Sugl'integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine.

(*Di* Giulio Vivanti, *a Mantova.*)

1. In una breve Nota: *Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen* pubblicata nella Zeitschrift für Math. u. Ph., tomo 34, pag. 382-384, ricordando alcune importanti ricerche di L. Fuchs (*) sulle equazioni differenziali del primo ordine, ho accennato come a taluni dei risultati da esso ottenuti potesse giungersi partendo dalla considerazione di alcune semplici proprietà delle funzioni polidrome. Mi limitai allora a far vedere come tali funzioni possano dividersi in due *famiglie*, secondochè l'insieme de' valori presi dalla funzione per un valore qualunque della variabile non è od è (in tutto od in parte) condensato (**), e a stabilire i due seguenti teoremi:

Teorema *A*. *Una funzione e la sua inversa appartengono ad una stessa famiglia.*

Teorema *B*. *Se l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine è una funzione della 2.ª famiglia, e se i suoi punti singolari sono isolati, i valori di esso per un valore qualunque della variabile costituiscono un insieme totalmente condensato entro un campo connesso o no* (***).

Dell'applicazione di questi principii alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine offro un primo ed incompleto saggio nelle seguenti pagine.

(*) Sitzungsberichte der Berliner. Akademie, 1884, 1885, 1886.

(**) Più esattamente può dirsi: Le funzioni della 1.ª famiglia sono quelle che per qualunque valore della variabile prendono un insieme non condensato di valori; tutte le altre funzioni appartengono alla 2.ª famiglia.

(***) Cioè non esiste alcun elemento dell'insieme fuori del campo di condensazione.

2. Premetto due lemmi di cui si vedrà più innanzi l'applicazione.

1.° *Se con z si rappresentano gli elementi d'un insieme di valori complessi, e con φ si denota un ramo d'una funzione algebrica i cui punti di diramazione non coincidono con alcuno dei punti z, l'insieme dei valori $\varphi(z)$ è o no condensato, secondochè lo è o non lo è l'insieme dei valori z.*

Infatti sia l'insieme z condensato; ciò vuol dire che esiste un certo insieme continuo (rappresentabile nel piano della variabile z mediante un campo C) di cui tutti i punti a sono punti limiti dell'insieme z. Ora è chiaro che, se un certo insieme parziale di valori di z ha un punto limite a, l'insieme dei valori corrispondenti $\varphi(z)$ avrà per punto limite $\varphi(a)$; donde segue che ogni punto del campo B costituito da tutti i valori $\varphi(a)$ corrispondenti ai vari punti del campo C sarà punto limite dell'insieme $\varphi(z)$. Cioè questo insieme sarà condensato nel campo B. — Siccome poi l'inversa della φ è una funzione parimenti algebrica, così è chiaro che l'insieme $\varphi(z)$ sarà condensato sempre e soltanto quando lo sia l'insieme z.

2.° *Se y è una funzione di z che per un certo valore $\bar{z}$ di z (in cui si comporta regolarmente) prende infiniti valori aventi un punto limite $\bar{y}$, e se la funzione inversa si comporta regolarmente per $y = \bar{y}$, i valori di quest'ultima funzione per $y = \bar{y}$ avranno per punto limite $\bar{z}$.*

Infatti, poichè fra i valori di y per $z = \bar{z}$ ve n'hanno infiniti che differiscono da $\bar{y}$ meno d'una quantità assegnata ad arbitrio, ciò vuol dire che la funzione z di y prende il valore $\bar{z}$ in punti y tanto vicini quanto si vuole ad $\bar{y}$; donde segue che essa prenderà nel punto $\bar{y}$ valori vicini quanto si vuole a $\bar{z}$.

Come conseguenza si ha che:

Se una funzione y di z prende per ciascuno dei valori z d'un insieme continuo un insieme condensato di valori, la funzione inversa prenderà parimenti un insieme condensato di valori z per ciascuno dei valori y di un certo insieme continuo (cfr. n.° 1, teorema A).

3. Se $y = \varphi(z)$ è una funzione polidroma, imagineremo i suoi valori *deposti* (come ordinariamente per le funzioni algebriche) sopra una superficie connessa a più fogli o *riemanniana* R, che possiamo figurarci generata col processo di *continuazione* delle funzioni analitiche di WEIERSTRASS (*). La R

(*) Cfr. VOLTERRA, *Sulle funzioni analitiche polidrome*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1888, 2.° Semestre, pag. 355-361.

conterrà, oltre ai punti nel cui intorno la funzione si comporta regolarmente (punti ordinari), anche i *punti regolari di diramazione,* cioè quei punti di diramazione in cui la funzione non diviene indeterminata ossia non ha una singolarità essenziale. Tali punti devono formare *sulla* R un insieme isolato (*); quindi potremo sempre congiungere due punti qualunque (z_1, y_1), (z_2, y_2) della R mediante una linea l avente le seguenti proprietà:

1.° Nessun punto di l, salvo tutt'al più gli estremi, è un punto di diramazione;

2.° Per ciascun punto di l può determinarsi un intorno finito non contenente alcun punto di diramazione, eccetto tutt'al più il punto stesso quando esso è uno degli estremi.

Segue da ciò che, se nel piano z si parte dal punto z_1 col valore y_1 di y e si segue la proiezione della linea l, si arriverà al punto z_2 con un valore unico e determinato di y, se (z_1, y_1) è un punto ordinario, con un insieme enumerabile (**) di valori di y, se (z_1, y_1) è un punto di diramazione.

4. Abbiasi un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine:

$$\frac{dy}{dz} = f(y, z), \tag{α}$$

ossia:

$$F\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) \equiv \psi_0(y, z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^m + \psi_1(y, z)\left(\frac{dy}{dz}\right)^{m-1} + \cdots + \psi_m(y, z) = 0, \tag{β}$$

dove f è una funzione algebrica contenente *effettivamente* ambe le variabili y, z, e F, ψ_0, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ sono funzioni razionali intere dei loro argomenti; e sia $y = \varphi(z)$ l'integrale di questa equazione che in un certo punto $z = z_0$ prende un valore prefisso y_0. I punti z nel cui intorno la funzione y non si comporta regolarmente sono (***):

a) Quelli in cui, y essendo finito, $\frac{dy}{dz}$ è infinito; ossia in cui y prende due valori eguali;

(*) Cioè intorno a ciascun punto di diramazione può descriversi sulla R un cerchio non contenente alcun altro punto di diramazione. Parimenti intorno a ciascun punto ordinario può descriversi un cerchio non contenente alcun punto di diramazione.

(**) Poichè tale è l'insieme dei fogli della R. — Vedi Volterra, Mem. cit.

(***) Briot et Bouquet, *Rech. sur la th. des fonctions,* Paris, 1856, pag. 50, 52. — In questi punti, che ordinariamente si comprendono sotto il nome di *punti di diramazione,* l'integrale può divenire indeterminato senza diramarsi. Per es. i punti di diramazione del-

b) Quelli in cui la (β), considerata come un' equazione algebrica rispetto a $\frac{dy}{dz}$, ha una radice multipla.

Nei punti *a*) sussiste fra y e z la relazione:

$$\psi_0(y, z) = 0;$$

nei punti *b*) la relazione:

$$D(y, z) = 0,$$

dove $D(y, z)$ è il discriminante della (β) rispetto a $\frac{dy}{dz}$.

5. Supponiamo che per un certo valore di z, che diremo $\bar{z}$, l' insieme dei valori di un integrale y (individuato da un certo valor iniziale y_0 di y) sia condensato. Allora, essendo $y' = f(y, z)$, anche i valori di y' per $z = \bar{z}$ formeranno (n.° 2, lemma 1.°) un insieme condensato; e se $\bar{z} + d\bar{z}$ è un punto vicinissimo a $\bar{z}$, anche l' insieme dei valori $y' d\bar{z}$ sarà condensato, e lo sarà pure l' insieme dei valori $y + y' d\bar{z}$, giacchè $y + y' d\bar{z} = y + f(y, \bar{z}) d\bar{z} = \chi(y)$, χ denotando una funzione algebrica. Ma $y + y' d\bar{z}$ rappresenta i valori che prende y nel punto $\bar{z} + d\bar{z}$; quindi si conclude facilmente, ripetendo il ragionamento fatto pel passaggio da ciascun punto ad un punto prossimo:

Teorema I. *Se un integrale d' un' equazione algebrico-differenziale di primo ordine prende in un punto un insieme condensato di valori, la stessa cosa ha luogo per qualsiasi altro punto di cui esso si comporta regolarmente.*

E si ha pure:

Teorema II. *Nel caso del teorema precedente anche y' prende in ogni punto un insieme condensato di valori.*

Osserveremo anche che y', considerato come funzione di y, prenderà un insieme condensato di valori per ogni valore di y; infatti siccome (n.° 2, lemma 2.°) la funzione z di y è della 2.ª famiglia, lo stesso avrà luogo (pel

---

l' integrale dell' equazione differenziale:

$$z^4 \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

sono dati da $z^4 = 0$; ora $z = 0$ non è un punto di diramazione propriamente detto, ma bensì un punto singolare essenziale dell' integrale:

$$y = y_0 \operatorname{sen} \frac{1}{z} + \sqrt{1 - y_0^2} \cos \frac{1}{z},$$

il quale è una funzione uniforme.

teorema precedente) per $\frac{dz}{dy}$ considerata quale funzione di y, e quindi anche per $\frac{dy}{dz}$.

Supponiamo che l'insieme dei valori presi da un integrale y in un punto $\bar{z}$ consti d'un insieme I condensato in un certo campo C e di un insieme J di altri valori esterno a questo campo, e sia $\overline{y_1}$ un elemento di I, $\overline{y_2}$ un elemento di J. Si può sempre descrivere nel piano della variabile z una linea chiusa l passante per $\bar{z}$ e tale che, se si parte da z col valore $\overline{y_1}$ di y, vi si ritorni col valore $\overline{y_2}$. Ripetendo il ragionamento fatto a proposito del teorema I pel passaggio da ciascun punto di l al punto successivo, si vede che $\overline{y_2}$ deve far parte d'un insieme condensato. Cioè:

Se y è una funzione della 2.ª famiglia, i suoi valori per ciascun valore della variabile si distribuiscono in uno o più gruppi condensati (cfr. n.° 1, teorema B).

6. Il numero dei punti in cui y e $\frac{dy}{dz}$ prendono, tra gli altri, uno stesso valore determinato a, è finito; infatti quei punti sono dati dall'equazione algebrica $F(a, a, z) = 0$.

I punti regolari di diramazione della specie a) sono quelli in cui, y essendo finito, y' diviene infinito. Ora, se y è della 2.ª famiglia, lo sarà pure y' (teorema II) e quindi anche la sua funzione inversa (teorema I), e i punti z in cui $\frac{dy}{dz} = \infty$ costituiranno in generale un insieme P in tutto od in parte condensato. Questo insieme non muterà di natura se da esso si tolgono i punti, in numero finito, nei quali $y = \infty$. Dunque i punti regolari di diramazione della specie a) formano un insieme condensato.

Se invece y è della 1.ª famiglia, l'insieme P, quindi anche l'insieme dei punti regolari di diramazione della specie a), non sarà condensato. — Veniamo ai punti della specie b). Se si pone $\frac{dy}{dz} = u$, derivando la (α) si avrà:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial f}{\partial y} u + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ed eliminando y tra questa equazione e la (α):

$$\frac{du}{dz} = f_1(u, z),$$

dove f_1 è simbolo di funzione algebrica. Dunque la funzione u, che come y è (teorema II) della 1.ª famiglia, è l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine. Inoltre, siccome nei punti di diramazione della specie b) di y u prende due valori eguali, questi saranno punti di diramazione della specie a) di u, e quindi, per ciò che si è detto poc'anzi, costituiranno un insieme non condensato.

Riassumendo:

Teorema III. *Se y è l'integrale d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine,* IN GENERALE *l'insieme dei suoi punti regolari di diramazione è o no condensato secondochè la funzione y di z è della 2.ª o della 1.ª famiglia.*

Può avvenire in qualche caso speciale che, pur essendo y della 2.ª famiglia, l'insieme dei punti regolari di diramazione non sia condensato (*). Ne vedremo un esempio più avanti.

7. Un integrale y d'un'equazione differenziale del primo ordine fra y e z è (**) una funzione di z pienamente determinata, quando è stabilito che uno dei valori di y per un certo valore z_0 di z sia una quantità assegnata y_0. Variando con continuità y_0, varia in generale nello stesso modo il campo di esistenza C (***) della funzione y; quindi potrà prendersi una serie continua di valori y_0 per modo che i campi C corrispondenti abbiano una porzione comune P, la quale necessariamente conterrà z_0, e che (z_0, y_0) sia un punto ordinario per tutte le funzioni y che si considerano. Ciò posto, su ciascuna delle superficie R corrispondenti alle varie funzioni y potrà descriversi (n.° 3) intorno a (z_0, y_0) un cerchio non contenente alcun punto di diramazione, e i raggi di questi cerchi avranno un limite inferiore ρ_0 diverso da zero. Descriviamo nel piano z intorno al punto z_0 un cerchio di raggio ρ_0; preso un punto qualunque z_1 interno a questo cerchio ripetiamo su di esso la stessa costruzione, e così di seguito. I cerchi descritti ricopriranno una certa porzione Q dell'area P. Se ora si parte da z_0 coi diversi valori iniziali y_0 della serie continua considerata, e seguendo una linea l tutta contenuta entro Q si va ad un punto z_1 posto nell'interno o sul contorno di Q, le linee che corrispondono ad l sulle diverse superficie R avranno la proprietà, che ciascun

(*) Ciò può accadere soltanto quando la funzione inversa della $y' = \varphi'(z)$, pur essendo della 2.ª famiglia, prende per $y' = \infty$ un insieme non condensato di valori.

(**) Salvo casi eccezionali. Vedi FUCHS, Sitzungsb., 1886, pag. 297.

(***) Per *campo d'esistenza* d'una funzione intendo la proiezione sul piano della variabile indipendente della superficie R definita nel n.° 3.

punto di esse, salvo tutt'al più z_1, è un punto ordinario e possiede un intorno finito contenente soltanto punti ordinari. Da ciò segue che, per una determinata linea l, a ciascun valore y_0 corrisponde, come valor finale di y pel punto z, un valore unico e determinato y_1.

Si domanda ora se, mentre y_0 varia con continuità, possa y_1 rimanere costante. Se ciò fosse, partendo da z_1 col valore iniziale y_1 e seguendo la linea l in senso inverso, si dovrebbe giungere in z_0 con un'infinità di valori finali differenti y_0 formanti un insieme continuo; ma ciò è impossibile (vedi n.° 3 in fine), perchè un insieme continuo non è enumerabile. Dunque, *fissata la linea l che senza uscire da Q va da z_0 ad un punto z_1 posto nell'interno o sul contorno di Q, il valore finale y_1 dipende in modo unico dal valore iniziale y_0 e varia con esso.*

Deve notarsi però che è necessario stabilire sin da principio quale fra le radici y'_0 dell'equazione algebrica:

$$F(y'_0,\ y_0,\ z_0) = 0 \qquad (\gamma)$$

si voglia prendere come valore iniziale di y'.

8. Le considerazioni precedenti si semplificano assai quando l'equazione differenziale è di tal natura, che i punti di diramazione dei suoi integrali non variano di posizione al variare di y_0, ossia sono *fissi.* In tal caso il campo C è identico per tutti gl'integrali e i campi P, Q coincidono con quello; sicchè può asserirsi che *i valori di y in un punto qualunque di C dipendono da y_0 e variano con esso.*

Sia in particolare $(Z,\ Y)$ un punto regolare di diramazione; Y dovrà variare con y_0, mentre Z è fisso. D'altra parte, poichè Y è legato a Z da una o dall'altra delle due relazioni:

$$\psi_0(Y,\ Z) = 0, \qquad D(Y,\ Z) = 0,$$

dovrebbe anche Y essere fisso. Ne segue di necessità:

1.° *Che $\psi_0(y,\ z)$ deve ridursi ad una funzione $\mu(z)$ non contenente y* (*);

2.° *Che solo nel caso in cui $D(y,\ z)$ contiene un fattore $\nu(z)$ indipendente da y esistono punti regolari di diramazione della specie b), e questi sono radici della $\nu(z) = 0$,* — mentre ogni fattore di $D(y,\ z)$ contenente y, eguagliato a zero, costituisce un integrale singolare dell'equazione differenziale (**).

(*) Cfr. Fuchs, Sitzunsb., 1884, pag. 706.

(**) Cfr. Fuchs, Sitzungsb., 1884, pag. 704. — Poincaré, Acta Math., tomo 7, pag. 3. — Come è noto, gl'integrali singolari d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine annullano identicamente il discriminante di essa rispetto ad y'.

Quanto ai punti d'indeterminazione, è chiaro che anche per questi non può sussistere alcuna equazione algebrica fra y e z essendo in essi y indeterminato. Dunque i punti di diramazione (punti regolari di diramazione e punti d'indeterminazione) sono dati dalle due equazioni algebriche:

$$\mu(z) = 0, \qquad \nu(z) = 0,$$

e quindi sono in numero finito; e può concludersi che *ogni integrale y è una funzione determinata in tutto il piano z, fatta eccezione tutt'al più per un numero finito di punti;* e che *la superficie R corrispondente ricopre l'intero piano, ha un numero finito di punti di diramazione, ed ha per contorno un numero finito (o nullo) di punti* (i punti d'indeterminazione).

Dopo ciò, se si descrive una linea l che vada da z_0 ad un punto qualunque z_1 del piano z senza passare per alcun punto di diramazione, il valore di y (e quindi anche quello di y') con cui si giunge in z_1 lungo la l partendo da z_0 col valore iniziale y_0 di y sarà funzione uniforme di y_0 e della radice y'_0 della (γ) che fu scelta come valore iniziale di y' (*).

9. Sia l_0 una linea chiusa passante per z_0, l_1 una linea che va da z_0 ad un altro punto z_1; e su l_0, l_1 non stia alcun punto di diramazione. Sieno inoltre $\overline{y_0}$, $\overline{y'_0}$ i valori di y, y' con cui si ritorna in z_0 dopo aver percorso la linea l_0 partendo da z_0 coi valori iniziali y_0, y'_0; — e y_1, y'_1; $\overline{y_1}$, $\overline{y'_1}$ quelli con cui si giunge in z_1 dopo aver percorso la linea l_1 partendo da z_0 rispettivamente coi valori iniziali y_0, y'_0; $\overline{y_0}$, $\overline{y'_0}$. Si avrà, essendo Ω una funzione uniforme (n.° 8):

$$y'_1 = \Omega(y_0, y'_0), \qquad \overline{y'_1} = \Omega(\overline{y_0}, \overline{y'_0}).$$

Supponiamo che uno y'_1 dei valori di y' in z_1 sia indipendente da y_0 (**). Allora sarà, denotando con k una costante:

$$\Omega(y_0, y'_0) = k;$$

e, poichè questa equazione non può stabilire una nuova relazione fra le y_0, y'_0 già legate fra loro dalla (γ), essa sarà soddisfatta anche da qualunque altra coppia di valori y, y' per cui sia $F(y', y, z_0) = 0$. Sarà dunque $\Omega(\overline{y_0}, \overline{y'_0}) = k$, quindi $\overline{y'_1} = y'_1$; cioè tutti i valori di y' nel punto z_1 saranno eguali. Possiamo concludere:

(*) Cfr. Poincaré, Acta Math., tomo 7, pag. 9.

(**) Perchè ciò avvenga, è chiaro che quel valore di y' dev'essere indipendente anche da y; cioè la (β) deve avere per $z = z_1$ una radice indipendente da y.

Teorema IV. *Se uno dei valori di y' in un punto è indipendente da y_0, in quel punto y' prende questo solo valore.*

Alla classe di punti ora considerata appartengono i punti regolari di diramazione della specie a), poichè in essi, qualunque sia y_0, uno dei valori di y' è ∞. In quei punti adunque y' prenderà il solo valore ∞, donde segue che:

Teorema V. *I punti regolari di diramazione della specie a) sono gli stessi in tutti i fogli della superficie R.*

Sia ora z_1 un punto d'indeterminazione. Siccome esso è tale qualunque sia y_0, così, se $\Omega(y_0, y'_0)$ è indeterminato, lo sarà pure $\Omega(\overline{y_0}, \overline{y'_0})$. Dunque:

Teorema VI. *I punti d'indeterminazione sono gli stessi in tutti i fogli della R.*

10. Teorema VII. *Dato un punto z_1 diverso dai punti d'indeterminazione, può sempre prendersi y_0 in modo che uno dei valori di y per $z = z_1$ sia una quantità data y_1.* — Infatti, prendendo z_1 come punto di partenza, e considerando l'integrale della (β) che nel punto z_1 ha il valore iniziale y_1, uno qualunque dei valori che esso prende nel punto z_0 soddisfarà alle condizioni richieste per la quantità y_0.

11. Supponiamo che ogni integrale dell'equazione (β) a punti di diramazione fissi sia una funzione della 2.ª famiglia. Dal teorema precedente segue che i campi di condensazione corrispondenti ad un valore z_1 qualunque di z per tutti i valori possibili di y_0 ricopriranno (infinite volte) l'intero piano y Dato quindi un valore $\overline{y}$, si potrà sempre scegliere y_0 in modo che il campo di condensazione dei valori di y corrispondenti a $z = z_1$ contenga (nel suo interno o sul contorno) $\overline{y}$.

12. Fatta questa semplice osservazione, riprendiamo l'equazione (β), e poniamola sotto la forma seguente:

$$\Phi\left(\frac{dz}{dy}, z, y\right) \equiv \psi_m(y, z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^m + \psi_{m-1}(y, z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^{m-1} + \cdots + \psi_0(y, z) = 0. \quad (\delta)$$

Supponiamo che anche l'integrale $z = \theta(y)$ della (δ), come quello $y = \varphi(z)$ della (β), abbia i punti di diramazione fissi; cioè che i punti di diramazione della $\theta(y)$ sieno indipendenti dal valore iniziale z_0 che si vuol assegnare come corrispondente al valore y_0 di y. La cosa può anche mettersi sotto altra forma; può dirsi cioè che, fissato sin da principio un valore z_0 e denotando con z_0, y_0 una coppia di valori corrispondenti di z, y, i punti di diramazione $z = Z$ dell'integrale della (β) e quelli $y = Y$ dell'integrale della (δ) sono indipendenti del valore y_0. Ammettiamo inoltre che fra i punti di diramazione della specie a) di ciascuno dei due integrali uno almeno sia regolare, e denotiamo più specialmente con Z, Y due punti di questa natura. Nel punto Z di tutti i fogli della superficie R corrispondente alla funzione $y = \varphi(z)$, $\frac{dy}{dz}$ diviene infinita (teorema V). Parimenti nel punto Y di tutti i fogli della superficie R corrispondente alla funzione $z = \theta(y)$, $\frac{dz}{dy}$ diviene infinita; cioè $\frac{dy}{dz}$ si annulla per tutti i valori di z dati dalla $z = \theta(Y)$ o, ciò che è lo stesso, dalla $\varphi(z) = Y$. Ora, se $y = \varphi(z)$, e quindi anche (teorema A) $z = \theta(y)$, è della 2.ª famiglia, potrà (n.° 11) sempre scegliersi y_0 in modo che il campo di condensazione dei valori di z dati dalla $\varphi(z) = Y$ contenga un punto preso ad arbitrio nel piano z, per es. il punto Z. Preso y_0 in tal modo, avremo nel piano z nell'intorno di Z un insieme condensato di punti in cui $\frac{dy}{dz} = 0$; e, qualunque sia il modo in cui questi punti si distribuiscono sugl'infiniti fogli della R corrispondente alla funzione $y = \varphi(z)$, siccome per $z = Z$ si ha in tutti i fogli $\frac{dy}{dz} = \infty$, vi sarà sempre un'infinità di fogli in cui un posto-zero ed un punto d'infinito della $\frac{dy}{dz}$ disteranno fra loro meno d'una quantità reale arbitrariamente piccola, il che è impossibile, perchè $\frac{dy}{dz}$ è una funzione uniforme sulla R.

Concludendo, l'ipotesi che i punti di diramazione delle due funzioni $y = \varphi(z)$ e $z = \theta(y)$ sieno fissi e che queste funzioni siano della 2.ª famiglia, ci conduce ad un risultato assurdo. Dunque:

Teorema VIII. *Se la funzione y di z e la funzione z di y definite da un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine fra y e z hanno i punti di diramazione fissi, e se uno almeno dei punti di diramazione della specie a) per ciascuna delle due funzioni è regolare, quelle funzioni appartengono alla 1.ª famiglia almeno per qualche valore della costante arbitraria* (*).

Mantova, 31 agosto 1890.

(*) Cfr. Fuchs, Sitzungsb., 1885, pag. 11, dove però non v'ha alcuna restrizione riguardo alla natura dei punti di diramazione. Possiamo tuttavia domandarci, se la trattazione di Fuchs non escluda implicitamente i punti di diramazione non regolari; ma tale questione è estranea al nostro compito. — Riserbiamo pure ad altra occasione lo studio della questione, se possa avvenire che gl'integrali d'un'equazione algebrico-differenziale del primo ordine corrispondenti a certi valori della costante arbitraria sieno della 1.ª famiglia e quelli corrispondenti a certi altri valori della medesima sieno della seconda.