

Ueber Darstellungsfunktionen.

Von

PAUL DU BOIS-REYMOND in Tübingen.*)

... Sehr zutreffend bemerkst Du, dass mein Beweis des Satzes:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx f(x) \varphi(x, h) = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a dx \varphi(x, h),$$

sowie die Beweise einiger anderen Sätze den $\lim_{h=\infty} \int_a^b dx \varphi(x, h) = 0$

nicht allein für feste a und b , sondern auch für — während des Ansteigens von h — irgendwie bewegliche a und b voraussetzen, dass jedoch der Schluss vom Grenzwert Null bei festen a, b auf den gleichen bei beweglichen a, b nicht ohne Weiteres einleuchte. Gewiss. So unbeschränkt hinsichtlich der Function $\varphi(x, h)$ wäre der Schluss sogar falsch, wie Beispiele lehren. Allein wenn man $\varphi(x, h)$ angemessen beschränkt, namentlich wenn man annimmt, dass $\varphi(x, h)$ für $x > 0$ nicht unendlich wird, was doch von den bis jetzt an den Tag getretenen Darstellungsformeln ausnahmslos gilt, so ist es, wie ich alsbald zeigen werde, sehr leicht, jene Beweise durch den Nachweis der Identität beider Grenzwerte zu ergänzen. Die Annahme der Endlichkeit von $\varphi(x, h)$ für $x > 0$ und $h = \infty$ ist übrigens bei allen Sätzen der beiden Abhandlungen: *Ueber die allgemeinen Eigenschaften etc.***) und *Allgemeine Lehrsätze etc.****), auch wo dies nicht ausdrücklich angegeben ist, gemacht, und es ist vielleicht von Interesse einmal ihre Nothwendigkeit zu prüfen. Denn im Ganzen war mein Streben bei jenen älteren Untersuchungen und ihrer Fortsetzung bis zu denen über

*) Aus einer brieflichen Mittheilung des Verfassers an Hrn. C. Neumann.

**) Borch. Journal, Bd. 69, p. 1.

***) Borch. Journal, Bd. 79, p. 38.

die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungen, in den Grundformeln:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b dx f(x) \varphi(x, h) = 0, \quad 0 < a < b, \dots A$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^a dx f(x) \varphi(x, h) = f(0) \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^a dx \varphi(x, h),$$

von der Hypothese, dass $\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^a dx \varphi(x, h)$ eine von a unabhängige,

endliche, feste Grösse G sei, ausgehend, die Beschränkungen der Function $f(x)$ successive und auf Kosten des Spielraums der Function $\varphi(x, h)$ thunlich aufzuheben*). Es liegt daher nahe auch einmal den entgegengesetzten Weg zu verfolgen, d. h. unter Beibehaltung der für die Gültigkeit der vorstehenden Sätze zuerst sich darbietenden Beschränkungen von $f(x)$ den weitesten Spielraum für $\varphi(x, h)$ aufzusuchen. Man wird also $f(x)$ der ursprünglichen Dirichlet'schen Bedingung unterwerfen, oder nach Deiner zweckmässigen Bezeichnungsweise, der ich unbedingt mich anschliesse, $f(x)$ als *abtheilungsweise monoton* voraussetzen, und sodann zusehen, welcher umfassendste Spielraum der Function $f(x, h)$ gelassen werden darf, damit der Beweis des § 4. der ersten der cit. Abhandlungen bindend bleibe. Dies läuft eben einfach

auf die Frage nach der Identität der Grenzwerte $\int_a^b dx \varphi(x, h)$ bei festen und bei beweglichen a, b hinaus, die ich im Folgenden erledigen will. Die Ergebnisse sind übrigens insofern allgemeinerer Natur, als an Stelle der durch die Darstellungstheorie geforderten Be-

dingung, dass $\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^a dx \varphi(x, h)$ von a unabhängig sei, dieser Limes auch eine beliebige Function von a sein darf.

*) Die Forderung der Endlichkeit von $\varphi(x, h)$ ist unerlässlich für den Beweis des Satzes A (Art. 1 der zweiten cit. Abhandlung), welcher der Function $f(x)$ ihre denkbar grösste nur durch das Erforderniss der Integrirbarkeit beschränkte Freiheit wahrt. Allein *nachträglich* kann man hier wie in analogen Fällen der Function $\varphi(x, h)$ bedingtes Unendlichwerden gestatten, ähnlich wie der Function $f(x)$ im Art. 2 der cit. Abhandlung. Es darf $\varphi(x, h)$ von vornherein einige feste Unendlichkeitspunkte haben, oder auch in einzelnen festen Punkten mit h unendlich werden, wenn nur das $\int dx \bmod \varphi(x, h)$ über diese Unendlichkeitsstellen, hinreichend eng begrenzt, für jeden Werth von h unter einem beliebigen Kleinheitsgrad bleibt. Unter solchen Umständen wird übrigens auch eine Bewegung der Unendlichkeitspunkte gestattet sein.

1.

Es sei $\lim_{\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) = 0$, wo ich α und β durch die Ungleichheit $0 < \varepsilon \leq \alpha < \beta \leq X$ beschränke, unter ε eine beliebig klein anzunehmende Grösse verstanden. Während h über alle Grenzen zunimmt, seien α und β unbeweglich. Weiter sei auch $0 < \varepsilon \leq \alpha < \beta \leq X$, und es ist zu zeigen, dass auch $\lim_{h=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) = 0$ ist, falls α und β während des Wachstums von h innerhalb der ihnen zugewiesenen Strecke ihre Werthe verändern. Hinsichtlich der Function $\varphi(x, h)$ setze ich zunächst voraus, dass in:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) = (\beta - \alpha) \psi$$

ψ stets unter einer endlichen, allerdings je kleiner ε desto höher befindlichen Schranke Φ verbleibt, während α und β sich verändern.

Dies vorausgeschickt, theilen wir das Intervall $X - \varepsilon$ in n Theile Δ . Man wird, da n endlich ist, h immer hinreichend gross annehmen können, dass

$$\int_{\alpha+p\Delta}^{\alpha+q\Delta} dx \varphi(x, h); \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, n$$

numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse ϱ sei. Es wird also, wenn h hinreichend gross ist:

$$\text{mod} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) < \varrho + 2\Delta\Phi$$

sein. Nun können Δ und ϱ , jedes für sich, beliebig klein angenommen werden, stets entspricht einer Wahl Δ, ϱ ein die vorstehende Ungleichheit erfüllender Werth h . Setzt man z. B. $\varrho = \Delta$, so ist also für ein hinreichend grosses h

$$\text{mod} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) < \Delta(1 + 2\Phi),$$

wo immer α und β auf der ihnen zugewiesenen Strecke sich befinden mögen. Es ist Δ beliebig klein und in $\text{mod} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h)$ sonst nicht enthalten, als dass es dem h eine untere Grenze vorschreibt, damit vorstehende Ungleichheit statfinde. Wächst h alsdann von dieser

unteren Grenze in's Unendliche, so kann der Limes von $\text{mod} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h)$ nicht von Null verschieden sein. Denn wäre er es, so könnten wir ja von vornherein $\Delta(1 + 2\Phi)$ kleiner annehmen, als diesen Limes, was sinnlos ist. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass, wenn ich von einem Limes von $\text{mod} \int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h)$ rede, ich nicht eine feste Grösse als solchen vorauszusetzen brauche, sondern darunter auch die Unbestimmtheitsgrenzen seiner Schwankungen verstehen darf.

Doch ist die Bedingung, dass $\varphi(x, h)$ für $x > 0$ mit h nicht unendlich werde, d. i., dass in

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) = \delta \cdot \psi(\delta, \alpha, h), \quad \beta - \alpha = \delta,$$

ψ unter einer endlichen Grenze Φ verharren solle, ersichtlich eine für die Gültigkeit der allgemeinen Sätze der Darstellungstheorie *nicht nothwendige*. Der obige Beweis der Coexistenz der Grenzwerte Null von $\int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h)$ und $\int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h)$ lässt sich in kaum veränderter Weise führen, wenn nur vorausgesetzt wird:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \varphi(x, h) = \lambda(\delta) \cdot \psi(\delta, \alpha, h),$$

wo $\lambda(\delta)$ beliebig langsam Null werden darf, ψ aber wieder unter einer Schranke Ψ verbleiben muss.

So führt denn dieser Weg kurz und mühelos zu einer Bedingung für $\varphi(x, h)$, welche dieser Function mannigfaches Unendlichwerden gestattet. Es giebt aber noch einen Gedankengang, der uns zu einer neuen, die vorstehende enthaltenden, scheinbar weiteren Bedingung führt, und welche für die Gültigkeit unserer Beweismethoden *nothwendig* ist. Von dieser neuen Bedingung lässt sich dann zeigen, dass sie mit der alten äquivalent ist, wodurch diese Betrachtungen einen befriedigenden Abschluss finden.

II.

Die ursprüngliche Bedingung war, dass die Function

$$F(a, h) = \int_0^a dx \varphi(x, h)$$

nach $h = \infty$ einen von a unabhängigen Limes G haben solle, und

zwar für jedes feste $a > 0$. Die neu hinzutretende Bedingung ist offenbar, dass $F(a, h)$ diesen Limes G auch haben müsse, wenn, während h ansteigt, a beweglich ist, bei seiner hypothetischen Bewegung aber von Null durch eine feste, wenn auch beliebige kleine Distanz ε getrennt bleibt. Dann wird in der That:

$$\int_a^b dx \varphi(x, h) = F(b, h) - F(a, h)$$

den Limes $G - G = 0$ haben müssen, wie auch a und b in der Strecke $0 < \varepsilon \leq a < b \leq X$ sich beim Ansteigen von h verhalten mögen.

Um diese Bedingung zu formuliren, wollen wir, gewohnten Vorstellungen zu Liebe, setzen x statt a , $\frac{1}{y}$ statt h , $F(a, h) = f(x, y)$, und dieser Function das rechteckige Gebiet Γ vorschreiben:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq x \leq X, \\ 0 &\leq y \leq Y. \end{aligned}$$

Nach dem Obigen muss $f(x, y)$ folgende Eigenschaft haben: $\lim_{y=0} f(x, y)$ muss $= G$ sein, wie auch, während y abnimmt, x zwischen ε und X sich hin und her bewegen möge. Jedenfalls darf also $f(x, y)$ für keinen Punkt $x = x_1$, $y = 0$ stetigvieldeutig sein. D. h. es darf in der Strecke $\varepsilon \leq x \leq X$, $y = 0$ kein Punkt $x = x_1$ existiren, für den der Grenzwert $\lim_{x=x_1, y=0} f(x, y)$ abhängt von der relativen Geschwindigkeit der Abnahme von $x_1 - x$ und y . Mit anderen Worten es muss $f(x, y)$ für jeden besonderen Punkt $x = x_1$ des Intervalles $\varepsilon \dots X$ der Linie $y = 0$ stetig sein. Dies ist unerlässlich, reicht es aber auch aus, d. h. wenn bei Annäherung von x an jeden besonderen Werth $x = x_1$ und bei gleichzeitiger Abnahme von y gegen Null $f(x, y)$ stets den Limes G hat, ist dies auch ihr Limes, wenn x , bei Abnahme von y , z. B. keiner Grenze sich nähert, sondern unausgesetzt hin und her springt?

Er ist es ohne Zweifel. Der Nachweis geschieht mit Hülfe gewisser Rechtecke, die man von den Stetigkeitskreisen aus erhält, sodann auch direct definiren kann. Wir nehmen auf einen Augenblick die Function $f(x, y)$ im ganzen Gebiet Γ stetig an, was jedenfalls heisst, dass $\varphi(x, h)$ nach h stetig sei. Ausserdem wollen wir $f(x, y)$ über das Gebiet Γ hinaus fortsetzen, sie dort durchweg constant und $= G$ annehmen. Dann ist $f(x, y)$ in der ganzen Strecke $\varepsilon \leq x \leq X$, $y = 0$ stetig und jeder Punkt dieser Strecke ist von solchem Gebiet, in welchem $f(x, y)$ existirt, umgeben. Jetzt setzen wir eine beliebige kleine Grösse μ fest, und construiren zu jedem Punkt der Strecke $\varepsilon \leq x \leq X$, $y = 0$, als Mittelpunkt den grössten Kreis, in welchem die Schwankung der Function $f(x, y)$ das Maass μ erreicht.

Keiner dieser Kreise kann den Halbmesser Null haben, da er alsdann einem Unstetigkeitspunkt der Function $f(x, y)$ entspräche.

Von diesen Kreisen gehen uns nur ihre im Gebiet der positiven y liegenden Hälften an. Diese Halbkreise bedecken dort ein Gebiet, dessen eine Begrenzung die Linie $\varepsilon \leq x \leq X, y = 0$ ist, während die andere Begrenzung die Kreis-Envelope ist, die mit $y = \eta(x)$ bezeichnet werden mag. Von dieser Linie behalten wir nur den Theil bei, der im Gebiet Γ liegt, und nur ihn wollen wir mit $y = \eta(x)$ bezeichnen. Doch dürfen wir uns nicht auf die Anschauung der Envelope stützen, sondern müssen die Existenz der Function $\eta(x)$ wirklich beweisen.

Der Kreis für den Mittelpunkt $x = x_1, y = 0$, den wir kurz den Kreis $x_1, 0$ nennen wollen, habe den Radius r . Nun errichten wir auf der x -Axe im Punkt $x = x_1$ ein Loth η . Die Peripherie des Kreises $x_1, 0$ schneidet η in der Höhe r . Auch von allen übrigen Kreisen $x, 0$ kann η geschnitten werden. Der höchst mögliche Schnittpunkt wird der eines der Kreise $\varepsilon, 0$ oder $X, 0$ sein, und zwar resp. in den Höhen $\sqrt{2r(x_1 - \varepsilon) + r^2}$ oder $\sqrt{2r(X - x_1) + r^2}$. Der höchste dieser beiden Punkte sei η' . So kann also η von den Kreisen $x, 0$ (wo x dem Intervall $\varepsilon \leq x \leq X$ angehört) noch geschnitten werden im Intervall $r \leq \eta \leq \eta'$. Falls nun η' weder vom Kreis $\varepsilon, 0$ noch vom Kreis $X, 0$ geschnitten wird, so muss es im Intervall $r \dots \eta'$ einen Punkt η'' geben, der Art, dass es keinen tieferen Punkt η''' giebt, über den nicht noch Schnittpunkte von η mit Kreisen $x, 0$ fielen. Die Existenz des Punktes η'' kann man nach bekanntem Verfahren durch irrationale Darstellung beweisen, indem man das Intervall $r \dots \eta'$ z. B. successive in $10^1, 10^2, \dots$ Theile zerlegt. Ein höchstes der Intervalle

$$r + p \frac{\eta' - r}{10} < \eta \leq r + (p + 1) \frac{\eta' - r}{10}$$

enthält dann noch Schnittpunkte. Dies sei das Intervall $p = p_1$. Man zerlege es wiederum in 10 gleiche Intervalle, von denen wieder ein höchstes noch Schnittpunkte enthält, u. s. f., so dass $\eta'' - r$ unmittelbar durch einen fortlaufenden Decimalbruch dargestellt wird. Es ist alsdann $\eta'' = \eta(x_1)$.

Weiter ist $\eta(x)$ eine stetige Function von x . Es existirt $\eta(x)$ für jeden Werth $x = x_1$. Nun existire noch neben $\eta(x_1)$ ein Werth $\eta(x_1 \pm 0)$, der von $\eta(x_1)$ verschieden ist. Da durch $\eta(x_1 \pm 0)$ ebenfalls Kreise gehen müssten, so könnte die Bestimmung $\eta(x_1)$ keine eindeutige sein, was sie doch ist.

Sodann kann $\eta(x)$ nirgend Null sein. Denn wo $\eta(x)$ Null ist, ist es auch r , und die Function $f(x, y)$ ist dann gegen die Voraussetzung unstetig.

Es muss also nach bekannten Grundsätzen $\eta(x)$ seinen kleinsten Werth y_1 irgendwo annehmen und dieser Werth y_1 ist > 0 .

Zu jedem μ gehört mithin ein y_1 . Und bei abnehmendem μ kann weder y_1 , noch (für irgend ein festes x) $\eta(x)$ wachsen. Man hat also ein Rechteck:

$$\varepsilon \leq x \leq X,$$

$$0 \leq y \leq y_1,$$

in welchem die Schwankung der Function 2μ nicht übersteigt. Und wenn man y_1 als Argument ansieht, so kann man ihm ganz leicht μ so zuordnen, dass μ als monoton abnehmende Function mit y_1 unter jede Grenze sinkt. Doch wird eine solche Zuordnung bei der directen Definition der Stetigkeitsstreifen kürzer bewerkstelligt.

Jene Kreise sind dieselben, von denen Herr Lüroth in seinem originellen Beweise für die Gleichmässigkeit der Stetigkeit von Functionen zweier Variablen*) Gebrauch macht. Er zeigt, dass die Radien der Kreise x, y stetige Functionen von x, y sind. Diese merkwürdige Eigenschaft bleibt offenbar noch für Linien als Oerter der Kreismittelpunkte bestehen, auch wenn die Function $f(x, y)$ nur in diesen Linien stetig ist. Auch unsere vorstehenden Betrachtungen gelten unverändert, wenn wir die Stetigkeit der Function $f(x, y)$ auf die Linie $\varepsilon \leq x \leq X, y = 0$ beschränken, also von $\varphi(x, h)$ nicht voraussetzen, dass sie nach h stetig sei. Nur die Definition der Kreise $x, 0$ muss etwas anders gefasst werden. Der Kreis $x, 0$ muss derjenige grösste Kreis sein, in dessen Gebiet, mit Ausschluss der Peripherie, die grösste Werthdifferenz der Function $f(x, y)$ den Werth μ nicht übersteigt.

Man kann jene rechteckigen Stetigkeitsstreifen auch direct definiren, wie folgt. Es sei y der gemeinsame Radius von allen Kreisen $x, 0$, und μ sei die grösste unter den Schwankungen von $f(x, y)$, die innerhalb dieser Kreise vorkommen, oder der grösste Werth, der von keiner dieser Schwankungen überstiegen wird. Es wird μ monoton gegen Null abnehmen müssen, während y stetig gegen Null abnimmt, und es sei $\mu = \lambda(y)$. Man hat also:

$$f(x, y) - G = \lambda(y) \cdot \psi, \quad \psi \leq 1, \quad \text{nicht} \leq 2!$$

Ein besonderer Fall hiervon ist die Stetigkeit der Functionen einer Variablen. Verschwindet nämlich für jeden besonderen Werth x die Function $f(x, y) = F(x + y) - F(x)$ mit y , so wird, wie leicht zu sehen, die Function $f(x, y)$ auch nach ihren beiden Argumenten für jeden besonderen Werth von x stetig sein, und man wird setzen dürfen:

$$F(x + y) - F(x) = \lambda(y) \cdot \psi, \quad \psi \leq 1,$$

wo $\lambda(y)$ eine mit y monoton gegen Null abnehmende Function. Wenn $\lim_{y=0} \psi$ nicht Null ist (wobei nicht ausgeschlossen ist, dass sein Un-

*) Math. Ann. VI, 319.

bestimmtheitsintervall die Null enthält), wird man $\lambda(y)$ den *Stetigkeitsgrad* von $F(x)$ im Intervall $\varepsilon \leq x \leq X$ nennen, analog wie ich schon öfters vom Stetigkeitsgrad in Punkten Gebrauch machte.

Diese Bemerkungen lassen sich unmittelbar auf Functionen von drei Variabeln ausdehnen. Es sei $f(x, y, z)$ für alle Punkte $x, 0, 0$ des Intervalls $\varepsilon \leq x \leq X$ stetig, und $= G$. Man wird den Kreiscylinder construiren, dessen Axe die x -Axe ist, und dessen Radius $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ auf Grund von Kugeln so zu einer Grösse μ in Beziehung gesetzt ist, wie es eben bei y und μ auf Grund von Kreisen der Fall war. Man hat also:

$$f(x, y, z) - G = \lambda(r) \cdot \psi, \quad \psi \leq 1.$$

Es kann in $z^2 = x^2 + y^2$, y und z sonst beliebig sein, z. B. kann $z = 0$ oder $y = 0$ sein. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - G &= \lambda(y) \cdot \psi, & \psi &\leq 1, \\ f(x, y, z) - G &= \lambda_1(z) \cdot \psi, & \psi &\leq 1 \end{aligned}$$

oder durch Multiplication:

$$f(x, y, z) - G = \lambda(y) \cdot \lambda_1(z) \cdot \chi, \quad \chi \leq 1,$$

wenn wir $\lambda(y)\lambda_1(z)$ statt ihrer Quadratwurzel schreiben, wo $\lambda(y)$ und $\lambda_1(z)$ mit ihren Argumenten monoton gegen Null abnehmende Functionen vorstellen.

III.

Wenn also $f(x, y)$ für alle Punkte $x, 0 (\varepsilon \leq x \leq X)$ stetig ist, so ist auch $\lim_{y=0} f(x, y) = G$ ganz unabhängig von der Verfügung über x , d. i.

$$f(x, y) = F(a, h) = \int_0^a dx \varphi(x, h)$$

nähert sich der Grenze G bei ins Unendliche wachsendem h , wie auch a während dessen seinen Werth ändern möge, wenn es nur von 0 um ein Festes entfernt bleibt.

Der Bedingung der Stetigkeit von $F(a, h)$ nach a und h für jeden besonderen Werth von a geben wir eine etwas andere Form, indem wir

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \varphi(x, h) - \lim_{h=\infty} \int_0^a dx \varphi(x, h) \\ = \int_0^a dx \varphi(x, h) - G = \int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) + \int_0^a dx \varphi(x, h) - G \end{aligned}$$

setzen, woraus dann folgt, dass $\lim_{a_1=a, h=\infty} \int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) = 0$ sein muss. Somit ergibt sich:

Mein (Ueber die allgemeinen Eigenschaften etc., Borch. Journ. Bd. 69, § 4) für den Satz:

$$\lim_{\delta} \int_0^a dx f(x) \varphi(x, h) = f(0) \lim_{\delta} \int_0^a dx \varphi(x, h)$$

gegebener Beweis gestattet, wenn man die Voraussetzung der abtheilungsweisen Monotonie der Function $f(x)$ bestehen lässt, der Function $\varphi(x, h)$ folgenden Spielraum:

Erstens muss

$$\lim_{\delta} \int_0^a dx \varphi(x, h)$$

von a unabhängig endlich und bestimmt sein. Zweitens muss sein:

$$\lim_{a=a_1, h=\infty} \int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) = 0$$

für jeden festen Werth $a > 0$, und ein beliebiges gleichzeitiges Verschwinden von $a_1 - a$ und $\frac{1}{h}$.

Setzen wir $a_1 - a = \delta$, so ist die vorstehende Bedingung offenbar erfüllt, wenn,

$$\int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) = \lambda(\delta) \psi(a, \delta, h), \quad 0 < \varepsilon \leq a,$$

gesetzt, $\lambda(\delta)$ mit δ überhaupt Null wird, und $\psi(a, \delta, h)$ unter einer endlichen von ε abhängigen Grenze Φ bleibt. Andererseits geht aus den obigen Sätzen über die Stetigkeit einer Function von drei Variablen hervor, dass

$$f(a, \delta, h) = \int_a^{a+\delta} dx \varphi(x, h)$$

stets auf die Form $\lambda(\delta) \cdot \psi$, $\psi \leq 1$ gebracht werden kann. Hieraus folgt, dass diese Bedingung, welche mit der im Art. I. aufgestellten identisch ist, oder die völlig äquivalente Bedingung

$$\lim_{a=a_1, h=\infty} \int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) = 0,$$

im Sinne meines erwähnten Beweises die Theorie in der That abschliesst.

IV.

Ich werde zum Schluss ein Beispiel einer Function vorlegen, welche die Bedingung

$$\lim_{a_1=a, h=\infty} \int_a^{a_1} dx \varphi(x, h) = 0$$

nicht erfüllt.

Die Function

$$\frac{x - \kappa}{\left[(x - \kappa)^2 + \frac{1}{h^n} \right]^2}$$

ist nach $x - \kappa$ ungerade, so dass ihr Integral von $\kappa - k$ bis $\kappa + k$ Null ist.

Schreiben wir ϱx statt x , und setzen

$$\psi(x, h) = \frac{\varrho x - \kappa}{\left[(\varrho x - \kappa)^2 + \frac{1}{h^n} \right]^2},$$

so ist:

$$\int_0^N dx \psi(x, h) = \frac{1}{2\varrho} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 + \frac{1}{h^n}} - \frac{1}{(\varrho N - \kappa)^2 + \frac{1}{h^n}} \right\},$$

und hierin setzen wir: $\varrho = h^3$, $\kappa = \frac{1}{h}$, $n = 4$. Dann ist der Limes $h = \infty$ des vorstehenden Integrals Null für jeden festen Werth N , unendlich für $\varrho N - \kappa = 0$.

Nun betrachten wir das Integral

$$\int_a^b dx \psi(x - \gamma, h), \quad \gamma > 0.$$

Sobald a und b fest sind, hat es nach dem vorigen den Limes Null, nicht aber z. B. wenn $a = \gamma$, $b = \gamma + \frac{\kappa}{\varrho}$.

Hieraus folgt, dass u. A.

$$\varphi(x, h) = h e^{-hx} + \psi(x - \gamma, h)$$

das erste Attribut einer darstellenden Function besitzt. Denn

$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx \varphi(x, h)$ ist von a unabhängig und $= 1$. Allein $\varphi(x, h)$

erfüllt die weitere für die darstellenden Functionen abgeleitete Be-

dingung nicht. $\int_a^{a_1} dx h e^{-hx} = e^{-ah} - e^{-a_1h}$ erfüllt sie allerdings.

Dagegen hat man, wenn $a = \gamma$, $a_1 - \gamma = \delta$ gesetzt wird:

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} dx \psi(x - \gamma, h) = \int_0^{\delta} dx \psi(x, h) = \frac{1}{2q} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{h^n}} - \frac{1}{(q\delta - \alpha)^2 + \frac{1}{h^n}} \right\}.$$

Diese Grösse wird aber, wie wir oben sahen, unendlich statt Null, wenn $\delta = \frac{\alpha}{q}$ gesetzt und h unendlich wird. Sie ist eben nach δ und h stetig vieldeutig.

Seit ich meine Eingangs angeführten Abhandlungen schrieb, sind die analytischen Grundbegriffe verschärft, die Methoden vervollkommenet und vermehrt worden. Namentlich drei Sätze habe ich geglaubt einer Uebearbeitung unterziehen zu sollen. Der das Integral

$$\int_0^{\alpha} d\alpha \bmod f'(\alpha)$$

benutzenden Darstellbarkeitsbedingung*) gab ich ihren weitesten Inhalt.***) Sodann bediente ich mich besserer Methoden zur Discussion eines Theils der aus der Darstellbarkeitsbedingung

$$\int_0^{\alpha} d\alpha \bmod \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} d\beta f(\beta) < \infty ***)$$

sich ergebenden Folgerungen.†) Endlich habe ich soeben den Satz des § 4. der ersten der citirten Abhandlungen bis an seine Grenzen verfolgt.

Mit diesen drei Nachträgen bilden die *allgemeinen* Sätze über die Darstellungsformeln, trotz manchen offenen Fragen, die es für's Erste wohl bleiben dürften, und manchen Punkten, die ich noch zu erläutern vermag, schon jetzt einen zusammenhängenden und durchsichtigen Lehrgegenstand.

Tübingen, im April 1881.

*) Borch. Journ. Bd. 79, Art. 8.

**) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen etc., Tübingen bei Laupp, pag. 28 sqq.

***)) Borch. Journ. Bd. 79, Art. 9.

†) Comptes Rendus, 11. und 18. April 1881.