

SULLA SUPERFICIE LUOGO DI UN PUNTO IN CUI LE SUPERFICIE DI TRE FASCI TOCCANO UNA MEDESIMA RETTA.

Nota di **Gaetano Aguglia**, in Termini Imerese.

Adunanza del 14 maggio 1905.

1. Dato un fascio di superficie, (F) , dell'ordine n , il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto, P , dello spazio alle superficie del fascio (F) è una superficie, φ_P , d'ordine $2n - 1$, che passa per P *).

Tutte le superficie φ_P corrispondenti ai punti dello spazio costituiscono un sistema lineare ∞^3 : $\{\varphi\}$, tale che, quando il punto P descrive un piano π , o una retta R , la corrispondente superficie φ_P genera una rete $[\varphi]_\pi$, o un fascio $(\varphi)_R$; e reciprocamente.

La superficie generica del sistema $\{\varphi\}$ passa semplicemente per la curva base del fascio (F) , d'ordine n^2 , e pei $4(n - 1)^3$ punti doppi di (F) .

La superficie generica di una rete $[\varphi]_\pi$ passa inoltre pei $3(n - 1)^2$ punti in cui le superficie di (F) toccano il piano π . Etc.

Or dati tre fasci (F) , (F') , (F'') , risp. degli ordini n , n' , n'' , e fissato ad arbitrio un piano π , le tre superficie φ_P , φ'_P , φ''_P , luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto P di π risp. alle superficie dei fasci (F) , (F') , (F'') , passano tutte e tre pel punto P e quando P descrive il piano, π , esse descriveranno tre reti, $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$, d'ordini $2n - 1$, $2n' - 1$, $2n'' - 1$, proiettive, essendo corrispondenti tre superficie determinate dal medesimo punto P .

Il luogo dei punti comuni a tre superficie corrispondenti delle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ è una superficie, dell'ordine $2(n + n' + n'') - 3$, la

* Cfr. GUCCIA, *Teoria delle superficie* φ_P , etc. (Carte litografate del 1895).

quale si scinde nel piano π ed in una superficie residuale, Δ , dell'ordine $2(n + n' + n'' - 2)$.

Se A è un punto di Δ , esso è, secondo la nostra definizione, un punto comune a tre superficie $\varphi_P, \varphi'_P, \varphi''_P$, diverso, in generale, da P , onde la retta PA è tangente in A alle tre superficie dei fasci $(F), (F'), (F'')$ passanti per A . Viceversa, se A è un punto ove le tre superficie dei fasci $(F), (F'), (F'')$ passanti per A sono tangenti ad una medesima retta, detto P il punto ove questa incontra il piano π , le superficie $\varphi_P, \varphi'_P, \varphi''_P$ relative a tal punto si incontreranno in A e quindi A sarà punto di Δ .

Adunque la superficie Δ , d'ordine $2(n + n' + n'' - 2)$, si può anche definire come il luogo di un punto in cui le superficie dei tre fasci $(F), (F'), (F'')$ che vi passano sono tangenti ad una medesima retta.

In particolare per $n'' = 1$ si ha la superficie Σ_R , d'ordine

$$2(n + n' - 1),$$

luogo di un punto tale che la tangente comune ivi alle superficie di due fasci d'ordini n, n' , si appoggi ad una retta fissa R *).

2. Suppongasi che i fasci $(F), (F'), (F'')$ siano risp. dotati, in un punto, O , d'un punto base (r) -plo, (ρ) -plo, (σ) -plo e contengano ciascuno una superficie F_1, F'_1, F''_1 che ha ivi un punto multiplo risp. del grado massimo r', ρ', σ' . Ci proponiamo d'investigare come si comporterà in O la superficie Δ in ciascuno dei seguenti casi:

$$1^\circ) r < r', \rho < \rho', \sigma < \sigma'; \quad 2^\circ) r = r', \rho < \rho', \sigma < \sigma';$$

$$3^\circ) r = r', \rho = \rho', \sigma < \sigma'; \quad 4^\circ) r = r', \rho = \rho', \sigma = \sigma'.$$

CASO $1^\circ) r < r', \rho < \rho', \sigma < \sigma'$. — Indichiamo con $H_r, K_\rho, \Gamma_\sigma$ i coni d'ordine r, ρ, σ risp. tangenti in O alle superficie generiche dei fasci $(F), (F'), (F'')$ e con $H_{r'}, K_{\rho'}, \Gamma_{\sigma'}$ i coni d'ordini r', ρ', σ' risp. tangenti in O alle superficie F_1, F'_1, F''_1 . Le superficie $\varphi_P, \varphi'_P, \varphi''_P$, corrispondenti ad un punto generico P del piano fisso π , hanno risp. in

*) Per la superficie Σ_R cfr. MINEO, *Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio d'ordine n colle superficie d'un fascio d'ordine n'* [questi Rendiconti, t. XVII (1903), pp. 297-310]; vedi anche le due Note di L. LO MONACO-APRILE, *Sulla superficie luogo dei contatti di 1° ordine delle superficie di un fascio con quelle di una rete, generali, e sue applicazioni*; *Sopra alcuni problemi di contatto relativi a superficie e a curve gobbe algebriche* [questi Rendiconti, t. XVIII (1904), pp. 1-15; 164-184].

O un punto $(r + r' - 1)$ -plo, $(\rho + \rho' - 1)$ -plo e $(\sigma + \sigma' - 1)$ -plo e ivi per cono tangente il luogo (residuale) delle generatrici di contatto dei piani condotti per la retta PO e risp. tangenti a coni dei fasci $(H_r, \pi_1 \pi_2 \dots \pi_{r'-r}, H_{r'})$, $(K_\rho \pi'_1 \pi'_2 \dots \pi'_{\rho'-\rho}, K_{\rho'})$ e $(\Gamma_\sigma \pi''_1 \pi''_2 \dots \pi''_{\sigma'-\sigma}, \Gamma_{\sigma'})$, ove $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{r'-r}$, $\pi'_1 \pi'_2 \dots \pi'_{\rho'-\rho}$ e $\pi''_1 \pi''_2 \dots \pi''_{\sigma'-\sigma}$ sono $r' - r$, $\rho' - \rho$ e $\sigma' - \sigma$ piani qualunque, distinti o coincidenti, passanti per la retta PO *).

Ora, conducendo pel punto O una trasversale arbitraria, R , e facendo descrivere al punto P il piano π (non passante per O), i punti d'intersezione delle superficie φ_P , φ'_P , φ''_P colla retta R generano su questa tre involuzioni di punti projective I^2_{2n-1} , $I^2_{2n'-1}$, $I^2_{2n''-1}$ i cui $2(n + n' + n'') - 3$ punti comuni sono i punti in cui la retta R incontra il piano π e la superficie Δ . Or poichè queste tre involuzioni hanno risp. in O un punto base $(r + r' - 1)$ -plo, $(\rho + \rho' - 1)$ -plo e $(\sigma + \sigma' - 1)$ -plo, ne segue, per un noto Lemma del GUCCIA **), che dei punti comuni a tre gruppi corrispondenti $r + r' + \rho + \rho' + \sigma + \sigma' - 3$ coincidono in O , donde, giacchè il piano π non passa per O , si conchiude che la superficie Δ ha in O un punto

$$(r + r' + \rho + \rho' + \sigma + \sigma' - 3)\text{-plo.}$$

D'altro canto i coni tangenti in O alle superficie delle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ coistituiscono alla lor volta tre reti projective di coni risp. degli ordini $r + r' - 1$, $\rho + \rho' - 1$, $\sigma + \sigma' - 1$ e tali reti generano un cono, luogo delle generatrici comuni a tre coni corrispondenti, dell'ordine $r + r' + \rho + \rho' + \sigma + \sigma' - 3$, che è il cono tangente in O alla superficie Δ .

Supposto poi che una retta l uscente da O sia generatrice multipla del grado s pel cono H_r e generatrice multipla del grado s' pel cono $H_{r'}$, la retta l sarà, in generale, generatrice multipla del grado $s + s' - 1$ pel cono tangente in O alla superficie φ_P ***), ma quando P è il punto d'intersezione di l con π la retta l è generatrice multipla del grado $s + s'$ se $s + r' - r \neq s'$ ed invece del grado $s + s' + 1$ se $s + r' - r = s' + \dagger$)

*) Cfr. GUCCIA, l. c., Teorema VI.

**) GUCCIA, *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie* [questi Rendiconti, t. VII (1893), pp. 49-60], Lemma I, per $k = 2$.

***) Cfr. GUCCIA, *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie* (Memoria II) [questi Rendiconti, t. IX (1895), pp. 1-64], Teoremi XXXIX e LX.

†) Cfr. GUCCIA, *Ricerche, etc.* (Memoria II), l. c., Teoremi XXXVII e XXXVIII.

pel cono tangente a φ_P in O . Similmente, supponendo che la retta l sia generatrice multipla del grado t pel cono K_ρ e del grado t' pel cono $K_{\rho'}$, ed inoltre che sia generatrice multipla del grado u pel cono Γ_σ e del grado u' pel cono $\Gamma_{\sigma'}$; allora, facendo osservazioni analoghe a quelle fatte, e tenendo presente il Lemma del GUCCIA relativo a tre reti proiettive di curve piane *), si conchiude che l , in generale, pel cono tangente in O alla superficie Δ , è generatrice multipla del grado $s+s'+t+t'+u+u'-2$, se $s+r-r \neq s'$, ovvero $t+\rho'-\rho \neq t'$, ovvero $u+\sigma'-\sigma \neq u'$; e del grado $s+s'+t+t'+u+u'-1$, se $s+r-r=s$, $t+\rho'-\rho=t'$, $u+\sigma'-\sigma=u'$.

Ove poi si verifichi una o due (ma non tre) delle seguenti ipotesi:

- 1^a) $s=1$, $s'=0$; 2^a) $t=1$, $t'=0$; 3^a) $u=1$, $u'=0$;
 4^a) $s=0$, $s'=1$; 5^a) $t=0$, $t'=1$; 6^a) $u=0$, $u'=1$;

oppure due delle ipotesi:

- 7^a) $s=s'=0$, 8^a) $t=t'=0$, 9^a) $u=u'=0$;

rifacendo lo stesso ragionamento, si trova che il grado di molteplicità della generatrice l , pel cono tangente in O alla superficie Δ , è dato dalla formula $s+s'+t+t'+u+u'-1$ quando si facciano in essa le opportune sostituzioni.

Di qui segue che, fra le generatrici del cono tangente in O alla superficie Δ sono, in generale, da comprendere le rr' , $\rho\rho'$ e $\sigma\sigma'$ generatrici comuni ai coni H_r ed $H_{r'}$, K_ρ e $K_{\rho'}$, Γ_σ e $\Gamma_{\sigma'}$.

Sarebbero infine da esaminare i casi in cui fra i piani tangenti ai coni H_r ed $H_{r'}$, K_ρ e $K_{\rho'}$, Γ_σ e $\Gamma_{\sigma'}$ lungo la generatrice multipla l passassero delle particolari relazioni, ma non crediamo di doverci addentrare nello studio di queste eccezioni.

3. Osservazione. — Se il punto O è punto ordinario per uno dei tre fasci, per es. per (F'') , e si ha quindi $\sigma=0$, $\sigma'=1$, la superficie Δ avrà in O un punto $(r+r'+\rho+\rho'-2)$ -plo il cui cono tangente è il cono luogo delle generatrici di contatto dei coni dei due fasci $(H_r, \Gamma^{r-r'}, H_{r'})$ e $(K_\rho, \Gamma^{\rho'-\rho}, K_{\rho'})$ [dove Γ^j indica il piano Γ , tangente in O alla superficie del fascio (F'') passante per O , contato j volte] e ciò

*) Cfr. GUCCIA, *Ricerche*, etc. (Memoria I) [questi Rendiconti, t. VII (1893), pp. 193-255], n° 17.

quando da esso luogo, d'ordine $2r' + 2\rho' - 3$, si stacchi il piano Γ contato $(r' - r) + (\rho' - \rho) - 1$ volte *).

Di qui segue che la superficie Δ passa, in generale, semplicemente pei punti doppi dei tre fasci (F) , (F') , (F'') ed in uno di essi, per es. del fascio (F) , ha per tangente il piano polare della retta d'intersezione dei due piani ivi tangenti alle due superficie di (F') ed (F'') , che passano per questo punto, rispetto al cono ivi tangente alla superficie di (F) dotata di punto doppio.

4. I risultati a cui siamo pervenuti possono soffrire eccezioni, qualcuna delle quali passeremo ad esporre.

α) Se i fasci (F) , (F') , (F'') hanno tutti in O un punto base (r) -plo e le loro superficie generiche hanno ivi lo stesso cono tangente, se inoltre ciascuno di essi contiene una superficie dotata in O d'un punto (r') -plo ($r' > r$) e queste superficie hanno ivi lo stesso cono tangente, osservando che in tal caso tre superficie delle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ determinate da un medesimo punto P del piano π hanno in O il medesimo cono tangente, il quale, in generale, descrive una rete d'ordine $r + r' - 1$ al muoversi di P su π , se ne deduce che le tre involuzioni di punti projective I_{2n-1}^2 , $I_{2n'-1}^2$, $I_{2n''-1}^2$, segnate dalle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ sopra una retta arbitraria uscente da O , hanno in O un punto base $(r + r' - 1)$ -plo e contengono tre involuzioni minori corrispondenti di prima specie per cui O è punto base $(r + r')$ -plo, epperò, applicando il Lemma del GUCCIA (2^a nota del n° 2) si trova che la superficie Δ ha in O un punto $(3r + 3r' - 1)$ -plo.

β) Se solo due dei tre fasci, ad es. (F') ed (F'') , hanno in O un

*) Come verifica: prendendo una generatrice g di questo cono e considerando sul piano, α , tangente ai due coni dei fasci (H, Γ'^{-r}, H_r) e $(K_p, \Gamma'^{-\rho}, K_p)$ lungo la generatrice g , la traccia, (C) , del fascio (F) , la traccia, $\Phi_{P'}$, della superficie $\varphi_{P'}$, corrispondente al punto, P' , d'incontro di α con π e Γ , e l'involuzione, $J_{P'}$, traccia del fascio di coni (H, Γ'^{-r}, H_r) , si conchiude subito che g , raggio doppio per l'involuzione $J_{P'}$, è, in generale, una delle $r + r' - 1$ tangenti in O alla curva $\Phi_{P'}$ ed ha quindi riunite, in O , $r + r'$ intersezioni colla superficie $\varphi_{P'}$. In modo analogo si vede che g ha riunite, in O , $\rho + \rho'$ intersezioni colla superficie $\varphi_{P''}$, ed è poi evidente, giacchè P' è punto di Γ , che la superficie $\varphi_{P''}$ passi per O . Applicando pertanto alla retta g il Lemma del GUCCIA (2^a nota del n° 2) si trova che essa è tangente in O alla superficie Δ .

punto base (ρ) -plo e le loro superficie generiche hanno ivi il medesimo cono tangente fisso, se ciascuno di essi contiene una superficie dotata in O d'un punto (ρ') -plo ($\rho' > \rho$) e queste due superficie hanno ivi lo stesso cono tangente, supposto che il fascio (F) sia dotato in O d'un punto base (r) -plo e contenga una superficie che ha in O un punto (r') -plo ($r' > r$) allora, con considerazioni analoghe a quelle fatte, si trova che la superficie Δ ha in O , in generale, un punto $(r+r'+2\rho+2\rho'-2)$ -plo.

In particolare, per $r = 0$, $r' = 1$, $\rho = 0$, $\rho' = 1$ si trova che la superficie Δ passa semplicemente per un punto ove una superficie del fascio (F') ne tocca una di (F'') ; da cui facilmente si inferisce che Δ passa semplicemente per le tre curve gobbe luogo dei punti ove si toccano le superficie di due qualunque dei fasci dati *).

γ) Se ciascuno dei tre fasci (F) , (F') , (F'') è dotato in O d'un punto base multiplo risp. del grado r , ρ , σ e contiene una superficie avente in O un punto multiplo risp. del grado r' , ρ' , σ' ($r' > r$, $\rho' > \rho$, $\sigma' > \sigma$) il cui cono tangente è composto del cono tangente in O alla superficie generica del fascio a cui essa appartiene e da un gruppo di piani passanti per una retta R (che sia la medesima per tutti e tre i gruppi di piani) allora, osservando che le tre reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ hanno risp. in O un punto base $(r+r'-1)$ -plo, $(\rho+\rho'-1)$ -plo e $(\sigma+\sigma'-1)$ -plo e contengono tre superficie corrispondenti, quelle determinate dal punto ove R incontra π , le quali hanno risp. in O un punto $(r+r')$ -plo, $(\rho+\rho')$ -plo, $(\sigma+\sigma')$ -plo, col solito procedimento si ricava che Δ ha in O un punto $(r+r'+\rho+\rho'+\sigma+\sigma'-2)$ -plo.

Con ragionamenti analoghi si potrebbero esaminare altri casi di eccezione, sui quali però non credo opportuno insistere.

5. CASO 2°) $r = r'$, $\rho < \rho'$, $\sigma < \sigma'$. — In tal caso il fascio (F) ha in O un punto base (r) -plo ($r > 0$) a cono tangente variabile in un fascio, (H_r) , ed i due fasci (F') ed (F'') hanno nel punto O un punto base (ρ) -plo e (σ) -plo a coni tangenti fissi, K_ρ e Γ_σ , e contengono ciascuno una superficie avente in O risp. un punto (ρ') -plo e (σ') -plo di cui indicheremo al solito con $K_{\rho'}$ e $\Gamma_{\sigma'}$ i coni tangenti.

*) Per la curva luogo dei punti di contatto delle superficie di due fasci vedi: SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI (1895-96), pp. 485-501]; e per la sua costruzione, etc., cfr. MINEO, l. c.; LO MONACO-APRILE, l. c.

Adoperando lo stesso procedimento del caso 1° (n° 2) si trova che la superficie Δ ha in O un punto $(2r + \rho + \rho' + \sigma + \sigma' - 3)$ -plo, il cui cono tangente è il luogo delle generatrici comuni ai coni tangenti in O alle superficie corrispondenti delle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$; e se una retta l è generatrice base (s) -pla pel fascio (H_r) e generatrice (s') -pla per uno dei coni del detto fascio, ed inoltre è generatrice multipla dei gradi t , t' , u , u' risp. pei coni K_ρ , $K_{\rho'}$, Γ_σ , $\Gamma_{\sigma'}$, si trova ancora che tale retta è, in generale, generatrice multipla del grado

$$s + s' + t + t' + u + u' - 2,$$

se $s + r' - r \neq s'$, ovvero $t + \rho' - \rho \neq t'$, ovvero $u + \sigma' - \sigma \neq u'$, pel cono tangente in O alla superficie Δ , ma se $s + r' - r = s'$, $t + \rho' - \rho = t'$ ed $u + \sigma' - \sigma = u'$, ovvero si dànno uno o due dei cinque casi: $s = 0$ ed $s' = 1$; $t = 0$ e $t' = 1$; $t = 1$ e $t' = 0$; $u = 0$ ed $u' = 1$; $u = 1$ ed $u' = 0$, oppure si ha $t = t' = u = u' = 0$, allora il grado di molteplicità della generatrice l , pel cono tangente in O alla superficie Δ , è dato, in generale, dalla formula

$$s + s' + t + t' + u + u' - 1;$$

da cui si deduce che, nelle ipotesi di questo 2° caso, fra le generatrici del cono tangente in O alla superficie Δ , sono, in generale, da comprendere: le r^2 generatrici base del fascio di coni (H_r) ; le $3(r - 1)^2$ generatrici doppie del medesimo fascio; le $\rho\rho'$ generatrici comuni ai coni K_ρ e $K_{\rho'}$, e le $\sigma\sigma'$ comuni a Γ_σ e $\Gamma_{\sigma'}$.

Ed anche in questo caso si osservi che se il punto O è punto ordinario per uno dei fasci (F') , (F'') , ad es. per (F'') , e si ha quindi $\sigma = 0$, $\sigma' = 1$, la superficie Δ ha in O un punto $(2r + \rho + \rho' - 2)$ -plo il cui cono tangente è il luogo delle generatrici di contatto dei due fasci (H_r) e $(K_\rho \Gamma^{\rho' - \rho}, K_{\rho'})$ [dove $\Gamma^{\rho' - \rho}$ indica il piano Γ , tangente in O alla superficie del fascio (F'') passante per O , contato $\rho' - \rho$ volte] e ciò quando da esso luogo, d'ordine $2r + 2\rho' - 3$, si stacchi il piano Γ contato $\rho' - \rho - 1$ volte.

Da cui poi segue che la superficie Δ passa semplicemente per le tre curve gobbe B , B' , B'' , d'ordine n^2 , n'^2 , n''^2 , base dei fasci (F) , (F') , (F'') , ed in un punto qualunque di esse, A , appartenente ad es. alla curva B , ha per tangente il piano determinato dalla tangente in A alla curva B e dalla retta ove si segano i piani tangenti in A alle due superficie di (F') ed (F'') passanti ivi.

6. Fra le eccezioni notiamo la seguente:

Se il fascio (F) è dotato d'un punto base (r) -plo, O , a cono tangente variabile, se i due fasci (F') , (F'') hanno entrambi in O un punto base (ρ) -plo, tale che le loro superficie generiche hanno ivi il medesimo cono tangente fisso, se inoltre ciascuno d'essi contiene una superficie dotata in O d'un punto (ρ') -plo e queste due superficie hanno ivi il medesimo cono tangente, allora la superficie Δ avrà in O un punto multiplo del grado $2(r + \rho + \rho' - 1)$.

7. CASO 3°) $r = r'$, $\rho = \rho'$, $\sigma < \sigma'$. — In questo caso i fasci (F) ed (F') hanno risp. in O un punto base (r) -plo e (ρ) -plo i cui coni tangenti costituiscono due fasci (H_r) e (K_ρ) ; il fascio (F'') è dotato in O d'un punto base (σ) -plo a cono tangente fisso, Γ_σ , e contiene una superficie avente in O un punto (σ') -plo di cui indicheremo con $\Gamma_{\sigma'}$ il cono tangente.

Le superficie φ_P e φ'_P , relative ai fasci (F) ed (F') e corrispondenti ad un punto P generico del piano π (non passante per O), hanno risp. in O un punto $(2r - 1)$ -plo e $(2\rho - 1)$ -plo ed in quanto ai loro coni ivi tangenti notiamo che fra le generatrici comuni a questi coni è da comprendere la retta PO *). La superficie φ''_P , corrispondente al punto P e relativa al fascio (F'') , ha in O un punto $(\sigma + \sigma' - 1)$ -plo e in quanto al suo cono ivi tangente si noti che, quando il punto P cade su una generatrice del cono Γ_σ , o di $\Gamma_{\sigma'}$, la retta PO è anche generatrice del cono tangente in O alla φ''_P .

Osserviamo ancora che se una retta, g , è una generatrice di contatto di due coni dei fasci (H_r) e (K_ρ) , indicando con α il piano tangente a questi coni lungo la generatrice g , e facendo descrivere al punto P la retta, R , d'intersezione di π con α , le superficie φ_P , φ'_P e φ''_P generano tre fasci $(\varphi)_R$, $(\varphi')_R$ e $(\varphi'')_R$ contenuti nelle reti $[\varphi]$, $[\varphi']$ e $[\varphi'']$ e corrispondenti nella proiettività, ed importa notare che i fasci di coni tangenti in O alle superficie dei fasci $(\varphi)_R$ e $(\varphi')_R$ hanno una generatrice base comune nella retta g **), la quale poi, come è evidente, è anche generatrice del cono tangente in O ad una superficie del fascio $(\varphi'')_R$.

*) Cfr. GUCCIA, *Teoria delle superficie* φ_P , etc., l. c., Teorema VII.

**) Ciò si verifica facilmente considerando sul piano α i fasci (C) , (C') , $(\Phi)_R$, $(\Phi')_R$ e le involuzioni J_r^i , J_ρ^i ordinatamente tracce dei fasci (F) , (F') , $(\varphi)_R$, $(\varphi')_R$, (H_r) , (K_ρ) ed osservando che, essendo g raggio doppio di J_r^i ed J_ρ^i , è tangente in O alle varie curve dei fasci $(\Phi)_R$, $(\Phi')_R$ e quindi anche alle superficie dei fasci $(\varphi)_R$, $(\varphi')_R$.

Pertanto, applicando il Lemma del GUCCIA (2^a nota del n° 2) ad una retta condotta ad arbitrio pel punto O e poscia ad una qualsiasi delle generatrici del cono Γ_σ , del cono $\Gamma_{\sigma'}$ e del cono luogo delle generatrici di contatto dei coni dei due fasci (H_r) e (K_ρ) , si trova che la superficie Δ ha in O un punto $(2r + 2\rho + \sigma + \sigma' - 3)$ -plo, il cui cono tangente è composto del cono Γ_σ , del cono $\Gamma_{\sigma'}$ e del luogo delle generatrici di contatto dei coni dei due fasci (H_r) e (K_ρ) .

8. CASO 4°) $r = r'$, $\rho = \rho'$, $\sigma = \sigma'$. — In tal caso i tre fasci (F) , (F') , (F'') hanno risp. in O un punto base (r) -plo, (ρ) -plo, (σ) -plo, i cui coni tangenti alle singole superficie sono variabili in tre fasci (H_r) , (K_ρ) , (Γ_σ) . Le tre reti $[\varphi]$, $[\varphi']$, $[\varphi'']$ hanno risp. in O un punto base $(2r - 1)$ -plo, $(2\rho - 1)$ -plo, $(2\sigma - 1)$ -plo ed importa notare che, fra le generatrici dei coni tangenti in O a tre superficie di esse reti corrispondenti ad un medesimo punto P , generico del piano π (non passante per O), è da comprendere la retta PO . È ancora da notare che una generatrice base, ad es. del fascio di coni (H_r) , è anche generatrice base della rete dei coni tangenti in O alle superficie della rete $[\varphi]$ ed ha inoltre $(2n - 1) - 1 - 2(n - r - 2) = 2r + 2$ intersezioni riunite in O colla superficie φ_P corrispondente al punto P ove essa retta incontra il piano π .

Ed ora, applicando il Lemma del GUCCIA (2^a nota del n° 2) ad una retta condotta ad arbitrio pel punto O , e poscia ad una qualunque delle generatrici base dei fasci (H_r) , (K_ρ) e (Γ_σ) , si trova che la superficie Δ ha in questo caso in O un punto multiplo del grado $2(r + \rho + \sigma - 1)$ e fra le generatrici del suo cono tangente sono, in generale, da comprendere le r^2 , ρ^2 , σ^2 generatrici base dei fasci (H_r) , (K_ρ) , (Γ_σ) .

9. Nel caso in cui due dei fasci, ad es. (F') ed (F'') , sono dello stesso ordine n' , ed appartengono ad una medesima rete $[F']$, indicando con F'_0 , F'_1 , F'_2 tre superficie di essa linearmente indipendenti, onde $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$, potremo supporre che F'_0 sia la superficie comune ad (F') ed (F'') ed anzi che $(F') \equiv (F'_0, F'_1)$ ed $(F'') \equiv (F'_0, F'_2)$. Preso allora un punto A generico di F'_0 , trovasi [n° 4, β], per $r = 0$, $r' = 1$, $\rho = 0$, $\rho' = 1$] che la superficie Δ passa semplicemente per A , epperò che F'_0 fa parte di Δ .

Ogni altro punto A' di Δ sarà un punto ove le tre superficie dei

fasci (F) , $(F'_0 F'_1)$ ed (F'_0, F'_2) passanti per A' toccano una medesima retta, che sarà l'asse del fascio di piani tangenti in A' alle superficie della rete $[F']$, formanti un fascio, che passano per A' , fra le quali ve ne sarà, in generale, una, ed una sola, che tocca in A' la superficie del fascio (F) che vi passa.

Viceversa, se in un punto A'' una superficie della rete $[F']$ ha lo stesso piano tangente, α , di una superficie del fascio (F) , l'asse del fascio dei piani, tangenti in A'' alle superficie della rete che passano per questo punto, giacerà nel piano α , epperò le superficie dei tre fasci (F) , $(F'_0 F'_1)$, (F'_0, F'_2) che passano per A'' sono ivi tangenti ad una medesima retta e quindi A'' appartiene a Δ .

Detta adunque S la superficie luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie del fascio (F) , d'ordine n , con quelle della rete $[F']$, d'ordine n' , si ha $\Delta \equiv F'_0 S$ e, giacchè Δ è dell'ordine $2(n' + 2n' - 2)$, ne segue subito che S è dell'ordine $2(n + 2n' - 2) - n' = 2n + 3n' - 4$, come d'altronde è ben noto.

10. Suppongasi che il fascio (F) e la rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$, siano dotati in un medesimo punto O , d'un punto base multiplo.

Sul modo di comportarsi in O del fascio (F) faremo le due ipotesi:

α) Il fascio (F) abbia in O un punto base (r) -plo a cono tangente fisso, H_r , e contenga una superficie dotata ivi d'un punto (r') -plo $(r' > r)$, il cui cono tangente indicheremo con $H_{r'}$.

β) Il fascio (F) abbia in O un punto base (r) -plo $(r > 0)$ a cono tangente variabile in un fascio di coni, (H_r) .

Sul modo di comportarsi in O della rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$ faremo le quattro ipotesi:

a) La rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$ abbia in O un punto base (ρ) -plo a cono tangente fisso, K_ρ , e contenga un fascio, (F'_1, F'_2) , dotato ivi d'un punto base (ρ_1) -plo $(\rho_1 > \rho)$ a cono tangente fisso, K_{ρ_1} , e contenente alla sua volta una superficie, F'_2 , dotata ivi d'un punto (ρ_2) -plo $(\rho_2 > \rho_1)$, di cui indicheremo con K_{ρ_2} il cono tangente.

b) La rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$ abbia in O un punto base (ρ) -plo $(\rho > 0)$, a cono tangente variabile in un fascio di coni, (K_ρ) (individuato dai due coni K_ρ, K'_ρ tangenti in O alle superficie F'_0, F'_1), e contenga una superficie, F'_2 , dotata in O d'un punto (ρ_2) -plo $(\rho_2 > \rho)$, di cui indicheremo con K_{ρ_2} il cono tangente.

c) La rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$ abbia in O un punto base (ρ) -plo a cono tangente fisso, K_ρ , e contenga un fascio, (F'_1, F'_2) , dotato in O d'un punto base (ρ_1) -plo ($\rho_1 > \rho$) a cono tangente variabile in un fascio di coni, (K_{ρ_1}) , individuato dai due coni K_{ρ_1}, K'_{ρ_1} tangenti in O alle superficie F'_1, F'_2 .

d) La rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$ sia dotata in O d'un punto base (ρ) -plo ($\rho > 0$), i cui coni tangenti alle singole superficie costituiscano una rete di coni, $[K_\rho]$.

Combinando ciascuna delle ipotesi $(\alpha), (\beta)$ con ciascuna delle ipotesi $(a), (b), (c), (d)$ si hanno otto casi nei quali si può trovare subito il modo di comportarsi in O della superficie S (n° 9) relativa al fascio (F) ed alla rete $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$.

Così dal caso 1° del n° 2 si deduce che nel

Caso $\alpha, a)$ la superficie S ha, in generale, in O un punto

$$(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)\text{-plo},$$

e fra le generatrici del suo cono tangente in O , che d'altronde è facile costruire, sono, in generale, da comprendere le rr' generatrici comuni ai coni H_r ed $H_{r'}$, e le $\rho\rho_1, \rho_1\rho_2, \rho_2\rho$ generatrici comuni risp. ai coni K_ρ e K_{ρ_1} , ai coni K_{ρ_1} e K_{ρ_2} , ed ai coni K_{ρ_2} e K_ρ .

E qui è da osservare che:

I) Se sussistendo le ipotesi $(\alpha), (a)$ il punto O è punto ordinario del fascio (F) , e si ha quindi $r = 0, r' = 1$, la superficie S ha in O un punto $(\rho + \rho_1 + \rho_2 - 2)$ -plo, il cui cono tangente è il cono Jacobiano della rete di coni $[K_\rho H^{\rho_2-\rho}, K_{\rho_1} H^{\rho_2-\rho_1}, K_{\rho_2}]$ [ove H^j indica il piano H_j tangente in O alla superficie del fascio (F) passante ivi, contato j volte] e ciò quando dal detto cono Jacobiano, d'ordine $3(\rho_2 - 1)$, si stacchi il piano H contato $2\rho_2 - \rho_1 - \rho - 1$ volte (cfr. n° 3).

II) Se sussistendo le ipotesi $(\alpha), (a)$ la rete $[F']$ non ha in O altra singolarità che quella di possedere una superficie dotata ivi d'un punto (ρ_2) -plo ($\rho_2 > 1$), e si ha quindi $\rho = 0, \rho_1 = 1$, la superficie S ha in O un punto $(r + r' + \rho_2 - 2)$ -plo, il cui cono tangente è il luogo (residuale) delle generatrici di contatto dei coni dei due fasci $(H_r, K'^{r-r}, H_{r'})$ e (K^{ρ_2}, K_{ρ_2}) , ove K^j indica il piano, tangente fisso in O alla superficie generica del fascio (F'_1, F'_2) , contato j volte (cfr. n° 3).

Di qui segue che la superficie S passa semplicemente per la Jacobiana della rete $[F']$, curva d'ordine $6(n' - 1)^2$, ed in un punto qualunque di essa ha per tangente il piano polare della retta d'intersezione

del piano ivi tangente alla superficie del fascio (F) che vi passa col piano ivi tangente fisso alla superficie generica del fascio costituito dalle superficie della rete $[F']$ passanti ivi, rispetto al cono tangente alla superficie della rete $[F']$ dotata ivi di punto doppio.

Notiamo infine che sul modo di comportarsi nel punto O della superficie S nelle ipotesi (α), (a) si hanno alcune eccezioni, fra cui le seguenti:

1^a) Se $r = \rho$, $r' = \rho_1$ ed il cono H_r coincide con K_ρ ed $H_{r'}$ con K_{ρ_1} la superficie S ha in O un punto $(2\rho + 2\rho_1 + \rho_2 - 2)$ -plo (cfr. n° 4, β).

2^a) Se $r = \rho_1$, $r' = \rho_2$ ed il cono H_r coincide con K_{ρ_1} ed $H_{r'}$ con K_{ρ_2} la superficie S ha in O un punto $(\rho + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 2)$ -plo (cfr. n° 4, β).

3^a) Se il cono $H_{r'}$ si spezza nel cono H_r ed in un gruppo di $r' - r$ piani passanti per una retta R , se i coni K_{ρ_1} e K_{ρ_2} si spezzano entrambi nel cono K_ρ ed in due gruppi di $\rho_1 - \rho$ e $\rho_2 - \rho$ piani passanti ancora per la retta R , la superficie S ha in O un punto $(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 2)$ -plo (cfr. n° 4, γ).

II. Dal caso 2°, n° 5, si deduce che nel

CASO α , b) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(r + r' + 2\rho + \rho_2 - 3)$ -plo, e fra le generatrice del suo cono tangente in O , che d'altronde è facile costruire, sono, in generale, da comprendere le rr' generatrici comuni ai coni H_r ed $H_{r'}$, e le ρ^2 generatrici base e le $3(\rho - 1)^2$ generatrici doppie del fascio di coni (K_ρ).

E qui si osservi che se sussistendo le ipotesi (α), (b) del n° 10 il punto O è punto ordinario del fascio (F), e si ha quindi $r = 0$, $r' = 1$, la superficie S ha in O un punto $(2\rho + \rho_2 - 2)$ -plo, il cui cono tangente è il cono Jacobiano della rete di coni $[K_\rho H^{\rho_2-\rho}, K_{\rho'} H^{\rho_2-\rho}, K_{\rho_2}]$ [ove $H^{\rho_2-\rho}$ indica il piano H , tangente in O alla superficie del fascio (F) passante ivi, contato $\rho_2 - \rho$ volte] e ciò quando dal detto cono Jacobiano, d'ordine $3(\rho_2 - 1)$, si stacchi il piano H contato $2(\rho_2 - \rho) - 1$ volte.

Fra le eccezioni sul modo di comportarsi in O della superficie S nelle ipotesi (α), (b), notiamo quella in cui $r = \rho$, $r' = \rho_2$ ed il cono H_r appartenga al fascio (H_ρ) mentre il cono $H_{r'}$ coincida con K_{ρ_2} , nel qual caso la superficie S ha in O un punto $(3\rho + 2\rho_2 - 2)$ -plo.

12. Sempre dal caso 2°, n° 5, si deduce che nel

Caso α , c) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(r + r' + \rho + 2\rho_1 - 3)$ -plo e fra le generatrici del suo cono tangente, che al solito è facile costruire, sono, in generale, da comprendere le rr' generatrici comuni ai coni H_r ed $H_{r'}$, e le ρ_1^2 generatrici base e le $3(\rho_1 - 1)^2$ generatrici doppie del fascio di coni (K_{ρ_1}) .

Ed anche qui si osservi che se, sussistendo le ipotesi (α) , (c) , il punto O è punto ordinario del fascio (F) , e si ha quindi $r = 0$, $r' = 1$, la superficie S ha in O un punto $(\rho + 2\rho_1 - 2)$ -plo, il cui cono tangente è il cono Jacobiano della rete di coni $[K_\rho H^{\rho_1-\rho}, K_{\rho_1}, K'_{\rho_1}]$ [ove $H^{\rho_1-\rho}$ indica il piano H , tangente in O alla superficie del fascio (F) passante ivi, contato $\rho_1 - \rho$ volte] e ciò quando dal detto cono Jacobiano, d'ordine $3(\rho_1 - 1)$, si stacchi il piano H contato $\rho_1 - \rho - 1$ volte.

Se poi O è punto ordinario per la rete $[F']$, onde $\rho = 0$, $\rho_1 = 1$, ma sussiste l'ipotesi (α) del n° 10 relativa al fascio (F) , allora la superficie S ha in O un punto $(r + r' - 1)$ -plo, il cui cono tangente è il luogo (residuale) delle generatrici di contatto dei piani, costituenti un fascio, tangenti in O alle superficie della rete $[F']$, che passano per questo punto, coi coni del fascio $(H_r, \pi_1, \pi_2 \dots \pi_{r'-r}, H_{r'})$, ove $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{r'-r}$ indicano $r' - r$ piani, distinti o coincidenti, condotti per l'asse del fascio di piani suddetto.

Di qui per $r = 0$, $r' = 2$ si ricava che la superficie S passa, in generale, semplicemente pei $4(n - 1)^3$ punti doppi del fascio (F) , ed in uno qualunque di essi ha per tangente il piano polare dell'asse del fascio dei piani ivi tangenti a superficie della rete $[F']$ rispetto al cono ivi tangente alla superficie di (F) dotata di punto doppio.

Fra le eccezioni notiamo quella in cui $r = \rho$, $r' = \rho_1$ ed il cono H_r coincida con K_ρ , mentre $H_{r'}$ appartenga al fascio (K_{ρ_1}) , nel qual caso la superficie S ha in O un punto $(2\rho + 3\rho_1 - 2)$ -plo (cfr. n° 6).

13. Dal caso 3°, n° 7, si deduce che nel

Caso α , d) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(r + r' + 3\rho - 3)$ -plo, il cui cono tangente è composto del cono H_r , del cono $H_{r'}$, del cono, d'ordine $3\rho - 3$, Jacobiano della rete $[K_\rho]$.

Di qui per $r = 0$, $r' = 1$, $\rho = 1$ segue che la superficie S passa, in generale, semplicemente per gli n^3 punti base semplici della rete $[F']$ ed in uno qualunque di essi è tangente alla superficie del fascio (F) che vi passa.

14. Dal caso 2°, n° 5, segue che nel

CASO β , a) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(2r + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)$ -plo, e fra le generatrici del suo cono tangente in O , che al solito è facile costruire, sono, in generale, da comprendere le r^2 generatrici base e le $3(r - 1)^2$ generatrici doppie del fascio di coni (H_r) e le $\rho\rho_1, \rho_1\rho_2, \rho_2\rho$ generatrici risp. comuni ai coni K_ρ e K_{ρ_1} , K_{ρ_1} e K_{ρ_2} , K_{ρ_2} e K_ρ .

Se poi la rete $[F']$ non ha in O altra singolarità che quella di possedere una superficie, F'_2 , dotata ivi d'un punto (ρ_2) -plo ($\rho_2 > 1$), e si ha quindi $\rho = 0$, $\rho_1 = 1$, ma sussistono d'altronde le ipotesi (β) , (a) del n° 10, la superficie S ha in O un punto $(2r + \rho_2 - 2)$ -plo, il cui cono tangente è il luogo delle generatrici di contatto dei coni del fascio (H_r) coi coni del fascio (K^{ρ_2}, K_{ρ_2}) [ove K^{ρ_2} indica il piano, K , tangente in O alla superficie generica del fascio $(F'_1 F'_2)$, contato ρ_2 volte] e ciò quando dal detto luogo, d'ordine $2r + 2\rho_2 - 3$, si stacchi il piano K contato $\rho_2 - 1$ volte.

15. Dal caso 3°, n° 7, segue che nel

CASO β , b) del n° 10 la superficie S ha, in generale in O , un punto $(2r + 2\rho + \rho_2 - 3)$ -plo, il cui cono tangente è composto del cono K_{ρ_2} e del cono, d'ordine $2r + 2\rho - 3$, luogo delle generatrici di contatto dei coni del fascio (H_r) coi coni del fascio (K_ρ) .

16. Dallo stesso caso 3°, n° 7, si deduce che nel

CASO β , c) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(2r + \rho + 2\rho_1 - 3)$ -plo, il cui cono tangente è composto del cono K_ρ e del cono, d'ordine $2r + 2\rho_1 - 3$, luogo delle generatrici di contatto dei coni del fascio (H_r) coi coni del fascio (K_{ρ_1}) .

Di qui poi segue che la superficie S passa semplicemente per la curva gobba, B , d'ordine n^2 , base del fascio (F) ed in un punto qualunque di essa ha per tangente il piano determinato dalle rette ivi tangenti alla curva B ed alla curva base del fascio costituito dalle superficie della rete $[F']$ passanti ivi.

17. Infine dal caso 4°, n° 8, si deduce che nel

CASO β , d) del n° 10 la superficie S ha, in generale, in O un punto $(2r + 3\rho - 2)$ -plo, e fra le generatrici del suo cono tangente sono, in generale, da comprendere le r^2 generatrici base del fascio (H_r) .

18. Nel caso in cui il fascio (F) e la rete $[F']$ sono dello stesso ordine, n , ed appartengono ad un medesimo sistema lineare $\infty^3: \{F\}$, indicando con F la superficie che essi hanno in tal caso in comune e prendendo un punto A generico di F , trovasi [n° 12, eccezione al caso (α) , (c) , per $\rho = 0$, $\rho_i = 1$] che la superficie S passa semplicemente per A , onde S si scinde nella superficie F ed in una superficie residuale, d'ordine $(5n - 4) - n = 4(n - 1)$, ogni punto della quale sarà un punto ove due, epperò infinite, superficie del sistema $\{F\}$ si toccano, onde questa superficie non è altro, come d'altronde era noto, che la Jacobiana del sistema lineare $\{F\}$ e che si suole indicare con $J_{4(n-1)}$.

Dai n° 10, 11, ..., 17 si può immediatamente ricavare il modo di comportarsi della superficie $J_{4(n-1)}$ in un punto base del sistema $\{F\}$ ben definito e caratterizzato *).

19. Per mezzo delle superficie Δ (n° 1) si può studiare il luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio lineare con le curve di un sistema lineare ∞^k posti sopra una superficie algebrica qualunque, F , priva di curve multiple, dell'ordine n **).

È noto che un sistema lineare ∞^k ($k \geq 0$) di curve (algebriche) C sopra F , si può definire mediante un sistema lineare $\infty^k: \{f\}^k$, di superficie le quali segano sopra F le curve C , all'infuori di qualche curva fissa, Γ , comune a tutte le superficie del sistema $\{f\}^k$, che non voglia considerarsi come appartenente alle curve C .

Ciò posto, consideriamo sulla superficie F due fasci lineari di curve (C) , (C') degli ordini ν , ν' ; e siano (f) , (f') due fasci di superficie, degli ordini $\frac{\nu + \mu}{n}$, $\frac{\nu' + \mu'}{n}$, i quali segano sulla superficie F i fasci (C) , (C') e due certe curve fisse Γ , Γ' degli ordini μ , μ' .

Assumendo ad arbitrio un'altra superficie F , dell'ordine n , e costruendo la superficie Δ (n° 1) relativa ai tre fasci (f) , (f') , (F, F') ,

*) Cfr. GUCCIA, *Teoria delle superficie* φ_P , etc., l. c., n° 33 e seg. Vedi anche GERBALDI, *Un teorema sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie algebriche* [questi Rendiconti, t. X (1896), pp. 158-160].

**) Per $n = 1$ veggansi le due Memorie del DE FRANCHIS: *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare ∞^k* [questi Rendiconti, t. X (1896), pp. 118-152, e t. XI (1897), pp. 12-42].

poichè Δ è dell'ordine $2\left(\frac{\nu + \mu}{n} + \frac{\nu' + \mu'}{n} + n - 2\right)$ e passa semplicemente per la curva, B , d'ordine n^2 , base del fascio (F, F') , per le curve Γ e Γ' , e in un punto qualunque di queste ultime è tangente ad F (vedi la fine del n° 5), si trova subito che Δ incontra la superficie F , oltre le curve B, Γ, Γ' , secondo una curva residuale, ω , dell'ordine $2(\nu + \mu + \nu' + \mu' + n^2 - 2n) - n^2 - 2\mu - 2\mu' = 2(\nu + \nu') + n(n - 4)$, la quale si lascia ancora definire come *il luogo dei punti di contatto di prim'ordine delle curve del fascio (C) con quelle di (C')* .

20. Suppongasi che la superficie F abbia un punto (σ) -plo, O , e che il fascio (f) , che sega il fascio (C) , possenga in O un punto base (r) -plo e contenga una superficie dotata ivi d'un punto (r') -plo, e similmente suppongasi che il fascio (f') , che sega il fascio (C') , possenga in O un punto base (ρ) -plo e contenga una superficie dotata ivi d'un punto (ρ') -plo. Suppongasi inoltre che le curve fisse Γ e Γ' passino risp. con s ed s' rami pel punto O .

È facile determinare il modo di comportarsi di ω nel punto O in ciascuno dei seguenti casi:

1°) $r < r', \rho < \rho';$ 2°) $r = r', \rho < \rho';$ 3°) $r = r', \rho = \rho'$ *).

CASO 1°) $r < r', \rho < \rho'$. — Si scelga una superficie arbitraria F' , d'ordine n , non passante per O , e si osservi che la superficie Δ (n° 1) relativa ai fasci $(f), (f'), (F, F')$ ha in tal caso in O un punto $(r + r' + \rho + \rho' + \sigma - 3)$ -plo (n° 2, caso 1°), onde la sua intersezione completa con F sarà una curva che passa, in generale, con $\sigma(r + r' + \rho + \rho' + \sigma - 3)$ rami pel punto O , e, poichè da essa si stacca la curva B , non passante per O , e le curve Γ e Γ' contate due volte, le quali passano per O con s ed s' rami, se ne conclude che la curva ω passa con $\sigma(r + r' + \rho + \rho' + \sigma - 3) - 2(s + s')$ rami pel punto O .

CASO 2°) $r = r', \rho < \rho'$. — Nelle ipotesi di questo caso, collo stesso

*) Il SEGRE ha determinato, per altra via, il modo di comportarsi della curva ω in un punto singolare di uno dei fasci $(C), (C')$, che sia punto ordinario per l'altro fascio e per la superficie F , indipendentemente dal modo di comportarsi ivi dei fasci seganti (f) ed (f') ; vedi l. c., n° 3. Il nostro metodo è adatto per le applicazioni che dovremo fare in seguito.

procedimento si trova (pel n° 5) che la curva ω passa pel punto O , in generale, con $\sigma(2r + \rho + \rho' + \sigma - 3) - 2(s + s')$ rami.

In particolare, per $\sigma = 1$, $r = 1$, $\rho = 0$, $\rho' = 1$, $s = 0$, $s' = 0$, si ricava, com'è noto, che la curva ω passa, in generale, semplicemente pei punti base semplici di ciascuno dei fasci (C) e (C') , che non siano punti singolari per la superficie F , ed in uno qualunque di essi, A , è tangente all'unica curva dell'altro fascio che passa per A , come si ricava applicando quanto si è detto alla fine del n° 5.

CASO 3°) $r = r'$, $\rho = \rho'$. — In questo caso, nel seguire lo stesso procedimento adoperato di sopra, assumeremo una superficie ausiliaria F' , d'ordine n , la quale abbia in O un punto (σ) -plo a cono tangente generale ed affatto indipendente dal cono tangente in O alla superficie F , ed osserveremo che ora la curva B passa per O con σ^2 rami, epperò pel n° 8 si trova che ω passa, in generale, per O con

$$2\sigma(r + \rho + \sigma - 2) - \sigma^2 - 2s - 2s' = \sigma(2r + 2\rho + \sigma - 2) - 2(s + s')$$

rami.

Tralascieremo di occuparci dei casi di eccezione pei quali d'altronde si possono usare dei metodi analoghi.

21. Nel caso che i due fasci (C) e (C') sono dello stesso ordine, ν , ed appartengono ad una medesima rete $[C]$, se C è la curva che essi hanno in tal caso in comune, la curva ω si scinderà nella curva C ed in una curva residuale, J , d'ordine $4\nu + n(n - 4) - \nu = 3\nu + n(n - 4)$, luogo di un punto in cui due, epperò infinite, curve della rete $[C]$ si toccano, la quale quindi non è altro che la *Jacobiana della rete* $[C]$. Indicando d'altronde con $[f]$ la rete di superficie, d'ordine $\frac{\nu + \mu}{n}$, la quale sega sopra F la rete $[C]$ ed una certa curva fissa, Γ , d'ordine μ , la curva J si può evidentemente ottenere come parziale intersezione della superficie F colla superficie S , luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie della rete $[f]$ con quelle del fascio (F, F') (ove F' indica al solito una superficie arbitraria d'ordine n) e da questa costruzione appare chiaro che J è il luogo dei punti doppi della rete $[C]$.

22. Riguardo alla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio lineare colle curve d'un sistema lineare ∞^k , posti sopra una superficie algebrica, priva di curve multiple, accenneremo soltanto che,

con metodo affatto identico a quello usato dal prof. DE FRANCHIS nel piano, si trova che:

Dati sopra una superficie algebrica, d'ordine n , un fascio lineare di curve, (C) , d'ordine ν , ed un sistema lineare $\infty^k: [C']^k$, d'ordine ν' , non aventi alcuna curva in comune, il luogo dei contatti d'ordine k delle curve del fascio (C) con quelle del sistema $[C']^k$ è una curva d'ordine

$$(k+1) \frac{(2\nu + n^2 - 4n)k + 2\nu'}{2}.$$

23. Dati ora quattro fasci di superficie $(F_1), (F_2), (F_3), (F_4)$, d'ordini n_1, n_2, n_3, n_4 , qual'è il luogo di un punto che individua quattro superficie di detti fasci ivi tangenti ad una medesima retta?

Il luogo di un punto che individua tre superficie dei fasci $(F_1), (F_2), (F_3)$ tangenti ivi ad una medesima retta è una superficie, $\Delta_{1,2,3}$, dell'ordine $2(n_1 + n_2 + n_3 - 2)$ ($n^\circ 1$), ed il luogo analogo relativo ai fasci $(F_1), (F_2), (F_4)$ è una superficie $\Delta_{1,2,4}$ dell'ordine $2(n_1 + n_2 + n_4 - 2)$.

Queste due superficie s'incontrano:

nella curva, B_1 , base del fascio (F_1) , d'ordine n_1^2 ;

nella curva, B_2 , base del fascio (F_2) , d'ordine n_2^2 ;

nella curva, $\theta_{1,2}$, luogo dei punti di contatto delle superficie del fascio (F_1) con quelle di (F_2) , d'ordine $3(n_1^2 + n_2^2 + 2) + 4(n_1 n_2 - 2n_1 - 2n_2)$ *);

ed in una curva residuale, $C_{1,2,3,4}$, d'ordine:

$$\begin{aligned} & 4(n_1 + n_2 + n_3 - 2)(n_1 + n_2 + n_4 - 2) \\ & - [n_1^2 + n_2^2 + 3(n_1^2 + n_2^2 + 2) + 4(n_1 n_2 - 2n_1 - 2n_2)] \\ & = 4(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_2 n_4 + n_3 n_4) - 8(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 10, \end{aligned}$$

che evidentemente è il luogo di un punto che individua quattro superficie dei fasci $(F_1), (F_2), (F_3), (F_4)$ ivi tangenti ad una medesima retta.

In particolare: a) Per $n_4 = 1$ si ha: Il luogo di un punto che individua tre superficie di tre fasci, d'ordini n_1, n_2, n_3 , ivi tangenti ad una medesima retta la quale si appoggia ad una retta fissa, R , è una curva gobba dell'ordine $4(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - n_1 - n_2 - n_3) + 2$.

b) Per $n_3 = n_4 = 1$ si ha: Il luogo di un punto che individua due superficie di due fasci, d'ordini n_1 ed n_2 , ivi tangenti ad una medesima

*) Cfr. MINEO, l. c., n° 1.

retta che si appoggia a due rette sghembe fisse R_1 ed R_2 è una curva gobba dell'ordine $2(2n_1n_2 - 1)$ *).

c) Per $n_2 = n_3 = n_4 = 1$ si ha: Il luogo dei punti di contatto delle superficie di un fascio d'ordine n colle generatrici di uno stesso sistema di un iperboloide è una curva gobba dell'ordine $2(2n - 1)$.

24. Supponendo che ciascuno dei quattro fasci $(F_1), (F_2), (F_3), (F_4)$ abbia in un punto O un punto base risp. (r) -plo, (ρ) -plo, (σ) -plo, (τ) -plo e contenga una superficie dotata in O risp. d'un punto (r') -plo, (ρ') -plo, (σ') -plo, (τ') -plo, accenneremo al modo di comportarsi in O della curva $C_{1,2,3,4}$ in ciascuno dei seguenti casi:

$$\begin{array}{llll} 1^\circ) & r < r', & \rho < \rho', & \sigma < \sigma', & \tau < \tau'; \\ 2^\circ) & r = r', & \rho < \rho', & \sigma < \sigma', & \tau < \tau'; \\ 3^\circ) & r = r', & \rho = \rho', & \sigma < \sigma', & \tau < \tau'; \\ 4^\circ) & r = r', & \rho = \rho', & \sigma = \sigma', & \tau < \tau'; \\ 5^\circ) & r = r', & \rho = \rho', & \sigma = \sigma', & \tau = \tau'. \end{array}$$

CASO 1°). — Le due superficie $\Delta_{1,2,3}$ e $\Delta_{1,2,4}$ hanno in tal caso in O un punto $(r+r'+\rho+\rho'+\sigma+\sigma'-3)$ -plo ed $(r+r'+\rho+\rho'+\tau+\tau'-3)$ -plo ed, in generale, i loro coni ivi tangenti sono distinti (n° 2); la curva gobba loro intersezione completa avrà pertanto in O un punto multiplo del grado $(r+r'+\rho+\rho'+\sigma+\sigma'-3)(r+r'+\rho+\rho'+\tau+\tau'-3)$, e poichè da essa si stacca:

la curva B_1 che passa con rr' rami pel punto O ;

la curva B_2 che vi passa con $\rho\rho'$ rami;

la curva $\theta_{1,2}$ che vi passa con

$r^2 + r'^2 + \rho^2 + \rho'^2 + rr' + \rho\rho' + (r+r')(\rho+\rho') - 3(r+r'+\rho+\rho'-1)$ rami **); ne segue che la curva $C_{1,2,3,4}$ passa per O con

$$\begin{aligned} & (r+r'+\rho+\rho'+\sigma+\sigma'-3)(r+r'+\rho+\rho'+\tau+\tau'-3) \\ & - [rr' + \rho\rho' + r^2 + r'^2 + \rho^2 + \rho'^2 + rr' + \rho\rho' + (r+r')(\rho+\rho') \\ & \qquad \qquad \qquad - 3(r+r'+\rho+\rho'-1)] \\ & = (r+r')(\rho+\rho'+\tau+\tau') + (\rho+\rho')(\sigma+\sigma'+\tau+\tau') \\ & \quad + (\sigma+\sigma')(r+r'+\tau+\tau') - 3(r+r'+\rho+\rho'+\sigma+\sigma'+\tau+\tau'-2) \end{aligned}$$

rami.

*) Per questo caso particolare, vedi MINEO, l. c., n° 1, ove tale curva è indicata con K .

**) Cfr. LO MONACO APRILE, *Sopra alcuni problemi di contatto*, etc., l. c., Teor. IV.

Lo stesso metodo serve a determinare il modo di comportarsi in O della curva $C_{1,2,3,4}$ nei casi 2° , 3° , 4° , 5°) e ad esaminare anche certi casi di eccezione.

In tal modo si trova che, in generale,

nel caso 2°) la curva $C_{1,2,3,4}$ ha in O un punto multiplo del grado:

$$(\rho + \rho')(\sigma + \sigma' + 2r) + (\sigma + \sigma')(\tau + \tau' + 2r) + (\tau + \tau')(\rho + \rho' + 2r) - 3(\rho + \rho' + \sigma + \sigma' + \tau + \tau') - 6(r - 1);$$

nel caso 3°) del grado:

$$4r\rho + 2(r + \rho)(\sigma + \sigma' + \tau + \tau') + (\sigma + \sigma')(\tau + \tau') - 3(\sigma + \sigma' + \tau + \tau') - 6(r + \rho - 1);$$

nel caso 4°) del grado:

$$4(r\rho + \rho\sigma + \sigma r) + 2(\tau + \tau' - 3)(r + \rho + \sigma - 1);$$

nel caso 5°) del grado:

$$4[r\rho + \rho\sigma + \sigma r + r\tau + \rho\tau + \sigma\tau - (r + \rho + \sigma + \tau - 1)].$$

25. Se due dei fasci, supponiamo (F_3) , (F_4) , sono dello stesso ordine, n_3 , ed appartengono ad una medesima rete $[F_3]$, se F_3 è la superficie che essi hanno in tal caso in comune, la curva $C_{1,2,3,4}$ si scinderà nella curva $\omega_{1,2}$, d'ordine $n_3(2n_1 + 2n_2 + n_3 - 4)$, luogo dei punti di contatto delle curve dei due fasci che (F_1) ed (F_2) segano sulla superficie F_3 , ed in una curva residuale, γ , d'ordine

$$4(2n_1n_3 + 2n_3n_1 + n_1n_2 + n_3^2) - 8(n_1 + n_2 + 2n_3) + 10 - n_3(2n_1 + 2n_2 + n_3 - 4) \\ = (2n_1 + 3n_3 - 4)(2n_2 + 3n_3 - 4) - 6(n_3 - 1)^2,$$

la quale è il luogo di un punto in cui due superficie dei fasci (F_1) , (F_2) ed infinite della rete $[F_3]$ toccano una medesima retta.

In particolare, per $n_2 = 1$ si ha: Il luogo di un punto in cui superficie d'un fascio d'ordine n , ed infinite di una rete d'ordine n' , toccano una stessa retta, che si appoggia ad una retta fissa, R , è una curva, Γ_R , d'ordine

$$(2n + 3n' - 4)(3n' - 2) - 6(n' - 1)^2 = (2n - 1)(3n' - 2) + 3n(n' - 1) *).$$

26. Supponendo che i fasci (F_1) ed (F_2) abbiano in un punto O un punto base (r) -plo e (ρ) -plo ed inoltre (F_1) contenga una superficie

*) Per questo caso particolare vedi LO MONACO APRILE, *Sulla superficie luogo*, etc., l. c., n° 2.

dotata in O d'un punto (r') -plo ed (F_2) ne contenga una dotata ivi d'un punto (ρ') -plo, supponendo ancora che la rete $[F_3]$ abbia in O un punto base (σ) -plo e contenga un fascio dotato in O d'un punto base (σ_1) -plo, contenente alla sua volta una superficie dotata ivi d'un punto (σ_2) -plo, per ricavare il numero, τ_γ , dei rami con cui la curva γ passa per O basterà togliere dai rami con cui vi passa la curva $C_{1,2,3,4}$, relativa ai fasci (F_1) , (F_2) e a due fasci (F_3) , (F_4) contenuti nella rete $[F_3]$, quelli della curva $\omega_{1,2}$ relativa ai due fasci che (F_1) ed (F_2) segano sulla superficie comune ai fasci (F_3) ed (F_4) . Così, ad esempio, si trova che, in generale, nel caso in cui $r < r'$, $\rho < \rho'$, $\sigma < \sigma_1 < \sigma_2$ si ha

$$\begin{aligned}\tau_\gamma &= (r+r')(\rho+\rho'+\sigma+\sigma_2) + (\rho+\rho')(2\sigma+\sigma_1+\sigma_2) + (\sigma+\sigma_1)(r+r'+\sigma+\sigma_2) \\ &\quad - 3(r+r'+\rho+\rho'+2\sigma+\sigma_1+\sigma_2-2) - \sigma(r+r'+\rho+\rho'+\sigma-3) \\ &= (r+r'-3)(\rho+\rho'-3) + (r+r'+\rho+\rho'-3)(\sigma+\sigma_1+\sigma_2) \\ &\quad + \sigma\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma - 3;\end{aligned}$$

la quale espressione ci dà, in generale, il valore di τ_γ anche nei casi:

$$\begin{array}{ll} r < r', & \rho < \rho', \quad \sigma = \sigma_1 < \sigma_2; & r = r', & \rho < \rho', \quad \sigma < \sigma_1 < \sigma_2; \\ r < r', & \rho < \rho', \quad \sigma < \sigma_1 = \sigma_2; & r = r', & \rho < \rho', \quad \sigma = \sigma_1 < \sigma_2; \\ r < r', & \rho < \rho', \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2; & r = r', & \rho < \rho', \quad \sigma < \sigma_1 = \sigma_2.\end{array}$$

27. La curva γ (n° 25), relativa a due fasci (F_1) , (F_2) e ad una rete $[F_3]$, si può anche ottenere come parziale intersezione delle due superficie luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie dei due fasci (F_1) ed (F_2) con quella della rete $[F_3]$, la cui residua intersezione non è altro che la Jacobiana della rete $[F_3]$, curva d'ordine $6(n_3 - 1)^2$, di cui è facile ricavare anche sinteticamente *) il modo di comportarsi in un punto base multiplo della rete.

Nel caso in cui uno dei fasci, per es. (F_2) , e la rete $[F_3]$ sono dello stesso ordine, n_2 , ed appartengono ad un medesimo sistema lineare ∞^3 : $\{F_2\}$, se F_2 è la superficie che essi hanno in tal caso in comune, la curva γ si scinderà nella curva $\omega_{1,3}$, d'ordine $n_2(2n_1 + 3n_2 - 4)$, luogo dei punti di contatto delle curve che il fascio (F_1) ed un fascio della rete $[F_3]$ (che non contiene F_2) segano sulla superficie F_2 stessa, ed in

*) Cfr. ad es. LO MONACO APRILE, *Sopra alcuni problemi di contatto*, etc., l. c., n° 11.

una curva residuale, Λ , d'ordine

$$(2n_1 + 3n_2 - 4)(5n_2 - 4) - 6(n_2 - 1)^2 - n_2(2n_1 + 3n_2 - 4) \\ = 2(n_2 - 1)(4n_1 + 3n_2 - 5),$$

la quale è il luogo di un punto in cui una superficie del fascio (F_1) ne tocca due, epperò infinite, del sistema lineare $\infty^3: \{F_2\}$.

Tale curva fu già ottenuta dal sig. LO MONACO APRILE come parziale intersezione della Jacobiana del sistema $\{F_2\}$ colla superficie luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie del fascio (F_1) con quelle di una rete $[F_2]$ contenuta nel sistema $\{F_2\}$, la cui intersezione residua non è altro che la Jacobiana della rete $[F_2]$.

Nel caso poi che anche il fascio (F_1) ed il sistema lineare $\infty^3: \{F_2\}$ sono dello stesso ordine n ed appartengono ad un medesimo sistema lineare $\infty^4: \{F\}^4$, la curva Λ si spezza nella curva J , d'ordine $n(4n-4)$, Jacobiana della rete di curve segata sulla superficie, F_1 , comune al fascio (F_1) ed al sistema $\{F_2\}$, da una rete di $\{F_2\}$ che non contiene la superficie F_1 , ed in una curva residuale, d'ordine

$$2(n-1)(7n-5) - n(4n-4) = 10(n-1)^2,$$

la quale non è altro che la Jacobiana del sistema lineare $\{F\}^4$. Anche questa curva, com'è ben noto, si può ottenere più semplicemente come parziale intersezione delle Jacobiane di due sistemi lineari ∞^3 contenuti in $\{F\}^4$ la cui intersezione residua è la Jacobiana della rete che i due sistemi lineari ∞^3 hanno in comune.

28. Date due reti $[F] \equiv [F_0, F_1, F_2]$ ed $[F'] \equiv [F'_0, F'_1, F'_2]$, degli ordini n ed n' , qual'è il luogo di un punto in cui le infinite superficie delle due reti che vi passano si toccano due a due?

Indicando con S il luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie del fascio (F_0, F_1) con quelle della rete $[F']$ e con S' il luogo analogo relativo al fascio (F'_0, F'_1) ed alla rete $[F]$, la curva d'intersezione di S con S' si scinde nella curva θ , d'ordine $3(n^2+n'^2+2)+4(nn'-2n-2n')$, luogo dei punti di contatto di 1° ordine delle superficie del fascio (F_0, F_1) con quelle del fascio (F'_0, F'_1) , ed in una curva residuale, η , d'ordine

$$(2n+3n'-4)(2n'+3n-4) - [3(n^2+n'^2+2)+4(nn'-2n-2n')] \\ = 3n(n-4)+3n'(n'-4)+9nn'+10,$$

in un punto qualunque P della quale il fascio dei piani tangenti alle superficie della rete $[F]$ che passano per P , ed il fascio dei piani ivi tan-

genti alle superficie della rete $[F']$ che passano per questo punto, hanno il medesimo asse, e quindi per ogni piano, α , condotto per questo asse vi sono due superficie, una della rete $[F]$ ed una della rete $[F']$, tangenti ad α nel punto P , le quali conseguentemente si toccano ivi fra loro. Adunque P è un punto in cui le infinite superficie delle due reti che vi passano si toccano due a due, epperò η è il luogo richiesto.

In particolare, se uno dei numeri n od n' è uguale ad 1 si ha la nota proposizione: *il luogo di un punto in cui rette uscenti da un punto fisso toccano due, epperò infinite, superficie di una rete, d'ordine n , è una curva d'ordine $3n(n-1)+1$.*

E qui notiamo che la curva γ (n° 25) relativa a due fasci (F_1) , (F_2) e ad una rete, $[F]$, nel caso in cui (F_1) ed (F_2) sono dello stesso ordine ed appartengono ad una medesima rete, $[F']$, si spezza appunto nella curva η relativa alle reti $[F]$ ed $[F']$ e nella Jacobiana della rete di curve segata dalla rete $[F]$ nella superficie che i due fasci (F_1) ed (F_2) hanno in tal caso in comune.

Con metodi del tutto analoghi a quelli già adoperati (n° 24 e 26) si riesce poi facilmente a determinare il modo di comportarsi della curva η e delle varie altre curve di cui si è fatto cenno nel n° 27, in un punto base multiplo dei vari sistemi lineari a cui esse sono relative.

29. Dati cinque fasci di superficie (F_1) , (F_2) , (F_3) , (F_4) , (F_5) , di ordini n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , n_5 , generali, qual'è il numero dei punti dello spazio ciascuno dei quali individua cinque superficie dei fasci dati ivi tangenti ad una medesima retta?

La superficie $\Delta_{1,2,3}$, luogo di un punto che individua tre superficie dei fasci (F_1) , (F_2) , (F_3) ivi tangenti ad una medesima retta (n° 1), e le superficie analoghe $\Delta_{1,2,4}$ e $\Delta_{1,2,5}$ relative ai tre fasci (F_1) , (F_2) , (F_4) ed ai tre fasci (F_1) , (F_2) , (F_5) sono risp. degli ordini $2(n_1+n_2+n_3-2)$, $2(n_1+n_2+n_4-2)$ e $2(n_1+n_2+n_5-2)$ ed hanno in comune le curve B_1 e B_2 base dei fasci (F_1) ed (F_2) , e la curva $\theta_{1,2}$, luogo dei contatti di prim'ordine delle superficie dei due fasci (F_1) ed (F_2) . Ora B_1 e B_2 essendo di ordini n_1^2 ed n_2^2 e di ranghi $2n_1^2(n_1-1)$ e $2n_2^2(n_2-1)$, e $\theta_{1,2}$ d'ordine $3(n_1^2+n_2^2+2)+4(n_1n_2-2n_1-2n_2)$ e di rango

$$6(n_1^2+n_2^2+2n_1n_2)-8(2n_1+2n_2-1)$$

$$+2(n_1+n_2-2)(5n_1^2+5n_2^2+5n_1n_2-16n_1-16n_2+12) \quad *)$$

*) Cfr. MINEO, l. c., n° 13.

e conoscendo che $\theta_{1,2}$ ha comuni con B_1 $2n_1^2(n_1 + n_2 - 2)$ punti e con B_2 $2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)$ punti *), le tre superficie $\Delta_{1,2,3}$, $\Delta_{1,2,4}$ e $\Delta_{1,2,5}$ si segheranno fuori delle curve B_1 , B_2 e $\theta_{1,2}$ **) in

$$\begin{aligned} & 8(n_1 + n_2 + n_3 - 2)(n_1 + n_2 + n_4 - 2)(n_1 + n_2 + n_5 - 2) \\ & - [n_1^2(6n_1 + 6n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 - 14) - 2n_1^2(n_1 - 1)] \\ & - [n_2^2(6n_1 + 6n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 - 14) - 2n_2^2(n_2 - 1)] \\ & - \{[3(n_1^2 + n_2^2 + 2) + 4(n_1n_2 - 2n_1 - 2n_2)][6n_1 + 6n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 - 14] \\ & \quad - [6(n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2) - 8(2n_1 + 2n_2 - 1) \\ & \quad + 2(n_1 + n_2 - 2)(5n_1^2 + 5n_2^2 + 5n_1n_2 - 16n_1 - 16n_2 + 12)]\} \\ & \quad + 4n_1^2(n_1 + n_2 - 2) + 4n_2^2(n_1 + n_2 - 2) \\ & = 8(n_1n_2n_3 + n_1n_2n_4 + \dots + n_3n_4n_5) - 16(n_1n_2 + n_1n_3 + \dots + n_4n_5) \\ & \quad + 20(n_1 + n_2 + \dots + n_5 - 1) \end{aligned}$$

punti, in ciascuno dei quali le cinque superficie dei fasci dati che vi passano sono evidentemente tangenti ad una medesima retta.

30. Ci serviremo infine della curva ω (n° 19) per costruire la curva, T , luogo dei contatti stazionari delle superficie di un fascio, (F) , d'ordine n , con quelle di una rete, $[F']$, d'ordine n' .

La superficie generica, F^* , del fascio (F) , avendo in comune colla superficie S (n° 9) la curva, B , base del fascio (F) , la incontrerà ulteriormente secondo una curva, C^* , luogo dei punti in cui superficie della rete $[F']$ toccano la superficie F^* . Il fascio costituito da tutte le curve C^* è dell'ordine $n(n + 3n' - 4)$ (n° 21) e lo indicheremo con (C) .

D'altro canto, supposta la rete $[F']$ individuata dalle tre superficie F'_0 , F'_1 , F'_2 e scelta ad arbitrio nello spazio una retta, R , la superficie, Σ_R^* , luogo di un punto che individua due superficie dei due fasci (F) ed (F'_0, F'_1) ivi tangenti ad una retta appoggiantesi ad R (n° 1, per $n'' = 1$), quando F'_1 descrive il fascio (F'_1, F'_2) genera, com'è noto, un fascio (Σ_R) d'ordine $2(n + n' - 1)$. La superficie Σ_R^* , generica di tal fascio, ha in comune colla superficie S la curva fissa B e la curva fissa Γ_R (n° 25), luogo dei punti in cui una superficie del fascio (F) ed infinite della rete $[F']$ toccano una retta appoggiantesi ad R , ed incontra S secondo una curva residuale, θ^* , luogo dei contatti di 1° ordine delle

*) Cfr. MINEO, l. c., n° 6.

**) Vedi per es., NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* [Annali di Matematica, serie II, tomo V (1871-73), pp. 163-177], n° 4.

superficie del fascio (F) con quelle del fascio (F'_0, F''_1). Il fascio, (θ), costituito da tutte le curve θ^* , è dell'ordine

$$3(n^2 + n'^2 + 2) + 4(nn' - 2n - 2n')$$

ed ha per punti base i $4(n-1)^3$ punti doppi di (F) e gli

$$n'[(n' - 1)^2 + 3(n - 1)^2 + 2(n - 1)(n' - 1)]$$

punti in cui superficie del fascio (F) toccano la superficie F'_0 *).

I punti ove una C^* incontra una θ^* sono evidentemente i punti di contatto di una superficie F^* con le superficie di un fascio (F'_0, F''_1), onde se in un punto, M , la C^* tocca θ^* , la superficie F^* avrà ivi due punti di contatto infinitamente vicini, cioè un contatto stazionario, con la superficie del fascio (F'_0, F''_1) passante per M .

Ciò però non si potrebbe più concludere se M appartenesse alla curva C'_0 , d'ordine $n'(2n + 3n' - 4)$, intersezione completa della superficie F'_0 con S , e ciò perchè in tal caso M essendo punto ove la superficie F^* tocca una superficie del fascio (F'_0, F''_1), in generale diversa da F'_0 , tutte le superficie del fascio (F'_0, F''_1) passano per M .

Viceversa poi, se in un certo punto, M , ha luogo un contatto stazionario di una superficie del fascio (F) con una superficie F'_M della rete [F'], in tal punto una curva C^* tocca una θ^* e precisamente quella relativa al fascio (F'_0, F''_1) contenente F'_M .

Ora il luogo, ω , dei contatti di prim'ordine delle curve del fascio (C) con quelle del fascio (θ) è dell'ordine

$$2n(n + 3n' - 4) + 6(n^2 + n'^2 + 2) + 8(nn' - 2n - 2n') \\ + (2n + 3n' - 4)(2n + 3n' - 8)$$

(n° 19) e di esso fa parte la curva C'_0 . Difatti, se a è un punto generico di C'_0 , e θ_a la curva del fascio (θ) passante per a , in tal punto, per la definizione stessa di θ_a , ha luogo un contatto di una superficie del fascio (F) con una superficie, diversa in generale da F'_0 , del fascio (F'_0, F''_1) cui la θ_a è relativa, onde a , appartenendo alla curva base del fascio (F'_0, F''_1), sarà punto di contatto della θ_a medesima con una superficie del fascio (F) **) e quindi punto del luogo ω . Adunque il luogo ω si spezza nella curva C'_0 e nella curva, T , d'ordine

$$2n(n + 3n' - 4) + 6(n^2 + n'^2 + 2) + 8(nn' - 2n - 2n') \\ + (2n + 3n' - 4)(2n + 3n' - 8) - n'(2n + 3n' - 4) = 4[3(n + n' - 2)^2 - 1]$$

*) Cfr. LO MONACO-APRILE, *Sulla superficie luogo*, etc., I. c., n° 9.

**) Cfr. MINEO, I. c., n° 4.

luogo dei contatti stazionari delle superficie del fascio (F) con quelle della rete [F'] *).

31. La costruzione testè data della curva T permette di determinare il modo di comportarsi di questa curva in un punto base multiplo del fascio (F) e della rete [F'].

Così per es. nelle ipotesi (α), (a) del n° 10 osservando che la superficie S ha in O un punto $(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)$ -plo (n° 10) e che il fascio (Σ_R), corrispondente ad una retta R non passante per O , ha in O un punto base $(r + r' + \rho + \rho_1 - 2)$ -plo (n° 3) a cono tangente fisso, e contiene una superficie avente in O un punto

$$(r + r' + \rho + \rho_2 - 2)\text{-plo},$$

osservando ancora che la curva fissa B passa per O con rr' rami e la curva fissa Γ_R con $(r + r' - 2)(\rho + \rho_1 + \rho_2 - 2) + \rho\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho - 1$ rami (n° 26) dal n° 20 caso 1° si ricava che la curva $\omega \equiv C'_0$. T passa in generale, con

$$\begin{aligned} & (r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)[r + r' + (r + r' + \rho + \rho_1 - 2) \\ & \quad + (r + r' + \rho + \rho_2 - 2) + (r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3) - 3] \\ & - 2[2rr' + (r + r' - 2)(\rho + \rho_1 + \rho_2 - 2) + \rho\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho - 1] \\ & = (r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)(2r + 2r' + 3\rho + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 6) \\ & \quad + 2[(r + r' - 1)(r + r' - 2) - (2rr' + \rho\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho) + 1] \end{aligned}$$

rami pel punto O e, poichè la curva C'_0 vi passa con

$$\rho(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)$$

rami, si conchiude che la curva T , nelle ipotesi (α), (a) del n° 10, passa per O con

$$\begin{aligned} & (r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)(2r + 2r' + 3\rho + 2\rho_1 + 2\rho_2 - 6) \\ & + 2[(r + r' - 1)(r + r' - 2) - (2rr' + \rho\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho) + 1] \\ & \quad - \rho(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3) \\ & = 2[(r + r' + \rho + \rho_1 + \rho_2 - 3)^2 \\ & \quad + (r + r' - 1)(r + r' - 2) - (2rr' + \rho\rho_1 + \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho) + 1] \end{aligned}$$

rami.

Con lo stesso metodo si trova che, nelle ipotesi (α), (b) del n° 10,

*) In un'altra Nota di prossima pubblicazione darò una nuova costruzione della curva T che confermerà il mio risultato.

la curva T passa per O con

$$2[(r+r'+2\rho+\rho_2-3)^2+(r+r'-1)(r+r'-2)-(2rr'+\rho^2+2\rho\rho_2)+1]$$

rami; e, nelle ipotesi (α) , (c) del n° 10, vi passa con

$$2[(r+r'+\rho+2\rho_1-3)^2+(r+r'-1)(r+r'-2)-(2rr'+2\rho\rho_1+\rho_1^2)+1]$$

rami; etc.

In particolare, da quest'ultimo risultato, per $r=0$, $r'=2$, $\rho=0$, $\rho_1=1$, si ricava che la curva T passa, in generale, con due rami per ciascuno dei $4(n-1)^2$ punti doppi del fascio (F) .

Termini Imerese, aprile 1905.

GAETANO AGUGLIA.