erzeugenden projicieren sich auf die  $xy$ -Ebene als die zu den Coordinatenachsen Parallelen durch  $P_1$ ; die durch  $T^*$  gehenden Erzeugenden als die Geraden von gleicher Richtung durch  $T$ . Die von  $T$  und  $P_1$  verschiedenen Ecken des von den vier Projectionen jener Erzeugenden gebildeten Rechteckes können wir auffassen als die Projectionen von denjenigen zwei Punkten des Paraboloides, in welchen die durch  $n^*$  an die Fläche gelegten Tangentialebenen berühren. Wir finden somit den in  $n$  gelegenen Schnittpunkt  $\Sigma$  der  $xy$ -Ebene und der  $n^*$  im Schnitte der der  $xy$ -Ebene und den Tangentialebenen gemeinsamen

Geraden. Die letzteren construieren wir aber als Verbindungslinien der Projection von  $T$  in  $\left. \begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix} \right\}$  und der Projection von  $P_1$  in  $\left. \begin{smallmatrix} A_2 \\ A_1 \end{smallmatrix} \right\}$ . Wenn wir nun noch bemerken, dass sich die Gleichung von  $A_2 \left( x = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} s \right)$  durch Einführung von  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2}{b^2}$  und  $e^2 = a^2 - b^2$  schreiben lässt:  $x = \frac{a^2}{e^2} s$ , so können wir jetzt den Satz aussprechen:

„Ist  $T$  ein Punkt der Ellipse  $\left( \frac{x+s}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1$ , heißt  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$ ,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt, sind ferner  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte von  $n$  und von  $x = s$ , bzw.  $x = -s$  und ist  $T'$  der Schnittpunkt von  $t$  mit der Verbindungslinie der senkrechten Projectionen von  $T$  in die Geraden  $A_1 (y = 0), A_2 \left( x = \frac{a^2}{e^2} s \right)$ , hingegen  $\Sigma$  der in  $n$  gelegene Schnittpunkt der Verbindungslinien der senkrechten Projectionen von  $T$  in  $\left. \begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix} \right\}$  und von  $P_1$  in  $\left. \begin{smallmatrix} A_2 \\ A_1 \end{smallmatrix} \right\}$ , dann ist das Büschel  $\Sigma (T' N P_1' P_2')$   $\bar{\wedge}$  mit der Reihe  $(T N P_1 P_2)$ , wo  $P_1' P_2'$  die Projectionen von  $P_1, P_2$  in die Hauptachse bedeuten. Wenn man daher u. a. die Schnittpunkte von  $t$  und  $\Sigma P_1$  und von  $t$  und  $\Sigma P_2$  mit bzw.  $P_2$  und  $P_1$  verbindet, so liegt der Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien mit  $T'$  und  $N$  in einer Geraden.“

Man wird bemerken, dass, sobald man  $s = \pm e$  annimmt,  $A_2$  in die Polare eines Brennpunktes fällt. Auch wird man leicht nachzuweisen vermögen, dass genau derselbe Satz für die Hyperbel  $\left( \frac{x+s}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 = 1$  Geltung behält.

Hingegen bekommen wir einen Parabelsatz ähnlicher Fassung, wenn wir in die ursprüngliche Differentialgleichung  $s z - \mu x y = \mu m (s - x)$  substituieren. Denn die Gleichung geht dadurch über in:

$$(s+x) dx + m dy = 0,$$

deren Integral die Form hat:

$$(s+x)^2 + 2 m y = \text{Const.}$$

Die Fläche  $s z = \mu [x y + m (s - x)]$  ist wiederum ein hyperbolisches Paraboloid, welches die  $xz$ - und die  $yz$ -Ebene zu Richtebenen besitzt. Die Ebene  $z = \mu m$  ist eine Tangentialebene desselben; die in ihr liegenden Erzeugenden projicieren sich auf die  $xy$ -Ebene als die Geraden  $A_1 (x = 0), A_2 (y = m)$ . Die Projectionen  $P_1'$  und  $P_2'$  der Schnittpunkte von  $L_1, L_2$  mit der Ebene  $z = \mu m$  haben bzw. die Coordinaten  $P_1' (x = s, y = m), P_2' (x = -s, y = -m)$  und der zu einem Punkte  $T$  der Parabel

$$(s+x)^2 + 2 m y = \text{Const.}$$



mit Hilfe der hier  $A_1, A_2$  genannten Geraden analog wie im Satze von vorhin construierte Punkt  $\Sigma$  stellt die Projection auf die  $xy$ -Ebene dar des Schnittpunktes der Ebene  $z = \mu m$  und der  $n^*$ , d. i. jener Geraden, welche in der durch die Normale  $n$  in  $T$  gehenden zur  $z$ -Achse parallelen Ebene liegt und dieser Ebene Schnittpunkte mit  $L_1, L_2$  verbindet. Die Bedeutung des Punktes  $T'$ , der ebenfalls übereinstimmend mit dem gleichbezeichneten Punkt von vorhin construiert gedacht ist, wird nun auch leicht zu erkennen sein und wir dürfen somit den Satz aussprechen:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  der Parabel  $(s+x)^2 + 2my = \text{Const.}$  die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bezeichnet man mit  $N$  den Krümmungsmittelpunkt für  $T$ , mit  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte von  $n$  mit den Geraden  $x=s, x=-s$ , ferner mit  $P_1', P_2'$  die Punkte  $(x=s, y=m), (x=-s, y=-m)$ , mit  $T'$  den Schnittpunkt von  $t$  mit der Verbindungslinie der Projectionen von  $T$  in  $A_1 (x=0)$  und in  $A_2 (y=m)$  und endlich mit  $\Sigma$  den auf  $n$  gelegenen Schnittpunkte der Verbindungslinien der Projection von  $T$  in  $A_1 \setminus A_2$  mit der Projection von  $P_1$  in  $A_1 \setminus A_2$ , dann besteht Projectivität zwischen dem Büschel  $\Sigma(T'NP_1'P_2')$  und der Reihe  $(TNP_1P_2)$ .“

Wir kommen jetzt dazu, windschiefe Flächen in Betracht zu ziehen, welche nur mehr eine gerade Leitlinie besitzen; an Stelle der zweiten geraden Leitlinie sei eine krumme Linie getreten.

Wir beginnen mit folgendem Falle: Die gerade Leitlinie  $L$  habe die Gleichung  $(\zeta=0, \eta=\mu\xi)$  und die krumme Leitlinie sei die Curve  $C_0 (\eta=0, \zeta^{k-1}\xi=a^k)$ . Durch Elimination von  $\xi$  aus den Gleichungen

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{\mu\eta-y} = \frac{Z-z}{-z}$$

erhalten wir die Gleichung der Ebene, welche durch den Punkt  $T^*(x, y, z)$  und durch die Gerade  $L$  geht, und analog finden wir die Gleichung des Kegels mit der Spitze  $T^*$ , der die Curve  $C_0$  projiciert, wenn wir mittels der Gleichung  $\zeta^{k-1}\xi=a^k$  die Größen  $\zeta$  und  $\xi$  aus den Gleichungen

$$\frac{X-x}{\xi-x} = \frac{Y-y}{-y} = \frac{Z-z}{\zeta-z}$$

eliminiert. Die Resultate der beiden Eliminationen lauten:

$$(y - \mu x)(Z - z) = z[(Y - y) - \mu(X - x)]$$

und

$$[z(Y - y) - y(Z - z)]^{k-1} [x(Y - y) - y(X - x)] = a^k (Y - y)^k.$$

Substituieren wir den Wert von  $Z - z$  aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite, so kommt:

$$\left(\frac{\mu z}{\mu x - y}\right)^{k-1} [x(Y - y) - y(X - x)]^k = a^k (Y - y)^k$$

oder

$$\left(\frac{\mu z}{\mu x - y}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot [x(Y - y) - y(X - x)] = a(Y - y),$$

woraus wir die Differentialgleichung ableiten:

$$\left(\frac{\mu z}{\mu x - y}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot (x dx + y dy) = a dx$$

oder

$$\left[ x - \left( \frac{\mu x - y}{\mu z} \right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot a \right] dx + y dy = 0.$$

Setzen wir hierin  $\left(\frac{\mu x - y}{\mu z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{x}{b}$ , so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$(b - a) x dx + b y dy = 0$$

und ihr Integral ist die Gleichung eines Centralkegelschnittes  $C$ :

$$(b - a) x^2 + b y^2 = \text{Const.},$$

d. h. diejenige Curve  $C^*$  auf der Fläche  $F$   $\left(\left(\frac{\mu x - y}{\mu z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{x}{b}\right)$ , welche sich auf die  $xy$ -Ebene als der Kegelschnitt  $C$  projiziert, bestimmt mit  $L$  und  $C_1$  als Leitlinien eine windschiefe Fläche, deren Erzeugenden die Normalen der  $C$  zu ihren Projectionen auf die  $xy$ -Ebene besitzen. Um zur Kenntnis des Schnittpunktes  $T'$  der  $xy$ -Ebene und der Tangente an die  $C^*$  in einem Punkte  $T^*$  zu gelangen, brauchen wir die Schnittlinie  $t_0$  der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene in  $T^*$  an die Fläche  $F$ . Die Fläche  $F$  ist aber eine conoidische Fläche, welche die Gerade  $L$  zur Achse und die  $yz$ -Ebene zur Richtebene besitzt. Außerdem bemerken wir, dass sich die Schnittlinie der  $F$  mit jeder zur  $z$ -Achse und zur  $L$  parallelen Ebene auf der  $xy$ -Ebene als eine Curve von der Gleichung  $z^{\frac{2k-1}{k}} \cdot x = \text{Const.}$  projiziert. Dies genügt, um die Richtigkeit der folgenden Construction der  $t_0$  einzusehen: Man verbinde den Schnittpunkt  $T_1$  der  $L$  und der Parallelen zur  $y$ -Achse durch  $T(x, y)$  (der Projection von  $T^*$  auf die  $xy$ -Ebene) mit dem Schnittpunkt  $T_2$  der Parallelen zur  $L$  durch  $T$  und der Parallelen

$\xi = \frac{2k-1}{k} x$  zur  $y$ -Achse. Die Verbindungslinie  $T_1 A_2$  ist dann die  $t_0$  und deren Schnittpunkt mit der Tangente  $t$  in  $T$  an die  $C$  ist der Punkt  $T''$ .

Wir können daher den Satz aufstellen:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  eines Centralkegelschnittes die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und nennt man  $N$  den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt,  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  mit der Haupt}achse,  $P'$  den auf der nämlichen Achse gelegenen Punkt, welcher vom Mittelpunkte  $O$   $k$ -mal so weit absteht als  $P$ ,  $Q$  einen beliebig gewählten Punkt auf  $n$ ,  $T_1$  den Schnittpunkt von  $OQ$  mit der durch  $T$  gelegten Parallelen zur Neben}achse, dagegen  $T_2$  den Schnittpunkt der durch  $T$  geführten Parallelen zur  $OQ$  ( $y = \mu x$ ) mit derjenigen Parallelen zur Neben}achse, welche von dieser Achse  $\frac{2k-1}{k}$ -mal soweit entfernt ist als  $T$ , dann besteht, wenn noch  $T'$  den Schnittpunkt von  $t$  mit der  $T_1 T_2$  heißt, Projectivität zwischen dem Büschel  $Q(T'NP'O)$  und der Reihe  $(TNPQ)$ .“

Wenn wir einen bestimmten Wert für  $k$  festhalten,  $Q$  jedoch  $n$  durchlaufen lassen, so bleibt  $P'$  fest,  $T'$  hingegen durchläuft  $t$ . Wegen der perspectiven Beziehung der Büschel  $Q(T'NP'O)$  und  $O(TNPQ)$  muss nun der Schnittpunkt  $\Sigma$  von  $QT'$  und  $OT$  mit  $N$  und  $P'$  in einer Geraden liegen, d. h. bei festem  $k$  beschreibt  $T'$ , wenn  $Q$  sich auf der Normalen  $n$  bewegt, eine mit der Reihe der  $Q$  perspective Reihe auf  $t$  und das Perspectivitätscentrum  $\Sigma$  liegt auf  $OT$ . Da weiters zu jedem  $k$  ein anderes  $P'$  gehört und  $P'$  mit  $\Sigma$  und mit dem unveränderlichen Punkt  $N$  in einer Geraden liegt, so beschreiben  $\Sigma$  und  $P'$  wenn man  $k$  continuierlich sich ändern lässt, zwei perspective Reihen auf bezw.  $OT$  und einer der Achsen;  $N$  ist das bezügliche Perspectivitätscentrum.

Bemerkenswert sind insbesondere die aus obigem Satze folgenden speciellen Sätze, wenn für  $k$  die Werte  $\frac{1}{2}$  oder  $\infty$  angenommen werden und  $Q$  entweder mit  $P$  oder mit der Projection des Mittelpunktes  $O$  auf die  $n$  identificiert wird.

Der Wert  $k = \frac{1}{2}$  bedingt  $\frac{2k-1}{k} = 0$  und wir können sagen:

„Projiciert man  $T$  in die Achsen nach  $T_1$  und  $T_2$  und verbindet den mit  $T_1$  und  $T_2$  in einer Geraden gelegenen Punkt  $T'$  der Tangente  $t$  mit  $P$  — dem Schnittpunkt von  $n$  mit einer der Achsen, — dann hälftet die Verbindungslinie von  $N$  mit dem Schnittpunkte  $\Sigma$  der  $OT$  und der  $T'P$  die Strecke  $OP$ .“

Weiters:

„Verbindet man den Schnittpunkt der Tangente  $t$  und der Neben}achse mit der senkrechten Projection  $Q$  des Mittelpunktes Haupt}  $O$  auf die  $n$ , dann schneidet die Verbindungslinie die  $OT$  wiederum im Punkte  $\Sigma$ , dessen Verbindungslinie mit  $N$  die von  $O$  und dem Schnittpunkte  $P$  der  $n$  und der Haupt}achse begrenzten Strecke Neben} halbiert.“

Für  $k = \infty$  ergibt sich hingegen  $\frac{2k-1}{k} = 2$  und es gelten die folgenden Sätze:

„Zieht man durch die Projection von  $T$  in die Haupt}achse Neben} die Parallele zur  $OT$  und verbindet den Schnittpunkt  $T'$  der  $t$  und dieser Parallelen mit dem Schnittpunkte  $P$  der  $n$  und der Haupt}achse, Neben} dann schneiden sich die durch  $N$  gezogene Parallele zur nämlichen Achse und die Linien  $OT$  und  $PT'$  in einem Punkte  $\Sigma$ .“

„Die Verbindungslinie dieses Punktes  $\Sigma$  mit der Projection von  $O$  auf die  $n$  trifft die Tangente  $t$  in einem Punkte, welcher mit dem Schnittpunkt der  $t$  und der Neben}achse eine Strecke Haupt} begrenzt, deren Halbierungspunkt  $T$  ist.“

Verlegen wir endlich  $Q$  nach  $N$ , so haben wir u. a. noch die Sätze:

„Die von  $OT$  verschiedene Diagonale in einem Parallelogramme mit den Gegenecken  $O, T$ , von dem die in  $O$  zusammenstoßenden Seiten in die Neben}achse und in die  $ON$  fallen, schneidet die Haupt} Tangente  $t$  in einem Punkte, der mit  $N$  verbunden eine Gerade Neben} gibt, welche die von  $O$  und dem Schnittpunkte  $P$  der  $n$  und der Haupt}achse begrenzte Strecke halbiert.“

„Nennt man  $T_1$  den Schnittpunkt von  $ON$  mit der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur Neben}achse und  $T_2$  den Schnittpunkt der Haupt} Parallelen zur  $ON$  durch  $T$  und der Parallelen durch  $T_1$  zur  $OT$ , dann trifft die  $T_1T_2$  die Tangente  $t$  in einem Punkte  $T'$ , welcher mit  $N$  in einer Parallelen zur Haupt}achse Neben} liegt.“

Den vorstehenden Sätzen in gewisser Hinsicht analoge Sätze für die Parabel finden wir, wenn wir in der ursprünglichen Differentialgleichung substituieren:

$$a \left( \frac{\mu x - y}{\mu z} \right)^{\frac{k-1}{k}} = x - m.$$

Die Gleichung geht dadurch über in:

$$m dx + y dy = 0$$

und ihr Integral ist dargestellt durch die Parabelgleichung:

$$2mx + y^2 = \text{Const.}$$

Zur Construction der Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene der Fläche  $F$   $\left(a \left(\frac{\mu x - y}{\mu z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = x - m\right)$  in einem

Punkte  $T^*$ , von dem lediglich die Projection  $T$  auf die  $xy$ -Ebene gegeben ist, führen uns die Bemerkungen: Die Fläche  $F$  ist 1. eine conoidische Fläche mit der  $yz$ -Ebene als Richtebene und der Geraden  $y = \mu x$  der  $xy$ -Ebene als Achse und 2. ergibt sich als Schnittlinie der  $F$  und des hyperbolischen Paraboloides  $bz = y(\mu x - y)$  eine Curve, deren Projection auf die  $xy$ -Ebene die Gleichung besitzt

$$y^{\frac{k-1}{k}}(x - m) = a \left(\frac{b}{\mu}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad \text{Wir verbinden daher } T \text{ mit jenem}$$

Punkte der  $x$ -Achse, welcher vom Punkte  $O'$  ( $x = m, y = 0$ )  $\frac{2k-1}{k}$  mal so weit entfernt ist als die Projection von  $T$  in die  $x$ -Achse, und bringen die Verbindungslinie zum Schnitte mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte  $a$ ) der  $x$ -Achse und der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur  $y = \mu x$ ,  $b$ ) der  $y = \mu x$  und der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $T$ . Der Schnittpunkt beider Verbindungslinien gibt alsdann verbunden mit dem Schnittpunkte der  $y = \mu x$  und der durch  $T$  gelegten Parallelen zur  $y$ -Achse die gesuchte Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene in  $T^*$  an die  $F$ . Nennen wir (unter der Voraussetzung, dass  $T$  ein Punkt der Parabel  $2mx + y^2 = \text{Const.}$  ist)  $T'$  den in der Parabeltangente  $t$  des Punktes  $T$  gelegenen Punkt der  $xy$ -Spur der Tangentialebene in  $T^*$  an die  $F$ , dann führt eine naheliegende Reihe von weiteren Schlüssen zum Satze:

„Construiert man nach gegebener Vorschrift auf der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  der Parabel  $2mx + y^2 = \text{Const.}$  den Punkt  $T'$  und bezeichnet man mit  $P$  den Schnittpunkt der Normalen  $n$  in  $T$  mit der  $x$ -Achse (der Parabelachse), mit  $P'$  jenen Punkt derselben Achse, welcher  $k$ -mal soweit vom Coordinatenanfangspunkt  $O$  entfernt ist als  $P$ , weiters mit  $Q$  den Schnittpunkt der  $n$  und der beliebigen durch  $O$  gezogenen Geraden  $y = \mu x$  und mit  $N$  den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle  $T$ , dann gilt  $Q(T'NP'O) \overline{\wedge} (TNPQ)$ .“

Betrachten wir die beiden perspectiven Büschel  $Q(T'NP'O)$  und  $O(TNPQ)$ , so erkennen wir, dass, wenn sich die  $y = \mu x$  um  $O$  dreht, die Punkte  $Q$  und  $T'$  auf bezw.  $n$  und  $t$ , wofern der Wert von  $k$  unverändert bleibt, perspective Reihen beschreiben. Als Perspectivitätscentrum ergibt sich ein Punkt  $\Sigma$  auf  $OT$  und,

wenn nun noch  $k$  alle möglichen Werte annimmt, dann beschreiben auf der  $x$ -Achse, resp. der  $OT$  die Punkte  $P'$  und  $\Sigma$  ebenfalls perspective Reihen, denn  $\Sigma P'$  geht stets durch  $N$ .

Auf eine Aufstellung der für  $k = \frac{1}{2}$  und  $k = \infty$  resultierenden Specialsätze verzichten wir und übergehen sogleich zur Betrachtung der Substitution

$$\frac{\mu x - y}{\mu z} = \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

für welche wir die Differentialgleichung

$$(b x - a y) dx + b y dy = 0$$

erhalten. Dieselbe hat nach früherem die Parabelgleichung

$$(y - x \sqrt{2})^2 = C(y - \frac{x}{2} \sqrt{2})$$

zum Integrale, wofern  $9b^2 = 2a^2$  ist.

Da nun die Fläche  $\left( \frac{\mu x - y}{\mu z} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{y}{b}$  nicht wesentlich von

der zu Beginn dieses Abschnittes benützten Fläche  $\left( \frac{\mu x - y}{\mu z} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{x}{b}$  verschieden ist, so können wir unter Bezugnahme auf die Untersuchungen auf S. 121 den Satz aussprechen:

„Wählt man auf der Normalen  $n$  im Punkte  $T$  der Parabel  $\eta^2 = 2r\xi$  einen Punkt  $Q$ , verbindet ihn mit dem Punkte  $O$  ( $\zeta = 4r$ ,  $\eta = 2r\sqrt{2}$ ), construiert den Schnittpunkt  $T_1$  der  $OQ$  mit der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur  $Ox'$  ( $\eta - 2r\sqrt{2} = \sqrt{2}(\xi - 4r)$ ), weiters den Punkt  $T_2$  als jenen Punkt auf der zur  $Ox'$  Parallelen, die von der  $Ox'$   $\frac{2k-1}{k}$  mal soweit entfernt ist als  $T$ , welcher zugleich in der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur  $OQ$  liegt, und nennt  $T'$  den Schnittpunkt der Tangente  $t$  in  $T$  mit der  $T_1 T_2$ ,  $P$  den Schnittpunkt der  $n$  und der  $Ox'$ ,  $P'$  hingegen jenen Punkt der  $Ox'$ , welcher von  $O$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , dann besteht, falls noch  $N$  den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle  $T$  bezeichnet, die Beziehung  $Q(T'NP'O) \cap (TNP'Q)$ . Es schneidet also stets  $QT'$  die  $OT$  in einem Punkte  $\Sigma$ , welcher mit  $P'$  und  $N$  in einer Geraden liegt.“

Durch Specialisierung des Wertes von  $k$  und durch eine besondere Lage von  $Q$  ergeben sich aus diesem allgemeinen Satze natürlich wieder eine Reihe besonderer Sätze. Wir lassen uns hierauf aber nicht weiter ein, sondern machen in die Differentialgleichung dieses Abschnittes noch eine andere Substitution. Wir

setzen:

$$\left(\frac{\mu x - y}{\mu z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{\mu x - y}{b}$$

und erhalten die Gleichung:

$$\left[x - \frac{\mu x - y}{b} a\right] dx + y dy = 0$$

oder

$$[(b - \mu a)x + ay] dx + by dy = 0,$$

deren Integral ebenfalls durch die Parabelgleichung

$$(y - \lambda_1 x)^2 = C(y - \lambda_2 x)$$

gegeben ist, wo  $\lambda_1, \lambda_2$  den Gleichungen genügen müssen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 - \mu \frac{a}{b}, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 = -\frac{a}{b}, \quad 2\lambda_2 = \lambda_1$$

und also  $b$  aus der Gleichung  $\frac{2a^2}{9b^2} = 1 - \mu \frac{a}{b}$  zu berechnen ist.

Wir finden:

$$\frac{a}{b} = -\frac{9\mu}{4} \pm \frac{3}{4} \sqrt{9\mu^2 + 8} = \frac{3}{4} (-3\mu \pm \sqrt{3\mu^2 + 8})$$

und

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b}.$$

Für  $\mu = \frac{1}{3}$  wird demnach beispielsweise  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$  oder  $\lambda_2 = 2, \lambda_1 = 1$  und die resultierenden Parabelgleichungen lauten bzw.

$$(y + x)^2 = C\left(y - \frac{x}{2}\right) \text{ und } (y - 2x)^2 = C(y - x).$$

Die Substitutionsgleichung

$$\left(\frac{\mu x - y}{\mu z}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{\mu x - y}{b} \text{ oder } z^{k-1} (\mu x - y) = b^k$$

stellt eine Cylinderfläche dar mit zur Geraden ( $z=0, y=\mu x$ ) parallelen Erzeugenden und der Curve  $\left(y=0, z^{k-1}x=\frac{b^k}{\mu}\right)$  als Leitlinie. Wir construieren somit die Schnittlinie der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene in einem Punkte  $T^*$  der Fläche, dessen Projection auf die  $xy$ -Ebene der Punkt  $T$  ist, indem wir durch  $T$  die Parallele zur  $y=\mu x$  ziehen und alsdann auf der

$x$ -Achse einen Punkt  $T_1'$  bestimmen, der vom Koordinatenanfangspunkt  $k$ -mal soweit entfernt ist als der Schnittpunkt  $T_1$  der  $x$ -Achse und jener durch  $T$  gehenden Parallelen. Die durch  $T_1'$  zur  $y = \mu x$  gezogene Parallele ist bereits die gesuchte Schnittlinie.

Wenn wir uns jetzt auf das auf S. 137 Gesagte beziehen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  der Parabel  $\eta^2 = 2 r \xi$  die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bezeichnet man mit  $N$  den zu  $T$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt, mit  $O$  den Punkt

$$\left( \xi = \frac{9}{2} r, \eta = 3 r \right),$$

mit  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  und der Geraden  $\eta - 3 r = \xi - \frac{9}{2} r$  [oder  $\eta - 3 r = 2 \left( \xi - \frac{9}{2} r \right)$ ], weiters mit  $P'$  jenen Punkt dieser Geraden, der von  $O$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , mit  $Q$  den Schnittpunkt von  $n$  und der Geraden

$$\eta - 3 r = 2 \left( \xi - \frac{9}{2} r \right) \left[ \eta - 3 r = \xi - \frac{9}{2} r \right]$$

und endlich mit  $T'$  den Schnittpunkt von  $t$  mit derjenigen zur letzteren Geraden Parallelen, welche von ihr einen  $k$ -mal so großen Abstand besitzt als der Punkt  $T$ , dann gilt  $Q(T' N P' O) = (T N P Q)$  und es laufen also die Geraden  $Q T'$ ,  $P' N$  und  $O T$  durch einen Punkt.“

Man erkennt, dass für jeden anderen Parabelpunkt  $O$ , dessen Entfernung von der Parabelachse  $> 2 r \sqrt{2}$  ist, ein solcher Doppelsatz aufgestellt werden kann, nur werden die vorkommenden Geraden wesentlich compliciertere Gleichungen besitzen.

Schreiben wir schließlich noch die Differentialgleichung des Abschnittes, wie sie sich ursprünglich präsentiert:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu z}{\mu x - y} \right)^{\frac{k-1}{k}} (x dx + y dy) &= a dx, \text{ d. i.} \\ \left( \frac{\mu z}{\mu x - y} \right)^{\frac{k-1}{k}} d(x^2 + y^2) &= 2 a dx \end{aligned}$$

und setzen wir:

$$\left( \frac{\mu z}{\mu x + y} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

dann geht sie über in:

$$\frac{b d(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 a dx,$$



welche die Gleichung

$$b \sqrt{x^2 + y^2} = ax + C^2$$

zum Integrale besitzt.

Quadriert gibt diese Gleichung:

$$(b^2 - a^2) \left( x^2 - \frac{2aC^2}{b^2 - a^2} x \right) + b^2 y^2 = C^4$$

oder

$$(b^2 - a^2) \left( x - \frac{aC^2}{b^2 - a^2} \right)^2 + b^2 y^2 = \frac{b^2 C^4}{b^2 - a^2}$$

oder

$$\left( \frac{x - E}{A} \right)^2 + \left( \frac{y}{B} \right)^2 = 1, \text{ wenn } A^2 = \frac{b^2 C^2}{(b^2 - a^2)^2}, B^2 = \frac{C^4}{b^2 - a^2} \text{ und}$$

$$E^2 = A^2 - B^2 = \frac{a^2 C^4}{(b^2 - a^2)^2} \text{ ist.}$$

Die Integralgleichung stimmt demnach, wenn  $b > a$  ist, mit der Brennpunktgleichung einer Ellipse überein, dagegen ist sie die Brennpunktgleichung einer Hyperbel, wenn  $b < a$  gewählt wird.

Die durch die Substitutionsgleichung dargestellte Fläche  $F$  hat mit jedem Rotationscyliner, dessen Achse in die  $z$ -Achse fällt, eine Ellipse gemein, deren Ebene die Gerade ( $z=0, y=\mu x$ ) enthält. Hingegen hat jeder Rotationskegel mit der  $z$ -Achse als Achse und mit dem Koordinatenanfangspunkt als Spitze mit der Fläche  $F$  eine Curve gemein, welche auf einem Cylinder von der

Gleichung  $z^{\frac{2k-1}{k}} (\mu x - y) = \text{Const.}$  liegt. Kennt man demnach von einem Punkte  $T^*$  der  $F$  die Projection  $T$  auf die  $xy$ -Ebene, so findet man die Schnittlinie der Tangentialebene in  $T^*$  an die  $F$  und der  $xy$ -Ebene, wie folgt: Man verbindet  $T$  mit dem Koordinatenanfangspunkt  $O$  und errichtet sowohl in  $T$ , als auch in  $O$  Senkrechte auf  $OT$ . Die Senkrechte in  $T$  bringt man in  $T_1$  zum Schnitt mit der  $y=\mu x$  und die Senkrechte in  $O$  schneidet man in  $T_2$  mit jener Parallelen zur  $y=\mu x$ , welche von dieser Geraden  $\frac{k}{1-k}$ -mal so weit entfernt ist als der Punkt  $T$ . Die  $T_1 T_2$  ist alsdann die verlangte Schnittlinie.

Hiernach können wir folgenden Satz aufstellen:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  eines Centralkegelschnittes die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und bezeichnet man mit  $n$  den Krümmungsmittelpunkt für  $T$ , mit  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  mit der Hauptachse, mit  $P'$  jenen Punkt derselben Achse, welcher  $k$ -mal soweit von einem Brennpunkte  $F$  entfernt ist als  $P$ , weiters mit  $Q$  einen beliebigen Punkt auf  $n$ , mit  $T'$  den Schnittpunkt der  $t$  und

der Verbindungslinie  $T_1 T_2$  der Punkte  $T_1, T_2$ , von denen  $T_1$  der Schnittpunkt der  $QF$  und der in  $T$  auf die  $TF$  errichteten Senkrechten ist, während  $T_2$  den Schnittpunkt bezeichnet, der in  $F$  auf die  $TF$  errichteten Senkrechten und derjenigen zur  $QF$  Parallelen, welche  $\frac{k}{1-k}$ -mal soweit von ihr entfernt ist als  $T$ , dann besteht Projectivität zwischen dem Büschel  $Q(T'NP'F)$  und der Reihe  $(TNPQ)$ , also auch mit dem Büschel  $F(TNPQ)$  und es schneiden sich daher die Geraden  $QT'$  und  $FT$  in einem Punkte  $\Sigma$ , welcher mit  $P'$  und  $N$  in einer Geraden liegt.“

Besondere Ausnahmen für den Wert von  $k$  und für die Lage des Punktes  $Q$  auf  $n$  liefern natürlich specielle Sätze. Am einfachsten gestalten sich die Sätze, wenn  $Q$  entweder mit der Projection von  $F$  auf  $n$ , oder mit  $N$  coincidirt, und wenn für  $k$  der Wert  $\frac{1}{2}$  oder  $\infty$  gewählt wird. Von einer ausführlichen Erörterung glauben wir absehen zu können.

Nicht unterdrücken wollen wir aber zum Schlusse dieses Abschnittes die Bemerkung, dass die meisten der aufgestellten Sätze ihre Gültigkeit behalten, wenn  $\mu = \infty$  wird, wenn also die gerade Leitlinie der betrachteten windschiefen Flächen die  $y$ -Achse ist. Lediglich der erste Satz des Abschnittes wird unter der Voraussetzung illusorisch. Dies nöthigt uns für den Fall eine gesonderte Untersuchung anzustellen.

Setzen wir in der Differentialgleichung des Abschnittes  $\mu = \infty$ , so erhalten wir

$$\left[ x - a \left( \frac{x}{z} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \cdot dx + y dy = 0$$

und, wenn wir hierin substituieren

$$\left( \frac{x}{z} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{x}{b},$$

so ergibt sich

$$(b-a) x dx + y dy = 0,$$

dieselbe Gleichung, die wir hier an erster Stelle bekamen.

Da die Substitutionsgleichung  $\left( \frac{x}{z} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{x}{b}$  oder  $z^{k-1} x = b^k$  eine Cylinderfläche mit zur  $y$ -Achse parallelen Erzeugenden darstellt, welche die Eigenschaft besitzt, dass irgend eine ihrer Tangentialebenen die  $xy$ -Ebene in einer zur  $y$ -Achse Parallelen schneidet, welche von dieser Achse  $k$ -mal soweit entfernt ist als die Projection der Berührungserzeugenden auf die  $xy$ -Ebene, so gilt der Satz:

„Nennt man  $T$  einen Punkt eines Centralkegelschnittes,  $t$  die Tangente,  $n$  die Normale in  $T$ ,  $N$  den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt,  $P$  den Schnittpunkt von  $n$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse,  $Q$  dagegen den Schnittpunkt von  $n$  mit der anderen Achse und bezeichnet man weiters mit  $P'$  jenen Punkt der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse, welcher vom Mittelpunkte  $O$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , endlich mit  $T'$  denjenigen Punkt der  $t$ , welcher auf der im  $k$ -fachen Abstände des Punktes  $T$  von der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse zu dieser parallel gezogenen Linie liegt, dann ist  $Q(TNP'O) \overline{\wedge} (TNPQ)$ .“

In diesem Abschnitte behalten wir dieselbe krumme Leitlinie bei, welche bereits im vorigen Abschnitte Verwendung fand, die gerade Leitlinie ersetzen wir aber durch die unendlich ferne Gerade der  $xy$ -Ebene.

Zur Aufstellung unserer Differentialgleichung brauchen wir daher nur in der Gleichung

$$[z(Y-y) - y(Z-z)]^{k-1} [x(Y-y) - y(X-x)] = a^k (Y-y)^k$$

$Z-z=0$  zu setzen und bekommen:

$$z^{k-1} [x(Y-y) - y(X-x)] = a^k (Y-y)$$

und also

$$z^{k-1} d(x^2 + y^2) = 2a^k dx \text{ oder } \left(x - \frac{a^k}{z^{k-1}}\right) dx + y dy = 0.$$

Die Substitutionen, die wir machen, sind denen im vorangehenden Abschnitte analog. Wir setzen zunächst

$$\left(\frac{a}{z}\right)^{k-1} = \frac{x}{b}$$

und erhalten hiefür als Integralgleichung

$$(b-a)x^2 + by^2 = \text{Const.}$$

Daher gilt der Satz:

„Ist  $T$  ein Punkt eines Centralkegelschnittes,  $t$  seine Tangente,  $n$  seine Normale,  $N$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt und heißt  $P$  der Schnittpunkt von  $n$  mit der  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  achse,  $p$  die zur  $n$  Parallele, welche dieselbe Achse in einem Punkte  $P'$  trifft, der vom Mittelpunkte  $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , bezeichnet weiters  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt von  $n$ ,  $q_\infty$  die unendlich ferne

Gerade und endlich  $t'$  die zur  $n$  Parallele, welche mit  $t$  den Punkt  $T'$  gemein hat, der auf jener zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse parallel gezogenen Geraden liegt, welche  $k$ -mal soweit von dieser Achse absteht als der Punkt  $T$ , dann besteht die Gleichheit der Doppelverhältnisse  $(t' n p q_\infty) = (T N P Q_\infty)$  und es geht daher u. a. sowohl die Verbindungslinie von  $P'$  mit dem Schnittpunkte der  $t'$  und der durch  $T$  parallel zur  $\left. \begin{smallmatrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{smallmatrix} \right\}$  Achse gezogenen Geraden, als auch die Verbindungslinie des Punktes  $T'$  mit dem Schnittpunkte der  $p$  und der durch  $P$  gelegten Parallelen zur  $t$  durch  $N$ .“

Dass dieser Satz für jeden Wert von  $k$  richtig ist, wenn er für einen besonderen Wert von  $k$  als bestehend erkannt ist, erhellt übrigens unmittelbar. Nun haben wir ihn aber für  $k=0$  bereits auf S. 139 gefunden, und hätten also seine allgemeine Fassung schon dort aufstellen können.

Ganz ähnlich wird sich die Sache verhalten mit dem Resultate der zweiten Substitution, die wir einführen. Wir setzen:

$$\frac{a^k}{z^{k-1}} = x - m$$

und bekommen als Integralgleichung:

$$2 m x + y^2 = \text{Const.}$$

Da nun die Gleichung  $z^{k-1}(x-m) = a^k$  einer Cylinderfläche angehört, deren Tangentialebenen die  $xy$ -Ebene in zur  $y$ -Achse parallelen Geraden schneiden, die jeweils  $k$ -mal soweit von der Geraden  $x=m$  abstehen als die Projectionen der Berührungserzeugenden auf die  $xy$ -Ebene, so haben wir den Satz:

„Zieht man in einem Punkte  $T$  der Parabel  $2 m x + y^2 = \text{Const.}$  die Tangente  $t$ , die Normale  $n$  und verzeichnet man den Schnittpunkt  $P$  der  $n$  und der  $x$ -Achse, nennt  $P'$  jenen Punkt derselben Achse, welcher vom Ursprung  $O$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , weiters  $Q_\infty$  den unendlich fernen Punkt der  $n$ ,  $q_\infty$  die unendlich ferne Gerade der Ebene, hingegen  $p$  die Parallele zur  $n$  durch  $P'$  und endlich  $t'$  die Parallele zur  $n$  durch den Punkt  $T'$  auf  $t$ , welcher der Schnittpunkt der zur  $y$ -Achse Parallelen ist, deren Abstand von der Geraden  $x=m$  das  $k$ -fache des Abstandes des Punktes  $T$  von derselben Geraden beträgt, dann gilt die Doppelverhältnissgleichheit  $(t' n p q_\infty) = (T N P Q_\infty)$  und man construirt  $N$  genau so wie vorhin.“

Man vergleiche hiezu den Satz auf S. 140. Bemerkenswert ist noch, dass wenn  $m=0$  erachtet wird, der Satz in den vorhin für Centralkegelschnitte aufgestellten übergeht.

## Die dritte Substitution

$$\left(\frac{a}{z}\right)^{k-1} = \frac{y}{b}$$

führt ebenfalls zu einem Satze über die Parabel:

„Behalten  $T, N, t, n, Q_\infty, q_\infty$  ihre Bedeutung für die Parabel  $\eta^2 = 2r\xi$  bei und ist  $P$  der Schnittpunkt von  $n$  mit der Geraden  $\eta - r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\xi - 4r)$ ,  $p$  die Parallele zu  $n$ , welche diese Gerade in einem Punkte  $P'$  schneidet, der vom Punkte  $O$  ( $\xi = 4r, \eta = r\sqrt{2}$ )  $k$ -mal soweit entfernt ist als  $P$ , endlich  $t'$  die zu  $n$  Parallele durch den Punkt  $T'$  auf  $t$ , der von der Geraden  $\eta - r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\xi - 4r)$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $T$ , dann gilt  $(t'npq_\infty) = (TNPQ)$  u. s. w.“

Auch die Richtigkeit dieses Satzes für ein beliebiges  $k$  leuchtet sofort ein, wenn sie für ein besonderes  $k$  bewiesen ist und dies ist für  $k=0$  thatsächlich schon auf S 142 geschehen. Die vollinhaltliche Verallgemeinerung des dort gefundenen Satzes hätten wir erhalten, wenn wir  $\left(\frac{a}{z}\right)^{k-1} = \frac{y - ax}{b}$  als Substitutionsgleichung benützt haben würden.

Die letzte Substitution

$$z^{k-1} = \frac{b^k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

liefert uns endlich als Integral die Focalgleichung eines Centralkegelschnittes und wir erhalten den Satz:

„Bestimmt man auf dem Brennstrahle  $FT$  des Punktes  $T$  eines Centralkegelschnittes einen Punkt  $T_1$ , welcher vom Brennpunkte  $F$   $k$ -mal soweit entfernt ist als  $T$ , zieht durch  $T_1$  die Senkrechte auf  $FT$  und nennt  $T'$  ihren Schnittpunkt mit der Tangente  $t$  in  $T$ , dann bilden die vier Strahlen  $t'$  (die Parallele zur Normalen  $n$  in  $T$  durch  $T'$ )  $n, p$  (die Parallele zu  $n$  durch jenen Punkt  $P'$  der Hauptachse, der von  $F$   $k$ -mal soweit entfernt ist als ihr Schnittpunkt  $P$  mit der  $n$ ) und  $q_\infty$  (die unendlich ferne Gerade) ein Parallelstrahlenbüschel, welches projectiv ist mit der Reihe  $(TNPQ_\infty)$ . ( $N$  der Krümmungsmittelpunkt für die Stelle  $T$  und  $Q_\infty$  der unendlich ferne Punkt von  $n$ ). Es liegt daher  $N$  in der Verbindungslinie von  $\left.\begin{smallmatrix} P' \\ T' \end{smallmatrix}\right\}$  mit dem Schnittpunkte der  $\left.\begin{smallmatrix} t' \\ p \end{smallmatrix}\right\}$  und der Parallelen zur Hauptachse durch  $\left.\begin{smallmatrix} T_1 \\ P \end{smallmatrix}\right\}$ .“

Da allemal  $P'T_1$  parallel zu  $n$  ist, so können wir den Satz kürzer fassen:

„Zieht man zur Normalen  $n$  eine beliebige Parallele  $v$ , nennt  $T_1$  ihren Schnittpunkt mit  $FT$  und  $P'$  ihren Schnittpunkt mit der

Hauptachse und construirt den Schnittpunkt  $T'$  der Tangente  $t$  mit der Senkrechten auf die  $FT$  in  $T_1$ , dann schneidet die durch den Punkt  $T'$  geführte Parallele zur  $n$  die durch  $T$  gezogene Parallele zur Hauptachse in einem mit  $N$  und  $P'$  in einer Geraden liegenden Punkt.  $N$  liegt aber auch in einer Geraden mit  $T'$  und mit der senkrechten Projection von  $P$  auf die  $v$ .<sup>4</sup>

Wählen wir die  $v$ , so dass  $T_1 P$  parallel zur  $t$  ist, dann fällt die Projection von  $P$  auf die  $v$  nach  $T_1$  und es ist  $T_1 N$  senkrecht zur  $FT$ . Damit haben wir die bekannteste der Krümmungsmittelpunkteconstructionen für die Centralkegelschnitte als speciellen Fall der vorstehenden allgemeineren Construction nachgewiesen.

Die windschiefen Flächen, welche uns im letzten Abschnitte beschäftigen sollen, mögen die  $y$ -Achse zur geraden Leitlinie besitzen und den Kegel  $Z^{\mu-1} Y = X^\mu$  als Richtkegel haben. Durch Elimination von  $Z - z$  aus

$$(Z - z)^{\mu-1} (Y - y) = (X - x)^\mu \quad \text{und} \quad Z - z = \frac{z}{x} (X - x)$$

ergibt sich alsdann

$$\frac{X - x}{Y - y} = \left(\frac{z}{x}\right)^{\mu-1}$$

und daher die Differentialgleichung

$$z^{\mu-1} dx + x^{\mu-1} dy = 0.$$

Machen wir hierin die Substitution

$$z^{\mu-1} = k x^{\mu-1} \frac{a^\rho x^\sigma}{y^{\rho+\sigma}},$$

so geht die Gleichung über in

$$k a^\rho x^\sigma dx + y^{\rho+\sigma} dy = 0,$$

deren Integral, wenn nicht  $\sigma = -1$ , oder  $\rho + \sigma = -1$ , oder  $\rho = 0$  und gleichzeitig  $\sigma = -1$  ist, durch

$$k \frac{a^\rho x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$$

dargestellt wird.

Heißt nun  $T^* (x, y, z)$  ein Punkt auf der Fläche  $F$   $z^{\mu-1} = k a^\rho \frac{x^{\sigma+m-1}}{y^{\rho+\sigma}}$ , dessen Projection  $T(x, y)$  auf die  $xy$ -Ebene

der Curve  $C \left( k \frac{a^{\sigma} x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\sigma+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.} \right)$  angehört, so ist die die  $y$ -Achse schneidende Erzeugende  $n^*$  des Kegels

$$K((Z-z)^{\mu-1} (Y-y) = (X-x)^{\mu})$$

eine Erzeugende unserer windschiefen Fläche  $W$  und die Projection von  $n^*$  auf die  $xy$ -Ebene fällt in die Normale  $n$  im Punkte  $T$  der  $C$ . Bezeichnen wir die  $y$ -Achse der Kürze halber mit  $p$  und nennen wir  $P$  ihren Schnittpunkt mit der  $n$ , dann bedeutet  $p$  zugleich die Schnittlinie der Tangentialebene an  $W$  im Punkte  $P$ . Die Schnittlinie  $q$  der  $xy$ -Ebene und der asymptotischen Ebene der  $n^*$  — der Tangentialebene an  $W$  im Punkte  $Q_{\infty}^*$  von  $n^*$ , dessen Projection in den unendlich fernen Punkt  $Q_{\infty}$  von  $n$  fällt — lässt sich, da jene Ebene als Tangentialebene längs  $n^*$  an den Kegel  $K$  zugleich auch Tangentialebene ist an den parallelen Kegel  $K'$  mit der Spitze in  $P$  und zwar längs der beiden Kegeln gemeinsamen Erzeugenden  $n^*$ , wie folgt construieren.

Wir bemerken, dass die durch den Punkt  $T^*$  gehende Curve  $(\xi = x, \zeta^{\mu-1} (\eta - \eta_0) = x^{\mu})$  — unter  $\eta_0$  die Ordinate von  $P$  verstanden — die Schnittlinie von  $K'$  mit der Ebene  $\xi = x$  darstellt. Die Tangente in  $T^*$  an jene Curve ist also eine Kegeltangente, und wir brauchen daher zur Bestimmung von  $q$  nur den Schnittpunkt jener Tangente mit der  $xy$ -Ebene oder mit der Geraden  $\xi = x$  aufzusuchen und den gefundenen Punkt mit  $P$  zu verbinden. Der fragliche Punkt ergibt sich aber als jener Punkt der  $\xi = x$ , welcher von der  $\eta = \eta_0$  der Größe und dem Zeichen nach die  $\mu$ -fache Entfernung des Punktes  $T$  von derselben Geraden besitzt.

Wir können weiters die Schnittlinie  $t'$  der  $xy$ -Ebene und der Tangentialebene an die  $W$  im Punkte  $T^*$  auf folgende Art construieren. Wir ermitteln zu dem Zwecke den Schnittpunkt  $T'$  der  $xy$ -Ebene und der Tangente in  $T^*$  an derjenigen Curve der Fläche  $F$ , deren Projection die Curve  $C$  ist. Diese Tangente liegt in der Tangentialebene an die  $F$  in  $T^*$  und hat die Tangente  $t$  an die  $C$  in  $T$  zur Projection. Nun lässt sich jene Tangentialebene aber festlegen als Verbindungsebene der Curventangenten in  $T^*$  an die beiden Curven:

$$\xi = x, \zeta^{\mu-1} \eta^{\sigma+\sigma} = k a^{\sigma} x^{\sigma+\mu-1}$$

oder

$$\zeta^{\left(\frac{\mu-1}{\sigma+\sigma}+1\right)-1} \eta = (k a^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma+\sigma}} x^{\frac{\sigma+\mu+1}{\sigma+\sigma}}$$

und

$$\eta = y, \zeta^{\mu-1} \xi^{-\sigma-\mu+1} = k a^{\sigma} y^{-\sigma-\mu}$$

oder

$$\zeta^{\left(\frac{\mu-1}{-\sigma-\mu+1}+1\right)-1} \xi = (k a^{\sigma})^{\frac{1}{-\sigma-\mu+1}} y^{\frac{\sigma+\sigma}{\sigma+\mu-1}}.$$

Die Schnittlinie der fraglichen Tangentialebene mit der  $xy$ -Ebene ergibt sich als Verbindungslinie der Schnittpunkte der  $xy$ -Ebene mit jenen Tangenten. Es sind dies bezw. die Punkte:

$$M_1 \left( \xi = x, \eta = \left( \frac{\mu - 1}{\rho + \sigma} + 1 \right) y \right), M_2 \left( \eta = y, \xi = \left( \frac{\mu - 1}{-\sigma - \mu + 1} + 1 \right) x \right).$$

Der Schnittpunkt  $T'$  der  $t$  und der Verbindungslinie  $M_1 M_2$  gibt endlich mit  $P$  verbunden die  $t'$ .

Aus dem Gesagten erhellt nun zur Genüge die Richtigkeit des Satzes:

„Sind  $T, N$  ein Punkt und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt der Curve  $k$   $\frac{a^2 x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$ , sind  $t, n$  die Tangente und die Normale in  $T$ , heißt  $p$  die  $y$ -Achse,  $P$  der Schnittpunkt von  $n$  und  $p$ ,  $Q_\infty$  der unendlich ferne Punkt von  $n$ ,  $q$  die Verbindungslinie von  $P$  mit demjenigen Punkte auf der zur  $p$  durch  $T$  gezogenen Parallelen, welcher von der durch  $P$  geführten Parallelen zur  $x$ -Achse  $\mu$ -mal soweit entfernt ist als  $T$ , bedeutet ferner  $T'$  den Schnittpunkt von  $t$  mit der Verbindungslinie jener zwei Punkte  $M_1, M_2$ , von denen der eine  $-M_1-$  von der  $y$ -Achse ebensoweit, von der  $x$ -Achse aber  $\frac{\rho+\sigma+\mu-1}{\rho+\sigma}$ -mal so weit entfernt ist als  $T$ , während die Entfernung des anderen  $-M_2-$  von der  $x$ -Achse mit der von  $T$  übereinstimmt, hingegen seine Entfernung von der  $y$ -Achse das  $\frac{\sigma}{\sigma+\mu-1}$ -fache der Entfernung des Punktes  $T$  von derselben Achse ausmacht, dann besteht, wenn schließlich noch die  $P T'$  mit  $t'$  bezeichnet wird, die Doppelverhältnissgleichheit  $(T N P Q_\infty) = (t' n p q)$ . Es trifft also u. a. die durch  $T$  gezogene Parallele zur  $y$ -Achse die  $t'$  in einem Punkte, welcher mit  $N$  auf einer zur  $q$  Parallelen liegt.“

Wir bemerken, dass in der Gleichung unserer Curve  $\mu$  nicht vorkommt. Ziehen wir die durch  $\mu$  eindeutig bestimmte Gerade  $q$  durch  $P$  beliebig, so entsprechen ihr eindeutig zwei Punkte  $M_1, M_2$ . Beschreibt  $q$  das Büschel  $(P)$ , dann beschreiben  $M_1, M_2$  zwei perspective Reihen. Denn wir haben als Träger der beiden Reihen  $(M_1), (M_2)$  bezw. die Geraden  $\xi = x, \eta = y$ , wenn  $x, y$  die Coordinaten von  $T$  sind, und, da  $M_1, M_2$  die Coordinaten besitzen

$$M_1 \left( \xi_1 = x, \eta_1 = \mu_1 y = \frac{\rho + \sigma + \mu - 1}{\rho + \sigma} y \right), \\ M_2 \left( \xi_2 = \mu_2 x = \frac{\sigma}{\sigma + \mu - 1} x, \eta_2 = y \right),$$

so ergeben sich hieraus für  $\mu = 1$  die Werte  $(\xi_1 = x, \eta_1 = y)$ ,  $(\xi_2 = x, \eta_2 = y)$ , d. h.  $M_1$  und  $M_2$  fallen für  $\mu = 1$  in den Schnittpunkt  $T$  der Träger der Reihen  $(M_1), (M_2)$ .



Wir bestimmen das Perspectivitätscentrum  $\Sigma$  der beiden Reihen.

Die Gerade  $M_1 M_2$  hat die Gleichung:

$$\frac{Y - \mu_1 y}{X - x} = \frac{(\mu_1 - 1) y}{(1 - \mu_2) x} \text{ oder}$$

$$(\mu_1 - 1) y X + (\mu_2 - 1) x Y = x y (\mu_1 \mu_2 - 1)$$

oder nach Einführung der Werte für  $\mu_1, \mu_2$ :

$$\frac{\mu - 1}{\rho + \sigma} y Y - \frac{\mu - 1}{\sigma + \mu - 1} x Y =$$

$$= x y \frac{(\rho + \sigma + \mu - 1) \sigma - (\sigma + \mu - 1)(\rho + \sigma)}{(\rho + \sigma)(\sigma + \mu - 1)} = -x y \frac{\rho(\mu - 1)}{(\rho + \sigma)(\sigma + \mu - 1)},$$

welche Gleichung nach Unterdrückung des Factors  $(\mu - 1)$  geschrieben werden kann:

$$(\sigma + \mu - 1) y X - (\rho + \sigma) x Y = -\rho x y.$$

Setzen wir  $X = 0$ , so wird  $Y = \frac{\rho y}{\rho + \sigma}$  von  $\mu$  unabhängig,  
d. h.  $\Sigma$  hat die Coordinaten

$$\Sigma \left( X = 0, Y = \frac{\rho}{\rho + \sigma} y \right)$$

und liegt daher auf der  $y$ -Achse.

Die Perspectivität der Reihen  $(M_1), (M_2)$  bedingt jetzt unmittelbar die Projectivität des Büschels  $(P)$  der Strahlen  $q$  und des Büschels  $(\Sigma)$  der Strahlen  $M_1 M_2$  oder  $\Sigma T''$ . Die Büschel sind aber ebenfalls perspectiv, da sie den Strahl  $\Sigma P$  (oder  $p$ ) entsprechend gemein haben. (Er entspricht dem Parameterwert  $\mu = \infty$ ). Ihre Perspectivitätsachse  $\Pi$  construieren wir, indem wir für einen geeigneten  $\mu$ -Wert die zugehörigen Strahlen  $q$  und  $M_1 M_2$  aufsuchen und deren Schnittpunkt mit  $T$  verbinden. Am zweckmäßigsten dürften die Werte  $\mu = 1 - \rho - \sigma$  und  $\mu_2 = 1 - \sigma$  sein, für welche bezw.  $\mu_1 = 0, \mu_2 = \infty$  wird.

Mit Rücksicht auf das Dargelegte können wir nun den obigen Satz für unsere Curven wie folgt modificieren:

„Verzeichnet man auf  $y$ -Achse den Punkt  $\Sigma$  mit der Ordinate  $\frac{\rho}{\rho + \sigma} y$ , wo  $y$  die Ordinate von  $T$  bedeutet, verbinden ihn mit der Projection von  $T$  auf die  $x$ -Achse (oder ziehen durch ihn die Parallele zur  $x$ -Achse) und bringen die erhaltene Linie zum Schnitte mit der durch  $P$  gezogenen Linie nach jenem Punkte auf der durch  $T$

geführten Parallelen zur  $y$ -Achse, der von der durch  $P$  gehenden Parallelen zur  $x$ -Achse die  $(1 - \rho - \sigma)$ -fache (bzw. die  $(1 - \sigma)$ -fache) Entfernung des Punktes  $T$  von der nämlichen Geraden besitzt, dann liegt jeder der gefundenen Schnittpunkte mit  $T$  auf einer Geraden  $\Pi$  von der Eigenschaft, dass, wenn man einen beliebigen Punkt  $M$  auf  $\Pi$  mit  $\Sigma$  verbindet, den Schnittpunkt von  $t$  und von  $\Sigma M$  mit  $T'$  bezeichnet, ferner die Linien  $PM$  oder  $q$  und  $PT'$  oder  $t'$  zieht, die Doppelverhältnissgleichheit  $(TNPQ_\infty) = (t'n p q)$  besteht.“

Ein besonderes Interesse beanspruchen diejenigen Curven, deren Gleichung aus unserer allgemeinen Curvengleichung hervorgeht, wenn die Integrationsconstante gleich Null erachtet wird. Die Gleichung lautet alsdann:

$$k a^{\sigma} \frac{x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = 0.$$

Setzen wir  $\frac{\sigma+1}{\rho+\sigma+1} = -l$ , so kann die Gleichung auf die Form  $x^l y = \text{Const.}$  gebracht werden; wir haben es daher mit höheren Parabeln und Hyperbeln zu thun.

Wegen  $\frac{\sigma+1}{\rho+\sigma+1} = -l$  können wir bei gegebenem  $l$  etwa noch  $\sigma$  beliebig wählen und haben für  $\rho$  zu setzen:  $\rho = \frac{-(l+1)(\sigma+1)}{l}$ . Die Ordinate des Punktes  $\Sigma$ , d. i.  $\frac{\rho}{\rho+\sigma} y$ , hat mithin hier den Wert:  $\frac{(l+1)(\sigma+1)}{l+1+\sigma} y$ . Jedem Wert von  $\sigma$  entspricht daher ein bestimmter Punkt  $\Sigma$  auf der  $y$ -Achse und umgekehrt. Ebenso entspricht nun aber auch ein-eindeutig jedem Punkte  $\Sigma$  eine bestimmte Gerade  $\Pi$ . Demnach besteht zwischen der Reihe ( $\Sigma$ ) und dem Büschel ( $\Pi$ ) mit dem Centrum  $T$  Projectivität. Um diese projective Beziehung näher zu erforschen, wählen wir für  $\sigma$  etliche besondere Werte.

Setzen wir  $\sigma = -l - 1$ , dann rückt  $\Sigma$  ins Unendliche und  $\rho$  hat den Wert  $l + 1$ . Daher haben wir zur Construction der zugeordneten  $\Pi$  mit Benützung des Wertes  $\mu = 1 - \sigma = 2 + l$ , wozu  $\mu_2 = \infty$  gehört, bloß durch  $T$  zur entsprechenden Geraden  $q$  die Parallele  $\Pi$  zu ziehen.

$\Sigma$  fällt mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammen, wenn  $\sigma = -1$  (also  $\rho = 0$ ) ist. Die zugehörige  $\Pi$  ergibt sich als Verbindungslinie von  $T$  mit dem Halbierungspunkte der vom Coordinatenanfangspunkte und vom Schnittpunkte der Normalen  $n$  und der  $x$ -Achse begrenzten Strecke.

Wir bemerken weiters, dass  $\Sigma$  mit dem Schnittpunkte der Tangente und der  $y$ -Achse coïncidiert für  $\sigma = \infty$ , denn die Ordinate

von  $\Sigma$  nimmt hierfür den Wert  $(l+1)y$  an. Da die zugeordnete  $\Pi$  in diesem Falle mit der Tangente zusammenfällt, so ist jener Schnittpunkt demnach ein Doppelpunkt der beiden conjectiven Reihen auf der  $y$ -Achse, welche aus der Reihe ( $\Sigma$ ) und dem Schnitte des Büschels der  $\Pi$  besteht. Man sieht jetzt leicht ein, dass der zweite Doppelpunkt nothwendig mit dem Punkte  $P$  übereinstimmt, und mit Rücksicht hierauf genügt die Kenntniss eines einzigen Paares  $\Sigma, \Pi$ , um zu jedem Punkte  $\Sigma$  die zugehörige  $\Pi$ , oder umgekehrt zu jeder  $\Pi$  den entsprechenden Punkt  $\Sigma$  construieren zu können.

U. a. darf man so verfahren:

„Man ziehe durch den Coordinatenanfangspunkt die Parallele zur  $n$  und verbinde den Schnittpunkt der  $t$  und der  $y$ -Achse mit dem Schnittpunkte jener Parallelen und der durch  $T$  nach dem Halbierungspunkte der vom Coordinatenanfangspunkte und von dem in der Normalen gelegenen Punkte der  $x$ -Achse begrenzten Strecke. Durch den Schnittpunkt irgend einer  $\Pi$  mit der erhaltenen Verbindungslinie ziehe man alsdann die Parallele zur  $n$  und erhält in ihrem Schnitte mit der  $y$ -Achse den zu jener  $\Pi$  gehörigen Punkt  $\Sigma$ .“

Wir wenden die gefundenen Sätze nun auf Kegelschnitte an.

Setzen wir zunächst in der allgemeinen Gleichung ( $k a^2 \frac{x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$ )  $\sigma+1=2$  und  $\rho+\sigma+1=2$ , also  $\rho=0$ ,  $\sigma=1$ , so geht sie über in die Gleichung eines Centralkegelschnittes, dessen Achsen in die Coordinatenachsen fallen. Die Punkte  $\Sigma, M_1, M_2$  haben die Coordinaten:

$$\Sigma (X=0, Y=\frac{\rho}{\rho+\sigma}y=0), M_1 (\xi_1=x, \eta_1=\frac{\rho+\sigma+\mu-1}{\rho+\sigma}y=\mu y),$$

$$M_2 (\xi_2=\frac{\sigma}{\sigma+\mu-1}x=\frac{1}{\mu}x, \eta_2=y).$$

$\Sigma$  ist also der Mittelpunkt des Kegelschnittes und als Perspectivitätsachse  $\Pi$  finden wir die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $T$ .

„Wählt man daher auf der durch einen Punkt  $T$  eines Centralkegelschnittes gezogenen Parallelen zur  $\left. \begin{matrix} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{matrix} \right\}$  achse einen beliebigen Punkt  $M$ , verbindet ihn mit dem Mittelpunkte  $\Sigma$  und mit dem Schnittpunkt  $P$  der Normalen  $n$  in  $T$  mit der  $\left. \begin{matrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{matrix} \right\}$  achse, bringt erstere Verbindungslinie in  $T'$  zum Schnitte mit der Tangente  $t$  des Punktes  $T$ , verbindet  $T'$  mit  $P$  und zieht durch den Schnittpunkt der  $PT'$  und der durch  $T$  gelegten Parallelen zur  $\left. \begin{matrix} \text{Neben} \\ \text{Haupt} \end{matrix} \right\}$  achse

die Parallele zur  $PM$ , so liegt in dieser Parallelen der Krümmungsmittelpunkt  $N$ .“

Durch zweckmäßige Specialisierung der Lage von  $M$  ergeben sich hieraus mannigfaltige noch einfachere Relationen, die uns zum Theil schon an anderer Stelle begegnet sind. Hervorgehoben werde hier nur der folgende leicht zu beweisende Specialsatz:

„Zieht man durch den beliebigen Punkt  $T$  eines Centralkegelschnittes die Geraden  $\Pi, \Pi'$  parallel zu der Haupt-, bezw. der Nebenachse und verbindet den Krümmungsmittelpunkt  $N$  der Stelle  $T$  mit dem Centrum  $\Sigma$  des Kegelschnittes, dann schneidet die  $\Sigma N$  die Geraden  $\Pi, \Pi'$  in zwei Punkten, welche in ihren Verbindungslinien mit bezw. den Schnittpunkten der Normalen  $n$  und der Neben- und Hauptachse zwei parallele Gerade liefern. Die zu diesen beiden Parallelen durch  $N$  gezogene Parallele trifft hinwiederum  $\Pi, \Pi'$  in zwei Punkten, die resp. mit den Schnittpunkten von  $n$  und der Haupt- und Nebenachse verbunden zwei mit  $\Sigma N$  im nämlichen Punkte der Tangente in  $T$  zusammenlaufende Linien bestimmen.“

Die Substitutionen  $\sigma + 1 = 1, \rho + \sigma + 1 = 2$  ( $\rho = 1, \sigma = 0$ ) überführen die Integralgleichung in die Gleichung einer Parabel, deren Achse die  $x$ -Achse ist. Wir finden:  $\Sigma (X = 0, Y = y), M_1 (\xi_1 = x, \eta_1 = \mu \eta), M_2 (\xi_2 = 0, \eta_2 = y)$ .

„Ist daher  $T$  ein Punkt einer Parabel,  $\Sigma$  irgend ein Punkt auf der durch  $T$  zur Parabelachse gezogenen Parallelen und  $P$  der Schnittpunkt der Normalen  $n$  in  $T$  mit der durch  $\Sigma$  gehenden Achsennormalen, dann trifft die durch  $P$  gelegte Achsenparallele die Verbindungslinie von  $\Sigma$  mit der Projection von  $T$  in die Parabelachse in einem Punkte, der mit  $T$  verbunden die zu  $\Sigma$  gehörige  $\Pi$  liefert. Wählt man auf  $\Pi$  irgend einen Punkt  $M$ , verbindet ihn mit  $\Sigma$ , nennt  $T$  den Schnittpunkt der  $\Sigma M$  und der Tangente  $t$  in  $T$ , dann schneidet die  $PT'$  die durch  $T$  gelegte Achsennormale in einem Punkte, welcher mit dem Krümmungsmittelpunkte  $N$  auf einer Parallelen zur  $PM$  liegt.“

Am einfachsten wird diese Construction, wenn  $\Sigma$  so angenommen ist, dass seine Projection in die Achse in deren Schnittpunkt mit der Normalen  $n$  fällt. Wenn aber  $\Sigma$  mit  $N$  in einer Achsennormalen liegt, dann coïncidiert  $\Pi$  nothwendig mit der Tangente  $t$  und man hat den Satz:

„Zieht man durch  $N$  die Achsenparallele und verbindet deren Schnittpunkt mit der Tangente  $t$  mit dem Schnittpunkte  $\Sigma$  der Achsennormalen durch  $N$  und der Achsenparallelen durch  $T$ , so erhält man eine durch die Projection von  $T$  in die Achse gehende Linie.“

Die Ableitung einer einfachen Krümmungsmittelpunkt-Construction auf Grund dieses Satzes überlassen wir dem Leser und übergehen sogleich zur Discussion des Ergebnisses der Einsetzungen:  $\sigma + 1 = 2, \rho + \sigma + 1 = 1$  ( $\rho = -1, \sigma = 1$ ). Hiefür erhalten wir

die Gleichung einer Parabel, welche die Ordinatenachse zur Achse besitzt. Es ergibt sich:  $\Sigma(X=0, Y=\infty)$ ,  $M_1(\xi_1=x, \eta_1=\infty)$ ,  $M_2(\xi_2=\frac{1}{\mu}x, \eta_2=y)$ .  $\Sigma$  ist daher der unendlichferne Punkt der Parabel und die Gerade  $\Pi$  stellt sich als die durch  $T$  gezogene Normale auf die Parabelachse heraus.

„Zieht man also durch einen Punkt  $T$  einer Parabel die Normale  $\Pi$  zur Achse, wählt auf  $\Pi$  einen beliebigen Punkt  $M$ , legt durch ihn die Parallele zur Achse und verbindet deren Schnittpunkt  $T'$  mit der Tangente mit dem Schnittpunkt  $P$  der Normalen  $n$  und der Achse, dann geht die Parallele zur  $PM$ , welche den Schnittpunkt der  $PT'$  und der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur Achse enthält, durch  $N$ .“

Die Integralgleichung würde ebenfalls noch Parabeln darstellen, wenn  $\sigma+1=\frac{1}{2}$ ,  $\rho+\sigma+1=1$  oder  $\sigma+1=1$ ,  $\rho+\sigma+1=\frac{1}{2}$  oder endlich  $\sigma+1=\frac{1}{2}$ ,  $\rho+\sigma+1=\frac{1}{2}$  gewählt würde.

Die hierauf zu gründenden, nicht sonderlich einfachen Sätze mögen hier unterdrückt werden. Der Vollständigkeit halber sei schließlich bemerkt, dass für  $\sigma+1=\rho+\sigma+1=-1$  eine gleichseitige Hyperbel resultiert, desgleichen für  $\sigma+1=1$ ,  $\rho+\sigma+1=-1$  und für  $\sigma+1=-1$ ,  $\rho+\sigma+1=1$ . Von der leicht zu bewerkstellenden Ableitung der bezüglichlichen Sätze wollen wir indessen auch in diesen Fällen absehen, denn wir erhalten umfassendere Sätze für die gleichseitige Hyperbel und für die Parabel, wenn wir die specielle Integralgleichung  $x^l y = \text{Const.}$  benutzen.

Ist  $l=+1$ , so liegt die gleichseitige Hyperbel vor und wir haben:

$$\Sigma\left(X=0, Y=\frac{(l+1)(\sigma+1)}{l+1+\sigma}y=\frac{2(\sigma+1)}{2+\sigma}y\right),$$

$$M_1\left(\xi_1=x, \eta_1=\frac{\rho+\sigma+\mu-1}{\rho+\sigma}y=\frac{\sigma+3-\mu}{\sigma+2}y\right),$$

$$M_2\left(\xi_2=\frac{\sigma}{\sigma-1+\mu}x, \eta_2=y\right),$$

$$\text{wegen } \rho=-\frac{(l+1)(\sigma+1)}{l}=-2(\sigma+1).$$

Für  $\sigma=-1$  fällt  $\Sigma$  in den Koordinatenanfangspunkt (den Mittelpunkt der Hyperbel und die zugehörige  $\Pi$  ist jene durch  $T$  gezogene Gerade, welche die vom Mittelpunkte und vom Schnittpunkte der  $x$ -Achse (einer Asymptoten der Curve) mit der Normalen  $n$  begrenzten Strecke halbiert. Da hier offenbar die  $x$ -Achse mit

der  $y$ -Achse vertauscht werden kann, so dürfen wir folgenden Satz aussprechen:

„Nennen wir  $A_1, A_2$  die beiden Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel,  $\Sigma_0$  den Mittelpunkt,  $S_1, S_2$  die Schnittpunkte der Tangente  $t$  im Punkte  $T$  der Curve mit  $A_1$ , resp.  $A_2$ ,  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  in  $T$  mit  $A_1$ , bzw.  $A_2$  und sind  $\Pi_0^{(1)}, \Pi_0^{(2)}$  die Verbindungslinien von  $T$  mit den Halbierungspunkten der Strecken  $\Sigma_0 P_2, \Sigma_0 P_1$ , dann schneidet die Verbindungslinie  $\Sigma_0 T'$  von  $\Sigma_0$  mit irgend einem Punkte  $T'$  der  $t$  die Geraden  $\Pi_0^{(1)}, \Pi_0^{(2)}$  in zwei Punkten  $M_0^{(1)}, M_0^{(2)}$ , denen die Eigenschaft zukommt, dass die Parallelen zu ihren Verbindungslinien mit  $P_1$ , resp.  $P_2$  ( $M_0^{(1)} P_1, M_0^{(2)} P_2$ ) durch bzw. die Schnittpunkte von  $P_1 T'$  mit der durch  $T$  gezogenen Parallelen zur  $A_1$  und von  $P_2 T'$  mit der durch denselben Punkt geführten Parallelen zur  $A_2$  den Krümmungsmittelpunkt  $N$  enthalten. Zieht man weiters durch  $\Sigma_0$  die Parallele zur Normalen  $n$  und verbindet die Schnittpunkte von  $\Pi_0^{(1)}, \Pi_0^{(2)}$  und dieser Parallelen mit  $S_1$ , bzw.  $S_2$ , so erhält man zwei Linien  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ , welche von irgend einer durch  $T$  gezogenen Geraden  $\Pi$  in zwei Punkten  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  geschnitten werden und zwar derart, dass, wenn  $\Sigma_1, \Sigma_2$  die Schnittpunkte der zur Normalen  $n$  durch  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  geführten Parallelen mit bzw.  $A_1$  und  $A_2$  bedeuten,  $\Sigma_1$  und  $\Pi$  ( $\Sigma_2$  und  $\Pi$ ) zur Construction von  $N$  in derselben Weise verwendet werden können wie  $\Sigma_0$  und  $\Pi_0^{(1)}$  ( $\Sigma_0$  und  $\Pi_0^{(2)}$ ).“

Jedem Strahle  $\Pi$  durch  $T$  entsprechen dargestellt ein Punkt  $\Sigma_1$  auf  $A_1$  und ein Punkt  $\Sigma_2$  auf  $A_2$ . Die Verbindungslinien  $\Sigma_1 \Sigma_2$  umhüllen einen Kegelschnitt, welcher u. a.  $A_1, A_2, t, n$  und wie eine nähere Untersuchung zeigt, auch die durch den Schnittpunkt von  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  gehenden Verbindungslinie der Halbierungspunkte der Strecken  $\Sigma_0 P_1, \Sigma_0 P_2$  zu Tangenten besitzt. Weiter auf diesen Kegelschnitt einzugehen, der eine Reihe interessanter Beziehungen aufweist, liegt nicht im Plane dieser Arbeit.

Wir setzen jetzt in  $x^l y = \text{Const.}$  für  $l \dots -\frac{1}{2}$  und erhalten so die Gleichung einer Parabel, welche die  $x$ -Achse zur Achse und die  $y$ -Achse zur Scheiteltangente hat. Wir finden wegen  $\rho = \sigma + 1$ :

$$\Sigma \left( X=0, Y=\frac{\sigma+1}{2\sigma+1} y \right), M_1 \left( \xi_1=x, \eta_1=\frac{2\sigma+\mu}{2\sigma+1} y \right), \\ M_2 \left( \xi_2=\frac{\sigma}{\sigma-1+\mu} x, \eta_2=y \right).$$

Für  $\sigma = -1$  fällt  $\Sigma$  in den Koordinatenanfangspunkt, den Scheitel  $\Sigma_0$  der Parabel. Die zugehörige  $\Pi_0$  verbindet  $T$  mit dem Halbierungspunkte der von  $\Sigma_0$  und dem Schnittpunkte der Normalen

$n$  mit der Parabelachse begrenzten Strecke. Die Parallele zur  $n$  durch  $\Sigma_0$  trifft  $\Pi_0$  in einem Punkte, den wir mit dem Schnittpunkte der Tangente  $t$  und der Scheiteltangente zur Geraden  $\mathfrak{P}$  verbinden. Zieht man durch  $T$  irgend eine  $\Pi$ , dann trifft die durch ihren Schnittpunkt mit der  $\mathfrak{P}$  zur Normalen  $n$  parallel geführte Linie die Scheiteltangente in dem zur  $\Pi$  gehörigen Punkt  $\Sigma$ .

Für  $l = -2$  erhalten wir ebenfalls eine Parabel. Diese hat aber jetzt die  $x$ -Achse zur Scheiteltangente und die  $y$ -Achse zur Achse. Wir bekommen wegen  $\rho = -\frac{\sigma+1}{2}$ :

$$\Sigma \left( X=0, Y=\frac{\sigma+1}{\sigma-1}y \right), M_1 \left( \xi_1=x, \eta_1=\frac{\sigma-1+2(\mu-1)y}{\sigma-1} \right), \\ M_2 \left( \xi_2=\frac{\sigma}{\sigma-1+\mu}x, \eta_2=y \right).$$

$\sigma = -1$  liefert auch hier den Scheitel  $\Sigma_0$  als Punkt  $\Sigma$  und die zugehörige  $\Pi_0$  verbindet  $T$  mit dem Halbierungspunkt der von  $\Sigma_0$  und dem Schnittpunkte der Normalen  $n$  mit der Scheiteltangente begrenzten Strecke. Die Perspektivitätsachse  $\mathfrak{P}$ , die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangente  $t$  und der Parabelachse mit dem Schnittpunkte der  $\Pi_0$  und der durch  $\Sigma_0$  gezogenen Parallelen zur  $n$ , ergibt sich als zur Scheiteltangente parallele Gerade, denn für  $\sigma=1$  ist  $\Sigma$  der unendlichferne Punkt  $\Sigma_\infty$  der Achse und die zugehörige  $\Pi_\infty$  fällt (wegen  $\xi_2 = \frac{1}{\mu}x$ ) mit der durch  $T$  gehenden Parallelen zur Scheiteltangente zusammen.

Wir können jetzt unter einem den Satz aufstellen:

„Schneidet die Tangente  $t$  im Punkt  $T$  einer Parabel die Scheiteltangente  $\mathfrak{T}$  und die Achse  $\mathfrak{A}$  bzw. in  $S_1, S_2$ , sind dagegen  $P_1, P_2$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  in  $T$  mit denselben Geraden, so trifft die durch den Scheitel  $\Sigma_0$  gezogene Parallele zur  $n$  die Verbindungslinien von  $T$  mit den Halbierungspunkten der Strecken  $\Sigma_0 P_2, \Sigma_0 P_1$  in zwei Punkten, deren Verbindungslinien mit bzw.  $S_1, S_2$  die Geraden  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  sind, von denen  $\mathfrak{P}_2$  parallel zur  $\mathfrak{T}$  läuft, und welchen die Eigenschaft zukommt, dass jede durch  $T$  gelegte Gerade  $\Pi$  mit ihnen zwei Punkte gemein hat von der Beschaffenheit, dass die durch sie gelegten Parallelen zur  $n$  die  $\mathfrak{T}$ , resp die  $\mathfrak{A}$  in den zu  $\Pi$  gehörigen Punkten  $\Sigma_1, \Sigma_2$  treffen. D. h.: Verbindet man irgend einen Punkt  $T''$  auf  $t$  mit  $\Sigma_1$  und mit  $\Sigma_2$ , bestimmt die Schnittpunkte  $M^{(1)}, M^{(2)}$  von  $\Pi$  mit den Linien  $\Sigma_1 T'', \Sigma_2 T''$ , verbindet weiters  $P_1$  und  $P_2$  mit  $T''$  und zieht endlich durch die Schnittpunkte von  $P_1 T'', P_2 T''$  mit bzw. den durch  $T$  parallel zur  $\mathfrak{T}$  und zur  $\mathfrak{A}$  gezogenen Linien die Parallelen zu  $P_1 M^{(1)}$ , resp.  $P_1 M^{(2)}$ , so erhält man zwei im Krümmungsmittelpunkte  $N$  sich schneidende Geraden.“

Wiederum umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare  $\Sigma_1, \Sigma_2$  einen Kegelschnitt, welcher u. a. die Geraden  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, t, n$  und Verbindungsgerade der Halbierungspunkte der Strecken  $\Sigma_0 P_1, \Sigma_0 P_2$  zur Tangenten besitzt. Letztere Verbindungsgerade geht insbesondere durch den Schnittpunkt  $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ . Auf weitere Einzelheiten lassen wir uns indessen auch hier nicht ein. Dagegen möge die Bemerkung Platz finden, dass der vorstehende Satz, wenn wir statt  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$  schlechthin  $x$ -Achse, bezw.  $y$ -Achse schreiben, allgemeine Gültigkeit für jede Curve von der Gleichung  $x^l y = \text{Const.}$  erhält. Selbstverständlich ist jedoch nur für die Parabel  $x^{-2} y = \text{Const.}$  die  $\mathfrak{P}_2$  zur  $x$ -Achse parallel.

Wir kommen jetzt dazu, die oben bei Aufstellung unserer Integralgleichung  $k a^{\sigma} \frac{x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$  nothwendig gemachten Voraussetzungen, es sei weder  $\sigma+1$ , noch  $\rho+\sigma+1$  gleich Null, fallen zu lassen. Nehmen wir zunächst an,  $\sigma+1$  sowohl, als auch  $\rho+\sigma+1$  wäre der Null gleich, dann lautet die Differentialgleichung

$$k \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Das Integral ist die Gleichung der höheren Parabeln und Hyperbeln. Wesentlich neue Resultate ergeben sich indessen auf Grund dieser speciellen Wertebestimmung für  $\rho$  und  $\sigma$  nicht.

Setzen wir dagegen bloß  $\sigma+1=0$ , aber  $\rho+\sigma+1 \neq 0$  voraus, so geht die vorgelegte Differentialgleichung über in:

$$k a^{\sigma} \frac{dx}{x} + y^{\sigma-1} dy = 0,$$

deren Integral nun von der Form

$$x = c e^{\gamma y^{\sigma}}$$

ist. Analog erhalten wir für  $\sigma+1 \neq 0$ ,  $\rho+\sigma+1=0$  die Differentialgleichung

$$k a^{\sigma} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} + \frac{dy}{y} = 0,$$

welcher ein Integral von der Form

$$y = c e^{\gamma x^{-\sigma}}$$

zukommt. Für die durch beide Integralgleichungen dargestellten Exponentialcurven finden offenbar die oben für die Curven



von der Gleichung  $k a^e \frac{x^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \frac{y^{\rho+\sigma+1}}{\rho+\sigma+1} = \text{Const.}$  angegebenen Sätze sinngemäße Anwendung.

Setzen wir beispielsweise für  $\rho$  den Wert 1 in die Gleichung  $x = c e^{\gamma y^e}$ , so ergibt sich

$$x = c e^{\gamma y}$$

die Gleichung der logarithmischen Linie. Wir erhalten alsdann:

$$\Sigma \left( X=0, Y=\frac{\rho}{\rho+\sigma} y=\infty \right), M_1 (\xi_1 = x, \eta_1 = \infty), \\ M_2 \left( \xi_2 = \frac{1}{2-\mu} x, \eta_2 = y \right).$$

Dieselbe Curve resultiert, wenn  $\rho = -1$  in die Gleichung  $y = c e^{\gamma x^{-e}}$  substituiert wird, denn  $y = c e^{\gamma x}$  gibt nach Vertauschung von  $x$  und  $y$ :  $x = c e^{\gamma y}$ . Man erhält in diesem Falle:

$$\Sigma (X=0, Y=y), M_1 (\xi_1 = x, \eta_1 = (2-\mu) y), M_2 (\xi_2 = 0, \eta_2 = y).$$

Die auf Grund dieser Ergebnisse bestehenden Sätze können wir füglich zusammenfassen und sagen:

Schneidet die Normale  $n$  im Punkte  $T(x, y)$  der logarithmischen Linie  $x = c e^{\gamma y}$  die Ordinatenachse im Punkte  $P$ , die Abscissenachse im Punkte  $P'$ , dann gehört zum unendlichfernen Punkte  $\Sigma_\infty$  der  $y$ -Achse eine Gerade  $\Pi$  durch  $T$ , welche parallel ist zur Verbindungslinie von  $P$  mit dem Halbierungspunkte der Strecke  $OP$  ( $O$  der Koordinatenanfangspunkt), und zur Projection  $\Sigma'$  von  $T$  in die  $x$ -Achse gehört eine Gerade  $\Pi'$  durch  $T$ , auf welcher sowohl der Schnittpunkt der durch  $P'$  gehenden Parallelen zur  $y$ -Achse und der Verbindungslinie von  $\Sigma'$  mit dem Punkte  $(\xi = 2x, \eta = y)$ , als auch der Schnittpunkt der Verbindungslinie von  $\Sigma'$  mit der Projection von  $T$  in die  $y$ -Achse und der Verbindungslinie von  $P'$  mit dem Halbierungspunkte von  $OP$  liegen. Verbindet man irgend einen Punkt  $T'$  von  $t$  (der Tangente in  $T$ ) mit  $\Sigma_\infty$  und bringt in  $M$  die Verbindungslinie zum Schnitte mit  $\Pi$ , dann geht die Parallele zu  $P'M$ , welche den Schnittpunkt von  $P'T'$  mit der durch  $T$  gelegten Parallelen zur  $y$ -Achse enthält, durch den Krümmungsmittelpunkt  $N$ .

Wir wählen als zweites und letztes Beispiel die für die Substitution  $\rho = 2$  in die Gleichung  $x = c e^{\gamma y^e}$  resultierende Curve

$x = c e^{\gamma y^2}$ , welche für  $c=1$ ,  $\gamma=-1$  in die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende Curve  $x = e^{-y^2}$  übergeht. Setzen wir gleichzeitig  $\rho = -2$  in die Gleichung  $y = c e^{\gamma x^{-\rho}}$ , so erhalten wir  $y = c e^{\gamma x^2}$ , eine Gleichung, die nach Vertauschung von  $y$  und  $x$  sofort mit der erstgewonnenen identisch wird.

Wir bekommen für  $x = c e^{\gamma y^2}$  für die Punkte  $\Sigma$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  die Coordinatenwerte:

$$\Sigma (X=0, Y=2y), M_1 (\xi_1 = x, \eta_1 = \mu y),$$

$$M_2 \left( \xi_2 = \frac{1}{2-\mu} x, \eta_2 = y \right);$$

dagegen sind dieselben Punkte für  $y = c e^{\gamma x^2}$  bestimmt durch:

$$\Sigma (X=0, Y=2y), M_1 (\xi_1 = x, \eta_1 = (2-\mu)y),$$

$$M_2 \left( \xi_2 = \frac{1}{\mu} x, \eta_2 = y \right).$$

Hiernach gilt der Satz:

„Bedeutet  $P$ ,  $P'$  die Schnittpunkte der Normalen  $n$  im Punkte  $T(x, y)$  der Curve  $x = c e^{\gamma y^2}$ , dann gehören zu den Punkten  $\Sigma (\xi=0, \eta=2y)$ ,  $\Sigma' (\xi=2x, \eta=0)$  zwei Gerade  $\Pi$ ,  $\Pi'$  durch  $T$ , von denen  $\Pi$  durch den Schnittpunkt der durch  $P$  gelegten Parallelen zur  $x$ -Achse und der Verbindungslinie von  $\Sigma$  mit der Projection von  $T$  in die  $x$ -Achse geht, während  $\Pi'$  die durch  $T$  gezogene Parallele zur  $y$ -Achse ist. Im übrigen gilt jetzt dasselbe wie im vorangehenden Satze für die Curve  $x = c e^{\gamma y^2}$ .“

Damit schließen wir unsere Untersuchungen ab. Wir glauben insofern eine gewisse Vollständigkeit erreicht zu haben, als wir die einfachsten Annahmen für die Leitlinien der vorkommenden windschiefen Flächen und die einfachsten Substitutionen in die resultierenden Differentialgleichungen wählten. Wir verhehlen uns aber keineswegs, dass auf Grund der vorgetragenen Principien noch manche bemerkenswerten Resultate zu erzielen sind, wenn andere zweckmäßige Annahmen und Substitutionen gemacht werden.

---

Hinsichtlich der Literatur über den Gegenstand dieser Arbeit verdankt der Verfasser Herrn Prof. J. Sobotka in Wien die folgenden schätzenswerten Mittheilungen. Evoluten als Contourcurven windschiefer Flächen betrachtete bereits der verstorbene tschechische Geometer Fr. Machovec, welcher hierüber ein eigenes in seiner Muttersprache verfasstes Werk schrieb. In deutscher Sprache liegt eine vom selben Verfasser in den Sitzungsberichten

der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1888 veröffentlichte längere Abhandlung über das gleiche Thema vor. Die leitenden Gesichtspunkte der Arbeiten Machovec sind indessen mit der hier benützten nicht congruent. — Dass von den oben gefundenen Sätzen und Constructionen manche nicht neu und einige naheliegende Folgerungen allgemein bekannter Resultate sind, sei ausdrücklich hervorgehoben. Es gilt dies namentlich von den einfacheren Kegelschnittsätzen, die zum Theile auf die Eigenschaften der Steiner'schen Parabel gegründet werden können. Nicht unerwähnt soll endlich bleiben, dass kürzlich Herr Prof. Sobotka auf von dem unsern verschiedenem Wege u. a. auch für die höheren Parabeln und Hyperbeln zahlreiche Sätze über die Krümmungshalbmesser dieser Curven abgeleitet hat.<sup>1)</sup>

Bielitz, im Sommer 1898.

---

<sup>1)</sup> Man vergl.: J. Sobotka: „Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven.“ (Wiener Berichte, Bd. CVII, Abth. IIa, Mai 1898) und „Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plancurven.“ (Prager Berichte v. J. 1898).