Sur les lignes singulières des surfaces algébriques.

(*Par Mr.* Halphen, *à Paris.*)

Le Mémoire actuel a pour objet l'étude des lignes singulières les plus générales qui se puissent rencontrer sur les surfaces algébriques. Je vais en donner un résumé succinct. Quelques mots au sujet des courbes planes serviront, par un rapprochement naturel et nécessaire, à faire saisir la nature du problème principal que je me suis proposé de résoudre.

Aux environs d'un point singulier, une courbe algébrique peut être envisagée comme la superposition de plusieurs courbes élémentaires distinctes, dont l'ordonnée de chacune est représentée par un développement en série. Ces courbes élémentaires, nommées par Mr. Cayley branches superlinéaires, je les appelle plus abréviativement des cycles, pour des raisons dont je n'ai pas à parler ici. Dans beaucoup de problèmes, chaque cycle est suffisamment caractérisé par deux nombres entiers n, ν, que l'on peut appeler l'ordre et la classe de ce cycle. Le premier est l'ordre de multiplicité du point singulier sur le cycle; quant au second, il est ainsi défini: le quotient $\nu:n$ est l'ordre commun du contact de chaque branche du cycle avec sa tangente au point singulier. Les nombres n, ν suffisent notamment à déterminer leurs analogues pour une figure corrélative: ce sont ces mêmes nombres en ordre inverse.

On ne manquera pas de remarquer qu'un point simple d'une courbe est un cas particulier d'un point singulier ainsi envisagé.

Sur une surface S, considérons à la fois une ligne (a), une section plane arbitraire (S) et un point de rencontre a de ces deux lignes. La surface S, aux environs du point a, est caractérisée dans une certaine mesure par l'ordre et la classe de chacun des cycles en lesquels (S) se décompose au point a. Quels éléments faut-il connaître en outre pour pouvoir trouver les nombres analogues et relatifs à une surface corrélative de S? Telle est la question qui s'offre tout d'abord. Les résultats suivants fournissent la réponse.

1. Aux environs d'une ligne algébrique (a) tracée sur une surface algébrique S, cette surface est la superposition de surfaces élémentaires dont chacune jouit de la propriété suivante: au point de rencontre avec (a) une section plane faite arbitrairement dans une surface élémentaire se compose d'un seul cycle. Je donne aux surfaces élémentaires le nom de cycles de nappes. L'ordre n et la classe ν du cycle unique que possède, en un point de rencontre avec (a), une section plane de cette surface élémentaire, je les appelle l'ordre et la classe du cycle de nappes. J'appelle (a) la ligne-origine du cycle.

2. En chaque point de la ligne-origine, toutes les nappes d'un même cycle ont un même plan tangent, qui contient la tangente de la ligne-origine.

3. Ce plan tangent peut être constant le long de la ligne-origine, ou bien variable. Dans le premier cas, la ligne est plane, et il y correspond, dans une figure corrélative, un point singulier. Dans le second cas, il y correspond une ligne. C'est à ce dernier cas que se rapporte toute ce qui suit.

4. La classe ν d'un cycle de nappes (dont le plan tangent est variable) est égale ou inférieure à l'ordre n de ce cycle.

5. Quand la classe est égale à l'ordre, la théorie de l'indicatrice est applicable.

6. Tout cycle de nappes a pour corrélatif un cycle de nappes. Les classes de deux cycles corrélatifs sont égales.

7. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe, et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

Pour les autres cas, il est nécessaire de distinguer trois groupes principaux et des sous-groupes.

8. Groupe A. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine n'est pas osculateur de cette ligne.

Sous-groupe $A_1(\nu, \nu)$; cette notation indique que l'ordre et la classe sont égaux à ν, mais avec cette particularité que l'indicatrice est parabolique en chaque point de la ligne-origine. En chaque point de cette ligne, une droite unique a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur au 1^er^. Soit $(1+\lambda)$ cet ordre.

Sous-groupe $A'_1(n, \nu)$, $n > \nu$.

Un cycle A_1 défini par les nombres ν, λ, a pour corrélatif un cycle A'_1 défini par les nombres $n = (1+\lambda)\nu$, et ν.

Réciproquement un cycle $A'_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $A_1(\nu, \nu)$, pour lequel $\lambda = \frac{n-\nu}{\nu}$.

9. Groupe *B*. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine est osculateur de cette ligne.

Sous-groupe $B_1(n, \nu)$, $\nu < \frac{n}{2}$.

Sous-groupe $B'_1(2\nu, \nu)$, avec cette particularité que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur à 2. Soit $(2+\theta)$ l'ordre de ce contact.

Sous-groupe $B_2(2\nu, \nu)$, avec cette circonstance que l'ordre de ce dernier contact est égal à 2.

Sous-groupe $B_3(n, \nu)$, $\nu > \frac{n}{2}$.

Un cycle $B_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$, avec $\theta = \frac{n-2\nu}{2\nu}$. Réciproquement, un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$ défini, en outre, par le nombre θ, a pour corrélatif un cycle $B_1(n, \nu)$, avec $n = 2(1+\theta)\nu$.

Un cycle $B_2(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_2(2\nu, \nu)$.

Un cycle $B_3(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_3(n, \nu)$.

10. Groupe *C*. La ligne-origine est droite.

Un pareil cycle (n, ν) a pour corrélatif un cycle de même définition (n, ν).

La question indiquée plus haut se trouve résolue par l'ensemble des résultats dont je viens de donner le tableau synoptique. Je consacre une seconde partie de ce Mémoire à montrer qu'entre les éléments précédemment définis et rélatifs aux diverses lignes singulières d'une même surface, les éléments analogues et relatifs aux lignes le long desquelles le plan tangent est constant, et enfin le degré et le rang de la surface, il existe une relation. Cette relation, je la forme dans toute sa généralité. C'est celle qui fournit le degré du lieu des points à indicatrice parabolique sur une surface à singularités quelconques.

Enfin je termine ce Mémoire par quelques applications aux surfaces de révolution et aux surfaces gauches.

Les éléments si simples et si peu nombreux, que j'ai été conduit à envisager ici, suffisent à caractériser les lignes singulières dans une catégorie importante de questions. Par exemple, ils suffisent pour traiter, dans toute sa généralité, le problème de trouver le degré du lieu des points qui, sur une surface algebrique, satisfont à une équation algébrique aux dérivées partielles du second ordre. Cette nouvelle questions fera l'objet d'un autre Mémoire.

En terminant ce préambule, je dois signaler à l'attention du lecteur les recherches antérieures de Mr. ZEUTHEN sur le même sujet, principalement celles dont les résultats sont contenus dans son Mémoire: *Sur une classe de points singuliers de surfaces* (Mathematische Annalen, t. 9).

I. Propriétés générales des cycles de nappes.

1. Il est nécessaire de rappeler brièvement ici une propriété des courbes planes, savoir: Aux environs d'un point O d'une courbe algébrique plane, toutes les positions d'un point variable sur cette courbe sont représentées (le point O étant l'origine des coordonnées rectilignes η, ζ) par un ou plusieurs systèmes d'équations, tels que

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = f(\omega), \tag{1}$$

dans chacun desquels n est un entier positif et $f(\omega)$ un développement suivant les puissances entières et ascendantes de ω s'évanouissant avec ω. Ce système d'équations est valable dans les limites de convergence de $f(\omega)$.

A cet énoncé on doit ajouter diverses observations.

1.° Le nombre des valeurs distinctes de ζ, pour une valeur donnée de η, est n ou un diviseur de n. Soit n' ce diviseur. Alors f contient seulement les puissances de ω dont les exposants sont des multiples de $n:n'$. Si l'on prend pour nouvelle variable, au lieu de ω, la suivante

$$\omega' = \omega^{\frac{n}{n'}},$$

les équations (1) deviennent

$$\eta = \omega'^{n'}, \qquad \zeta = f(\omega'^{\frac{n'}{n}}) = \varphi(\omega').$$

D'après l'hypothèse, φ ne contient que des puissances entières de ω', et acquiert n' valeurs distinctes pour chaque valeurs de η. On peut, sans nuire à la généralité, supposer cette réduction faite dans (1), et dire que dans les équations (1), chaque système de valeurs de η, ζ correspond à une seule valeur de ω.

2.° Si la droite $\eta = 0$ n'est pas tangente à la courbe en O, le rapport $\zeta:\eta$ a une limite quand ω tend vers zéro. Donc $f(\omega)$ commence par un terme de degré non inférieur à n. On peut ainsi écrire, au lieu de (1):

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = b\,\omega^n + c\,\omega^{n+\nu} + \cdots \tag{2}$$

Les équations (2) représentent, aux environs du point O, n branches de courbe, dont chacune a pour tangente la droite $b\eta - \zeta = 0$, et a, avec cette droite, un contact d'ordre égal à $\nu:n$.

Cet ensemble de n branches a reçu de Mr. Cayley le nom de branche superlinéaire, chacune des n branches s'appelant alors branche partielle. Pour plus de brièveté, je fais usage du nom de cycle, qui rapelle les propriétés algébriques développées par Mr. Puiseux dans un Mémoire très connu. Je nomme le nombre n l'ordre du cycle (2), et le nombre ν la classe de ce même cycle; j'emploie la notation abrégée (n, ν) pour désigner ce cycle. Ces deux nombres se conservent, non seulement quand on change les coordonnées, mais encore quand on fait une transformation homographique. Aussi les lettres η, ζ pouvent-elles être envisagée, dans ce qui précède, comme représentant les rapports de deux coordonnées homogènes à une troisième.

3.° En un point simple quelconque, une courbe se compose d'un seul cycle dont l'ordre est l'unité. En un point multiple, l'ordre de multiplicité est la somme des ordres des cycles en lesquels la courbe se décompose.

4.° Au lieu des équations (2) on peut envisager les suivantes

$$\eta = b'\omega^n + \cdots, \qquad \zeta = b\,\omega^n + \cdots,$$

dans lesquelles les deux coordonées sont, à la fois, représentées par des développements en séries. Par un changement de variable, on peut passer à volonté de l'une des formes à l'autre. Ces dernierès équations représentent un cycle d'ordre n, sous la condition que chaque système de valeurs de η, ζ réponde à une seule valeur de ω.

2. J'arrive maintenant à la théorie des surfaces. Soit S une surface algébrique, sur laquelle est tracée une courbe algébrique (a), lieu du point a dont les coordonnées sont α, β, γ. Considérons une section plane (S) de la surface, et soit a un des points où son plan rencontre (a). Le point a appartient à (S). Je suppose qu'en ce point, (S) se decompose en divers cycles, parmi lesquels un cycle (n, ν). La projection de (S) sur le plan des $\eta\zeta$ passe par la projection de a, s'y décompose en divers cycles, parmi lesquels un cycle (n, ν). Ce cycle, dont l'origine a pour coordonnées β, γ, est représenté par les équations (2) dans lesquelles η et ζ sont respectivement remplacées par $(\eta - \beta)$ et $(\zeta - \gamma)$. Si l'on fait varier le plan de (S), les quantités β, γ, b, c,... varient

en même temps. Je puis les faire dépendre de la seule variable α, en astreignant le plan de (S) à passer, par exemple, par une droite fixe.

Prenons pour origine des coordonnées ξ, η, ζ un point O de (a), qui ne soit pas singulier sur cette ligne. Les coordonnées β, γ d'un point a, voisin de O, sont des fonctions synectiques de α, évanouissantes avec α. Les quantités b, c,... pour la section (S) qui passe en a sont des fonctions algébriques de α, qui ne cessent d'être synectiques que pour certaines valeurs de la variable. Donc, aux environs du point O, arbitrairement choisi sur (a), et dans nne certaine étendue, ces fonctions sont synectiques.

Le cycle variable (n, ν) est maintenant représenté, dans l'espace, par les équations

$$\xi = \alpha + k\omega^n, \qquad \eta = \beta + \omega^n, \qquad \zeta = \gamma + b\omega^n + c\omega^{n+\nu} + \cdots, \tag{3}$$

où l'on peut supposer k constant, de manière à ce que le plan variable de (S) soit de la forme $k\eta - \xi = \lambda$. On pourrait supposer $k = 0$. Si je ne fais pas cette semplification, c'est afin de pouvoir disposer autrement du plan $\xi = 0$.

Les quantités β, γ, b, c,... sont des développements suivant les puissances entières, ascendantes et positives de α. Considérés à la fois, ces développements sont convergents pour les valeurs de α dont les modules sont inférieurs à une certaine limite. Pour une de ces valeurs de α, le développement de ζ est convergent pour les valeurs de ω dont les modules sont aussi inférieurs à une certaine limite. Donc, dans une certaine étendue, les équations (3) représentent une portion de la surface S. L'ensemble des n nappes représentées par (3) sera dit un cycle de nappes, que je représenterai abréviativement par (n, ν).

A un point de S répond un seul des plans variables. Ce plan coupe (a) en un seul point voisin de O; donc à un point de S répond une seule valeur de α. Dans la section (S), à un point du cycle répond une seule valeur de ω. Donc à chaque système de valeurs de ξ, η, ζ répond un seul système de valeurs de α et de ω.

3. Par les équations (3) je viens de définir un cycle de nappes, et je peux maintenant conclure que le long d'une ligne algébrique tracée sur une surface algébrique, cette surface se décompose en un ou plusieurs cycles. L'ensemble des équations de ces cycles remplace complètement l'équation de la surface aux environs de la ligne envisagée. Pour l'étude de la surface aux environs de cette ligne, on peut donc considérer isolément chaque cycle: les choses se passent comme si la surface se décomposait effectivement en plusieurs surfaces dont chacune n'aurait qu'on seul cycle de nappes. J'étudierai donc les propriétés des cycles en eux-mêmes.

4. Suivant la génération dont les équations (3) constituent l'expression analytique, le cycle de nappes est engendré par le mouvement d'un cycle de branches planes, dont l'origine décrit une courbe, que je désignerai dorénavant par le nom de ligne-origine. Nous ne connaissons donc jusqu'à présent qu'une seule section plane de ce cycle. Coupons-le maintenant par un plan arbitraire mené en O:

$$\xi = \lambda \eta + \mu \zeta, \tag{4}$$

et étudions cette section. Je suppose les axes de coordonnées choisis comme il suit: la droite $\eta = \zeta = 0$ est la tangente de (a) en O, et le plan $\zeta = 0$ contient, en outre, la tangente en O de la section (S). Suivant ces hypothèses, les développements de β et de γ commencent par des termes du 2^d ordre, et b s'évanouit avec α. Ainsi

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \beta_2 \alpha^2 + \beta_3 \alpha^3 + \cdots, & \gamma &= \gamma_2 \alpha^2 + \gamma_3 \alpha^3 + \cdots \\ b &= b_1 \alpha \;\; + b_2 \alpha^2 + \cdots, & c &= c_0 \;\; + c_1 \alpha + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans (4) je substitue à ξ, η, ζ les expressions (3) et j'ordonne suivant les puissances croissantes de ω. Puis tenant compte des équations (5), j'ordonne chaque coefficient suivant les puissances croissantes de α. J'ai ainsi

$$\alpha = (\lambda - k)\omega^n + \cdots \tag{6}$$

Cette équation admet une seule racine α évanouissante avec ω, et la partie principale de cette racine est constituée par le terme écrit dans le second membre. Substituant à α cette racine, j'ai pour ξ, η, ζ des développements suivant les puissances entières et ascendantes de ω, commençant, les deux premiers par des termes de degré n, le dernier par un terme de degré supérieur. Ces équations définissent un cycle de branches (n.° 1), et la tangente de ce cycle est dans le plan $\zeta = 0$. Donc

Théorème I. Si par un point de la ligne-origine d'un cycle de nappes on même un plan arbitraire, la section déterminée par ce plan se compose, en ce point, d'un seul cycle de branches. Quand le plan de section varie, la tangente de la section a pour lieu un plan contenant la tangente de la ligne-origine.

Ce plan, lieu des tangentes, est le plan tangent du cycle de nappes au point envisagé. De quelque manière qu'un point mobile sur une nappe d'un cycle vienne coïncider avec un point de la ligne-origine, le plan tangent de la surface au point mobile a pour limite le plan tangent du cycle au point limite, proposition presque évidente que le calcul justifiera plus loin.

5. D'après le théorème I, un cycle de nappes peut être, d'une infinité de manières, engendré par le mouvement d'un cycle de branches planes dont l'origine suit la ligne (a). Je l'ai précédemment engendré d'une de ces manières, et dans les équations (3) ainsi obtenues figurent explicitement l'ordre n et la classe ν du cycle de la section (S) employée. Il importe de savoir si n et ν sont effectivement l'ordre et la classe du cycle d'un autre section quelconque.

A l'égard de l'ordre, la réponse est immédiate. Pour la section faite par le plan (4), les développements de ξ et de η commencent par des termes de degré n en ω. D'ailleurs, à chaque point de cette section correspond (n.° 2) une seule valeur de ω. Donc (n.° 1), l'ordre du cycle est égal à n.

A l'égard de la classe, il nous suffit, pour la trouver, de connaître le degré du premier terme du développement de ζ pour la même section. Suivant que ν est inférieur ou supérieur à n, ce premier terme est

$$c_0\omega^{n+\nu} \text{ ou } \{\gamma_2(\lambda-k)^2+b_1(\lambda-k)\}\omega^{2n}.$$

Si donc ν est supérieur à n, la classe du cycle de la section (4) est n, et non pas ν. Cette conclusion suppose toutefois que b_1 et γ_2 ne soient pas nuls. Examinons dans quel cas peut se présenter cette circonstance.

Si l'on forme l'équation du plan tangent en un point de la surface (3), qu'on fasse dans cette équation $\omega=0$, et qu'on ordonne suivant les puissances croissantes de α, on obtient l'équation

$$Z-b_1\alpha Y+\cdots=0.$$

J'en conclus d'abord que pour $\alpha=0$, cette équation se réduit à celle du plan $\zeta=0$, conformément au résultat annoncé précédemment (n.° 4). Secondemment, si b_1 est nul, le plan tangent de la surface le long de (a) est stationnaire au point O. Mais ce point est choisi arbitrairement sur (a). Donc l'hypothèse $b_1=0$ correspond au cas où le plan tangent de la surface reste le même tout le long de la ligne (a). Donc, sauf ce cas, l'hypothèse $\nu>n$ caractérise une section particulière faite dans le cycle. Ayant égard à la signification géométrique du rapport $\nu:n$ (n.° 1), je conclus que

Théorème II. Si, en chaque point d'une ligne tracée sur une surface, une nappe de cette surface a, avec son plan tangent, un contact d'ordre supérieur à l'unité, cette ligne est plane, et ce plan tangent est constant.

6. Ce dernier théorème peut être démontré géométriquement. Soit une section (S) faite par un plan arbitraire mené en O. Par un point variable a de (a) je mène un autre plan faisant avec le précédent un angle fini. Le point a se rapprochant indéfiniment de O, les deux sections (S) et $(S)'$ se coupent en des points infiniment voisins de O: soit m un de ces points. Les trois côtés du triangle maO sont des infiniment petits d'un même ordre; soit n cet ordre. Dans la courbe (S) le point m appartient à un cycle (n, ν) dont O est l'origine. Les tangentes en O et en m font donc entre elles un angle d'ordre ν. On peut faire varier le plan de (S) autour de Om et obtenir toujours la même conclusion. Donc les plans tangents de S en O et en m font entre eux un angle d'ordre ν. De même, les plans tangents en a et m font aussi entre eux un angle d'ordre ν. Donc les plans tangents en O et en a font entre eux un angle qui est au moins d'ordre ν. Donc, si ν est supérieur à n, le plan tangent de S le long de (a) est stationnaire en O. C'est le résultat déjà obtenu par le calcul.

7. Théorème III. A toutes les positions d'un point mobile sur les nappes d'un même cycle correspondent aussi, dans une figure corrélative, les positions d'un point mobile sur une même cycle de nappes.

Cette proposition sera démontrée plus loin (n.° 13). Je l'admets pour le moment afin de pouvoir, dès à présent, parler de cycles correspondants dans deux surfaces corrélatives, ou plus abréviativement de cycles corrélatifs. A cet égard, je vais démontrer la proposition suivante:

Théorème IV. Dans deux cycles corrélatifs, les classes sont égales, ou sous une autre forme:

Théorème V. La somme des ordres des contacts des nappes d'un cycle avec leur plan tangent commun en un point de la ligne-origine, n'est pas altérée par une transformation corrélative. Ce théorème sera vérifié plus loin par le calcul. Je vais ici en donner une démonstration géométrique fondée sur la remarque du n.° 3, en supposant une surface S ne se composant, le long de la ligne (a), que d'un seul cycle.

8. Par définition, la classe d'une courbe plane est le nombre des tangentes qu'on lui peut mener d'un point de son plan. Donc la classe d'une section de S est le nombre des tangentes qu'on peut mener à S par un point b dans un plan q contenant b. Cette définition n'est pas altérée par une transformation corrélative. Donc la classe des sections de deux surfaces corrélatives S, S' est la même. C'est une propriété bien connue. Cette classe commune s'appelle le rang de la surface. Je désigne ce nombre par la lettre r.

Soit q un plan arbitraire, a une de ses rencontres avec (a), et b un point de l'intersection de q avec le plan p, tangent à S en a. Parmi les tangentes menées de b à la section de S par q, quelques-unes sont confondues avec ba. D'après la théorie des courbes planes, le nombre de ces dernières est ν. Il y a donc $(r-\nu)$ tangentes menées de b à S dans le plan q, et différentes de ba.

Je prends une figure corrélative, composée d'un surface S' avec une ligne (a'), d'un plan q' corrélatif de b, et d'un point b' corrélatif de q. Soit a' le point de S' correspondant à a; $b'a'$ est une tangente de S' en a'. Il y a, en outre, $(r-\nu)$ tangentes, distinctes de $b'a'$, menées à S' par b' et dans le plan q'. D'ailleurs, la classe de la section de S' par q' est r. Donc $b'a'$ compte pour ν tangentes confondues. Donc le cycle de la section de S', dont a' est l'origine, a pour classe ν; ce qui démontre le théorème IV.

9. On peut encore donner à ce théorème une autre forme. Soit un cône circonscrit à S; appelons $[S]$ sa trace sur un plan. La ligne plane $[S]$ est corrélative d'une section plane (S') de la surface corrélative S'. A un cycle (n', ν) de (S') correspond un cycle (ν, n') de $[S]$. De même, à un cycle (n, ν) d'une section (S) correspond un cycle (ν, n) de la trace d'un cône circonscrit à S'. Les classes des cycles devenant ici les ordres d'autres cycles, on peut faire intervenir la notion plus usuelle d'ordre de multiplicité d'un point, et dire:

S et S' étant deux surfaces corrélatives, et (a), (a') deux lignes algébriques, singulières ou non, tracées respectivement sur S et sur S' et s'y correspondant: on considère deux lignes $[S]$, $[S']$ de contour apparent de ces surfaces sur un plan. Soit ω un point où $[S]$ touche la perspective de (a), et soit ω' un point où $[S']$ touche la perspective de (a'). Les points ω et ω' sont respectivement sur $[S]$ et sur $[S']$ des points d'un même ordre de multiplicité.

10. Les cycles dont l'ordre égale la classe jouissent de propriétés communes. Reprenons les équations (3) en supposant $\nu = n$. Considérons, comme aux n.^{os} 4 et 5, la section faite par un plan. Les développements des coordonnées commencent alors par les termes suivants:

$$\xi = \lambda\omega^n + \cdots, \qquad \eta = \omega^n + \cdots, \qquad \zeta = \{\gamma_2(\lambda-k)^2 + b_1(\lambda-k) + c_0\}\omega^{2n} + \cdots \tag{7}$$

Soit la surface, indépendante de λ:

$$\zeta = \gamma_2\xi^2 + (b_1 - 2k\gamma_2)\xi\eta + (c_0 - b_1 k + \gamma_2 k^2)\eta^2.$$

Chaque branche de la courbe (7) a, avec cette surface, un contact d'ordre supérieur au premier. Donc:

Théorème VI. Si, en chaque point d'une ligne (a), une nappe de surface a, avec son plan tangent, un contact d'ordre égal à l'unité, il existe en chaque point de (a) des surfaces du 2[d] ordre ayant, avec cette nappe, en ce point, des contacts d'ordre supérieur au premier.

En conséquence, le théorème de Meusnier et la théorie de l'indicatrice s'appliquent aux sections de cette nappe de surface.

11. Soit maintenant un cycle qui non seulement ait son ordre égal à sa classe, mais pour lequel, en outre, l'indicatrice ne soit pas parabolique en chaque point de la ligne-origine (a). En même temps que la surface S contenant ce cycle, je considère une corrélative S'. Soit, sur cette dernière, (a') la ligne-origine du cycle corrélatif du proposé.

Sur S je considère une section plane (S) rencontrant (a) en O, et soit m un point variant sur (S) aux environs de O. Au point O de (a) correspond un point O' de (a'), à (S) une ligne Σ tracée sur S'. D'après la théorie de l'indicatrice, l'angle sous lequel Σ coupe (a') en O' varie avec l'angle sous lequel (S) coupe (a) en O. C'est donc un angle arbitraire.

La distance mO et l'angle des plans tangents de S en m et O sont des infiniment petits d'un même ordre, comme on le prouve en employant le même raisonnement qu'au n.° 6. Soit m' le point qui correspond à m. La distance $m'O'$ est du même ordre infinitesimal que l'angle des plans tangents de S en m et en O. L'angle des plans tangents de S' en m' et O' est du même ordre que la distance mO. Donc aussi ce dernier angle est du même ordre que $m'O'$. Donc chaque section de S' par un plan contenant $m'O'$ a, en O', un cycle d'ordre égal à sa classe. Mais la direction $m'O'$ est arbitraire dans le plan tangent de S' en O'. Donc le cycle de S' a le même ordre que celui de S, puisqu'on sait déjà qu'il a aussi la même classe. Donc:

Théorème VII. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre.

II. Propriétés dualistiques des cycles de nappes.

12. Pour faire une étude approfondie des liaisons qui existent entre deux cycles corrélatifs, j'aurai maintenant recours au calcul. Je prendrai pour coordonnées homogènes d'un point d'une surface S' les coefficients de l'équation

d'un plan tangent de la surface S. Pour la symétrie, je supposerai que les coordonnées ξ, η, ζ primitivement employées, soient les rapports de trois coordonnées homogènes à une quatrième, de la manière suivante:

$$x_4\xi = x_1, \qquad x_4\eta = x_2, \qquad x_4\zeta = x_3.$$

Ainsi x désignera un point de S. Le point correspondant sur S' sera désigné par y. Chaque face du tétraèdre de référence sera abréviativement désignée par le premier membre de son équation. Je dirai ainsi le plan x_1 ou y_1 pour la face dont l'équation est $x_1 = 0$. Chaque sommet du même tétraèdre sera désigné par la lettre s affectée de l'indice correspondant à la face opposée. Chaque arête sera désignée indifféremment par ses deux sommets ou ses deux faces.

Dans les équations employées plus haut, le sommet s_4 et la face x_3 sont un point de la ligne (a) et le plan tangent de S en ce point. En outre, l'arête x_2x_3 est la tangente de (a) en ce point. L'arête x_1x_3 est arbitrairement choisie dans le plan x_3. Dans chaque cas, je la déterminerai de la manière la plus convenable.

Au moyen des équations (3), je calcule les quantités y, coefficients de l'équation du plan tangent. Ces quantités se présentent sous la forme de développements suivant les puissances ascendentes de ω, ayant pour coefficients des développements suivant les puissances ascendantes de α. Quelques termes de ces développements suffiront pour découvrir les propriétés que j'ai en vue de rechercher.

13. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point étant des fonctions de deux variables α et ω, les coordonnées du plan tangent à la surface, lieu de ce point, sont:

$$\frac{y_1}{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\omega} - \frac{\partial\eta}{\partial\omega}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}} = \frac{y_2}{\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial\omega} - \frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}} = \frac{y_3}{\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\omega} - \frac{\partial\xi}{\partial\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}},$$

$$y_4 = \xi y_1 + \eta y_2 + \zeta y_3.$$

J'emploierai des accents pour dénoter les dérivées prises par rapport à α. En vertu des équations (3), et après suppression d'un facteur commun ω^{n-1}, je puis écrire:

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= 1 - k\beta' \\ -y_2 &= b - k\gamma' + \frac{n+\nu}{n} c\,\omega^\nu + \cdots - kb'\omega^n \ldots \\ y_1 &= b\beta' - \gamma' + \frac{n+\nu}{n} c\beta'\omega^\nu + \cdots - b'\omega^n \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Les quantités y_1 et y_2 et, par suite, aussi y_4, se réduisent à zéro avec ω et α, en vertu des relations (5), tandis que y_3 conserve une valeur finie. Ainsi le point qui correspond à s_4 sur la surface S' est le sommet s_3, comme on le savait d'avance. Eu égard à ces mêmes relations (5), le développement du terme indépendant de ω dans y_1 commence par un terme du 1[er] degré en α. Si donc on fait dans S' une section par un plan mené en s_3, la variable α sera, pour cette courbe, une fonction synectique de ω, évanouissante avec ω. Les y deviennent donc des développements suivant les puissances entières de ω. La section a donc en s_3 un seul cycle (n.° 1). Donc les équations (8) représentent un seul cycle de nappes. C'est la démonstration du théorème III.

J'ai à chercher l'ordre de ce cycle. A cet effet, il suffira de chercher le degré du premier terme de chacun de ces derniers développements. Il n'y a pas à considérer y_3 qui a une valeur finie, ni y_4 qui, nous le savons d'avance, commence par un terme de degré plus élevé que y_1 et y_2, car y_4 est le plan tangent de S' en s_3, et contient, par suite, la tangente de la section. Cependant je ferai une fois, à titre d'exemple, le calcul du degré du premier terme de y_4. J'y trouverai une vérification du théorème IV, et on pourra la renouveler pour chaque cas.

14. Si, dans les équations (8), on fait $\omega=0$, ces équations donnent les coordonnées des points de la ligne (a'). Désignons-les par la lettre z. Eu égard à (5), on a:

$$\left.\begin{aligned} -z_2 &= b-k\gamma' = (b_1-2k\gamma_2)\alpha+(b_2-3k\gamma_3)\alpha^2+\cdots \\ z_1 &= b\beta'-\gamma' = -2\gamma_2\alpha+(2b_1\beta_2-3\gamma_3)\alpha^2+\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Deux cas sont à distinguer suivant que γ_2 est nul ou non. Si γ_2 est nul, c'est que le plan x_2 est osculateur de (a) en s_4. Dans nos hypothèses, nous avons à considérer ce cas uniquement si cette circonstance a lieu tout le long de (a). De là, deux sortes de lignes à distinguer:

1.° lignes dont le plan osculateur n'est pas, en chaque point, tangent à la surface;

2.° lignes en chaque point desquelles le plan tangent de la surface se confond avec le plan osculateur de la ligne.

Dans ce dernier cas, si la ligne est singulière, elle n'est pas, à proprement parler, une ligne asymptotique. Cependant on peut encore, sans inconvénient, employer cette locution, et distinguer abréviativement deux sortes de cycles, savoir:

1.° les cycles dont la ligne-origine n'est pas une asymptotique;

2.° les cycles dont la ligne-origine est une asymptotique.

15. En premier lieu, je considère le premier de ces deux cas. Le coefficient γ_2, par hypothèse, n'est pas nul.

La développable circonscrite à S le long de (a) a, en s_1, une génératrice différente de la tangente de (a). Je suppose cette droite prise pour l'arête $x_1 x_3$ du tétraèdre de référence, suivant la remarque du n.° 12. Alors l'arête opposée $y_1 y_2$ est la tangente de (a') en s_3, et, par suite, le développement de z_2 commence par un terme du 2^d degré. Ainsi, par ce choix des coordonnées, on a

$$b_1 - 2k\gamma_2 = 0. \tag{10}$$

Je distinguerai encore ici deux cas différents, suivant que ν est inférieur ou égal à n. Je commence par le premier $\nu < n$. En vertu de (10), les formules (8) deviennent, après développement

$$\left.\begin{aligned} -y_2 &= (b_2 - 3k\gamma_3)\alpha^2 + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(c_0 + c_1\alpha + \cdots)\omega^\nu + \cdots \\ y_1 &= \quad -2\gamma_2\alpha \quad + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(2c_0\beta_2\alpha \quad + \cdots)\omega^\nu + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Pour obtenir ce qui est relatif à une section de la surface par un plan $y_1 = \lambda y_2$, il faudra déterminer α par une série suivant les puissances entières et ascendantes de ω, et dont le premier terme est

$$\lambda \frac{n+\nu}{n} \frac{c_0}{2\gamma_2} \omega^\nu.$$

Les développements de y_1 et y_2 commencent alors chacun par un terme de degré ν en ω. Donc ν est l'ordre du cycle. Nous savons déjà par le théorème IV que la classe de ce cycle est aussi égale à ν. Je ferai ici une vérification de ce résultat en calculant la partie principale de y_4.

Eu égard à la valeur considérée pour α, les développements de ξ, η, ζ commencent respectivement par des termes des degrés ν et 2ν pour ξ et ζ, et de degré supérieur à ν pour η. En vertu de l'expression de y_4, on trouve ainsi pour sa partie principale

$$-\gamma_2\left(\lambda \frac{n+\nu}{n} \frac{c_0}{2\gamma_2}\right)^2 \omega^{2\nu}.$$

Elle est d'ordre 2ν. Donc la classe est bien égale à ν. Ainsi:

Théorème VIII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine n'est pas asymptotique, et dont la classe ν est inférieure à l'ordre, a pour corrélatif un cycle dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à ν.

16. Dans ce cycle (ν, ν) corrélatif d'un cycle dont la classe ν est inférieure à l'ordre, on sait d'avance, eu égard au th. VII, que l'indicatrice est constamment parabolique sur la ligne-origine. Je vais maintenant démontrer le théorème réciproque. C'est là une simple vérification; car cette réciproque est a priori connue. En effet, le th. VII nous apprend qu'un cycle (ν, ν) non parabolique a pour corrélatif un cycle (ν, ν). On peut ajouter que ce dernier n'est pas non plus parabolique, ainsi que le montre le théorème des tangentes conjuguées. Donc un cycle (ν, ν) qui a pour corrélatif un cycle dont l'ordre surpasse la classe, est certainement parabolique. Cette vérification se fait sans peine comme il suit.

Dans les équations (8), je fais $\nu = n$, et je suppose, en outre

$$b_1^2 - 4c_0\gamma_2 = 0,$$

pour exprimer, suivant les équations (7), que l'indicatrice du cycle considéré est parabolique. En vertu de cette relation et de (10), on trouve que, dans l'expression de y_2, le terme en ω^ν disparaît. En répétant le calcul du n.° 15 et coupant par le plan $y_1 = \lambda y_2$, on obtient cette conséquence que la partie principale de α est indépendante de λ, en sorte que les développements de y_1 et y_2 commencent tous deux par des termes de degré supérieur à ν en ω. Donc l'ordre du cycle corrélatif est supérieur à ν. Mais le calcul ne met pas aisément en évidence l'expression de cet ordre, qui dépend de nouveaux éléments.

17. Un raisonnement géométrique met ces éléments en évidence. Considérons de nouveau, comme au n.° 15, un cycle (n, ν). On voit aisément que chaque section faite dans un cycle (n, ν) par un plan tangent à la ligne-origine a, au point de contact, un cycle (n, n). J'en conclus que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact du 1er ordre, et que, par suite, la somme des ordres de ses contacts avec les n nappes du cycle est n. D'autre part, on peut donner au th. IV cette nouvelle forme:

Théorème IX. La somme des ordres des contacts d'une droite avec une surface n'est pas altérée par une trasformation corrélative.

Je puis donc, en appliquant ce théorème, conclure ainsi:

Théorème X. Un cycle de nappes (ν, ν), dont la ligne-origine n'est pas asymptotique et dont l'indicatrice est parabolique, a pour corrélatif un cycle dont l'ordre est égal au produit du nombre ν par l'ordre du contact de chaque nappe du cycle proposé avec sa tangente asymptotique en un point quelconque de la ligne-origine.

Par les théorèmes VIII et X se trouve résolue la question proposée en ce qui concerne les cycles dont la ligne-origine n'est pas asymptotique. J'ai encore, à ce sujet, à ajouter une remarque qui sera utile plus loin.

Dans les équations (11), je suppose $\alpha = \lambda\omega^n + \cdots$ Les développements de y_2 et y_1 commencent alors respectivement par des termes de degré ν et n. La courbe ainsi déterminée sur S' a donc pour tangente la droite y_1y_4, différente de la tangente de (a'), qui est y_2y_4 (n.° 15). Par suite, si ω est infiniment petit du 1$^{\text{er}}$ ordre, le point y est à distance infiniment petite d'ordre ν de la courbe (a'). D'autre part, le point x est, en même temps, à distance d'ordre n de la courbe (a). Donc:

Si n est supérieur à ν, et que (ν, ν), (n, ν) soient deux cycles corrélatifs: à un point placé sur une nappe du premier cycle à distance infiniment petite d'ordre ν de sa ligne-origine correspond, sur une nappe du second, un point à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine de ce dernier.

18. Je passe maintenant à l'étude des cycles dont la ligne-origine est asymptotique, sans être droite. Comme je l'ai déjà observé plus haut, le coefficient γ_2 est nul dans ce cas. Les équations (9) mettent en évidence que la courbe (a) a pour tangente en s_3 la droite y_1y_4. Son plan osculateur est le plan tangent de S', à savoir y_4.

Je n'ai pas à m'occuper des cas où les nombres n et ν sont égaux entre eux: l'un de ces cas, celui où l'indicatrice n'est pas parabolique, est traité par le théorème VII. Quant au cas où l'indicatrice est parabolique, il n'y a pas lieu de s'en occuper au point de vue actuel: une ligne, en effet, ne peut être à la fois asymptotique et lieu de points paraboliques sans être plane et sans que le plan tangent ne soit constamment confondu avec son propre plan. Quant il en est ainsi, la surface corrélative contient, comme élément correspondant, non pas un cycle de nappes, mais un point singulier.

J'ai donc à étudier ce qui est relatif aux cas où ν est inférieur à n. Tout d'abord, il convient de faire deux remarques concernant les équations générales sur lesquelles repose toute cette analyse.

En premier lieu, pour le cas actuel, il n'y a pas lieu de particulariser la droite x_1x_3. Je ferai donc $k = 0$, conformément à une observation précédente (n.° 2).

En second lieu, le plan osculateur de (a) est, en chaque point de cette ligne, tangent à la surface. Cette condition conduit sans peine à l'équation $b\beta''=\gamma''$, qui doit être une identité. En égalant à zéro le terme indépendant de α, on trouve

$$b_1\beta_2-3\gamma_3=0. \tag{12}$$

19. Avant de m'occuper de la surface corrélative de S, je considère un instant la surface S elle-même, et j'en étudie les diverses sections planes. Grâce à l'hypothèse $k=0$, la surface est représentée par les équations suivantes, qui remplacent les équations (3):

$$\eta=\beta_2\xi^2+\cdots+\omega^n, \qquad \zeta=\gamma_3\xi^3+\cdots+(b_1\xi+\ldots)\omega^n+(c_0+c_1\xi+\cdots)\omega^{n+\nu}+\cdots \tag{13}$$

Les sections non tangentes à la droite $\eta=\zeta=0$, c'est-à-dire à la courbe (a), ont toutes en s_1 le cycle (n,ν), sans exception à cause de l'hypothèse $\nu<n$. C'est sur les sections tangentes à (a), c'est-à-dire faites par un plan $\eta=\lambda\zeta$ qu'il faut porter l'attention.

La condition $\eta=\lambda\zeta$ conduit entre ξ et ω à une équation qui a deux racines ξ évanouissantes avec ω. Si l'on fait $\omega=\omega'^2$, une quelconque de ces deux racines est de l'ordre n par rapport à ω'. On en tire cette conséquence que je me contente d'énoncer:

La section faite dans un cycle (n,ν) par un plan tangent à la ligne-origine dans le cas où cette ligne est asymptotique, présente au point de contact

Si n est impair, un cycle unique d'ordre n;

Si n est pair, deux cycles d'ordre $\frac{1}{2}n$.

Je veux maintenant calculer la classe d'un tel cycle, c'est-à-dire trouver le degré du premier terme du développement de ζ suivant les puissances croissantes de ω'. Il y a trois cas à distinguer:

1.° $2\nu>n$. Le premier terme de ζ est alors fourni par:

$$\zeta=\gamma_3\xi^3+b_1\xi\omega^n,$$

et devient, en vertu de $\eta=\lambda\zeta$ et de (12): $\frac{2}{3}b_1\xi\omega^n$, dont l'ordre est $3n$ relativement à ω'. Ainsi:

Pour $2\nu>n$, la classe du cycle de la section est double de son ordre. En d'autres termes, la tangente de la ligne-origine a un contact du 2[d] ordre avec chaque nappe.

2.° $2\nu<n$. Le premier terme de ζ est alors $c_0\omega^{n+\nu}$, donc l'ordre, relativement à ω', est $2n+2\nu$. Donc:

Pour $2\nu < n$, les cycles des sections tangentes à la ligne-origine ont pour classe $n+2\nu$ ou $\frac{1}{2}(n+2\nu)$ suivant que n est impair ou pair.

3.° $2\nu = n$. Le premier terme de ζ se compose alors comme il suit:

$$\zeta = \left(c_0 + \frac{2}{3} b_1 \sqrt{-\frac{1}{\beta_2}}\right) \omega'^{3n}.$$

Si la quantité entre parenthèses n'est pas nulle, la section contient deux cycles $(\nu, 2\nu)$.

Dans le cas opposé, l'ordre de ζ augmente, sans que les termes jusqu'à présent envisagés suffisent à le fixer. Ainsi:

Pour $2\nu = n$, il peut arriver que la tangente de la ligne-origine ait, en chaque point de cette ligne, un contact d'ordre supérieur à 2 avec chaque nappe de la surface. La condition sous laquelle cette circonstance se présente peut, à cause de (12), s'écrire

$$\left(\frac{b_1}{3\gamma_3}\right)^3 + \left(\frac{c_0}{2\gamma_3}\right)^2 = 0. \tag{14}$$

On reconnaît la condition qui exprime que l'équation $\gamma_3 x^3 + b_1 x + c_0 = 0$ a deux racines égales. En vertu de (12), la dérivée du premier membre de cette équation se réduit à $(\beta_2 x^2 + 1)$. D'où cette conséquence:

Pour $n = 2\nu$, 1.° Si la tangente de la ligne-origine asymptotique a, avec chaque nappe, un contact du 2^d^ ordre, la section par le plan tangent s'y compose de trois cycles distincts (ν, ν);

2.° si la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre $(2+\theta)$, la section par le plan tangent s'y compose soit d'un cycle (ν, ν) et de deux cycles $[\nu, (1+\theta)\nu]$, soit d'un cycle (ν, ν) et d'un cycle $[2\nu, 2(1+\theta)\nu]$.

On remarquera que l'arête de rebroussement d'une surface développable correspond à ce dernier cas $n = 2\nu$, avec θ infiniment grand.

Les mêmes divisions en divers cas vont se retrouver dans la discussion de la surface corrélative.

20. Pour étudier la surface corrélative S', je reprends les formules (8) qui deviennent ici, en vertu des diverses hypothèses:

$$-y_2 = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(c_0 + c_1\alpha + \cdots)\omega^\nu + \cdots$$

$$y_1 = 3\gamma_3\alpha^2 \qquad + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(2c_0\beta_2\alpha \ + \cdots)\omega^\nu \cdots - (b_1 + \cdots)\omega^n - \cdots$$

En appliquant le même mode de raisonnement que plus haut, je trouve tout d'abord pour $2\nu > n$:

Théorème XI. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, et dont la classe est inférieure à l'ordre, mais supérieure à la moitié de cet ordre, a pour corrélatif un cycle du même ordre et de la même classe que le proposé.

En second lieu, pour $2\nu < n$, on trouve que l'ordre du cycle corrélatif est 2ν. D'ailleurs, sa classe est ν. Il y a donc lieu de chercher, pour ce cycle $(2\nu, \nu)$ le nombre analogue à θ.

La somme des ordres des contacts de la tangente de (a) avec les nappes de S est $n+2\nu$, ainsi que cela a été établi au n.° 19 (2.°). Donc (th. IX), $n+2\nu$ est aussi la somme des ordres des contacts de la tangente de (a') avec les 2ν nappes de S'. Avec chaque nappe, l'ordre du contact est donc

$$2+\theta = \frac{n+2\nu}{2\nu}, \qquad \theta = \frac{n-2\nu}{2\nu} > 0.$$

Théorème XII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, et dont la classe ν est inférieure à la moitié de l'ordre n, a pour corrélatif un cycle $(2\nu, \nu)$, dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre supérieur à 2, savoir $\frac{n+2\nu}{2\nu}$.

21. Troisièmement, pour $2\nu = n$, et quand l'égalité (14) n'a pas lieu, on trouve le résultat suivant:

Théorème XIII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, dont la classe est égale à la moitié de l'ordre, et dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact du 2d ordre, a pour corrélatif un cycle jouissant de ces mêmes propriétés.

Enfin, par voie d'exclusion, j'en conclus la réciproque du théorème XII:

Théorème XIV. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, dont la classe ν est égale à la moitié de l'ordre, et dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre supérieur à 2, soit $(2+\theta)$, a pour corrélatif un cycle d'ordre $2(1+\theta)\nu$ et de classe ν.

Pour une développable et son arête de rebroussement, ν est égal à l'unité, et θ est infiniment grand. Aussi les sections de la corrélative ont-elles chacune un cycle d'ordre infiniment grand: elles se réduisent chacune à un point, et la corrélative à une simple courbe.

22. Considérons les équations du n.° 20 en y supposant $2\nu < n$. J'y fais $\alpha = \lambda\omega^n + \cdots$ Alors y_2 et y_1 commencent respectivement par des termes de degré ν et n. La branche de courbe ainsi déterminée sur S' a donc, en s_3, un contact d'ordre $\frac{n-\nu}{\nu} > 1$ avec la droite $y_1 y_4$ qui est la tangente de (a'). Cette même branche a donc avec (a'), au même point, un contact du 1[er] ordre. Le point y est donc à une distance infiniment petite d'ordre 2ν de la ligne (a'). Je tire de là cette conclusion qui sera utile plus loin:

Si n est supérieur à 2ν, et que l'on envisage deux cycles corrélatifs $(2\nu, \nu)$ et (n, ν), dont les lignes-origines soient asymptotiques:

A un point placé sur une nappe du premier cycle, et à distance infiniment petit d'ordre 2ν de la ligne-origine de ce cycle, correspond sur le second cycle un point placé à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine de ce second cycle.

23. Pour avoir terminé ce qui concerne les cycles dont le plan tangent varie le long de la ligne-origine, il nous reste à envisager ceux dont la ligne-origine est droite. Les équations du cycle se simplifient et se réduisent à

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = (b_1\xi + \cdots)\omega^n + (c_0 + c_1\xi + \cdots)\omega^{n+\nu} + \cdots$$

Par suite, dans les formules du n.° 20, le premier terme de y_1 devient $-b_1\omega^n$, et il en résulte cette conséquence très-simple:

Théorème XV. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est droite et dont le plan tangent varie le long de cette ligne, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

24. Les questions analogues à celles que je viens de résoudre dans ce paragraphe n'ont pas lieu d'être posées pour les surfaces dont le plan tangent reste constant le long d'une ligne. S'il s'agit d'un ligne courbe, il y correspond corrélativement un point conique, et non une ligne. S'il s'agit d'une ligne droite (a) sur une surface S, il y correspond corrélativement sur une surface S' un point singulier en lequel les plans tangents, en nombre infini, passent tous par une droite (a'). La droite (a'), suivant les cas, fait ou non partie de S'. Mais cette circonstance tient à l'existence ou à la non-existence de points singuliers de la surface S sur la droite (a), et non pas à la nature de la surface S en un point arbitraire de cette droite.

J'aurai tout-à-l'heure à considérer de tels cycles, en résolvant un autre problème. Pour le moment, je n'ai qu'à transcrire ici les équations générales d'un cycle, appropriées à ces cas.

Pour un cycle à plan tangent constant le long d'une courbe plane, on aura

$$\eta = \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \cdots + \omega^n, \qquad \zeta = (c_0 + c_1 \xi + \cdots)\omega^{n+\nu} + \cdots;$$

et, quand la ligne-origine est droite:

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = (c_0 + c_1 \xi + \cdots)\omega^{n+\nu} + \cdots$$

25. Ce dernier cycle, ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant, n'est pas suffisamment défini, pour les applications que j'ai en vue, par les nombres n, ν. Un élement qu'il sera encore nécessaire de connaître est l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre une nappe de ce cycle et une développable tout le long de la ligne-origine. Cherchons comment ce nombre peut être déterminé.

Je considère les équations

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = u_0 \omega^{n+\nu} + u_1 \omega^{n+\nu+1} + u_2 \omega^{n+\nu+2} + \cdots \tag{15}$$

dans lesquelles les u sont des fonctions de ξ, et je me propose de déterminer ces fonctions de telle sorte que les équations (15) représentent une développable. A cet effet, je forme la fonction

$$\Delta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2,$$

je la développe suivant les puissances croissantes de ω, et j'égale successivement à zéro les coefficients de chaque puissance. Le premier terme est de degré 2ν, et donne lieu à l'équation

$$\nu u_0 u''_0 - (n+\nu) u'^2_0 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$u_0 = k(\xi + a)^{-\frac{\nu}{n}}. \tag{16}$$

Si l'on désigne par U une fonction entière de u_0, u_1,... u_{i-1} et de leurs dérivées, on reconnaîtra aisément que le terme de rang $(i+1)$, dont le degré est $(2\nu + i)$, donne lieu à une équation telle que:

$$\nu(n+\nu) u_0 u''_i - 2(n+\nu)(n+\nu+i) u'_0 u'_i + (\nu+i)(n+\nu+i) u''_0 u_i = U. \tag{17}$$

Je dis que l'intégrale générale de (17) se compose de la somme d'un nombre limité de termes de la forme $A(\xi + a)^\rho$, dans laquelle A est une constante, a

la constante de (16), et ρ un nombre commensurable positif ou négatif dont le dénominateur est un diviseur de n.

Cette assertion est vérifiée pour u_0, d'après (16). J'admets qu'elle soit exacte pour $u_1, \ldots u_{i-1}$, et je vais en conclure son exactitude pour u_i.

En substituant dans (17) à u_0 son expression (16) et divisant ensuite les deux membres par le facteur $k\nu(n+\nu)(\xi+a)^{-\frac{2n+\nu}{n}}$, puis tenant compte de la forme admise pour $u_1, \ldots u_{i-1}$, on obtient, au lieu de (17):

$$(\xi+a)^2 u''_i + 2\frac{n+\nu+i}{n}(\xi+a)u'_i + \frac{n+\nu+i}{n}\cdot\frac{\nu+i}{n}u_i = \sum A(\xi+a)^\rho;$$

l'intégrale générale de cette équation est, on le vérifie aisément, de la forme indiquée.

De cette analyse, je tire cette conclusion: on peut déterminer les fonctions u de manière que les équations (15) représentent une développable. Chacune d'elles est rationnelle par rapport à $(\xi+a)^{\frac{1}{n}}$ et contient deux constantes arbitraires.

Soient maintenant

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = v_0\omega^{n+\nu} + v_1\omega^{n+\nu+1} + v_2\omega^{n+\nu+2} + \cdots \tag{18}$$

les équations d'une surface non développable. Je suppose qu'on puisse déterminer les $2i$ constantes de $u_0, u_1, \ldots u_{i-1}$, de manière à avoir identiquement

$$u_0 = v_0, \qquad u_1 = v_1, \ldots \qquad u_{i-1} = v_{i-1}, \tag{19}$$

mais que l'on ne puisse avoir $u_i = v_i$. Dans ce cas, il existe des surfaces développables (15), dont chaque nappe a, avec une nappe de la surface (18), un contact d'ordre $\frac{\nu+i}{n}$ tout le long de l'axe des ξ. Je dis que ce nombre $\frac{\nu+i}{n}$ est l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre la surface (18) et une développable, le long de la droite considérée, c'est-à-dire le nombre cherché.

C'est, en effet, d'abord l'ordre le plus élevé du contact possible si l'on astreint la développable à être représenté par les équations (15). Cherchons donc s'il est possible d'élever l'ordre du contact en prenant une autre forme pour les équations de la développable. Tout d'abord, pour que l'ordre du contact ne soit pas diminué, il faut prendre les équations suivantes:

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = v_0\omega^{n+\nu} + v_1\omega^{n+\nu+1} + \cdots + v_{i-1}\omega^{n+\nu+i-1} + V\omega^{n+\nu+i+\lambda} + \cdots, \tag{20}$$

en y supposant λ positif, ce nombre pouvant d'ailleurs ne pas être entier. Nous savons déjà que λ ne peut être nul. Ce nombre dépasse donc zéro. Si, dans (18), il existe un terme de degré $(n+\nu+i)$, l'ordre du contact de (18) et (20) est alors $\frac{\nu+i}{n}\cdot$ Donc cet ordre ne peut être dépassé que si v_i est nul. Je suppose donc $v_i=0$.

Je forme, au moyen de (20), le terme de degré $(2\nu+i)$ de la fonction Δ. Dans son coefficient, il est manifeste que V n'entre pas. D'ailleurs, ce coefficient est nul si effectivement les équations (20) représentent une développable. Donc, en vertu des équations (19) on peut disposer des constantes arbitraires de u_i de manière à rendre u_i identiquement nul, c'est-a-dire égal à v_i, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, en résumé:

Pour la surface représentée par les équations (18), si v_i est la première des fonctions v qui ne satisfasse pas à la suite des équations différentielles déduites de $\Delta=0$, l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre chaque nappe de cette surface et une nappe d'une même développable tout le long de l'axe des ξ, est $\frac{\nu+i}{n}\cdot$

Cela étant, le développement de Δ suivant les puissances croissantes de ω, pour la surface (18), commence par un terme du degré $(2\nu+i)$.

III. De l'équation des points paraboliques.

26. Dans une courbe plane, il existe entre le degré et la classe de cette courbe d'une part, et les ordres et les classes de ses cycles d'autre part, une relation. On obtient cette relation en étudiant la fonction $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ le long de la courbe.

Dans la théorie des surfaces, nous venons de mettre en évidence des nombres qui, pour les lignes singulières, jouent un rôle analogue. Si l'on y joint les degrés de ces lignes et qu'on considère, d'autre part, le degré et le rang d'une surface, on a entre ces nombres une relation. On obtient cette relation en étudiant, le long d'une section plane de la surface, la fonction Δ (n.° 25), qui égalée à zéro fournit l'équation des points paraboliques.

Pour faire cette étude, j'aurai à faire usage de la transformée de Δ quand on change à la fois les coordonnées et les variables indépendantes d'une manière quelconque. Je me contente d'énoncer ici les résultats dont la vérification se fait aisément.

Comme plus haut, ξ, η, ζ sont les rapports de trois coordonnées homogènes à une quatrième:

$$x_1 = \xi x_4, \qquad x_2 = \eta x_4, \qquad x_3 = \zeta x_4.$$

On fait une transformation homographique en posant:

$$x_i = a_i z_1 + b_i z_2 + c_i z_3 + d_i z_4, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

On prend pour variables indépendantes deux quantités quelconques α, ω. Je pose:

$$\Delta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2$$

$$D = \sum \pm a_1 b_2 c_3 d_4$$

$$R = \sum \pm A_1 z_2 \frac{\partial z_3}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_4}{\partial\omega}.$$

$$g = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\,\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\,\frac{\partial^2 z_4}{\partial\alpha^2}.$$

$$h = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\,\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\,\frac{\partial^2 z_4}{\partial\alpha\,\partial\omega}.$$

$$l = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\,\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\,\frac{\partial^2 z_4}{\partial\omega^2}.$$

Dans la troisième de ces équations figurent les coordonnées d'un point A. C'est le sommet s_3 du triangle de référence des coordonnées x, en d'autres termes le point à l'infini de l'axe des ζ, si les coordonnées primitives sont cartésiennes. Cela posé, la formule de transformation est la suivante

$$\Delta = \frac{x_4^4}{D^2 R^4}(g\,l - h^2). \tag{21}$$

27. J'explique maintenant la voie que je vais suivre. Soit (S) une section plane d'une surface S. Je considère la fonction Δ le long de cette ligne, je cherche ses zéros et ses infinis et j'égale le nombre des premiers à celui des seconds. C'est cette égalité qui constitue la relation cherchée. Pour former une égalité de ce genre, on peut procéder comme il suit.

Soit, en un point p de la courbe (S) envisagée, n l'ordre d'un des cycles dont cette courbe se compose. Je considère les développements des coordonnées d'un point de (S) suivant les puissances d'une variable ω, qui représentent ce cycle (n.° 1), et je les substitue aux coordonnées dans la fonction envisagée, qui est ici Δ. J'ordonne le résultat suivant les puissances croissantes de ω, et je calcule le degré du premier terme. Ce degré, que j'appelle ordre de la fonction pour le cycle, est positif ou négatif suivant que le point p répond à un zéro ou à un infini de la fonction. Mais cette distinction est inutile, et j'ai montré ailleurs (*) que l'égalité ci-dessus s'obtient simplement en écrivant que la somme des ordres de la fonction est nulle pour tous les cycles de la courbe, pourvu que la fonction soit rationnelle par rapport aux coordonnées et aux dérivées des coordonnées d'un point de la courbe, et c'est ce qui a lieu ici.

28. La question est donc de calculer l'ordre de Δ pour chaque point p en lequel cet ordre n'est pas nul.

Soit p un point quelconque de la section (S) faite par un plan arbitraire. Il peut se présenter l'une des circonstances suivantes:

1.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent variable et dont l'ordre est supérieur à l'unité;

2.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent variable, dont l'ordre est l'unité, mais dont les indicatrices sont paraboliques;

3.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent constant;

4.° le point p n'appartient à aucune des trois catégories précédentes.

Le plan de la section (S) étant censé choisi d'une manière arbitraire, chacun de ses points de rencontre avec la ligne-origine d'un cycle singulier doit être envisagé comme un point arbitraire de la ligne-origine de ce cycle; et, pour la même raison, si la surface possède en dehors de ces lignes-origines de cycles singuliers, des points singuliers, le plan de section n'y passe pas. Donc, si aucune des trois premières circonstances ci-dessus n'a lieu, le point p est un point ordinaire de la surface, c'est-à-dire un point par lequel passe une infinité de lignes que l'on peut envisager comme origines de cycles (1, 1). Un tel point peut être classé parmi ceux qui appartiennent à la ligne-origine d'un cycle (n, n) à plan tangent variable et à indicatrice non-parabolique. En

(*) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 4, p. 61.

conséquence on pourra, sans omettre aucune circonstance, étudier successivement l'ordre de la fonction Δ en un point arbitraire de chacune des diverses lignes-origines envisagées dans le paragraphe précédent.

29. Le point p étant sur la ligne-origine d'un cycle et le plan de la section passant en p et d'ailleurs de direction quelconque relativement à la ligne-origine, on a à calculer l'ordre de Δ pour le cycle de la section dont l'origine est en p. En vertu de la formule (21), je substitue au calcul de l'ordre de Δ, celui de la somme des ordres des facteurs du second membre de cette formule, et j'y prends pour α et ω les variables qui figurent dans les équations (3) du cycle. J'ai d'ailleurs eu soin de faire en sorte que, dans ces équations, la ligne $\alpha=0$ pût être envisagée comme une section plane quelconque quant à sa direction relativement à la ligne-origine. Je peux donc supposer qu'au point p la ligne $\alpha=0$ coïncide avec la section (S).

Donc pour calculer l'ordre de Δ en un point de la ligne-origine d'un cycle, j'aurai à substituer dans le second membre de (21) aux coordonnées leurs développements (3) et à faire ensuite $\alpha=0$.

Cela étant reconnu, je peux considérer séparément les divers facteurs du second membre de (21). Il n'y a pas à envisager le facteur D^{-2} qui ne contient pas les coordonnées du point mobile. Le facteur x_4^4 s'évanouit en chacun des points d'intersection de (S) avec le plan x_4, qui est arbitraire. Il est donc manifeste qu'en chacun de ces points l'ordre de Δ est égal à quatre fois celui de x_4, c'est-à-dire égal à 4. Le nombre de ces intersections est d'ailleurs égal au degré m de S. Donc, par le fait du facteur x_4, dont il n'y aura plus à s'occuper, la somme des ordres de Δ, le long de (S), contient le terme $4m$.

30. Dans les deux autres facteurs de (21) figurent les coordonnées prises par rapport à un tétraèdre de référence arbitraire. Pour chaque point p que j'envisage je fais coïncider ces coordonnées avec celles qui ont été employées dans les équations (3). Le second membre de (21) ne dépend d'ailleurs que du rapport des coordonnées z à l'une d'elles. Je peux donc, sans le troubler, remplacer pour mon calcul z_4 par l'unité et z_1, z_2, z_3 par ξ, η, ζ, ces dernières quantités ayant les expressions (3), savoir:

$$z_1=\xi=\alpha+k\omega^n,\qquad z_2=\eta=\beta+\omega^n,\qquad z_3=\zeta=\gamma+b\omega^n+c\omega^{n+\nu}+\cdots \tag{22}$$

Les quantités β, γ, b, c,... sont des fonctions de α données par les équations (5).

Ainsi que je viens de le dire au n.° 29, on a à faire $\alpha=0$ après la substitution dans le second membre de (21). D'après (5), les fonctions b, β, γ et les dérivées de ces dernières s'évanouissent avec α. Grâce à cette remarque, on aperçoit immédiatement que la partie principale de R se réduit à:

$$R = n\,\omega^{n-1} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = n\,A_3\,\omega^{n-1}.$$

Les lettres A désignent ici, par rapport au nouveau triangle de référence, les coordonnées du sommet s_3 du premier triangle de référence, c'est-à-dire d'un point arbitraire. Ainsi A_3 est nul lorsque le plan z_3 passe par ce point. Le plan z_3 est le plan tangent de la surface au point p. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les points p de (S), pour chacun desquels le plan tangent de S passe en s_3, n'appartient à aucune des trois premières catégories du n.° 28, en sorte que dans les cas correspondant à ces catégories, l'ordre de R est toujours $(n-1)$. Par suite, dans chacun de ces cas, on aura l'ordre de Δ en retranchant $4(n-1)$ de l'ordre du facteur $(gl-h^2)$.

31. Pour terminer ce qui concerne le facteur R, il reste à connaître son ordre pour un quelconque des points p en lesquels le plan tangent de S passe par s_3. Ce sont des points ordinaires de la surface. En choisissant convenablement les coordonnées, et prenant ξ, η pour variable, indépendante, on a aux environs d'un tel point:

$$\zeta = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + \cdots$$
$$R = -2A_1(a\xi + b\eta) - 2A_2(b\xi + c\eta) + \cdots$$

Cette dernière expression s'évanouit dans le cas seulement où la ligne de contact du cône circonscrit à la surface, et de sommet A touche la courbe lieu du point ξ, η, ζ. Je peux écarter cette hypothèse, et conclure que l'ordre de R est égal à l'unité.

Le nombre des points analogues est le rang r de la surface. Donc il y correspond, du fait du facteur R^{-4}, le terme $-4r$ dans la somme des ordres de Δ.

32. Il reste maintenant à calculer l'ordre de $(gl-h^2)$ pour chaque cas. J'écris les premiers termes de g, h, l, déduits des équations (22) et (5) en faisant, après les différentiations, $\alpha = 0$

$$-g = n\,\omega^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1\omega^n + c_1\omega^{n+\nu} + \cdots \\ k & 1 & \dfrac{n+\nu}{n} c_0\omega^\nu + \cdots \\ 0 & 2\beta_2 & 2\gamma_2 + 2b_2\omega^n + 2c_2\omega^{n+\nu} + \cdots \end{vmatrix} = 2n\gamma_2\omega^{n-1} - 2(n+\nu)\beta_2 c_0\omega^{n+\nu-1} \ldots$$
$$+ 2n(kb_1\beta_2 + b_2)\omega^{2n-1} + \cdots$$

$$-h = n^2\omega^{2(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1\omega^n + c_1\omega^{n+\nu}+\cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n}c_0\omega^\nu+\cdots \\ 0 & 0 & b_1 + \frac{n+\nu}{n}c_0\omega^\nu+\cdots \end{vmatrix} = n^2 b_1\omega^{2(n-1)} + n(n+\nu)c_0\omega^{\nu+2(n-1)}+\cdots$$

$$-l = n^2(n-1)\omega^{2n-3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1\omega^n + c_1\omega^{n+\nu}+\cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n}c_0\omega^\nu+\cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n}\cdot\frac{n+\nu-1}{n-1}c_0\omega^\nu+\cdots \end{vmatrix} = n\nu(n+\nu)c_0\omega^{\nu+2n-3}+\cdots$$

Au moyen de ces formules, je calcule la partie principale de $(gl - h^2)$ dans les divers cas, et je trouve les résultats suivants:

I. Si γ_2 différe de zéro, c'est-à-dire si la ligne origine n'est pas asymptotique:

1.° $\quad n = \nu \quad gl - h^2 = \nu^4(4c_0\gamma_2 - b_1^2)\omega^{4(\nu-1)} + \cdots$

Le coefficient de cette partie principale s'évanouit si l'indicatrice est parabolique. Donc, dans le cas opposé, l'ordre de $(gl - h^2)$ est $4(\nu - 1)$. En retranchant l'ordre de R^4 (n.° 30), on a zéro pour l'ordre de Δ.

Le cas où l'indicatrice est parabolique se déduira du cas suivant:

2.° $\quad \nu < n \quad gl - h^2 = 2n^2\nu(n+\nu)\gamma_2 c_0\omega^{\nu+3n-4} + \cdots$

L'ordre de Δ est $\nu + 3n - 4 - 4(n-1) = \nu - n$.

3.° Soit maintenant un cycle (ν, ν) à indicatrice parabolique. Je considère simultanément la surface S contenant ce cycle, et une corrélative S', contenant le cycle corrélatif (n, ν). Au point p placé sur S à distance infiniment petite d'ordre ν de la ligne-origine (a) correspond (n.° 17) un point p' placé sur S' à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine (a'). Soit Δ' la fonction Δ considérée pour S'. En p' l'ordre de Δ' est $(\nu - n)$ comme on vient de le trouver. Mais, suivant un calcul des plus connus et remontant à Euler, Δ et Δ' sont réciproques. Donc en p l'ordre de Δ est $(n - \nu)$. Désignons par $(1+\lambda)$ l'ordre du contact de chaque nappe de S en p avec la tangente asymptotique. D'après le théorème X, n est égal à $(1+\lambda)\nu$, et l'ordre de Δ est $\lambda\nu$.

II. Si γ_2 est nul, c'est-à-dire si la ligne-origine est asymptotique, on trouve:

$$1.^\circ \qquad n \geqq \nu > \frac{n}{2} \qquad gl - h^2 = -n^4 b_1^2 \omega^{4(n-1)}.$$

L'ordre de Δ est zéro.

$$2.^\circ \qquad n = 2\nu \qquad gl - h^2 = -4\nu^4 (9\beta_2 c_0^2 + 4b_1^2)\omega^{4(n-1)}.$$

Si l'on se reporte aux n.^{os} 18 et 19, on reconnaîtra que la quantité entre parenthèses se réduit, si l'on tient compte de l'équation (12), au premier membre de l'équation (14). D'où cette conclusion: si le cycle $(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $(2\nu, \nu)$, l'ordre de Δ est nul.

Le cas où l'équation (14) a lieu sera traité comme conséquence du suivant:

$$3.^\circ \qquad n > 2\nu \qquad gl - h^2 = -2n\nu(n+\nu)^2 c_0^2 \beta^2 \omega^{2\nu+3n-4} + \cdots$$

L'ordre de Δ est égal à $(2\nu - n)$.

4.° En raisonnant comme plus haut, pour le cas du cycle parabolique, et s'appuyant sur la remarque du n.° 22, on a le résultat suivant: Pour un cycle $(2\nu, \nu)$ dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre $(2+\theta)$, l'ordre de Δ est $2\theta\nu$.

III. Si γ_2 et β_2 sont nuls, c'est-à-dire si la ligne-origine est droite, le plan tangent étant variable, on trouvera de même que l'ordre de Δ est zéro. Ce résultat, de même qu'une partie des précédents, pouvait être prévu comme conséquence de l'équation d'Euler $\Delta\Delta' = 1$. Car de cette équation on peut conclure que l'ordre de Δ est nul pour tout cycle dont le corrélatif est de même définition que le proposé.

IV. Si γ_2, b_1, b_2 sont nuls, c'est-à-dire (n.° 24) si le plan tangent est constant le long de la courbe-origine, on a:

$$gl - h^2 = -2n\nu(n+\nu)^2 c_0^2 \beta_2 \omega^{2\nu+3n-4} \ldots$$

L'ordre de Δ est $(2\nu - n)$.

V. Enfin dans le cas où le plan tangent est constant le long d'une ligne-origine droite, on a vu (n.° 25) que l'ordre de Δ est $(2\nu + i)$, i étant un nombre entier nul ou positif dont la détermination exige un examen plus approfondi qui a été fait au numéro cité.

33. Des résultats obtenus aux n.^{os} 29, 31 et 32 et conformément à la méthode expliqueé, je conclus maintenant l'énoncé suivant:

Théorème XVI. Sur une surface algébrique quelconque, de degré m et de rang r, considérons:

1.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine n'est pas droite, dont le plan tangent est variable le long de cette ligne et diffère du plan osculateur de cette même ligne, si, en outre, ce cycle satisfait à une des conditions suivantes:

Sa classe ν est inférieure à son ordre n (soit alors d le degré de sa ligne-origine);

Ou bien sa classe ν_1 est égale à son ordre, et son indicatrice est parabolique en chaque point de sa ligne-origine (soient alors d_1 le degré de cette ligne et $(1+\lambda)$ l'ordre du contact de chaque nappe avec la tangente asymptotique).

2.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est gauche, et dont le plan tangent en chaque point de cette ligne se confond avec le plan osculateur de cette même ligne, si, en outre ce cycle satisfait à une des deux conditions suivantes:

Son ordre n_2 est supérieur au double de sa classe ν_2 (soit alors d_2 le degré de la ligne-origine);

Ou bien son ordre est le double de sa classe ν_3, et la tangent de la ligne-origine a, en chaque point de cette ligne, un contact d'ordre supérieur à 2 avec chaque nappe (soient alors $(2+\theta)$ l'ordre de ce contact et d_3 le degré de la ligne-origine).

3.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est une courbe plane et dont le plan tangent, en chaque point de cette ligne, se confond avec le plan de cette même ligne (soient alors d_4 le degré de cette courbe, et n_4, ν_4 l'ordre et la classe du cycle).

4.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est droite et dont le plan tangent est constant en chaque point de cette droite. Soient alors ν_5, n_5 la classe et l'ordre du cycle et, en outre, $\frac{\nu_5+i}{n_5}$ l'ordre le plus élevé du contact qui se puisse établir entre une nappe de ce cycle et une nappe de développable tout le long de la ligne-origine.

Entre tous les éléments ci-dessus définis pour ces cycles existe la relation

$$\sum[d_1\lambda\nu_1-d(n-\nu)-d_2(n_2-2\nu_2)+2d_3\theta\nu_3+d_4(2\nu_4-n_4)+2\nu_5+i]=4(r-m). \quad (23)$$

34. Sur l'équation (23), on fera les remarques suivantes:

Le rang r se déduit de la connaissance du degré et de celle des lignes singulières au moyen de la théorie des courbes planes.

Le terme $\sum d_1 \lambda \nu_1$ peut être partagé en deux autres, l'un relatif aux lignes paraboliques singulières, censées connues; l'autre relatif à la ligne des points paraboliques proprement dits. Pour cette dernière, les deux nombres λ et ν sont tous deux égaux à l'unité. Donc l'équation (23) donne explicitement le degré du lieu des points paraboliques d'une surface ayant des singularités quelconques.

De l'équation (23) on peut par dualité en déduire une autre, dans laquelle figure la classe de la surface au lieu de son degré, et qui fournira la classe de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.

IV. Applications: surfaces de révolution et surfaces gauches.

35. Je vais appliquer les résultats généraux obtenus dans ce Mémoire aux surfaces de révolution. Ces surfaces offrent des exemples de la plus grande partie des singularités envisagées; les circonstances qu'elles présentent peuvent être reconnues en dehors de toute théorie générale. De là une vérification.

Dans le mouvement d'une figure plane, invariable, sur son plan les droites isotropes qui passent par le centre instantané sont, à chaque instant, le lieu des points dont la vitesse est nulle (*). Quand le mouvement est une simple rotation autour d'un centre fixe, les droites isotropes qui passent en ce point restent fixes dans toute l'étendue du mouvement. En conséquence, dans la rotation d'un corps autour d'un axe fixe, les plans isotropes menés par l'axe restent fixes. Tout point non situé dans un de ces plans décrit un parallèle. Donc, dans une surface de révolution, toute ligne singulière est un parallèle, ou bien est située dans un des plans isotropes menés par l'axe.

36. En ce qui concerne les parallèles singuliers, les résultats suivants sont manifestes:

Si le méridien, en un point non situé sur l'axe, contient un cycle dont la tangente ne soit pas perpendiculaire à l'axe, et dont la classe ν soit inférieure à l'ordre n, le parallèle correspondant est la ligne-origine d'un cycle (n, ν) dont cette ligne-origine n'est pas asymptotique.

(*) Voyez Mannheim: *Sur les surfaces trajectoires.* Savants étrangers, t. 22, n.° 12, p. 3.

Les autres circonstances restant les mêmes, si la classe ν est supérieure à l'ordre n sur le méridien, le parallèle est la ligne-origine d'un cycle (n, n) à indicatrice parabolique. La direction asymptotique est celle du méridien; et le cycle de nappes a pour corrélatif un cycle (ν, n).

Si le méridien, en un point non situé sur l'axe, contient un cycle dont la tangente soit perpendiculaire à l'axe, et dont l'ordre et la classe soient (n, ν), le parallèle correspondant est la ligne-origine d'un cycle de nappes (n, ν) dont le plan tangent est constant.

37. Les lignes singulières situées dans les plans isotropes menés par l'axe offrent des circonstances plus curieuses.

Soit O un point de rencontre du méridien avec l'axe. Pour embrasser à la fois tous les cas, je suppose que la perpendiculaire menée par O à l'axe dans le plan du méridien ait k points de rencontre avec ce méridien, confondus en O. (Il s'agit ici, bien entendu, du demi-méridien; cette observation s'applique à tout ce qui suit. Je dirai ensuite les modifications qui ont lieu quand le méridien se compose d'une seule courbe dont l'axe est axe de symétrie). Parmi les cercles suivant lesquels tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface, il en est k qui s'évanouissent lorsque ce plan vient en O. Donc le plan mené en O perpendiculairement à l'axe coupe la surface suivant deux droites isotropes, dont chacune compte pour k unités dans le degré de la ligne d'intersection.

Ainsi, en chaque point de rencontre du méridien avec l'axe, passent deux droites isotropes, perpendiculaires à l'axe, qui appartiennent à la surface. L'ensemble de toutes ces droites constitue, ainsi qu'on le voit aisément, l'intersection complète de la surface avec les deux plans isotropes menés par l'axe. Je vais étudier la nature de la surface le long d'une quelconque de ces droites.

38. Pour faces x_1 et x_3 du tétraèdre de référence je prends les deux plans isotropes menés par l'axe. Pour faces x_4 et x_2, je prends deux plans perpendiculaires à l'axe, le second x_2 passant par un point de rencontre du méridien avec l'axe. Ainsi le point O est maintenant le sommet s_4 du tétraèdre, et les deux droites isotropes correspondantes sont les arêtes x_1x_2 et x_2x_3. Je considére le méridien dans le plan $x_1=x_3$, et soit

$$\frac{x_3}{x_4}=f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)$$

l'équation de la perspective de ce méridien faite du point de vue s_1 sur le plan x_1. L'équation de la surface de révolution est

$$\frac{x_1\,x_3}{x_4^2}=\left[f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)\right]^2,$$

et cette équation met en évidence que l'intersection du plan x_3 et de la surface se compose uniquement de droites telles que

$$x_3=0, \qquad x_2-\lambda x_4=0,$$

λ étant une racine de $f(\lambda)$. Ce sont des droites isotropes perpendiculaires à l'axe. La même observation s'applique au plan x_1. Suivant notre hypothèse, une des racines λ est nulle; je vais étudier la nature de la surface le long de la droite isotrope correspondante $x_3=x_2=0$. J'aurai à distinguer trois cas, suivant la nature de la rencontre du méridien avec l'axe.

39. *1^er^ cas.* Le méridien rencontre l'axe obliquement. Soient n, ν l'ordre et la classe d'un des cycles du méridien en s_4: on aura

$$\eta=\frac{x_2}{x_4}=\omega^n, \qquad f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)=a\,\omega^n+b\,\omega^{n+\nu}+\cdots$$

Pour la surface, je pose comme précédemment

$$\xi=\frac{x_1}{x_4}, \qquad \zeta=\frac{x_3}{x_4};$$

j'ai ainsi:

$$\eta=\omega^n, \qquad \zeta=\frac{1}{\xi}[f(\eta)]^2=\frac{1}{\xi}(a^2\omega^{2n}+2ab\,\omega^{2n+\nu}+\cdots).$$

Ces équations rentrent dans le type (18) et représentent un cycle de nappes (n, n) dont le plan tangent est constant le long de la ligne-origine droite $\eta=\zeta=0$. Le nombre désigné par i au n.° 25 est ici égal à ν, en sorte que l'ordre de la fonction Δ pour ce cycle est $(2n+\nu)$. On peut le vérifier directement en mettant l'équation de la surface sous la forme

$$\zeta=\xi^{-1}[f(\eta)]^2,$$

et concluant par un calcul facile

$$\Delta=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2=4\xi^{-4}f^3f''. \tag{24}$$

Les quantités f et f'' commencent respectivement par des termes de degré n et $(\nu-n)$ en ω. Donc Δ commence par un terme de degré $3n+(\nu-n)$ ou $(2n+\nu)$.

40. *2^ème^ cas.* Le méridien est tangent à l'axe. On a ici:

$$f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)=b\,\omega^{n+\nu}+\cdots$$

$$\eta=\omega^n, \qquad \zeta=\frac{1}{\xi}(b^2\omega^{2n+2\nu}+\cdots)$$

La droite $\eta=\zeta=0$ est la ligne-origine d'un cycle à plan tangent constant $(n, n+2\nu)$. Le nombre analogue à i est nul. La formule (24) permet encore de le vérifier; l'ordre de Δ est ici $(2n+4\nu)$.

Les deux cas précédents présentent un caractère commun: tout point où le méridien rencontre l'axe sous un angle non droit, appartient à deux droites isotropes perpendiculaires à l'axe, situées sur la surface, et le long de chacune desquelles le plan tangent est constant: c'est le plan mené par l'axe et cette droite.

41. *3ème cas.* Le méridien rencontre l'axe à angle droite. On a ici:

$$\eta=\omega^{n+\nu}, \qquad f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)=a\,\omega^n+\cdots, \qquad \zeta=\frac{1}{\xi}\,a^2\omega^{2n}+\cdots$$

Il en résulte: 1.° pour $n>\nu$, le plan tangent est constant, et c'est encore $\zeta=0$. Le cycle de nappes a l'ordre $(n+\nu)$ et la classe $(n-\nu)$. L'ordre de Δ est $2(n-\nu)$;

2.° pour $n=\nu$, le plan tangent est variable; l'ordre de Δ est zéro;

3.° pour $n<\nu$, le plan tangent est constant; mais c'est le plan $\eta=0$.

Le cycle a l'ordre $2n$ et la classe $(\nu-n)$. L'ordre de Δ est $2(\nu-n)$. Ainsi: un point où le méridien rencontre l'axe à angle droit appartient à deux droites isotropes perpendiculaires à l'axe, situées sur la surface, et le long de chacune desquelles le plan tangent passe constamment par l'axe, ou bien varie, ou bien est constamment perpendiculaire à l'axe, suivant qu'au point de rencontre le méridien a, avec sa tangente, un contact d'ordre inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

42. Je peux maintenant appliquer à une surface de révolution l'équation (23), tous les éléments relatifs aux lignes singulières étant exprimés par les éléments du méridien.

Je désigne pour le méridien par

(n_1, ν_1) un cycle dont l'origine n'est pas sur l'axe, et dont la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe;

(n_2, ν_2) un cycle dont l'origine n'est pas sur l'axe, et dont la tangente est perpendiculaire à l'axe;

(n_3, ν_3) un cycle dont l'origine est sur l'axe, et la tangente oblique à l'axe;

(n_4, ν_4) un cycle tangent à l'axe;

$$\left.\begin{array}{l}(n_5, \nu_5)\\(n'_5, \nu'_5)\\(n''_5, \nu''_5)\end{array}\right\}\ \text{un cycle dont la tangente est perpendiculaire à l'axe, et pour lequel on a:}\ \left\{\begin{array}{l}n_5>\nu_5;\\n'_5=\nu'_5;\\n''_5<\nu''_5.\end{array}\right.$$

Après suppression d'un facteur commun 2, l'équation (23) donne:

$$2(r-m)=\sum(\nu-n)+A,$$
$$A=\sum(\nu_3+3n_3+3n_4+3\nu_4+3n_5-3\nu_5+\nu''_5-n''_5).$$

Soient d et c le degré et la classe du méridien. En considérant successivement ses intersections avec l'axe et ses tangentes perpendiculaires à l'axe, on a les relations:

$$\sum(n_3+n_4+\nu_4+n_5+n'_5+n''_5)=d,$$
$$\sum(\nu_2+\nu_5+\nu'_5+\nu''_5)=c.$$
$$A=c+3d-4\sum(\nu_5+n'_5+n''_5).$$

On a, en outre, par la théorie des courbes planes

$$\sum(\nu-n)=3(c-d).$$

Je conclus donc finalement en remarquant que $m=2d$

$$r=2(c+d)-2\sum(\nu_5+n'_5+n''_5). \tag{25}$$

Sur la formule (25), comme sur tous les résultats relatifs aux rencontres avec le méridien, on doit faire la remarque que ces résultats doivent être divisés par 2 dans le cas où l'axe de la surface est un axe de symètrie du méridien.

43. La formule (25) donne le rang de la surface de révolution engendrée par un méridien ayant des singularités quelconques. C'est, à proprement parler, une formule appartenant à la théorie des points singuliers des courbes planes. On peut la vérifier très-aisément dans le cas simple où la courbe méridienne rencontre obliquement l'axe en des points simples, et non autrement. Le nombre de ces rencontres est alors égal à d. La section méridienne contient, en plus qu'une section quelconque, d points doubles. Sa classe est $2c$. Donc une section quelconque a pour classe $2c+2d$: c'est précisément à quoi se réduit le second membre de (25) pour $\nu_5=n'_5=n''_5=0$.

Voici un exemple assez curieux. Soient p et q deux entiers positifs; considérons la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par

$$y^{2p}=x^q, \qquad 2p>q>p.$$

La surface de révolution engendrée par cette courbe tournant autour de l'axe des x est de degré $2p$ et de rang $2q$.

44. Je m'occupe maintenant des surfaces réglées. Sur une pareille surface, la ligne-origine d'un cycle dont l'ordre surpasse l'unité ne peut être qu'une génératrice rectiligne. De même aussi le lieu des points paraboliques se réduit à des génératrices le long de chacune desquelles le plan tangent est constant.

Soit G une génératrice fixe, et soit G' une génératrice infiniment voisine. Je prends pour infiniment petit principal la distance des points où G et G' rencontrent un plan arbitraire. La plus courte distance de G' à G est d'ordre égal ou supérieur au premier. Dans le premier cas, tout plan coupe G et G' en deux points dont la distance est du 1^er^ ordre. Donc, suivant un théorème concernant la correspondance entre les points de deux courbes (*), les sections faites dans la surface par deux plans quelconques contiennent, aux points de rencontre avec G, des cycles dont les ordres sont égaux. En même temps, le plan tangent au cycle de nappes varie en chaque point de G. Ainsi le caractère distinctif des génératrices singulières ou non, le long desquelles le plan tangent varie, est que les sections faites dans la surface par divers plans ont toujours, au point de rencontre avec G, quel que soit ce point, un cycle d'ordre constant.

Remarquons que cette conclusion semble en défaut si G' et G sont parallèles. Ce cas est écarté ici, toutes les questions étant traitées au point de vue projectif. A ce point de vue, ce cas rentre dans celui que je vais maintenant examiner.

Dans le second cas, il existe sur G un point O, tel qu'un plan arbitraire mené par O coupe G' en un point dont la distance à O soit d'ordre supérieur au premier. Alors les sections de la surface ont, en O, des cycles dont les ordres sont plus grands qu'en tout autre point de G. Ainsi le caractère distinctif des génératrices le long desquelles le plan tangent est constant, c'est l'existence sur chacune d'elles d'un point tel que O. Ce point (s'il n'est pas à l'infini) appartient à la ligne de striction.

45. J'ai à m'occuper ici de ces dernières génératrices seulement. Pour face x_3 du tétraèdre de référence je prends le plan tangent constant, et pour face x_2 un plan passant par G. Pour face x_4 je prends un plan arbitraire mené en O; x_1 enfin est arbitraire. Le sommet s_1 est le point O, et la droite G coïncide avec x_2x_3.

Je considère les sections faites par les faces x_1 et x_4. Ces courbes possèdent des cycles correspondants dont les origines sont s_4 et s_1. La première a pour tangente x_1x_3. Quant à la seconde, on peut faire deux hypothèses: ou bien elle a pour tangente x_3x_4, c'est supposer qu'en O les tangentes de toutes les sections sont aussi dans le plan x_3; ou bien elle a une autre tangente, que je peux alors supposer choisie pour la droite x_2x_4.

(*) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 4, p. 32.

Par les lettres y, z, x, je représente un point de la première courbe, de la seconde courbe et de la surface. Je peux alors poser

1ère hypothèse:

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = a'\omega^{n'}, \qquad z_3 = b'\omega^{n'+\nu'} + \cdots, \qquad z_4 = 0$$

2ème hypothèse:

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = b'\omega^{n'+\nu'} + \cdots, \qquad z_3 = a'\omega^{n'} + \cdots, \qquad z_4 = 0$$

$$n' > n.$$

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = a\omega^n, \qquad y_3 = b\omega^{n+\nu} + \cdots, \qquad y_4 = 1.$$

$$x_1 = \alpha, \qquad x_2 = y_2 + \alpha z_2, \qquad x_3 = y_3 + \alpha z_3, \qquad x_4 = 1.$$

46. Je considère maintenant la quantité $(gl - h^2)$, pour former, comme au n.° 32, l'ordre de Δ. Les coordonnées x_i d'un point de la surface étant linéaires par rapport à la variable α, la quantité g est nulle. Ainsi $(gl - h^2)$ se réduit à $-h^2$, et il n'y a plus qu'à envisager la quantité h. En désignant par des accents les dérivées prises par rapport à ω, on trouve aisément:

$$h = \sum \pm y_1 y'_2 z_3 z'_4.$$

Dans la seconde hypothèse, la partie principale de h est $nn'aa'\omega^{n+n'-2}$. Donc (n.° 30) l'ordre de Δ, pour un tel cycle, est $2(n'-n)$.

Dans la première hypothèse, la partie principale de h est

$$n(n'+\nu')ab'\omega^{n+n'+\nu'-2} \quad \text{ou} \quad -n'(n+\nu)ab'\omega^{n+n'+\nu-2},$$

suivant que ν' est inférieur ou supérieur à ν. Si ν' et ν sont égaux, ces deux termes s'ajoutent. Il peut alors arriver que leur somme s'évanouisse. Dans ce cas, l'ordre de h s'élève, et l'on peut trouver des exemples où cet ordre soit aussi grand que l'on voudra. Dans une surface développable, h est rigoureusement nul. Je dirai donc, dans la première hypothèse, que l'ordre de Δ est $2(n'-n+t)$, le nombre t étant le plus petit des deux nombres ν, ν', et pouvant les dépasser dans le cas seulement où ν et ν' sont égaux.

47. De cette analyse, je tire enfin cette conclusion:

Soit une surface gauche de degré m et de rang r;

Soit, sur cette surface, une génératrice singulière G, ligne-origine d'un cycle de nappes dont le plan tangent P soit constant le long de cette ligne, et dont l'ordre et la classe soient n et ν;

Soient n', ν' $(n' > n)$ l'ordre et la classe du cycle de la section (S) faite dans ce cycle de nappes par un plan mené arbitrairement au point où G rencontre la ligne de striction;

Soit, en outre, t un nombre qui est nul si la tangente à l'origine du cycle (S) n'est pas dans le plan P; qui, dans le cas opposé, est égal au plus petit des deux nombres ν, ν', pouvant, en outre, surpasser ν et ν' si ces derniers nombres sont égaux.

Entre les éléments analogues, et relatifs à toutes les génératrices telles que G, existe la relation

$$\sum(n'-n+t)=2(r-m).$$

La singularité ordinaire correspond au cas $n=1$, $n'=2$, $t=0$. La formule fournit alors $2(r-m)$ pour le nombre des génératrices singulières d'une surface gauche ne possédant que des singularités ordinaires. Ce dernier résultat se démontre directement avec une grande facilité (*).

48. Les surfaces que je viens de considérer dans ce paragraphe n'offrent pas d'exemple des cycles singuliers dont les lignes-origines sont asymptotiques. En dehors des surfaces développables, je n'en connais pas d'exemple parmi les surfaces usuelles. Il est cependant bien facile de former des surfaces possédant une telle singularité, et l'analyse suivie dans ce Mémoire en fournit le moyen.

Que l'on envisage la surface dont l'équation est:

$$(2x_1^3-3x_1x_2x_4+x_3x_4^2)^3x_4=(x_1^2-x_2x_4)^5.$$

On vérifiera aisément que cette surface possède un cycle de nappes (3, 2) dont la ligne-origine asymptotique est la cubique gauche

$$\frac{x_1}{x_4}=\alpha, \qquad \frac{x_2}{x_4}=\alpha^2, \qquad \frac{x_3}{x_4}=\alpha^3.$$

La même surface possède, en outre, un cycle (5, 5) ayant pour ligne-origine la droite x_1x_4, et le plan x_4 pour plan tangent tout le long de cette ligne. On peut à volonté multiplier de tels exemples.

Paris, décembre 1877.

(*) Voyez *Association française pour l'avancement des Sciences.* Congrès de Nantes 1875, pag. 237.