

Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne.

Von Dr. Gustav Jäger in Wien.

I.

Der erste Theil der vorliegenden Abhandlung enthält in seinen Hauptzügen folgendes:

1. Eine neue Berechnungsweise der Bewegungsrichtung und der Geschwindigkeit des Sonnensystems,
2. die Berechnung der mittleren Fixsterngeschwindigkeit und
3. die Ermittlung der Entfernung der Fixsterne.

Bekanntlich unterscheidet man zweierlei Eigenbewegungen der Fixsterne, die laterale, d. i. die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein Fixstern seinen Ort am Himmel verändert, und jene in der Sehnlinie, d. i. der absolute Wert der Geschwindigkeit, mit welcher ein Fixstern seine Entfernung von der Sonne ändert. Beide Arten der Eigenbewegungen werden in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

Bevor wir zur Rechnung selbst schreiten, wollen wir einige Annahmen machen, deren Richtigkeit sich am Schlusse von selbst ergeben wird. Wir setzen nämlich voraus, dass sich die Fixsterne nicht um ein gemeinsames Centrum bewegen, sondern dass ihre Bewegungsrichtungen im Raume gleichmäßig vertheilt sind, und ihre Geschwindigkeiten gegenüber den gegenseitigen Anziehungen so groß sind, dass wir ihre Bahnen als geradlinig auffassen können.

Unter dieser Voraussetzung können wir zu folgender Betrachtung übergehen. Denken wir uns, wir hätten auf einen sehr kleinen Raum am Himmel eine sehr große Zahl Sterne zusammengedrängt. Die Geschwindigkeiten derselben seien ihrer Richtung und Größe nach so vertheilt, dass keine vor der anderen einen Vorzug hat, so ist die Summe sämtlicher Geschwindigkeiten, auf eine bestimmte Richtung bezogen, gleich Null. Wenn wir uns daher mit einer Geschwindigkeit v diesem

Sternhaufen nähern, und wir kennen die relativen Geschwindigkeiten, mit welcher wir uns den einzelnen Sternen nähern, so gibt der Mittelwert aller unsere eigene absolute Geschwindigkeit nach der Richtung des Sternhaufens. Das heißt aber nichts anderes, als dass wir für diesen idealen Fall dasselbe Resultat erhalten, welches wir erhalten würden, wenn sämtliche Sterne unseres Sternhaufens in Ruhe wären. Nun kommt zwar in Wirklichkeit dieser specielle Fall nicht vor, aber angenähert trifft das Gesagte immer zu, wenn wir eine größere Sternzahl in Rechnung ziehen. Wir können daher sagen: Wenn wir die Geschwindigkeit unseres Sonnensystems nach einer beliebigen Richtung aus einer großen Zahl von Sternen bestimmen, so ist es in erster Annäherung gleichgiltig, ob wir annehmen, sämtliche Sterne mit Ausnahme der Sonne seien in Ruhe, oder sämtliche Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen seien über die Sterne gleichmäßig vertheilt.

Unter diesen Gesichtspunkten lässt sich unabhängig von irgend welcher bereits gemachten Bestimmung die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung unseres Sonnensystems berechnen.

Unsere Sonne befinde sich im Ursprunge O eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und die Richtungswinkel ihrer Bewegungsrichtung OA mit den drei Achsen seien α, β, γ . Die Geschwindigkeit der Sonne sei v . Die Verbindungsgerade der Sonne mit einem Sterne OS schließe mit OA den Winkel μ ein. Für einen ruhenden Stern ist dann die Geschwindigkeit der Sonne in der Richtung OS gleich $v \cos \mu$. Das ist nun die einzige Größe, welche wir direct durch Spectralbeobachtungen bestimmen können. Wir wollen daher vorerst untersuchen, was wir eigentlich gewinnen, wenn wir über einen bestimmten Raum des Himmels sämtliche $v \cos \mu$ summieren. Zu diesem Zwecke transformieren wir unser rechtwinkliges Coordinatensystem in ein Polarcordinatensystem, indem wir

$$\cos \alpha = \cos \sigma \cos \psi,$$

$$\cos \beta = \cos \sigma \sin \psi,$$

$$\cos \gamma = \sin \sigma$$

setzen. Es sind also σ und ψ die neuen Coordinaten der Bewegungsrichtung unserer Sonne. Die entsprechenden Coordinaten des Sterns, d. i. der Geraden OS , seien ϑ und φ . Aus dieser Annahme folgt

$$\cos \mu = \cos \sigma \cos \vartheta (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) + \sin \sigma \sin \vartheta.$$

Ist die Zahl sämtlicher in Betracht kommender Sterne gleich N , so ist die Zahl derjenigen, welche sich in einer bestimmten Richtung (ϑ, φ) befinden, $\frac{N}{4\pi} \cos \vartheta d\vartheta d\varphi$, und die Summe sämtlicher Geschwindigkeiten für diese Richtung

$$\frac{vN}{4\pi} [\cos \sigma \cos \vartheta (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) + \sin \sigma \sin \vartheta] \cos \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Wollen wir nun die Summe sämtlicher Geschwindigkeiten über einen beliebig großen, von zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen begrenzten Himmelsraum bilden, so brauchen wir bloß den gefundenen Ausdruck über diesen Raum zu integrieren. Wir haben also

$$\Sigma v \cos \mu = \frac{vN}{4\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [\cos \sigma \cos \vartheta (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) + \sin \sigma \sin \vartheta] \cos \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Führen wir die Integration durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Sigma v \cos \mu &= \frac{vN}{4\pi} \left[\cos \sigma \cos \psi (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - \cos \sigma \sin \psi (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0) \right] \\ &\left[\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} + \frac{1}{4} (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_0) \right] + (\varphi_1 - \varphi_0) \sin \sigma \frac{\sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_0}{2} \Bigg] = \\ &= \frac{vN}{4\pi} \left[\cos \alpha (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - \cos \beta (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0) \right] \\ &\left[\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} + \frac{1}{4} (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_0) \right] + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) \cos \gamma (\sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_0) \Bigg]. \end{aligned}$$

Wollen wir nun die mittlere Geschwindigkeit wissen, so haben wir durch die Zahl der Geschwindigkeiten N' zu dividieren. N' finden wir, indem wir $\frac{N}{4\pi}$ mit jenem Raum multiplicieren, über welchen wir integriert haben. Es ist somit

$$N' = \frac{N}{4\pi} (\varphi_1 - \varphi_0) (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_0).$$

Wir können nun durch geschickte Wahl der φ unsere Formeln bedeutend vereinfachen. Wir setzen daher $\varphi_1 - \varphi_0 = \pi$, so $\sin \varphi_0 = -\sin \varphi_1$, $\cos \varphi_0 = -\cos \varphi_1$, ferner sei $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, dann

$$\begin{aligned} \Sigma v \cos \mu &= \frac{vN}{4\pi} \left\{ \left[\vartheta_1 - \vartheta_0 + \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_0) \right] \cos \alpha + \right. \\ &\left. \frac{\pi}{2} (\sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_0) \cos \gamma \right\}, \end{aligned}$$

und

$$N' = \frac{N}{4} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_0).$$

Daraus folgt für den Mittelwert sämtlicher $v \cos \mu$ in dem entsprechenden Raum der Wert

$$\frac{v}{m} (n \cos \alpha + p \cos \gamma) = a, \quad (1)$$

wenn wir der Kürze halber

$$\begin{aligned} \pi (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_0) &= m, \\ \vartheta_1 - \vartheta_0 + \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_0) &= n, \\ \frac{\pi}{2} (\sin^2 \vartheta_1 - \sin^2 \vartheta_0) &= p \end{aligned}$$

setzen, während a der aus den spectroscopischen Beobachtungen folgende Mittelwert ist.

Setzen wir $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$, so ist in gleicher Weise

$$\frac{v}{m} (-n \cos \alpha + p \cos \gamma) = b, \quad (2)$$

für $\varphi_1 = \pi$,

$$\frac{v}{m} (n \cos \beta + p \cos \gamma) = c, \quad (3)$$

und für $\varphi_1 = 2\pi$,

$$\frac{v}{m} (-n \cos \beta + p \cos \gamma) = d. \quad (4)$$

Wir haben hier 4 Unbekannte, nämlich v, α, β, γ , und 5 Gleichungen, da $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ist, so dass zur Bestimmung der Unbekannten sogar eine Gleichung mehr vorhanden ist, als notwendig wäre.

Subtrahieren wir (2) von (1), so erhalten wir

$$\frac{2n}{m} v \cos \alpha = a - b.$$

Subtrahieren wir (4) von (3), so ergibt dies

$$\frac{2n}{m} v \cos \beta = c - d.$$

Addieren wir schließlich (1) und (2) oder (3) und (4), so

$$\frac{2p}{m} v \cos \gamma = a + b = c + d.$$

Setzen wir neuerdings

$$(a-b) \frac{m}{2n} = a_1, (c-d) \frac{m}{2n} = b_1, (a+b) \frac{m}{2p} = c_1,$$

so

$$v \cos \alpha = a_1, v \cos \beta = b_1, v \cos \gamma = c_1,$$

woraus folgt, dass

$$v = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Und damit ist uns sowohl die Geschwindigkeit als auch die Bewegungsrichtung des Sonnensystems gegeben.

Für die praktische Berechnung dieser Größen wollen wir folgende Tabelle benützen.*) In derselben enthält die erste Spalte die Namen der Sterne, die zweite die Geschwindigkeit in englischen Meilen, wobei das Zeichen + bedeutet, dass sich der Stern von uns entfernt, —, dass er sich uns nähert. Die hinter dem Zeichen \pm stehenden Zahlen bezeichnen den wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte. Die dritte Spalte enthält die ungefähre Rectascension, die vierte die Declination des Sterns. Dabei ist zu beachten, dass nach unseren Annahmen die Sternbewegungen mit entgegengesetztem Vorzeichen in die Rechnung einzuführen sind.

Stern	Bewegung	α_n	δ_n
1 α Ophiuchi	— 10·5 \pm 4·6	262·5°	+ 12·5°
2 γ Draconis	— 7·3 \pm 3·3	268·5	+ 51·5
3 α Lyrae	— 36·2 \pm 1·1	278	+ 38·5
4 γ Lyrae	— 5·3 \pm 6·3	283·5	+ 32·5
5 ζ Aquilae	— 23·0 \pm 5·6	285	+ 13·5
6 α Aquilae	— 24·9 \pm 2·7	296	+ 8·5
7 Cygnus-Gruppe	— 10·1 \pm 2·0	303·5	+ 35
8 α Delphini	— 4·3 \pm 8·1	308·5	+ 15·5
9 α Cygni	— 33·6 \pm 2·5	309·5	+ 45
10 α Cephei	— 41·8 \pm 3·7	319	+ 62
11 ϵ Pegasi	— 14·3 \pm 2·7	324·5	+ 9
12 ζ Pegasi	— 5·4 \pm 5·0	339	+ 10
13 η Pegasi	— 12·3 \pm 4·7	339·5	+ 29·5
14 α Pisc. austr.	— 14·6 \pm 11·1	343	— 30·5
15 β Pegasi	+ 3·7 \pm 5·0	344·5	+ 27·5
16 α Pegasi	— 26·1 \pm 2·5	344·5	+ 14·5

*) Hans Homann, Beiträge zur Untersuchung der Sternbewegungen etc. Inaug.-Diss. Berlin 1885, S. 18.

	Stern	Bewegung	α_n	δ_n
17	α Andromedae	— 28·5 \pm 2·0	0·5	+ 28·5
18	γ Pegasi	— 23·5 \pm 4·4	2	+ 14·5
19	β Cassiopeiae	— 2·5 \pm 6·3	7	+ 58·5
20	β Ceti	— 33·6 \pm 4·0	9·5	— 18·5
21	γ Cassiopeiae	— 19·3 \pm 3·1	12·5	+ 60·5
22	β Andromedae	— 9·5 \pm 8·2	16	+ 35
23	δ Cassiopeiae	— 2·6 \pm 4·6	19·5	+ 39·5
24	α Arietis	— 1·9 \pm 4·9	30	+ 23
25	α Ceti	— 21·4 \pm 2·9	44	+ 3·5
26	β Persei	— 9·8 \pm 5·8	45	+ 40·5
27	α Persei	— 20·0 \pm 5·2	49	+ 49·5
28	α Tauri	+ 32·3 \pm 2·5	67·5	+ 16·5
29	α Aurigae	+ 24·8 \pm 2·3	77	+ 46
30	β Tauri	— 15·3 \pm 2·6	79·5	+ 28·5
31	Orion-Gruppe	+ 6·0 \pm 1·5	81	— 1
32	α Orionis	+ 26·9 \pm 3·1	87	+ 7·5
33	β Aurigae	— 5·8 \pm 3·1	87·5	+ 45
34	γ Geminorum	— 1·0 \pm 4·5	97·5	+ 16·5
35	α Geminorum	+ 15·2 \pm 3·6	111·5	+ 32
36	β Geminorum	— 32·0 \pm 3·1	114·5	+ 28·5
37	α Hydrae	+ 16·6 \pm 9·2	140·5	— 8
38	ε Leonis	— 4·4 \pm 5·2	145	— 24·5
39	α Leonis	+ 9·3 \pm 2·5	150·5	+ 12·5
40	γ Leonis	— 26·2 \pm 7·0	153·5	+ 20·5
41	δ Leonis	— 5·2 \pm 6·2	167	+ 21
42	β Leonis	— 11·1 \pm 6·4	175·5	+ 15
43	Urs. mai.-Gruppe	+ 13·4 \pm 2·1	187·5	+ 54·5
44	γ Virginis	+ 25·0 \pm 4·6	189	— 1
45	ε Virginis	— 13·6 \pm 4·6	194	+ 11·5
46	α Virginis	— 14·7 \pm 3·5	199·5	— 10·5
47	ε_1 Bootis	— 5·6 \pm 4·3	220	+ 27·5
48	β Librae	— 14·0 \pm 6·6	227·5	— 9
49	α Coronae	+ 20·7 \pm 3·9	232·5	+ 27

Unter Cygnus-Gruppe ist das Mittel aus den Sternen β , γ , δ , ε , ζ Cygni zu verstehen. Die Oriongruppe bilden in gleicher Weise die Sterne β , γ , δ , ε Orionis und die Urs. mai.-Gruppe die Sterne β , γ , ε , ζ , η Ursae maioris. Es geschah dies wegen der Gemeinsamkeit der Eigenbewegung, welche die bezüglichen Sterne zeigen.

Mit Hilfe dieser Tabelle berechnete ich nun auf mannigfache Weise die Werte von v , α , β , γ und bestimmte daraus dann die Rectascension und Declination der Bewegungsrichtung unseres Sonnensystems. Sämtliche Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In derselben enthält die erste Spalte den Winkel ϑ_0 , die zweite ϑ_1 , die dritte die Rectascension der

x -Achse unseres Coordinatensystems; die Declination derselben ist in allen Fällen gleich Null, desgleichen wurde die z -Achse immer durch den Nordpol gelegt. Die vierte und fünfte Spalte enthält die Rectascension, bezw. die Declination der Bewegungsrichtung der Sonne, und die sechste deren Geschwindigkeit in englischen Meilen.

ϑ_0	ϑ_1	AR d. x	AR d. Sonne	D d. Sonne	v
— 10°	+ 63°	0°	317°	42°, 57°	16·1, 10·1
+ 10	+ 50	0	302	73, 70	17·2, 16·1
— 10	+ 63	30	311	42, 54	19·2, 24·3
+ 10	+ 50	30	290	62, 66	17·7, 20·7
— 10	+ 63	330	312	39, 48	21·6, 25·1
+ 10	+ 50	330	313	50, 52	21·1, 21·7
Mittel			307	55	20·1

Wir erhalten also für die Coordinaten der Sonnenbewegung

$$AR = 307^\circ, D = 55^\circ$$

und eine Geschwindigkeit

$$v = 20\cdot1 \text{ engl. Meilen} = 32\cdot4 \text{ km.}$$

Vergleichen wir unsere Resultate mit jenen Homanns*), der ebenfalls obige Sterntabelle benützt, in seiner Rechnung aber einen von unserem vollständig verschiedenen Weg einschlägt, so finden wir eine Übereinstimmung, die in Anbetracht der geringen Sternzahl, welche wir zur Rechnung benützen konnten, sehr gut ist. Nach ihm bewegt sich das Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von

$$24\cdot48 \pm 2\cdot62 \text{ engl. Meilen, d. i. } 39\cdot21 \pm 4\cdot22 \text{ km}$$

in der Secunde auf einen Punkt zu, dessen Rectascension $320^\circ 12' \pm 16^\circ 21'$ und dessen Declination $+ 41^\circ 16' \pm 15^\circ 97'$ ist.

Aus der Bewegungsrichtung des Sonnensystems und den einzelnen relativen Geschwindigkeiten der Sterne gegen die Sonne lässt sich jener Theil dieser Geschwindigkeit, welcher der Bewegung des Sterns selbst zukommt, berechnen, und daraus weiter die mittlere Sternengeschwindigkeit bestimmen. Ist nämlich der Winkel, welchen die Richtung der Sonnenbewegung mit der Verbindungsgeraden zwischen Sonne und Stern einschließt, gleich μ , und ist die relative Geschwindigkeit, mit welcher der Stern sich von der Sonne entfernt, gleich u , so ist jener Theil der Geschwindigkeit u , welcher von der Bewegung des Sterns allein abhängt, gleich

$$u + v \cos \mu = w \cos \nu,$$

*) Homann etc., S. 21.

wenn w die Eigengeschwindigkeit des Sterns und ν der Winkel ist, welchen seine Bewegungsrichtung mit der Verbindungsgeraden Sonne-Stern einschließt. In folgender Tabelle sind nun die $\cos \mu$ der verschiedenen Sterne und die zugehörigen $w \cos \nu$, wie sie unsere Rechnung ergibt, zusammengestellt.

Stern	$\cos \mu$	$w \cos \nu$		
1 α Ophiuchi	+ 0.159	— 7.3	engl. Meilen	
2 γ Draconis	+ 0.468	+ 2.1	"	"
3 α Lyrae	+ 0.905	— 18.0	"	"
4 γ Lyrae	+ 0.885	+ 12.5	"	"
5 ζ Aquilae	+ 0.715	— 10.5	"	"
6 α Aquilae	+ 0.675	— 11.3	"	"
7 Cygnus-Gruppe	+ 0.939	+ 8.8	"	"
8 α Delphini	+ 0.755	+ 10.9	"	"
9 α Cygni	+ 0.984	— 13.7	"	"
10 α Cephei	+ 0.986	+ 5.5	"	"
11 ε Pegasi	+ 0.668	— 0.9	"	"
12 ζ Pegasi	+ 0.626	+ 7.2	"	"
13 η Pegasi	+ 0.012	— 12.1	"	"
14 α Pisc. austr.	— 0.008	— 14.8	"	"
15 β Pegasi	+ 0.782	+ 19.4	"	"
16 α Pegasi	+ 0.643	— 12.9	"	"
17 α Andromedae	+ 0.691	— 14.6	"	"
18 γ Pegasi	+ 0.523	— 13.0	"	"
19 β Cassiopeiae	+ 0.398	+ 5.5	"	"
20 β Ceti	— 0.008	— 33.8	"	"
21 γ Cassiopeiae	+ 0.830	— 2.8	"	"
22 β Andromedae	+ 0.638	+ 3.3	"	"
23 δ Cassiopeiae	+ 0.769	+ 12.9	"	"
24 α Arietis	+ 0.385	+ 5.8	"	"
25 α Ceti	— 0.020	— 21.8	"	"
26 β Persei	+ 0.471	— 0.3	"	"
27 α Persei	+ 0.545	— 9.0	"	"
28 α Tauri	— 0.047	+ 31.4	"	"
29 α Aurigae	+ 0.332	+ 31.5	"	"
30 β Tauri	+ 0.050	— 14.3	"	"
31 Orion-Gruppe	— 0.367	— 1.4	"	"
32 α Orionis	— 0.33	+ 20.3	"	"
33 β Aurigae	+ 0.266	— 0.5	"	"
34 γ Geminorum	— 0.247	— 6.0	"	"
35 α Geminorum	— 0.035	+ 14.5	"	"
36 β Geminorum	— 0.102	— 34.1	"	"
37 α Hydrae	— 0.667	+ 3.2	"	"
38 ε Leonis	— 0.837	— 21.2	"	"
39 α Leonis	— 0.337	+ 2.5	"	"
40 γ Leonis	— 0.105	— 26.4	"	"

Stern	$\cos \mu$	$w \cos \nu$
41 δ Leonis	— 0·072	— 6·6 engl. Meilen
42 β Leonis	— 0·091	— 12·9 " "
43 Urs. mai.-Gruppe	+ 0·502	+ 23·5 " "
44 γ Virginis	— 0·256	+ 19·9 " "
45 ϵ Virginis	— 0·062	— 14·8 " "
46 α Virginis	— 0·021	— 15·1 " "
47 ϵ_1 Bootis	+ 0·405	+ 2·8 " "
48 β Librae	+ 0·231	— 9·4 " "
49 α Coronae	+ 0·508	+ 30·9 " "

Die Vertheilung der Winkel ν entspricht natürlich der Vertheilung der Bewegungsrichtungen der Fixsterne. Fragen wir uns nun, was wir erhalten, wenn wir den Mittelwert sämtlicher positiven $w \cos \nu$ und den sämtlicher negativen $w \cos \nu$ bilden. Von vornherein ist klar, dass für alle $+ w \cos \nu$ der Winkel ν zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, während er für alle $- w \cos \nu$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π zu liegen kommt. Es ist daher der Mittelwert der $+ w \cos \nu$ gleich

$$w \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \nu \sin \nu \, d\nu = w \left[\frac{\sin^2 \nu}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{w}{2}.$$

In gleicher Weise ist der Mittelwert der $- w \cos \nu$ gleich

$$w \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \nu \sin \nu \, d\nu = - \frac{w}{2}.$$

Wenn wir daher den absoluten Betrag des Mittelwertes der positiven $w \cos \nu$ und jenen der negativen addieren, so erhalten wir die mittlere Fixsterngeschwindigkeit. Wir erhalten nach obiger Tabelle $+ \frac{w}{2} = 13\cdot1$, $- \frac{w}{2} = - 13\cdot1$. Die treffliche Übereinstimmung der beiden $\frac{w}{2}$ beweist aufs beste, wie gerechtfertigt unsere Behandlungsweise der Fixsternwelt ist. Es ergibt sich also für die mittlere Fixsterngeschwindigkeit

$$w = 26\cdot2 \text{ engl. Meilen} = 42\cdot2 \text{ km.}$$

Wie es uns gelungen ist, aus den Eigenbewegungen der Fixsterne in der Sehlinie deren mittlere Geschwindigkeit zu berechnen, so ist es auch unter den gemachten Annahmen nicht

schwer, für die mittlere laterale Eigenbewegung der Sterne in einem bestimmten Raume einen mathematischen Ausdruck zu finden. Es würde dabei zu überaus verwickelten und langwierigen Rechnungen führen, wollte man direct die Sonnenbewegung und die Bewegung der Sterne in die Rechnung einführen. Ich gieng daher so vor, dass ich zuerst die Rechnung für zwei fingierte Fälle durchführte und sodann durch Combination derselben eine Methode fand, welche der Wirklichkeit entspricht.

Wir wollen also vorerst annehmen, sämmtliche Fixsterne seien in Ruhe, und nur die Sonne bewege sich. In diesem Falle wäre also die Eigenbewegung der Fixsterne nur eine scheinbare, durch die Sonnenbewegung hervorgebrachte. Ist $0x$ die Richtung, in welcher sich die Sonne bewegt, $0S=r$ die Richtung bezügl. Entfernung Sonne-Stern, α der Winkel, welchen die genannten Richtungen einschließen, so erhalten wir für den Stern S die laterale Eigenbewegung

$$a = \frac{v \sin \alpha}{r},$$

wobei v die Geschwindigkeit der Sonne ist. Diese Eigenbewegung wird jedem Sterne zukommen, dessen Lage mit der Bewegungsrichtung der Sonne den Winkel α oder $\pi - \alpha$ einschließt, und dessen Entfernung von der Sonne r ist. Ist nun die Zahl aller Sterne in der Entfernung r gleich N , so ist die Zahl jener, welchen die Eigenbewegung a zukommt, und die mit der Sonnenbewegung den Winkel α einschließen, gleich $\frac{N}{2} \sin \alpha d\alpha$. Dieselbe Zahl erhalten wir für jene Sterne, die mit der Bewegungsrichtung der Sonne den Winkel $\pi - \alpha$ bilden. Es ist somit die Gesamtzahl der betreffenden Sterne gleich $N \sin \alpha d\alpha$. Multiplicieren wir die Zahl der Eigenbewegungen mit der Eigenbewegung selbst, so erhalten wir für die Summe sämmtlicher Eigenbewegungen $\frac{Nv}{r} \sin^2 \alpha d\alpha$. Dieser Ausdruck, von $\alpha=0$ bis $\alpha=\frac{\pi}{2}$ integriert, ergibt für die Summe sämmtlicher Eigenbewegungen jener Sterne, welche sich in der Entfernung r von der Sonne befinden,

$$s = \frac{\pi N v}{4 r}.$$

Ist nun n die Zahl der Sterne in der Volumeinheit, so ist

$$N = 4\pi n r^2 dr,$$

daher

$$s = \pi^2 n v r dr.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck neuerdings nach r , und zwar von 0 bis r , so gibt uns das Resultat die Summe der Eigen-

bewegungen aller Sterne, deren Entfernung von der Sonne die Größe r nicht übersteigt. Dieselbe ist

$$\Sigma = \frac{\pi^2 n v r^2}{2}.$$

Die Zahl dieser Sterne ist $\frac{4\pi}{3} r^3 n$. Dividieren wir die Summe sämtlicher Eigenbewegungen durch die Zahl derselben, so erhalten wir die mittlere Eigenbewegung

$$a_m = \frac{3\pi v}{8r}.$$

Wir schreiten nun zur Berechnung eines zweiten Falles. Wir setzen voraus, sämtliche Sterne seien in Bewegung und nur die Sonne befinde sich in Ruhe. Von vornherein sieht man ein, dass bei dieser Annahme, von der Sonne aus betrachtet, die Bewegungsverhältnisse der Fixsterne nach allen Richtungen des Raums hin dieselben sind. Wir erhalten wie oben, wenn wir eine bestimmte Entfernung r ins Auge fassen,

$$a = \frac{w \sin \alpha}{r},$$

wobei hier w die mittlere Fixsterngeschwindigkeit ist. Desgleichen ist die Zahl der Sterne dieser Eigenbewegung gleich $N \sin \alpha d\alpha$ und die Summe der Eigenbewegungen $\frac{Nw}{r} \sin^2 \alpha d\alpha$. Ganz analog weitergehend finden wir schließlich für die mittlere Eigenbewegung sämtlicher Sterne, deren Entfernung von der Sonne r nicht überschreitet,

$$a_m = \frac{3\pi w}{8r}.$$

Wir erhalten also in beiden Fällen denselben Ausdruck nur mit dem Unterschiede, dass wir in dem einen Falle die Geschwindigkeit der Sonne, in dem anderen die mittlere Sterngeschwindigkeit in die Formel einzusetzen haben.

Es ist für die Darstellung einer Bewegung ganz gleichgiltig, ob wir annehmen, dass sie innerhalb der kleinsten Zeittheilchen continuierlich oder sprungweise von statten geht. Wir denken uns daher zur Erleichterung der Rechnung, dass die Sonne ruckweise in ihrer Bahn vorwärts schreitet, u. zw. soll dies folgendermaßen geschehen. In der ersten Hälfte eines jeden Zeitdifferentials bewege sich die Sonne mit der doppelten Geschwindigkeit, dafür soll sie in der zweiten Hälfte derselben in Ruhe bleiben. Für die Sterne nehmen wir das Gegentheil an. Diese sollen in Ruhe bleiben, wenn sich die Sonne bewegt, sich aber mit der doppelten ihnen zukommenden mittleren Geschwindigkeit bewegen, wenn die Sonne ruht. Unter dieser Annahme, die an der Erscheinung nichts ändert, gestaltet sich unsere Rechnung ungemein einfach. Wir haben nämlich jetzt die Erscheinung, wie sie in Wirklichkeit geschieht, auf unsere zwei

fingierten Fälle zurückgeführt, für die wir ein und denselben mathematischen Ausdruck fanden. Setzen wir daher in unsere Formel anstatt v bezüglich w die Summe $v + w$ ein, so erhalten wir die wirkliche mittlere Eigenbewegung der Fixsterne

$$a_m = \frac{3\pi(v+w)}{8r}.$$

Diese Formel können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$r = \frac{3\pi(v+w)}{8a_m}.$$

In dieser Gleichung ist v und w bekannt, desgleichen können wir den Wert für a_m finden, wenn wir den Mittelwert der lateralen Eigenbewegungen* sämtlicher Sterne bilden mit deren Hilfe wir v und w fanden. Der Wert von r , welchen wir dadurch erhalten, ist dann die Entfernung der weitesten Sterne, welche in unserer Rechnung vorkommen. Zur Berechnung des r benutzte ich jene Werte von a , wie sie Mädler*) bestimmt hat, und welche in folgender Tabelle zusammengestellt sind. Dabei sind das Jahrhundert und die Bogensecunde als Einheit gewählt.

Stern	a	Stern	a
1 α Ophiuchi	22.9	26 β Persei	1.4
2 γ Draconis	6.3	27 α Persi	7.1
3 α Lyrae	34.9	28 α Tauri	21.1
4 γ Lyrae	1.9	29 α Aurigae	43.8
5 ζ Aquilae	12.3	30 β Tauri	20.8
6 α Aquilae	66.0	31 Orion-Gruppe	3.2
7 Cygnus-Gruppe	15.4	32 α Orionis	5.1
8 α Delphini	16.8	33 β Aurigae	2.6
9 α Cygni	0.6	34 γ Geminorum	5.0
10 α Cephei	16.3	35 α Geminorum	18.1
11 ϵ Pegasi	4.6	36 β Geminorum	63.0
12 ζ Pegasi	1.4	37 α Hydrae	3.5
13 η Pegasi	3.2	38 ϵ Leonis	5.4
14 α Pisc. austr.	39.7	39 α Leonis	24.8
15 β Pegasi	25.0	40 γ Leonis	32.8
16 α Pegasi	18.5	41 δ Leonis	21.1
17 α Andromedae	20.5	42 β Leonis	51.4
18 γ Pegasi	3.7	43 Urs. mai.-Gruppe	12.0
19 β Cassiopeiae	53.8	44 γ Virginis	51.8
20 β Ceti	19.6	45 ϵ Virginis	24.4
21 γ Cassiopeiae	2.1	46 α Virginis	5.7
22 β Andromedae	24.5	47 ϵ_1 Bootis	2.1
23 δ Cassiopeiae	32.9	48 β Librae	9.6
24 α Arietis	24.2	49 α Coronae	14.2
25 α Ceti	12.7		

*) Untersuchungen über die Fixsternsysteme. II, S. 189.

Bei der „Cygnus-Gruppe“ fehlt die Eigenbewegung des Sternes ζ , doch hat das auf das Hauptresultat keinen beachtenswerten Einfluss. Aus dieser Tabelle folgt $a_m = 19''$ oder in Bogenmaß ausgedrückt

$$a_m = 19'' = 921 \cdot 10^{-7}.$$

Nach dem Früheren*) ist $v = 32.4 \text{ km}$, $w = 42.2 \text{ km}$, also $v + w = 74.6 \text{ km}$. Beziehen wir diese Werte auf das Jahrhundert und die Erdweite $= 150,000.000 \text{ km}$ als Einheiten, so erhalten wir $v + w = 1569$. Führen wir diese Werte in obige Formel für r ein, so ergibt sich

$$r = 20 \cdot 10^6 \text{ Erdweiten.}$$

Da die von uns benützten Sterne so ziemlich die Sterne erster bis dritter Größe sind, so ist $20 \cdot 10^6$ Erdweiten für die Entfernung der Sterne dritter Größe zu nehmen und wir erhalten für dieselben die Parallaxe $0.0103''$.

Nach Struve**) sind die relativen Entfernungen der Sterne, wie folgende Tabelle zeigt:

1. und 2. Classe	Entfernung:	1
3.	„	1.89
4.	„	2.76
5.	„	4.00
6.	„	5.78
7.	„	8.32.

Daraus können wir leicht die absolute Entfernung und die Parallaxe der verschiedenen Sternklassen bestimmen. Dieselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Entfernung	Parallaxe
1. und 2. Classe	$11 \cdot 10^6$ Erdweiten	$0.0187''$
3.	20	0.0103
4.	29	0.0071
5.	42	0.0049
6.	61	0.0034
7.	88	$0.0023.$

Für mehrere Sterne erster Größe wurden Bestimmungen ihrer Parallaxe gemacht, doch sind diese Angaben noch ziemlich unsicherer Natur. Hier einige Angaben: ***) Capella $0.31''$, Procyon $0.24''$, Wega $0.20''$, Sirius $0.19''$, Arctur $0.13''$. Die Parallaxen der übrigen Fixsterne erster und zweiter Größe

*) S. 7 und 9.

**) Klein, Allgemeine Himmelsbeschreibung, II. S. 122.

***) Littrow, Wunder der Sternenwelt. 1886, S. 134.

sind natürlich noch viel kleiner anzunehmen, so dass höchst wahrscheinlich für die mittlere Parallaxe dieser Sterne $0.1''$ noch viel zu gross ist. Das stimmt aber mit unseren Resultaten sehr gut überein.

Es ist zu bemerken, dass es hier auf Grund hinreichend sicherer Messungen gelungen ist, die Entfernung der Fixsterne zu berechnen.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Richtigkeit unserer ursprünglichen Annahme zu beweisen, nämlich, dass weder die Sonne noch die Fixsterne eine Centralbewegung beschreiben. Nach Mädlers*) Untersuchungen geht aus den Eigenbewegungen der Fixsterne hervor, dass für den Fall einer Centralbewegung der Sonne und der übrigen Sterne Aleyone noch am wahrscheinlichsten das Gravitationscentrum bildet. Können wir also nachweisen, dass dies nicht möglich ist, so ist der Fall einer Centralbewegung überhaupt ausgeschlossen.

Indem Mädler die Parallaxe von 61 Cygni $0''.3843$ setzt; erhält er für die Parallaxe von Aleyone $0.006097''$, für deren Entfernung 34 Mill. Erdweiten und für die Masse, welche die Centralbewegung der Sonne bewirken soll, $M = 117,400.000$, die Sonnenmasse als Einheit gesetzt.

Führen wir in die Rechnung Mädlers für die Parallaxe von 61 Cygni den Wert $0.51''$ ein (dieser Wert ist gegenwärtig der wahrscheinlichste**), so ändern sich die verschiedenen Angaben folgendermaßen. Es ist die Parallaxe von Aleyone $0.008928''$ oder ihre Entfernung von uns ungefähr 23.2 Mill. Erdweiten. Die Umlaufszeit der Sonne, nach ihrer Angularbewegung ($0.0712''$) berechnet, ist 18,200.000 Jahre, und die Summe aller Massen, welche innerhalb einer mit dem Radiusvector des Sonnensystems um Aleyone beschriebenen Kugel liegen, ist $M = 37,200.000$.

Aus unserer Tabelle (S. 13) sehen wir, dass ungefähr die Sterne von der Größe 3.5 die Entfernung von 23.2 Mill. Meilen haben. Nun ist die Zahl der Sterne 1. bis 3.5. Größe 155, und zwar für die nördliche Halbkugel.***) Nehmen wir die Sterne der südlichen Halbkugel noch dazu, so erhalten wir rund 300. Da nun Mädler selbst behauptet †), dass die Annahme, die Fixsterne seien an Masse derjenigen unserer Sonne nicht erheblich überlegen, nirgends auf eine Unwahrscheinlichkeit führe, wohl aber die Annahme des Gegentheils, so werden wir die Masse

*) „Die Centralsonne“, Dorpat 1846.

**) Littrow, W. d. St., S. 133.

***) Littrow, W. d. St., S. 717 ff.

†) Untersuchungen über die Fixsterne II. S. 2 ff.

eines größeren Fixsterncomplexes nicht unterschätzen, wenn wir jedem einzelnen Sterne die Masse unserer Sonne zuerkennen. Dies angenommen, könnte aber die Summe aller Massen, welche die Ursache einer Centralbewegung unserer Sonne sein sollen, nicht größer als 300 Sonnenmassen sein. Die Unvereinbarkeit dieser Zahl mit 37.2 Millionen beweist zur Genüge die Richtigkeit unserer obigen Annahmen.

II.

Das Resultat, dass wohl die meisten Fixsterne nicht eine Centralbewegung beschreiben, sondern ihren Weg in höchst verwickelter Weise durch den Weltraum nehmen, sagt uns, dass die Möglichkeit eines Zusammenstosses zweier Fixsterne nicht ausgeschlossen ist, ja dass vielmehr ein jeder Stern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nach einer bestimmten Zeit mit einem anderen zusammentreffen muss. Wir wollen daher die Art und Weise, in welcher zwei Fixsterne im Weltraum einander begegnen, etwas näher betrachten.

Die Masse des einen Sterns sei M , die des andern m . Der Mittelpunkt des Sterns M sei der Ursprung eines Polarcoordinatensystems, welches sich mit dem Sterne parallel zu sich selbst fortbewegt. Auf dasselbe bezogen, sei die Geschwindigkeit des Sterns m gleich u . Haben sich die Sterne soweit einander genähert, dass sich die gegenseitige Anziehung geltend macht, so wird ihre Bewegung durch die bekannte Gleichung der Hyperbel

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

dargestellt. Hier ist

$$a = \frac{h(M+m)}{u^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{4c^2 u^2}{h^2(M+m)^2} + 1}.$$

h ist die Gravitationsconstante und c die Flächengeschwindigkeit. Daraus folgt für die kleinste Entfernung der Mittelpunkte beider Sterne

$$r_0 = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon} = a(\varepsilon - 1).$$

Nennen wir die Summe der Radien beider Sterne ϱ' , so wird ein Zusammenstoss stattfinden, wenn $r_0 < \varrho'$, eine Berührung, wenn $r_0 = \varrho'$. Wir setzen da natürlich voraus, dass wir es mit starren Körpern zu thun haben, welche ihre Form durch die Annäherung nicht ändern. Ob dies bei den Fixsternen der Fall ist oder nicht, wollen wir jetzt nicht weiter in Betracht ziehen.

Nennen wir ϱ den Abstand des Brennpunktes unserer Hyperbel von den Asymptoten, so $\varrho = \frac{2c}{u}$. Die Flächengeschwindigkeit c ist nämlich nichts anderes als der Inhalt eines Dreieckes, dessen Höhe ϱ und dessen Grundlinie u die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in unendlicher Entfernung ist. Da aber auch $2c = v_0 r_0$, wenn v_0 die Geschwindigkeit für die Entfernung r_0 ist, und

$$v_0 = \sqrt{\frac{2h(M+m)}{r_0} + u^2},$$

so

$$\varrho = r_0 \sqrt{\frac{2h(M+m)}{u^2 r_0} + 1}.$$

Für den Fall, dass beide Sterne gleiche Masse haben, ist

$$\varrho = r_0 \sqrt{\frac{4hm}{u^2 r_0} + 1}. \quad (5)$$

Bedenken wir nun, dass wir den größten Theil der Bahn der Sterne als geradlinig ansehen können, da ja jenes stärker gekrümmte Stück in der Nähe des Brennpunktes der Hyperbel nur einen verschwindend kleinen Theil der ganzen Bahn ausmacht, so begehen wir keinen nennenswerthen Fehler, wenn wir den gekrümmten Theil der Bahn überhaupt vernachlässigen. Dieses Vorgehen entspräche streng der Wirklichkeit, wenn die Sterne gar keine Anziehung auf einander ausübten, und es wäre dann die größte Annäherung, welche zwei Sterne bei ihrer Begegnung erführen, gleich ϱ . Wenn wir daher nach der wahrscheinlichsten Zeit fragen, innerhalb welcher ein Fixstern sich einem anderen auf eine gewisse Entfernung r_0 nähert, so können wir bei unserer Rechnung ganz von der Schwerkraft absehen, nur müssen wir dann für r_0 das entsprechende ϱ in die Rechnung einführen. Wenden wir dieses Resultat, anstatt auf zwei specielle Sterne, auf den ganzen Fixsternhimmel an, wobei wir der einfacheren Rechnung halber annehmen, dass die Geschwindigkeiten und Massen für alle Sterne gleich seien, so handelt es sich nur noch darum, den Mittelwert von ϱ zu finden. Derselbe ist bekannt, wenn wir den Mittelwert von u kennen. Dieser wird aber auf folgende Weise gefunden.

Ist w die absolute mittlere Geschwindigkeit der Sterne, u die relative Geschwindigkeit zwischen irgend zwei Sternen, und sind, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten des einen, α', β', γ' jene des anderen Sternes, so

$$u^2 = (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 = 2w^2 (1 - \cos \vartheta),$$

wenn ϑ der Winkel der beiden Bewegungsrichtungen der Sterne ist. Wenn wir daher eine Kugelfläche mit dem Radius w construieren, und es bilden zwei Radien derselben den Winkel ϑ , so stellt die Verbindungsgerade der beiden Oberflächenpunkte der Radien die Größe u dar. Ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Sterne N , so ist die Zahl derjenigen, welche mit einem bestimmten Sterne in ihren Bewegungsrichtungen den Winkel ϑ einschließen, $\frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta$. Bilden wir nun in der bekannten Weise den Mittelwert der relativen Geschwindigkeiten, indem wir die Summe sämmtlicher Geschwindigkeiten durch die Zahl derselben dividieren, so erhalten wir

$$\int_0^\pi u \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2} = \int_0^\pi \sqrt{2w^2(1 - \cos \vartheta)} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2} = \frac{4w}{3}.$$

Daraus folgt nun mit Zuhilfenahme der Gleichung (5)

$$\varrho = r_0 \sqrt{\frac{9hm}{4w^2 r_0}} + 1. \quad (6)$$

Wie wir bereits erwähnten, muss nach unserer Anschauung im Laufe der Zeit ein jeder Stern sich irgend einem anderen nähern, möglicherweise mit ihm zusammenstoßen. Es wird daher einen mittleren Weg geben, welchen ein jeder Stern von einer bestimmten Annäherung, die gleich oder kleiner als r_0 ist, bis zur nächsten, ebenso definierten, zurücklegt. Diese mittlere Weglänge λ wollen wir nun berechnen. Wie wir schon öfter thaten, wollen wir den Weltraum gleichmäßig mit Sternen erfüllt annehmen, sämmtliche Sterne haben gleiche Massen und Geschwindigkeiten, die Bewegungsrichtungen seien allseits gleichmäßig vertheilt, und die gegenseitige Anziehung sei gleich Null. Unser Problem deckt sich dann wesentlich mit folgendem. Denken wir uns, sämmtliche Sterne wären Kugeln vom Durchmesser ϱ , so ist λ der mittlere Weg, welchen ein Stern von einem Zusammenstoße mit einem anderen Sterne bis zum nächsten Zusammenstoße zurücklegen muss. Schließlich können wir das Problem darauf reducieren, die mittlere Weglänge eines Punktes zu suchen, der sich mit der mittleren Fixsterngeschwindigkeit durch die übrigen Sterne vom Radius ϱ bewegt. Zur Lösung der Aufgabe wollen wir vorerst annehmen, sämmtliche Sterne seien in Ruhe, und es bewege sich ein Punkt in gerader Linie durch dieselben. Die Wahrscheinlichkeit W , mit welcher dieser Punkt, ohne auf einen Stern zu stoßen, den Weg x zurücklegt, ist offenbar eine Function dieses Weges, also $W = f(x)$. Die Wahrscheinlichkeit W' , mit welcher der Weg $x + dx$ zurückgelegt

wird, ist daher $W' = f(x + dx) = W + \frac{dW}{dx} dx$. Die Wahrscheinlichkeit des Weges dx ist aber bekannt. Ist die Zahl der Sterne in der Volumeinheit N , der Querschnitt eines Sterns q , so legt der bewegliche Punkt den Weg dx mit der Wahrscheinlichkeit $1 - Nq dx$ zurück. Daraus folgt nun

$$W' = W + \frac{dW}{dx} dx = W(1 - Nq dx)$$

oder

$$\frac{dW}{W} = -Nq dx,$$

woraus wir durch Integration

$$W = A e^{-Nq x}$$

erhalten, wenn A eine Constante. Für $x = 0$ ist $W = 1$, daher $A = 1$ und schließlich

$$W = e^{-Nq x} = e^{-N\pi q^2 x}.$$

Die Anzahl der Sterne, welche den Weg x zurücklegen, ist natürlich proportional der Wahrscheinlichkeit dieses Weges, also gleich $a e^{-\alpha x} dx$, wobei a der entsprechend gewählte Coefficient und $\alpha = N\pi q^2$ ist. Die Summe dieser Wege ist dann $a x e^{-\alpha x} dx$; für die Zahl aller vorkommenden Wege folgt daraus

$$a \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{a}{\alpha};$$

desgleichen für die Summe aller Wege

$$a \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{a}{\alpha^2}.$$

Die mittlere Weglänge λ erhalten wir, wenn wir die Summe aller Wege durch die Zahl derselben dividieren, daher

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{N\pi q^2}.$$

Die Zahl der Zusammenstöße, welche unser Punkt in der Zeiteinheit erleidet, ist

$$\frac{w}{\lambda} = N\pi q^2 w,$$

wenn w die Geschwindigkeit des Punktes. In Wirklichkeit können

wir diese Formel nun nicht anwenden, da ja alle Sterne in Bewegung sind. Wir brauchen aber für w nur die relative Geschwindigkeit, welche die Sterne gegen einander haben, zu setzen, um das richtige Resultat zu erhalten. Dieselbe ist, wie wir auf Seite 17 fanden, gleich $\frac{4w}{3}$. Es ist daher die Zahl der Zusammenstöße in der Secunde gleich $\frac{4N\pi\varrho^2w}{3}$ und die mittlere Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4N\pi\varrho^2}. \quad (7)$$

Ich brauche wohl kaum zu erwähnen, dass sich die hier und im folgenden gemachten Berechnungen vollständig mit den in der kinetischen Gastheorie angewandten Methoden decken. Der Unterschied liegt nur in der Größenordnung, indem es die Gastheorie mit sehr kleinen Größen zu thun hat, während unsere Rechnungen sich mit überaus großen Zahlen befassen. Um davon eine Vorstellung zu erlangen, wollen wir die numerische Berechnung von λ für einen speciellen Fall durchführen. Wie wir bereits zeigten, existiert für jeden Stern eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass er im Laufe der Zeit mit einem anderen zusammenstößt. Wir können die Sache jetzt aber auch umkehren und sagen: Jeder Stern, wie er jetzt vorhanden ist, ist seinerzeit aus einem Zusammenstoße anderer Sterne hervorgegangen. Wir können diesen Zeitpunkt den Geburtstag, jenen den Sterbetag des Sterns nennen, und es ist uns bei diesen Anschauungen möglich, den mittleren Weg, welchen die Fixsterne während ihrer Lebenszeit zurücklegen, als auch diese mittlere Lebensdauer selbst zu berechnen. Dass es sich dabei nicht um die Bestimmung genauer Zahlen, sondern nur der ungefähren Größenordnung handeln kann, versteht sich von selbst. Wir wollen allen Sternen die Masse und den Durchmesser der Sonne geben. Sodann wird in Gleichung (6) $r_o = 1,400.000 \text{ km}$, die mittlere Dichte σ der Sonne ist 1.4, mithin $m = \frac{\pi}{6} r_o^3 \sigma = 2$, wenn wir 10^6 km als Längeneinheit annehmen, $h = 66 \cdot 10^{-9}$, $w = 42 \cdot 10^{-6}$ (s. S. 13), daraus folgt $\varrho = 15.4 \cdot 10^{-6} \text{ km}$. Zur Berechnung des λ fehlt uns noch N , d. i. die Zahl der Sterne in der Volumeinheit. Für die Entfernung der Sterne 3. Größe fanden wir $20 \cdot 10^6$ Erdweiten; die Zahl der Sterne innerhalb dieser Entfernung ist etwa 280. Wenn wir also unsere Volumeinheit nicht sehr groß wählen, so wird N sehr klein. Wir wollen deshalb 10^7 Erdweiten als neue Längeneinheit einführen. Es befinden sich dann in einer Kugel, deren Halbmesser 2 ist, 280 Sterne, und daraus folgt für die Volumeinheit $N = 8.5$.

In unserer neuen Einheit ist $q = 103 \cdot 10^{-10}$. Setzen wir diese Werte in Gleichung (7) ein, so erhalten wir

$$\lambda = 29 \cdot 10^{20} \text{ Erdweiten.}$$

D. h.: Ist die Sternvertheilung im ganzen Himmelsraume eine ähnliche wie diejenige der Sterne 1. bis 3. Größe, so legt ein jeder Stern Zeit seines Lebens im Mittel einen Weg von $29 \cdot 10^{20}$ Erdweiten zurück. Um nur einigermaßen eine Andeutung von der ungeheueren Größe dieses Weges zu geben, sei erwähnt, dass die Entfernung der kleinsten, mit den besten Fernröhren eben noch wahrnehmbaren Sterne, d. i. der Sterne 16. Größe, etwa 6 billionenmal zu nehmen ist, um obigen Weg zu erhalten.

Da wir die mittlere Fixsterngeschwindigkeit kennen, so ist es ein Leichtes, die mittlere Lebensdauer der Fixsterne, d. i. die Zeit, in welcher sie die mittlere Weglänge zurücklegen, zu berechnen. Wir erhalten dafür

$$328 \cdot 10^{18} \text{ Jahre.}$$

Wenn wir also die Zahl der in den besten Fernröhren sichtbaren Sterne selbst nach Millionen schätzen, so würde immerhin die Zeit, innerhalb welcher überhaupt ein Fixsternzusammenstoß zu gewärtigen ist, nach Billionen von Jahren zu zählen sein. Es ist demnach ein derartiger Zusammenstoß ein sehr seltenes Ereignis.

Das Rechnungsverfahren bleibt natürlich dasselbe, wenn wir nicht nach dem Zusammenstoße, sondern einfach nach der Annäherung zweier Fixsterne bis auf eine bestimmte Entfernung fragen. Derartige Begegnungen sind natürlich umso häufiger, je größer wir die Distanz nehmen, innerhalb welcher sie stattfinden sollen. Solche Begegnungen dürften wir am Himmel in größerer Zahl wahrnehmen können, indem höchst wahrscheinlich manche von den physischen Doppelsternen keine elliptischen Bahnen umeinander beschreiben, sondern nur in hyperbolischen Bögen von ihrer ursprünglich geradlinigen Bahn abweichen. Ich halte es für überflüssig, weiter auseinanderzusetzen, wie sämtliche Erscheinungen in der Fixsternwelt, wie Doppelsterne, Nebelflecke etc., sich aus den erwähnten Zusammenstößen folgern lassen.

Während wir von den Fixsternen nur einen ihnen allen zukommenden wahrscheinlichsten Wert ihrer Lebensdauer bestimmen konnten, ist es uns möglich, diesen Wert von unserer Sonne, deren Geschwindigkeit wir kennen, speciell anzugeben.

Es sei wieder die Geschwindigkeit der Sonne v , die mittlere Geschwindigkeit eines Fixsternes w . Diese zwei Geschwindigkeiten wollen wir nach den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems zerlegen, u. zw. seien die Componenten von v gleich u_1, v_1, w_1 , die von w gleich u_2, v_2, w_2 . Die Componenten der relativen Geschwindigkeit der Sonne gegen den Stern sind dann $u_1 - u_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2$, und das Quadrat der resultierenden relativen Geschwindigkeit ist

$$r^2 = (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel der beiden Bewegungsrichtungen ist. Wenn wir daher zwei concentrische Kugelflächen, deren Radien v und w den Winkel ϑ einschließen, construieren, so stellt die Verbindungsgerade der beiden Oberflächenpunkte der Radien die Größe r dar. Ist nun die Zahl der Sterne in der Volumeinheit N , so ist die Zahl derjenigen, die dem Winkel ϑ entsprechen, $\frac{N}{2} \sin \vartheta d\vartheta$ und die Summe sämtlicher Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \int_0^\pi \sqrt{v^2 + w^2 - 2vw \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta &= \frac{N}{2} \left[\frac{1}{3vw} (v^3 + w^3 - 2vw \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}} \right]_0^\pi = \\ &= N \left(v + \frac{1}{3} \frac{w^2}{v} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die mittlere relative Geschwindigkeit

der Wert
$$v + \frac{1}{3} \frac{w^2}{v}$$

und für die Zeit, welche von einer Begegnung zwischen der Sonne und einem Fixsterne bis zur nächsten verfließt,

$$\frac{1}{N\pi \varrho^2 \left(v + \frac{1}{3} \frac{w^2}{v} \right)}.$$

Für die mittlere Weglänge erhalten wir schließlich

$$\lambda = \frac{v}{N\pi \varrho^2 \left(v + \frac{1}{3} \frac{w^2}{v} \right)}.$$

Führen wir nun die Rechnung in Zahlen durch, so gestaltet sich die Arbeit ganz analog dem bereits bei den Fixsternen eingeschlagenen Verfahren. Natürlich haben wir dann in die Gleichung (6) anstatt $\frac{4w}{3}$ den Wert von $v + \frac{1}{3} \frac{w^2}{v}$ zu setzen, wobei $v = 32.4 \text{ km}$ (S. 7) ist. Das Resultat der Rechnung ist

$$\lambda = 185 \cdot 10^{19} \text{ Erdweiten},$$

und die wahrscheinliche Lebensdauer der Sonne beträgt

$272 \cdot 10^{18}$ Jahre.

Angenommen, es hätte die Sonne bis zur Gegenwart die Hälfte des ihr zukommenden Weges zurückgelegt, so würden ihr ungefähr noch 140 Trillionen Jahre Lebenszeit zur Verfügung stehen.

Eine Annäherung der Sonne an einen anderen Stern ist natürlich mit einer Störung des Planetensystemes verbunden, was dann Zusammenstöße der Planeten unter einander herbeiführen würde. Dazu würde z. B. eine Annäherung auf 100 Erdweiten vollständig genügen. Für die mittlere Zeit zwischen zwei derartigen Annäherungen finden wir aber nach obigen Formeln 347 Billionen Jahre. Wie ungeheuer groß auch für menschliche Vorstellungen diese Zahl ist, für kosmische Ereignisse erscheint sie doch nur als kurze Frist.
