23.

Sur la valeur d'une série finie.

(Par Mr. *Stern* à Göttingue.)

Dans les *Comptes Rendus des séances de l'acad. des sc.* *) *Mr. Cauchy* a donné la démonstration d'un théorême d'analyse fort curieux. Cette démonstration m'a fait trouver un autre théorême, qui me semble être assez remarquable pour le publier ici. On peût l'énoncer comme suit.

Soit S la somme de la série

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}\ldots.$$

dont le terme général est $=\frac{(n-r-1)\ldots.(n-2r+1)}{2\ \ldots.\ r}$. Alors, n étant un nombre entier, on aura

1) $S=\frac{3}{n}$, si n est un nombre impair divisible par 3;
2) $S=0$, si n est un nombre impair non divisible par 3;
3) $S=-\frac{1}{n}$, si n est un nombre pair divisible par 3;
4) $S=\frac{2}{n}$, si n est un nombre pair non divisible par 3.

Demonstration. On a

$$A.\qquad (x+y)^n-x^n-y^n$$
$$=nxy(x+y)\left[(x+y)^{n-3}-\frac{n-3}{2}xy(x+y)^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}(xy)^2(x+y)^{n-7}\ldots.\right].$$

Maintenant si l'on désigne par 1, α, α^2 les trois racines de l'équation

$$x^3=1$$

et qu'on suppose

$$x=\alpha y$$

le second membre de l'équation ($A.$) se transformera en

$$n\alpha y^2(1+\alpha)y\left[(1+\alpha)^{n-3}y^{n-3}-\frac{n-3}{2}\alpha y^2(1+\alpha)^{n-5}y^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}\alpha^2y^4(1+\alpha)^{n-7}y^{n-7}\ldots.\right],$$

---

*) 1839, 2e sem. No. 12.

ou bien, en vertu de l'équation

$$\alpha = (1+\alpha)^2$$

en

$$B.\quad n(1+\alpha)^n y^n \left[1 - \frac{n-3}{2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2.3} - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4} \dots\right] = n(-\alpha^2)^n y^n . S.$$

La même supposition réduit le premier membre de l'équation ($A.$) à

$$C, \quad = [(1+\alpha)^n - 1 - \alpha^n] y^n = [-1 - \alpha^n + (-\alpha^2)^n] y^n.$$

Donc, si n est un nombre impair divisible par 3, on a

$$C \quad = -3y^n = n(-\alpha^2)^n y^n S = -ny^n S$$

et

$$S = \frac{3}{n}.$$

Si n est un nombre impair non divisible par 3, on a

$$C \quad = 0,$$

d'où l'on tire

$$S = 0.$$

Maintenant soit n un nombre pair. Alors, si ce nombre est divisible par 3, on a $(-\alpha^2)^n = 1$ et

$$C \quad = -y^n = ny^n S$$

ou bien

$$S = -\frac{1}{n}.$$

Mais si le nombre n n'est pas divisible par 3, la valeur de l'expression ($C.$) est $= 2\alpha^{2n}$, à cause de l'équation

$$1 + \alpha^n + \alpha^{2n} = 0.$$

Alors on a

$$2\alpha^{2n} y^n = n\alpha^{2n} y^n S$$

et

$$S = \frac{2}{n}.$$

Le 29 Octobre 1839.