

II. Ueber die Axenverhältnisse des Anorthotipes; von Dr. Leander Ditscheiner.

Im C. Bande dieser Annalen habe ich die Formeln angegeben, deren man sich zu bedienen hat, um die Axenverhältnisse eines Hemiorthotipes unmittelbar aus seinen Kantenwinkeln zu berechnen. Ich will nun im Gegenwärtigen den allgemeinsten Fall, der in dieser Beziehung sich ergeben kann, einer näheren Betrachtung unterziehen, und zwar die Aufgabe lösen: die Axenverhältnisse eines Anorthotipes zu berechnen unmittelbar aus seinen Kantenwinkeln.

Das Anorthotip ist bekanntlich die Grundgestalt des anorthotipen Krystallsystemes, und wird von acht ungleichseitigen Dreiecken begränzt, von denen nur je zwei einander parallel congruent sind. Die Axen dieser Gestalt sind in Folge dessen gegeneinander schief gestellt und sämmtlich von verschiedener Länge. Eine derselben wird als Einheit für das zu bestimmende Axenverhältniß angenommen. Die acht Begränzungsflächen eines Anorthotipes bilden sechs verschiedene Kantenwinkel, von denen jedoch nur fünf zur vollständigen Bestimmung desselben nothwendig sind, der sechste wird von diesen selbst bestimmt. Ist in Fig. 1 Taf. IV $ABCB'C'A'$ ein Anorthotip, so sind die sechs verschiedenen Kantenwinkel folgende: α an den Kanten AB und $A'B'$, β an AC und $A'C'$, γ an AB' und $A'B$, δ an AC' und $A'C$, ϵ an BC und $B'C'$ und endlich φ an CB' und BC' . Die Axen sind $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ und $CC' = 2c$ und die Winkel unter denen sich dieselben schneiden $AOB = \psi_1$, $AOC = \psi_2$ und $BOC = \psi_3$. Für den Fall das einer dieser drei Winkel $= 90^\circ$ würde, geht das Anorthotip in das Hemianorthotip über, welches, eine Specialität des ersteren, ebenfalls sechs verschiedene Kantenwinkel besitzt, von denen jedoch nicht mehr als vier zur vollständigen Bestimmung nothwendig sind.

Um unsere Aufgabe möglichst einfach zu lösen, wollen

wir hier die analytische Geometrie des Raumes in Anwendung bringen, und nicht wie wir es beim Hemiorthotipe gethan haben, sie durch Auflösung jener Gleichungen ermöglichen, welche die Kantenwinkel als Function der Axenverhältnisse darstellen.

Wir denken uns nun in dem Mittelpunkte O des Coordinatensystems $Oxyz$ Fig. 2 Taf. IV eine Kugel vom Radius $= 1$ gestellt und ihre Durchschnitte mit den Coordinaten-Axen seyen A, A', B, B' und C, C' ; B sey der Pol eines der acht Dreiecke des Anorthotipes und in der Zone AB liege der Pol einer zweiten Fläche so, daß der Winkel $DOB = 180 - \varepsilon$ ist. Die Coordinaten von B und D sind also

$$B, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad D, \begin{cases} x = -\cos \varepsilon \\ y = 0 \\ z = \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Denken wir uns nun durch den Punkt B und durch D zwei Kugelflächen gelegt, deren Radien den Sehnen der Bogen $180 - \beta$ und γ entsprechen, so wird derjenige Punkt, welcher sowohl den beiden genannten Kugelflächen, als auch jener vom Radius 1 entspricht der Pol einer dritten Krystallfläche seyn, und es wird nun unsere Aufgabe seyn die Coordinaten dieses Poles zu bestimmen. Ist λ irgend ein gegebener Winkel, so ist seine Sehne s bekanntlich

$$s = 2 \sin \frac{\lambda}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \lambda}{2}}$$

für die durch den Punkt B gehende Kugelfläche haben wir also die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

wobei $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$ sowie $r = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}}$ ist, wir erhalten also

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 1 = 2(1 - \cos \gamma) \quad (1);$$

für die durch den Punkt D gehende Kugel haben wir in der allgemeinen Gleichung zu setzen $a = \cos \varepsilon$, $b = 0$ und $c = \sin \varepsilon$, sowie $r = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}$ ist, also

$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \sin \varepsilon z - 2 \cos \varepsilon x + 1 = 2(1 + \cos \beta)$. (2).
Setzen wir zu diesen beiden Gleichungen noch jene der Kugel vom Radius = 1,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

so sind wir nun leicht im Stande die Coordinaten jenes Punktes zu bestimmen, der diesen drei Kugelflächen gemeinschaftlich ist. Durch Combination der ersten und dritten Gleichung finden wir nun

$$x = -\cos \gamma.$$

Durch Combination der zweiten und dritten folgt

$$-\cos \varepsilon x + \sin \varepsilon z = \cos \beta$$

oder indem wir das gefundene $x = -\cos \gamma$ in der letzteren Gleichung substituiren, erhalten wir

$$z = \frac{\cos \beta - \cos \varepsilon \cos \gamma}{\sin \varepsilon}$$

und diese beiden Gleichungen für x und z in die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

gesetzt, gehen

$$y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varepsilon - 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varepsilon}}{\sin \varepsilon}$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, daß y zwei Werthe annehmen kann, einen positiven und einen negativen; da aber jede Fläche nur einen Pol besitzen kann, so wollen wir hier y als positiv annehmen; wir erhalten also für E folgende Coordinaten

$$E, \begin{cases} x = -\cos \gamma \\ y = + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varepsilon - 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varepsilon}}{\sin \varepsilon} \\ z = \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \end{cases}$$

Um nun den Pol der vierten Krystallfläche zu finden, legen wir wieder durch B und D zwei Kugelflächen, deren Radien den Sehnen $180 - \alpha$ und δ entsprechen. Die Gleichungen dieser beiden Kugelflächen werden also seyn

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 1 = 2(1 - \cos \delta) \text{ und}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \sin \varepsilon z - 2 \cos \varepsilon x + 1 = 2(1 + \cos \alpha)$$

und durch Combination dieser beiden Gleichungen mit jener

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

bekommen wir wieder wie oben

$$x = -\cos \delta$$

$$z = \frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \delta - \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon}}{\sin \varepsilon}$$

Sowie oben, hat auch hier y zwei Werthe und wir müssen hier den negativen Werth beibehalten, weil wir die Pole der zwei Krystallflächen F und E zu verschiedenen Seiten der Zone AB annehmen müssen. Wir haben also

$$F, \begin{cases} x = -\cos \delta \\ y = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \delta - \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon}}{\sin \varepsilon} \\ z = \frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \end{cases}$$

Mit Hülfe der Coordinaten der beiden Pole E und F sind wir nun auch schon im Stande die Relation auffindig zu machen, welche zwischen den sechs Kantenwinkeln des Anorthotypes stattfindet. Die Entfernung d der beiden Punkte E und F ist nämlich die Sehne des Bogens φ und wir haben also

$$d = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}$$

woraus folgt

$$\frac{d^2 - 2}{2} = -\cos \varphi$$

nun ist aber nach den Regeln der analytischen Geometrie des Raumes

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

wobei x , y und z die Coordinaten des Punktes E , und x_1 , y_1 und z_1 jene von F sind. Setzt man diese in die folgenden Werthe, so findet man:

$$(x - x_1)^2 = (\cos \gamma + \cos \delta)^2$$

$$(y - y_1)^2 = \frac{(VM + VM_1)^2}{1 - \cos^2 \varepsilon}$$

$$(z - z_1)^2 = \frac{[(\cos \alpha - \cos \beta) - (\cos \delta - \cos \gamma) \cos \varepsilon]^2}{1 - \cos^2 \varepsilon}$$

wobei

$$M = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \delta - \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon \text{ und}$$

$$M_1 = 1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varepsilon.$$

Substituirt man diese in der obigen Gleichung für $\cos \varphi$, reducirt die erhaltene Formel, und setzt endlich der Kürze halber $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ und φ statt $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \cos \delta, \cos \varepsilon$ und $\cos \varphi$, so erhält man schliesslich:

$$\varphi = - \frac{(\gamma \delta + \alpha \beta) - 2 \sqrt{M M_1} - (\alpha \gamma + \beta \delta) \varepsilon + (\gamma + \delta)^2 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad (1).$$

wobei wieder

$$M = 1 - (\alpha^2 + \delta^2 + \varepsilon^2) + 2 \alpha \delta \varepsilon \text{ und}$$

$$M_1 = 1 - (\beta^2 + \gamma^2 + \varepsilon^2) + 2 \beta \gamma \varepsilon$$

sind.

Die unter I. gefundene Formel lehrt uns den sechsten Kantenwinkel eines Anorthotypes berechnen, sobald fünf derselben gegeben sind; sie kann aber auch in jedem anderen Krystallsysteme in Anwendung gebracht werden, sobald von demselben vier zu verschiedenen Gestalten gehörige Flächen gegeben sind, ihr Zusammenhang bezüglich der Grundgestalt jedoch nicht bestimmt ist, und der Winkel zu berechnen ist, den eine dieser Flächen gegen eine andere bildet, aber diejenigen welche diese untereinander bilden, durch Messung gefunden wurden.

Nachdem wir nun im Vorhergehenden die Pole der einzelnen Krystallflächen bestimmt haben, sind wir auch leicht im Stande die Gleichungen der Letzteren aufzustellen. Ist nämlich

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

eine Kugelfläche und M, x_1, y_1 und z_1 ein Punkt derselben, so hat man bekanntlich:

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = 1$$

als die Gleichung der durch M gehenden Tangentialebene der Kugel.

Für die durch den Punkt B gehende Krystallfläche wird also die Gleichung seyn:

$$x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_1,$$

d. h. diese eine Krystallfläche F_1 steht senkrecht auf der Axe der x und ist von O um die Einheit entfernt.

Die durch D gehende Krystallfläche F_2 hat die Gleichung

$$-\cos \varepsilon x + \sin \varepsilon z = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_2,$$

also die Gleichung einer zur Axe der Y parallelen Ebene, die ebenfalls um die Einheit vom Coordinaten-Mittelpunkte entfernt ist.

Die durch E gehende Ebene F_3 hat die folgende Gleichung:

$$-\cos \gamma x + \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} y + \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} z = 1 \quad . \quad F_3$$

und endlich jene durch F gehende Krystallfläche F_4 die Gleichung:

$$-\cos \delta x - \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} y + \frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} z = 1 \quad . \quad F_4$$

oder endlich wenn wir alle diese Flächen durch den Coordinaten-Mittelpunkt O legen, erhalten wir die Gleichungen:

$$F_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = 0$$

$$F_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos \varepsilon x + \sin \varepsilon z = 0$$

$$F_3) \quad . \quad -\cos \gamma x + \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} y + \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} z = 0$$

und endlich

$$F_4) \quad . \quad -\cos \delta x - \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} y + \frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{1-\cos^2 \varepsilon}} z = 0,$$

wobei die oben für M und M_1 gegebenen Werthe auch hier geltend sind.

Sind zwei Ebenen durch ihre Gleichungen

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \text{und}$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$$

gegeben, so sind bekanntlich die Gleichungen ihres Durchschnittes folgende:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - A_1B} z \\ y &= \frac{A'C - AC_1}{AB_1 - A_1B} z \end{aligned} \right\}$$

Wenn wir in diesen Gleichungen die oben gefundenen Werthe substituiren, so erhalten wir die Gleichungen der Durchschnitte der einzelnen Krystallflächen, oder was dasselbe ist, die Gleichungen der durch den Coordinaten-Mittelpunkt gelegten Kanten des Anorthotipes, und da sich vier Gleichungen zu je zwei sechsmal combiniren lassen, so erhalten wir auch sechs verschiedene Kanten.

Die Gleichungen für F_1 und F_2 geben die Gleichungen für die Kante K_1

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{0}{0} z \\ y &= \frac{\sin \varepsilon}{0} z = \infty z \end{aligned} \right\} \dots K_1$$

also ist K_1 eine mit der Coordinatenaxe der y identische gerade Linie.

Die Ebene F_1 gelangt mit der Ebene F_3 zum Durchschnitt; die Gleichungen der Kante K_2 sind also

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= - \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sqrt{M}} z \end{aligned} \right\} \dots K_2.$$

Diesen Gleichungen zur Folge liegt also die Kante K_2 ganz in der coordinirten Ebene Oyz , und der Neigungswinkel, den sie gegen die horizontale coordinirte Ebene Oxy bildet, wird durch die Gleichung

$$\tan \nu = - \frac{\sqrt{M}}{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}$$

und jener, den sie mit der verticalen Ebene Oxz bildet, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\tan \nu_1 = \cotang \nu = - \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sqrt{M}}.$$

Die Gleichungen des Durchschnittes der beiden Ebenen F_1 und F_3 sind

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{M_1}} z \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{M_1}} z \end{aligned}} \right\} \dots K_3,$$

welche Gleichungen wieder einer in der coordinirten Ebene Oyz liegenden geraden Linie entsprechen, deren Neigungen mit den Ebenen Oxy und Oxz sind:

$$\tan \nu = -\frac{\sqrt{M_1}}{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}$$

und

$$\tan \nu_1 = \cotang \nu = -\frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{M_1}}.$$

Die Kante K_3 wird gebildet durch die beiden Ebenen F_2 und F_3 , wir haben also als die Gleichungen derselben

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z \\ y &= \frac{\cos \gamma - \cos \beta \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \sqrt{M}} z = \frac{D}{\cos \varepsilon \sqrt{M}} z \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z \\ y &= \frac{\cos \gamma - \cos \beta \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \sqrt{M}} z \end{aligned}} \right\} \dots K_4$$

Die Kante K_4 tritt also bereits aus der coordinirten Ebene Oyz hinaus.

Die beiden Ebenen F_2 und F_4 bilden durch ihren Durchschnitt die Kante K_5 , also sind die Gleichungen für die Kante K_5

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z \\ y &= \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} z = \frac{B}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} z \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z \\ y &= \frac{\cos \delta - \cos \alpha \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} z \end{aligned}} \right\} \dots K_5.$$

Endlich werden sich noch die beiden Ebenen F_3 und F_4 schneiden und die Kante K_6 bilden, für welche die Gleichungen sind

$$\begin{aligned} x &= \sin \varepsilon \frac{(\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon) \sqrt{M} - (\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon) \sqrt{M_1}}{\cos \delta \sqrt{M} - \cos \gamma \sqrt{M_1}} z \\ y &= \frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \cos \delta}{\cos \delta \sqrt{M} - \cos \gamma \sqrt{M_1}} z \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= \sin \varepsilon \frac{(\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon) \sqrt{M} - (\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon) \sqrt{M_1}}{\cos \delta \sqrt{M} - \cos \gamma \sqrt{M_1}} z \\ y &= \frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \cos \delta}{\cos \delta \sqrt{M} - \cos \gamma \sqrt{M_1}} z \end{aligned}} \right\} \dots K_6.$$

Mit Hülfe der hier bestimmten Kanten sind wir nun leicht im Stande, das ganze Anorthotip zu construiren oder, was dasselbe ist, die Coordinaten der Ecken desselben zu bestim-

men. Es seyen zu diesem Behufe in Fig. 3 Taf. IV $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ die durch den Coordinaten-Mittelpunkt O gelegten Kanten des Anorthotips. Wir nehmen nun z. B. in der Kante K_2 einen Punkt B an, etwa so, daß seine verticale Coordinate $z = 1$ ist, und legen nun durch denselben eine Linie so, daß sie zu K_1 parallel ist. Es schneide diese Linie die Kante K_3 in dem Punkte C . Es ist nicht schwer einzusehen, daß diese beiden Linien sich überhaupt schneiden, da sämmtliche ja durch den Schnitt verschiedener Ebenen mit einer und derselben (d. i. der Fläche F_1) entstanden sind. Durch den Punkt B sowohl, als den Punkt C werden wir nun Linien legen, welche mit der Kante K_6 parallel sind. Die durch den Punkt B gelegte Linie wird die Kante K_4 , und jene durch C gelegte, die Kante K_5 , und zwar in den Punkten C_1 und B_1 schneiden. Legen wir nun noch durch B eine Parallele zu K_5 und durch C eine solche zu K_4 , so schneiden sich dieselben im Punkte A' . Die Punkte $OB C A' B'$ und C_1 werden nun die Ecken des Anorthotips seyn.

Die eben gegebene geometrische Construction wollen wir hier nun analytisch ausdrücken. Um den Punkt B zu finden, setzen wir in den oben für K_2 gefundenen Gleichungen den Werth $z = 1$, es sind also die Coordinaten von B

$$B \dots \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon}{\sqrt{M}} = -\frac{A}{\sqrt{M}} \\ z = 1. \end{cases}$$

Ebenso finden wir die Coordinaten für C , wenn wir in den Gleichungen für K_3 $z = 1$ setzen, wonach dieselben sich bestimmen lassen, als

$$C \dots \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{\cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{M_1}} = -\frac{C}{\sqrt{M_1}} \\ z = 1. \end{cases}$$

Sind die Gleichungen einer Linie gegeben

$$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$$

und sollen wir jene bestimmen, die durch den Punkt x_1, y_1, z_1 zur genannten Linie parallel geht, so lehrt die analytische Geometrie des Raumes, daß diese sind

$$\begin{cases} x = az + (x_1 - az_1) \\ y = bz + (y_1 - bz_1) \end{cases}$$

Wir wollen nun hier zuerst den Punkt A' nach seinen Coordinaten bestimmen. Die durch den Punkt B , dessen Coordinaten wir oben gefunden haben, gehende, zu K_5 parallele Gerade wird also die Gleichungen besitzen

$$E_1 \begin{cases} x = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z - \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \\ y = \frac{B}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} z - \left(\frac{A}{\sqrt{M}} + \frac{B}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} \right) \\ \quad = \frac{B}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} - \frac{A \cos \varepsilon \sqrt{M_1} + B \sqrt{M}}{\cos \varepsilon \sqrt{M} \sqrt{M_1}} \end{cases}$$

Jene gerade Linie, welche durch den Punkt C zu der Linie K_4 parallel geht, wird die Gleichungen besitzen

$$E_2 \begin{cases} x = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} z - \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \\ y = \frac{D}{\cos \varepsilon \sqrt{M}} - \frac{C \cos \varepsilon \sqrt{M} + D \sqrt{M_1}}{\cos \varepsilon \sqrt{M} \sqrt{M_1}} \end{cases}$$

Für den Durchschnitt der beiden geraden Linien

$$\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases} \quad \begin{cases} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{cases}$$

haben wir aber die Gleichungen

$$x = \frac{a\alpha_1 - a_1\alpha}{a - a_1}, \quad y = \frac{b\beta_1 - b_1\beta}{b - b_1} \quad \text{und} \quad z = \frac{\beta_1 - \beta}{b - b_1}.$$

Substituiren wir nun in diesen die oben für E_1 und E_2 gefundenen Werthe, so haben wir

$$A_1 \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{(C \cos \varepsilon - B) \sqrt{M} - (A \cos \varepsilon - D) \sqrt{M_1}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}} \\ y &= \frac{BC \sqrt{\frac{M}{M_1}} - DA \sqrt{\frac{M_1}{M}}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}} \\ x &= \frac{0}{0} \end{aligned} \right.$$

wobei A , B , C und D die oben angegebenen Werthe besitzen, und da uns hier x als unbestimmt erscheint, so müssen wir den für z gefundenen Werth in der E_1 und E_2 gemeinschaftlichen Gleichung

$$x = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} (z - 1)$$

substituiren, wonach wir den Werth für x , nach gehörig vorgenommener Reduction finden als:

$$x = \sin \varepsilon \frac{C \sqrt{M} - A \sqrt{M_1}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}}.$$

Die Verbindungslinie OA_1 ist nun unsere Axe $2a$; in ihrem Halbirungspunkte liegt aber der Mittelpunkt der ganzen Gestalt, folglich sind für diesen die Coordinaten

$$M \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \sin \varepsilon \cdot \frac{C \sqrt{M} - A \sqrt{M_1}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}} \\ y_0 &= \frac{1}{2} \frac{BC \sqrt{\frac{M}{M_1}} - DA \sqrt{\frac{M_1}{M}}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}} \\ z_0 &= \frac{1}{2} \frac{(C \cos \varepsilon - B) \sqrt{M} - (A \cos \varepsilon - D) \sqrt{M_1}}{D \sqrt{M_1} - B \sqrt{M}} \end{aligned} \right. \quad 1)$$

Wir können nun von der oben gegebenen Construction in sofern abgehen, als uns die Entfernung der Punkte O , B und C von dem genannten Mittelpunkte, bereits die Gröfse der Halbachsen a , b , und c giebt. Wir haben also

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ b^2 &= x_0^2 + \left(y_0 + \frac{A}{\sqrt{M}} \right)^2 + (z_0 - 1)^2 \\ c^2 &= x_0^2 + \left(y_0 + \frac{C}{\sqrt{M_1}} \right)^2 + (z_0 - 1)^2 \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

oder, wenn wir $a =$ der Einheit setzen, auch

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 1 \\ b^2 &= \frac{x_0^2 + \left(y_0 + \frac{A}{\sqrt{M}}\right)^2 + (x_0 - 1)^2}{x_0^2 + y_0^2 + x_0^2} \\ c^2 &= \frac{x_0^2 + \left(y_0 + \frac{C}{\sqrt{M_1}}\right)^2 + (x_0 - 1)^2}{x_0^2 + y_0^2 + x_0^2} \end{aligned} \right\} 3)$$

Zur vollkommenen Bestimmung des Anorthotipes erübrigt nur noch die Bestimmung der Neigungen der Axen, nämlich der Werthe ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 . Wir sind leicht im Stande dieselben aus den Dreiecken OMB , OMC und BOC zu bestimmen. Wir dürfen dazu nur die Entfernungen OB , OC und BC , welche sind

$$\left. \begin{aligned} OB = d_1^2 &= \frac{A^2}{M} + 1 = \frac{A^2 + M}{M} \\ OC = d_2^2 &= \frac{C^2}{M_1} + 1 = \frac{C^2 + M_1}{M_1} \\ BC = d_3^2 &= \frac{C^2}{M_1} + \frac{A^2}{M} = \frac{A^2 M_1 + C^2 M}{M M_1} \end{aligned} \right\} 4)$$

Denn sind a , b und c die Seiten eines Dreieckes, so ist der c gegenüberliegende Winkel α nach den Lehren der ebenen Trigonometrie

$$\cos \alpha = \frac{(a^2 + b^2) - c^2}{2ab}$$

und wir erhalten also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_1 &= \frac{(a^2 + b^2) - d_1^2}{2ab} \\ \cos \psi_2 &= \frac{(a^2 + c^2) - d_2^2}{2ac} \\ \cos \psi_3 &= \frac{(b^2 + c^2) - d_3^2}{2bc} \end{aligned} \right\} 5)$$

Mit Hülfe der Gleichungen 1....5, in denen wir statt A , B , C und D , sowie statt M und M_1 die Werthe:

$$A = \cos \beta - \cos \gamma \cos \varepsilon$$

$$B = \cos \delta - \cos \alpha \cos \varepsilon$$

$$C = \cos \alpha - \cos \delta \cos \varepsilon$$

$$D = \cos \gamma - \cos \beta \cos \varepsilon$$

$$M = 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \delta + \cos^2 \varepsilon) + 2 \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon$$

$$M_1 = 1 - (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \varepsilon) + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varepsilon$$

zu setzen haben, ist es nun ein leichtes, um unmittelbar aus den Kantenwinkeln die Axenverhältnisse in der angenommenen Weise berechnen zu können. Der Winkel φ erscheint in keiner der genannten Gleichungen, weil die Abmessungen des Anorthotipes von φ in sofern unabhängig sind, als dieses selbst eine Function der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε ist.

Es wird keinen Schwierigkeiten unterliegen, die Axenverhältnisse des Anorthotipes zu berechnen, wenn von den sechs Kantenwinkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ und φ andere als die angenommenen fünf $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ gegeben sind, etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und φ . Es kommen nämlich in allen unseren unter 1...5 gegebenen Gleichungen an die Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε die Werthe $\beta, \gamma, \delta, \alpha$ und φ , ferner an die Stelle von b und c die Werthe c und b . Man wird, um sich in diesem Falle gehörig orientiren zu können, das Anorthotip immer in eine zu Fig. 1 Taf. IV parallele Stellung bringen, so zwar, daß die vier zusammenstossenden, durch ihre Kantenwinkel gegebenen Kanten, mit O übereinstimmend sich schneiden, und die ebenfalls gegebene fünfte Kante senkrecht auf die Sehrichtung des Auges kommt. So stellt Fig. 4 Taf. IV den ebenbehandelten Fall vor, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und φ gegeben sind. Um den sechsten Kantenwinkel zu finden, hat man ebenfalls in der unter I gegebenen Gleichung die genannte Verwechslung der Winkel vorzunehmen. Wir werden also zu setzen haben

$$A_1 = \cos \gamma - \cos \delta \cos \varphi$$

$$B_1 = \cos \alpha - \cos \beta \cos \varphi$$

$$C_1 = \cos \beta - \cos \alpha \cos \varphi$$

$$D_1 = \cos \delta - \cos \gamma \cos \varphi$$

$$M' = 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \varphi) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi$$

$$M'_1 = 1 - (\cos^2 \gamma + \cos^2 \delta + \cos^2 \varphi) + 2 \cos \gamma \cos \delta \cos \varphi$$

ferner sind

$$b_1 = c$$

$$c_1 = b$$

$$a_1 = a$$

und endlich an die Stelle von

$\cos \varepsilon$ ist $\cos \varphi$ zu setzen, sowie an jene von $\sin \varepsilon$ auch $\sin \varphi$ wobei a_1 , b_1 und c_1 die durch Substitution der Werthe A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , M' , M'_1 , $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ an die Stelle von A , B , C , D , M , M_1 , $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$ erhaltenen a , b und c sind, und a , b und c aber die Axen der Grundgestalt selbst sind.

Die durch Substitution der Werthe A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , M' , M'_1 , $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ erhalten Neigungswinkel der Axen, ψ'_1 , ψ'_2 und ψ'_3 sind

$$\psi'_1 = \psi_2$$

$$\psi'_2 = 180 - \psi_1$$

$$\psi'_3 = 180 - \psi_3$$

wobei wieder ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 die eigentlichen Neigungen der Axen a , b und c bedeuten.

Wir haben schon oben aufmerksam gemacht, daß zur Bestimmung des Hemianorthotipes bloß vier der vorkommenden sechs Kantenwinkel nothwendig sind. Wir sind nun hier im Stande die Bedingungsgleichungen aufzustellen, welche für die sechs Kantenwinkel eines solchen stattfinden müssen. Beim Hemianorthotip ist der Axenneigungswinkel $\psi_3 = 90^\circ$ also nach den unter 5) aufgestellten Gleichungen

$$\cos \psi_3 = 0 = \frac{b^2 + c^2 - d_3^2}{2bc}$$

wornach also folgt

$$b^2 + c^2 = d_3^2.$$

Setzen wir für b^2 , c^2 und d_3^2 die ihnen entsprechenden Werthe, so finden wir nach gehöriger Reduction endlich als Bedingungsgleichung

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \frac{A\sqrt{M_1} + C\sqrt{M}}{\sqrt{M \cdot M'}} y_0 + 2z_0 + 1 = 0.$$

Setzen wir in dieser Relation, die unter 1) gefundenen Werthe und endlich statt A, B, C, D, M und M_1 die ihnen entsprechenden Functionen der Kantenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε , so wird diese selbst eine von diesen Winkeln allein abhängige Function, und man ist endlich im Stande ε auszudrücken als

$$\varepsilon = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Diesen hier gefundenen Werth in die Gleichung I, gesetzt, giebt ebenfalls

$$q = F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

und wir haben somit die beiden Randkantenwinkel als Functionen der Axenkantenwinkel dargestellt. Die ausführliche Behandlung dieses Falles kann hier um so mehr übergangen werden, als dieselbe zu viel Raum in Anspruch nehmen würde und das Hemianorthotip eine ohnehin zu geringe Rolle in der Natur spielt. Da aber dieselbe Gestalt in der Natur unzweifelhaft erscheint und dieselbe ein interessantes Mittelglied zwischen Anorthotip und Hemiorthotip spielt, auch zu ihrer vollkommenen Bestimmung nur vier der Kantenwinkel nothwendig hat, so scheint es mir keineswegs gerechtfertigt dasselbe ganz als speciellen Fall des Anorthotipes anzusehen und es mit demselben zu vereinigen.

Um die Neigungen der durch je zwei der Axen a, b, c , gelegten Ebenen, um also die Neigungen der Hauptschnitte gegeneinander zu finden, müssen wir die Gleichungen dieser letzteren bestimmen. Wir suchen zu diesem Behufe die Gleichungen der durch K_1 und K_6 , ferner K_2 und K_5 und endlich K_3 und K_4 gehenden Ebenen, welche Ebenen parallel zu den Hauptschnitten durch den Coordinaten-Mittelpunkt gelegt sind.

Sind im Raume zwei gerade Linien

$$1. \quad \begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases} \quad \text{und} \quad 2. \quad \begin{cases} x = a_1 z \\ y = b_1 z \end{cases}$$

gegeben, so ist bekanntlich die Gleichung der durch beide gehenden Ebene

$$(b_1 - b)x + (a - a_1)y + (a_1b - ab_1)z = 0.$$

Die durch K_1 und K_6 gehende Ebene, wird die allgemeine Form haben

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0$$

wobei

$$A_1 = 1$$

$$B_2 = 0$$

$$C_1 = \sin \varepsilon \cdot \frac{C \sqrt{M} - A \sqrt{M_1}}{\cos \delta \sqrt{M} - \cos \gamma \sqrt{M_1}}$$

Die durch K_2 und K_5 gehende Ebene hat ebenfalls die Form

$$A_2x + B_2y + C_2z$$

wobei

$$A_2 = \frac{B}{\cos \varepsilon \sqrt{M_1}} + \frac{A}{\sqrt{M}}$$

$$B_2 = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

$$C_2 = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{A}{\sqrt{M}}.$$

Endlich wird die durch K_3 und K_4 gehende Gleichung ebenfalls die Form

$$A_3x + B_3y + C_3z = 0$$

besitzen, wobei wieder

$$A_3 = \frac{D}{\cos \varepsilon \sqrt{M}} + \frac{C}{\sqrt{M_1}}$$

$$B_3 = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

$$C_3 = -\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{C}{\sqrt{M_1}}.$$

Die Neigung zweier Ebenen

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

wird ausgedrückt durch die Formel

$$\cos \alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

die Neigungen unserer Hauptschnitte werden also ausgedrückt werden durch

$$\cos \theta_1 = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{A_1 A_3 + B_1 B_3 + C_1 C_3}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_3^2 + B_3^2 + C_3^2)}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3}{\sqrt{(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)(A_3^2 + B_3^2 + C_3^2)}}$$

in welchen Gleichungen θ_1 , der Neigungswinkel der Hauptschnitte bc und ab , θ_2 jenen der Hauptschnitte bc und ac und endlich θ_3 jenen von ab und ac bedeutet.

Mohs hat das Anorthotip in eine solche Stellung gebracht, daß der Hauptschnitt bc horizontal gelegen und die Axe b in eine auf die Sebrichtung senkrecht stehende Lage kam; die Lage der Axe a war deshalb mit keiner unserer Coordinatenachsen übereinstimmend. Es erscheint aber nicht unzweckmäfsig dem Anorthotipe eine solche Stellung zu geben, daß die Axe a vertical, die Axe b in eine Ebene zu liegen kommt, welche auf der Sebrichtung senkrecht steht. Die ganze Gestalt hat dann die Lage wie sie in Fig. 5 Taf. IV dargestellt. Man hat hierbei den Vortheil, die verticalen Prismen auch wirklich vertical gestellt zu haben, und in Folge dessen eine einfachere horizontale Projection der sämtlichen einfachen Gestalten und der Combinationen ermöglicht zu haben. Um die Gestalt durch gerade Linien bestimmen zu können, wird es nur nothwendig seyn, die einzelnen Endpunkte A , B und C durch ihre verticalen Coordinaten zu bestimmen; so ist für A , B und C

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = a_1 \end{cases} \quad B \begin{cases} x = b_1 \\ y = 0 \\ z = d_1 \end{cases} \quad C \begin{cases} x = e_1 \\ y = c_1 \\ z = f_1 \end{cases}$$

Die ganze Gestalt wird also gegeben seyn können durch das Verhältnifs

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 : e_1 : f_1$$

wobei a_1 gleich der Einheit wird gesetzt werden können.

Es wird nun unsere Aufgabe seyn, die Größen a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , e_1 und f_1 durch unsere schon oben gefundenen a , b , c , ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 auszudrücken.

Da die Axe der z eine für beide Coordinatensysteme (von denen das eine das rechtwinklige, das andere das schiefwinklige den Axen des Anorthotipes entsprechende ist) gemeinschaftlich ist, so folgt offenbar

$$a_1 = a$$

Die beiden Coordinaten b_1 und d_1 sind nach Fig. 5 Taf. IV leicht gefunden, es ist

$$\begin{aligned} b_1 &= b \sin \psi_1 \\ d_1 &= b \cos \psi_1. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Coordinaten des Punktes C bedürfen wir die Neigungen der Linie OC gegen die drei coordinirten Axen Ox , Oy und Oz . Die Neigung dieser Linie gegen die verticale dieser Axen, nämlich gegen Oz , ist uns gegeben durch den Winkel ψ_2 . Um nun die beiden anderen bestimmen zu können, denken wir uns durch den Punkt O eine Kugel gelegt und mit dieser die Durchschnitte der Linien Ox , Oy , Oz , OC und OB gesucht, und seyen diese in Fig. 6 Taf. IV X , Y , Z , C und B . So können wir nun aus dem sphärischen Dreiecke ZCX den Winkel CX bestimmen. Es ist hier nämlich $ZB = \psi_1$, $ZC = \psi_2$ und $CB = \psi_3$, folglich erhalten wir den Winkel CZB als

$$\cos CZB = \frac{\cos \psi_3 - \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\cos \psi_1 \cos \psi_2};$$

es sind somit in dem Dreiecke ZCX gegeben die Seite $ZC = \psi_2$ und $ZX = 90^\circ$, ferner der von ihnen eingeschlossene Winkel CZB ; es ist

$$\cos CX = \sin \psi_2 \cos CZB$$

oder auch nach der Substitution von $\cos CZB$

$$\cos CX = \sin \psi_2 \cdot \frac{\cos \psi_3 - \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}.$$

Ebenso erhält man aus dem Dreiecke ZCY den Bogen CY ; da $ZC = \psi_2$ und $CZY = 90^\circ - CZB$ ist auch

$$\cos CY = \sin \psi_2 \sin CZB$$

oder auch nach gehöriger Reduction

$$\cos CY = \frac{\sin \psi_2 \sqrt{\cos \psi_3 (\cos \psi_3 - 2 \cos \psi_1 \cos \psi_2)}}{\cos \psi_1 \cos \psi_2};$$

nach diesen Winkeln erhält man aber

$$x = e_1 = c \cos CX = c \sin \psi_2 \cdot \frac{\cos \psi_3 - \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}$$

$$y = c_1 = c \cos CY = c \sin \psi_2 \cdot \frac{\sqrt{\cos \psi_3 (\cos \psi_3 - 2 \cos \psi_1 \cos \psi_2)}}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}$$

$$z = f_1 = c \cos CZ = c \cos \psi_2.$$

Wir erhalten also der Reihe nach

$$a_1 = a$$

$$b_1 = b \sin \psi_1$$

$$c_1 = c \sin \psi_2 \cdot \frac{\sqrt{\cos \psi_3 (\cos \psi_3 - 2 \cos \psi_1 \cos \psi_2)}}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}$$

$$d_1 = b \cos \psi_1$$

$$e_1 = c \sin \psi_2 \cdot \frac{\cos \psi_3 - \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}$$

und endlich

$$f_1 = c \cos \psi_2$$

Für das Hemianorthotip ist $\psi_3 = 90^\circ$, folglich wird

$$a_1 = a$$

$$b_1 = b \sin \psi_1$$

$$c_1 = c \sin \psi_2 \sqrt{\frac{2}{\sin \psi_1 \cos \psi_2}}$$

$$d_1 = b \cos \psi_1$$

$$e_1 = -c \sin \psi_2$$

$$f_1 = c \cos \psi_2$$

und für das Hemiorthotip, wo noch $\psi_2 = 90^\circ$

$$a_1 = a$$

$$b_1 = b \sin \psi_1$$

$$c_1 = c$$

$$d_1 = b \cos \psi_1$$

wo bei allen diesen schiefaxigen Gestalten die Hauptaxe a_1 vertical gestellt ist.

