Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *S. Cohn.*)

Zwei bekannte Kartenprojectionen, die *stereographische* und *Mercatorsche* haben die Eigenschaft, dass sich alle Linien in der Projection unter denselben Winkeln wie auf der Kugel schneiden. *Lambert* wurde hierdurch auf die Frage geführt, allgemein die Projectionsarten zu suchen, welche diese Eigenschaft haben. Er hat dieselbe in einer sehr lehrreichen Abhandlung: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* S. 105—199 im dritten Theil seiner mathematischen Beiträge gelöst, und sie auch auf das *abgeplattete Erdsphäroid* ausgedehnt. *Lagrange* hat hiervon Gelegenheit genommen, für *alle Umdrehungsflächen* die betreffende Differentialgleichung aufzustellen und auf die allgemeinste Art zu integriren. Endlich hat *Gauss* in einer von der Kopenhagner Academie gekrönten Abhandlung S. 5—30 im dritten Heft von *Schumachers Astronomischen Abhandlungen* die Differentialgleichung aufgestellt, auf welche die Aufgabe für beliebige Flächen führt, auch dieselbe für *die* speciellen Flächen zweiter Ordnung integrirt, die zugleich Umdrehungsflächen, Kegel oder Cylinder sind, für welche Flächen, wie man leicht sieht, diese Integration allgemein ausgeführt werden kann. Die Integration für *beliebige* Flächen zweiter Ordnung kann jedoch, wie ich bereits vor längerer Zeit in einer vor der Berliner Academie gelesenen Note bemerkt habe, mittelst Einführung der sogenannten *elliptischen Coordinaten* auf Quadraturen zurückgeführt werden. Ich will im Folgenden die hierauf bezüglichen Formeln näher entwickeln.

---

*) In der hier vorliegenden Abhandlung hat *Jacobi* diejenige Anwendung der elliptischen Coordinaten auf das Problem der Kartenprojection vollständig durchgeführt, von welcher er im Jahre 1839 (Monatsbericht der Berliner Academie 1839, S. 64 und Bd. 19, S. 311 dieses Journals) die erste Andeutung gegeben hatte.

Nachdem 1857 die philosophische Facultät der Göttinger Universität diese Durchführung unter Bezugnahme auf die *Jacobi*sche Andeutung zum Gegenstand einer Preisfrage gemacht hatte, wurde von Herrn *Ernst Schering* eine Lösung geliefert, welche 1858 als gekrönte Preisschrift erschienen ist.

Es sei die Fläche dadurch bestimmt, dass die drei rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte, x, y, z als Functionen zweier Grössen t und u gegeben sind. Es sei das Quadrat eines Linienelementes der Fläche gegeben,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T dt^2+2U dt du+V du^2,$$

so hat man den Satz, *dass die Grössen T, U, V hinreichen, das Elementardreieck zu bestimmen, welches von drei unendlich nahen Punkten der Fläche gebildet wird, die den Grössen t, u; $t+\tau$, $u+v$; $t+\tau'$, $u+v'$ entsprechen, wo τ, τ' unendlich kleine Incremente von t, und v, v' unendlich kleine Incremente von u bedeuten.*

Es seien nämlich A, B, C respective die drei Punkte der Fläche, so werden ihre Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z, \\ x+\dfrac{\partial x}{\partial t}\tau+\dfrac{\partial x}{\partial u}v, & y+\dfrac{\partial y}{\partial t}\tau+\dfrac{\partial y}{\partial u}v, & z+\dfrac{\partial z}{\partial t}\tau+\dfrac{\partial z}{\partial u}v, \\ x+\dfrac{\partial x}{\partial t}\tau'+\dfrac{\partial x}{\partial u}v', & y+\dfrac{\partial y}{\partial t}\tau'+\dfrac{\partial y}{\partial u}v', & z+\dfrac{\partial z}{\partial t}\tau'+\dfrac{\partial z}{\partial u}v', \end{array}$$

wo nach der Voraussetzung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = T,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} = U,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = V.$$

Es wird hiernach

$$\overline{AB}^2 = T\tau^2+2U\tau v+Vv^2,$$
$$\overline{AC}^2 = T\tau'^2+2U\tau'v'+Vv'^2,$$

ferner

$$\begin{aligned} AB.AC.\cos BAC &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}v'\right) \\ &\quad+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}v'\right) \\ &\quad+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}v'\right) \\ &= T\tau\tau'+U(\tau v'+\tau' v)+Vvv', \end{aligned}$$

wie man auch leicht aus der Formel

$$\overline{BC}^2 = T(\tau-\tau')^2+2U(\tau-\tau')(v-v')+V(v-v')^2$$

findet. Es wird auch

$$\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 \sin^2 BAC = 4(\triangle ABC)^2 = (TV - U^2)(\tau v' - \tau' v)^2,$$

welches die aus der Theorie der *Multiplication der quadratischen Formen* bekannte Gleichung

$$(T\tau^2 + 2U\tau v + Vv^2)(T\tau'^2 + 2U\tau' v' + Vv'^2)$$
$$= (T\tau\tau' + U(\tau v' + \tau' v) + Vvv')^2 + (TV - U^2)(\tau v' - \tau' v)^2$$

giebt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass, wenn für eine andere Fläche x, y, z andere Functionen von t und u bedeuten, und *entsprechende Punkte* diejenigen Punkte der beiden Flächen genannt werden, welche denselben Werthen der Grössen t und u zugehören, die kleinsten einander entsprechenden Theile der beiden Flächen einander ähnlich sind, wenn die drei Functionen T, U, V proportional bleiben.

Bei Auflösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche so auf einer anderen gegebenen Fläche abzubilden, dass die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben, genügt es, wenn man für die eine Fläche *eine Ebene* nimmt, welche die Vermittlung zwischen den beiden Flächen übernimmt. Denn kann man unter der gegebenen Bedingung jede Fläche auf einer Ebene und die Ebene auf jeder Fläche abbilden, so kann man unter derselben Bedingung auch jede Fläche auf jeder anderen abbilden. Man wird ferner die Aufgabe in ihrer ganzen Vollständigkeit lösen können, wenn man alle Correlationssysteme der Ebene selbst findet, die so beschaffen sind, dass die kleinsten Theile einander ähnlich werden, oder auf alle möglichen Arten unter der angegebenen Bedingung die Ebene auf sich selber abbilden kann.

Es seien p und q die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene, so sind p und q als solche Functionen von t und u zu bestimmen, dass

$$dp^2 + dq^2 = M(T dt^2 + 2U dt\, du + V du^2)$$

oder

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 = MT, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = MV,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial u} = MU,$$

wo $\sqrt{M}$ die Grösse ist, mit welcher man die dem Punkte, dessen Coordinaten p und q sind, benachbarten Linienelemente der Ebene multipliciren muss, um die entsprechenden Linienelemente der gegebenen Fläche zu erhalten.

Da die Elemente dt und du gänzlich von einander unabhängig und $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ lineare Functionen derselben sind, so kann man die Ausdrücke

$$dp+dq\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad dp-dq\sqrt{-1}$$

definiren als lineare Factoren des quadratischen Ausdrucks $T dt^2 + 2U dt du + V du^2$, welche zugleich vollständige Differentiale sind. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ noch mit beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ multiplicirt. *Um daher p und q auf die allgemeinste Art als Functionen von t und u zu finden, zerfälle man den gegebenen Ausdruck des Quadrats des Linienelementes*

$$T dt^2 + 2U dt du + V du^2$$

in seine linearen Factoren, multiplicire jeden derselben mit solcher Function von t und u, dass er ein vollständiges Differential wird, und setze die beiden Integrale beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ *und von* $p-q\sqrt{-1}$ *gleich.*

Ich will als Beispiele die drei Fälle betrachten, in welchen die Fläche durch Umdrehung erzeugt oder ein Kegel oder ein Cylinder ist, und dann zu der Aufgabe übergehen, ein dreiaxiges Ellipsoid auf einer Fläche abzubilden.

I.

Abbildung von Umdrehungsflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \quad y = t\sin u, \quad z = F(t),$$

wie man für eine Umdrehungsfläche annehmen kann. Es wird dann das Quadrat des Linienelementes

$$T dt^2 + t^2 du^2,$$

wo

$$T = 1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Es werden hier

$$\frac{\sqrt{T}dt}{t} + du\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{T}dt}{t} - du\sqrt{-1}$$

die integrablen Factoren, und daher

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \mathrm{T} + u\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \mathrm{T} - u\sqrt{-1},$$

wo $\mathrm{T} = \int \frac{\sqrt{T}dt}{t}$, die allgemeinsten Gleichungen, welche zwischen p, q und

t, u Statt finden können. Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \mathrm{T}, \qquad q = u,$$

und es wird t der Quotient des Linienelementes der Fläche und der Ebene.

Es bedeutet in diesen Formeln die z-Axe die Umdrehungsaxe, t den Halbmesser des Parallelkreises, u die Länge. Man erhält daher die der *Mercatorschen* entsprechende Projectionsart, in welcher die durch die einzelnen Längengrade gehenden Meridiane durch äquidistante Parallellinien abgebildet werden, während die darauf senkrecht stehenden geraden Linien dem Aequator und den Parallelkreisen entsprechen. Setzt man dagegen

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man, wenn

$$p = r\cos\varphi, \qquad q = r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$\log r = \mathrm{T}, \qquad \varphi = u,$$

und es werden sich die entsprechenden Linienelemente der Projection und der Fläche, wie der Radiusvector und der Halbmesser des Parallelkreises verhalten. Diese Projectionsart entspricht der *stereographischen*, weil in ihr die Meridiankreise durch gerade Linien dargestellt werden, die von einem Punkt ausgehen, der Aequator und die Parallelkreise dagegen durch Kreise, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt haben. Die Curven, welche auf der Umdrehungsfläche alle Meridiane unter demselben Winkel schneiden, werden in der ersten Projection gerade Linien, in der zweiten eine Art Spiralen, deren Polargleichung

$$\alpha + \beta r + \gamma\varphi = 0$$

ist. *Lambert* hat noch den Fall betrachtet, wenn

$$f(x) = \varphi(x) = x^m,$$

und Werthe von m angegeben, für welche die Formeln eine practische Anwendung für gewisse specielle Zwecke finden, die man durch die Projection zu erreichen wünschen kann.

II.

Abbildung von Kegelflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \qquad y = t\sin u\cos v, \qquad z = t\sin u\sin v,$$

wo v eine Function bloss von u bedeute, so wird die Fläche ein Kegel, dessen

Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Es wird hiernach

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dt^2+t^2A\,du^2,$$

wo

$$A = 1+\sin^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

eine Function bloss von u ist. Es werden daher die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Kegels

$$\frac{dt}{t}+\sqrt{-A}\,du, \qquad \frac{dt}{t}-\sqrt{-A}\,du,$$

und daher die gesuchten Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form, wenn man

$$\int\sqrt{A}\,du = \int\sqrt{(du^2+\sin^2 u\,dv^2)} = \sigma$$

setzt,

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \log t+\sigma\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \log t-\sigma\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man

$$p = t\cos\sigma, \qquad q = t\sin\sigma$$

und daher *diejenige* Abbildung des Kegels, welche seine Abwicklung ergiebt.

III.

Abbildung von cylindrischen Flächen auf einer Ebene.

Wenn y eine Function bloss von x, und z von x und y unabhängig ist, erhält man eine cylindrische Fläche. Man kann daher

$$x = t, \quad y = F(t), \quad z = u$$

setzen, woraus

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T\,dt^2+du^2$$

folgt, wo

$$T = 1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Cylinders werden

$$\sqrt{T}\,dt+du\sqrt{-1}, \qquad \sqrt{T}\,dt-du\sqrt{-1}.$$

Setzt man daher

$$\int\sqrt{T}\,dt = \int\sqrt{dx^2+dy^2} = \sigma,$$

wo σ den Bogen eines zur Kante des Cylinders senkrechten Schnitts oder des

Schnitts der xy-Ebene bedeutet, so werden die verlangten Gleichungen:

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \sigma + z\sqrt{-1}, \quad \varphi(p-q\sqrt{-1}) = \sigma - z\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \sigma, \quad q = z = u,$$

und daher wieder diejenige Abbildung, die durch die Abwicklung des Cylinders gegeben wird.

Abbildung eines Ellipsoids und der beiden Hyperboloide auf einer Ebene.

Es seien b und c gegebene positive Constanten und c die grössere derselben; es seien ferner ϱ, ϱ_1, ϱ_2 drei Grössen, von denen die erste grösser als c, die dritte kleiner als b und die zweite zwischen b und c liegt; so werden

$$1 = \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_1^2 - c},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_2^2 - c^2}$$

die Gleichungen eines Ellipsoids, eines einflächigen und eines zweiflächigen Hyperboloids. Betrachtet man x, y, z als Functionen von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, wie sie durch die vorstehenden Gleichungen gegeben werden, so findet man, wie bekannt ist,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\,d\varrho^2 + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2)}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}\,d\varrho_1^2 + \frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}\,d\varrho_2^2.$$

Betrachtet man nach einander erstens ϱ, zweitens ϱ_1, drittens ϱ_2 als constant, so giebt der vorstehende Ausdruck die Quadrate der Linienelemente der drei genannten Flächen:

1) *für das Ellipsoid* (ϱ constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)} + \frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

2) *für das einflächige Hyperboloid* (ϱ_1 constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho^2 - \varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)\,d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

3) *für das zweiflächige Hyperboloid* (ϱ_2 constant)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\varrho^2 - \varrho_1^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)\,d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}.$$

Die linearen integrablen Factoren dieser Ausdrücke werden:

$$1)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1 \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2\sqrt{-1};$$

$$2)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}\,d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2\sqrt{-1};$$

$$3)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}\,d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1\sqrt{-1},$$

und man erhält in jedem der drei Fälle die allgemeinste Auflösung der Aufgabe, wenn man die Integrale der beiden dem Doppelzeichen $\pm$ entsprechenden Ausdrücke respective einer willkürlichen Function von $p+q\sqrt{-1}$ und einer willkürlichen Function von $p-q\sqrt{-1}$ gleich setzt.

Abbildung eines Ellipsoids auf einer Ebene.

$$\varrho > c > \varrho_1 > b > \varrho_2.$$

$$U=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1,\qquad V=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2.$$

1) In U ist ϱ_1 variabel, ϱ constant. Man setze

$$\varrho_1^2-b^2=y^2(c^2-\varrho_1^2)\quad\text{oder}\quad \varrho_1^2(1+y^2)=b^2+c^2y^2,$$

so wird

$$\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)\}}}=\frac{dy}{\sqrt{\{(1+y^2)(b^2+c^2y^2)\}}},$$

$$\varrho^2-\varrho_1^2=\frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{1+y^2},$$

und daher

$$U=\int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{b^2+c^2y^2}\right\}}\,\frac{dy}{1+y^2}.$$

Es sei

$$y=\frac{b}{c}\operatorname{tg}\varphi,$$

so wird

$$\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2=\frac{(\varrho^2-b^2)c^2-\varrho^2(c^2-b^2)\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{(b^2+c^2y^2)}}=\frac{c\cos\varphi\,d\varphi}{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\varphi},$$

und daher, wenn man

$$\frac{\varrho^2(c^2-b^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)}=k^2,\qquad \frac{c^2-b^2}{c^2}=k^2\sin^2\alpha$$

setzt,

$$U = \frac{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}{c}\int\frac{\triangle\varphi\, d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

oder da

$$\frac{\varrho^2-b^2}{\varrho^2} = \sin^2\alpha, \quad \frac{b^2}{\varrho^2} = \cos^2\alpha, \quad \frac{b^2}{c^2} = \triangle^2\alpha$$

wird,

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sin\alpha\triangle\alpha}{\cos\alpha}\int\frac{\triangle\varphi\, d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi} \\ &= \operatorname{tg}\alpha\triangle\alpha\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi} - k^2\sin\alpha\cos\alpha\triangle\alpha\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\triangle\varphi}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi} = u, \quad \int\frac{d\alpha}{\triangle\alpha} = a,$$

so wird, nach den von mir in den Fundamentis eingeführten Bezeichnungen,

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\triangle\operatorname{am}(a).u - \Pi(u, a) \\ &= \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{2hu}.\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}, \end{aligned}$$

wenn man

$$\begin{aligned} h &= \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\triangle\operatorname{am}(a) - Z(a) \\ &= -\frac{d\log.\Theta(a)\cos\operatorname{am}(a)}{da} = -\frac{d\log H(a+K)}{da} \end{aligned}$$

setzt. Wenn

$$u = \frac{2K}{\pi}u', \quad a = \frac{2K}{\pi}a', \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so wird

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= 1-2q\cos 2u' + 2q^4\cos 4u' - 2q^9\cos 6u' + \cdots, \\ H(u) &= 2\sqrt[4]{q}\{\sin u' - q^2\sin 3u' + q^6\sin 5u' - q^{12}\sin 7u' + \cdots\}, \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{1-2q\cos 2(u'+a') + 2q^4\cos 4(u'+a') - \cdots}{1-2q\cos 2(u'-a') + 2q^4\cos 4(u'-a') - \cdots},$$

$$H(a+K) = 2\sqrt[4]{q}\{\cos a' + q^2\cos 3a' + q^6\cos 5a' + \cdots\},$$

und daher

$$h = -\frac{d\log H(a+K)}{\frac{2K}{\pi}da'} = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\sin a' + 3q^2\sin 3a' + 5q^6\sin 5a' + \cdots}{\cos a' + q^2\cos 3a' + q^6\cos 5a' + \cdots}.$$

Ich bemerke noch, dass

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(u) = \frac{c^2(\varrho_1^2-b^2)}{b^2(c^2-\varrho_1^2)},$$

und daher

$$\cos^2\varphi = \frac{b^2(c^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{c^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)},$$

$$k^2\sin^2\varphi = \frac{\varrho^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}, \qquad \Delta^2\varphi = \frac{b^2(\varrho^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}.$$

Man sieht, dass $\frac{1}{k^2}$ und $\sin^2\varphi$ dieselben Functionen respective von ϱ und ϱ_1 sind. Wenn ϱ_1 von b bis c wächst, wachsen φ und u' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und u von 0 bis K.

2) Man erhält $V\sqrt{-1}$ aus U, wenn man ϱ_1 in ϱ_2 verwandelt. Hierdurch bleiben die Constanten k, α, a, a', h unverändert, und es wird nur u verändert, und zwar nimmt es, weil ϱ_2 immer kleiner als b bleiben soll, einen imaginären Werth an, welchen ich mit $(K'+v)\sqrt{-1}$ bezeichnen werde. Man wird dann die betreffenden Formeln erhalten, wenn man in den zuletzt aufgestellten $(K'+v)\sqrt{-1}$ für u und daher $\operatorname{am}((K'+v)\sqrt{-1})$ für φ und gleichzeitig ϱ_2 für ϱ_1 setzt. Man erhält hieraus

$$\frac{-1}{k^2\sin^2\operatorname{am}((K'+v)\sqrt{-1})} = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}$$

oder

$$-\sin^2\operatorname{am}(v\sqrt{-1}) = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(v, k') = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)},$$

woraus, wenn man $\operatorname{am}(v, k') = \psi$ setzt,

$$\cos^2\psi = \frac{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)},$$

und, da $k'^2 = \frac{b^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)}$, auch

$$k'^2\sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \Delta^2(\psi, k') = \frac{\varrho^2(c^2-\varrho_2^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}$$

folgt. Es wird ferner

$$V = h(K'+v) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}+a)}{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}-a)}.$$

Da

$$\Theta(K'\sqrt{-1}+u) = \sqrt{-1}\,.\,e^{\frac{\pi(K'-2u\sqrt{-1})}{4K}}H(u),$$

so wird dieser Ausdruck, wenn man, wie verstattet ist, den durch Addition hinzugekommenen constanten Term fortlässt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{H(a+v\sqrt{-1})}{H(a-v\sqrt{-1})}$$
$$= hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'}) - q^2\cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'}) - q^2\sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'}) + \cdots},$$

wo $v' = \frac{\pi v}{2K'}$.

Wenn ϱ_2 von 0 bis b zunimmt, wächst gleichzeitig v von 0 bis K' und $e^{v'}$ von 1 bis $\frac{1}{\sqrt{q}}$.

Will man bei Erhaltung der Aehnlichkeit der kleinsten Theile das Ellipsoid so auf einer Ebene abbilden, dass seine Krümmungslinien, welche Durchschnitte mit confocalen *zwei*flächigen Hyperboloiden sind, *gerade Linien*, die aus einem festen Punkte ausgehen, die Krümmungslinien dagegen, welche Durchschnitte mit confocalen *ein*flächigen Hyperboloiden sind, *Kreise* werden, die den festen Punkt zum Mittelpunkt haben, so findet man aus jedem gegebenen Punkte des Ellipsoids mittelst der obigen Formeln die Abscissen und Ordinaten $r\cos\eta$ und $r\sin\eta$ des entsprechenden Punktes der Ebene. Ist nämlich der feste Punkt der Anfangspunkt der Polarcoordinaten, so werden dieselben,

$$r = e^{hu}\sqrt{\left\{\frac{1-2q\cos 2(u'+a') + 2q^4\cos 4(u'+a') - \cdots}{1-2q\cos 2(u'-a') + 2q^4\cos 4(u'-a') - \cdots}\right\}},$$
$$\eta = hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'}) - q^2\cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'}) - q^2\sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'}) + \cdots}.$$

Dem durch diese Polarcoordinaten bestimmten Punkte der Ebene entsprechen Punkte des Ellipsoids, deren Coordinaten

$$x = \frac{\varrho\varrho_1\varrho_2}{bc},$$
$$y = \sqrt{\left\{\frac{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2)}{b^2(c^2-b^2)}\right\}},$$
$$z = \sqrt{\left\{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2)}{c^2(c^2-b^2)}\right\}}$$

sind.

Es ist zufolge der obigen Substitutionen, wenn man $\psi = \operatorname{am}(v, k')$ setzt,

$$\varrho_1^2 = \frac{b^2}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad \varrho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\psi}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi},$$
$$\varrho_1^2 - b^2 = \frac{b^2k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad b^2-\varrho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\alpha\cos^2\psi}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi},$$
$$c^2-\varrho_1^2 = \frac{c^2k^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad c^2-\varrho_2^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha\,\Delta^2(\psi,k')}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi}.$$

Fügt man hiezu die Formeln

$$\frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha, \qquad \frac{b^2(\varrho^2-b^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2\Delta^2\alpha}{k^2}, \qquad \frac{c^2(\varrho^2-c^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2 k'^2}{k^2\Delta^2\alpha},$$

so erhält man

$$x = N.\Delta^2\alpha\sin\psi, \quad y = N.\Delta^2\alpha\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.k'\sin^2\alpha\cos\varphi\Delta(\psi, k'),$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\Delta\alpha\sqrt{\{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)\}}}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids selber wird

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2\sin^2\alpha}+\frac{z^2\Delta^2\alpha}{\varrho^2k'^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Für das *längliche Umdrehungsellipsoid* wird

$$b = c, \quad k^2 = 0, \quad q = 0, \quad K = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\varphi = u = u', \quad \alpha = a = a', \quad h = \operatorname{tg}\alpha.$$

Man hat ferner

$$v = v' = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos\psi} = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi), \qquad \frac{e^{v'}-e^{-v'}}{e^{v'}+e^{-v'}} = \sin\psi.$$

Man erhält daher aus dem ersten System Formeln die Polarcoordinaten eines Punktes der Ebene

$$r = e^{\operatorname{tg}\alpha\,.\,\varphi},$$
$$\eta = \operatorname{tg}\alpha\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi)+\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\operatorname{cotg}\alpha\sin\psi,$$

und die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes des länglichen Umdrehungsellipsoids

$$x = N.\sin\psi, \quad y = N.\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.\sin^2\alpha\cos\varphi\cos\psi,$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\psi+\sin^2\alpha\cos^2\psi)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2+z^2}{\varrho^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Wenn das Ellipsoid sich einem *abgeplatteten Umdrehungsellipsoid* annähert, oder b eine kleine Grösse ist, wodurch k sich der Einheit nähert, muss man die vorstehenden Formeln wie folgt transformiren.

Ich führe zuerst für u und a ihre Complemente

$$K-u = u_1, \quad K-a = a_1$$

ein. Setzt man

$$\operatorname{am}(u_1) = \varphi_1, \qquad \operatorname{am}(a_1) = \alpha_1,$$

so wird

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{c^2}{\varrho^2}, \qquad \cos^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}, \qquad \Delta^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - b^2},$$

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - \varrho_1^2)}{(c^2 - b^2)(\varrho^2 - \varrho_1^2)}, \quad \cos^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - c^2)(\varrho_1^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(\varrho^2 - \varrho_1^2)}, \quad \Delta^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2 - c^2)\varrho_1^2}{c^2(\varrho^2 - \varrho_1^2)},$$

und die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta^2\alpha_1 . y^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} + \frac{z^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} = 1,$$

und es wird nach einigen leichten Reductionen

$$x = M.\Delta^2\alpha_1\Delta\varphi_1\sin\psi, \quad y = M.\cos^2\alpha_1\cos\varphi_1\cos\psi, \quad z = M.\cos^2\alpha_1\Delta^2\alpha_1\sin\varphi_1\Delta(\psi, k'),$$

wo

$$M = \frac{\varrho}{\Delta\alpha_1\sqrt{\{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)(\cos^2\alpha_1 + k'^2\sin^2\alpha_1\sin^2\psi)\}}}.$$

Man hat ferner

$$hu = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}(K - u_1), \qquad \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{\Theta(u_1 + a_1)}{\Theta(u_1 - a_1)},$$

und daher, wenn man in dem Ausdrucke von U die Constante $\frac{K d\log H(a_1)}{da_1}$ fortlässt und die Zeichen umkehrt,

$$U = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1 + a_1)}{\Theta(u_1 - a_1)}.$$

Es wird ferner

$$U = \frac{\sin\alpha\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{k'^2\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(\Delta^2\alpha_1\Delta^2\varphi_1 - k^2\cos^2\alpha_1\cos^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}.$$

Da es frei steht von U eine Constante abzuziehen und das Zeichen zu ändern, so werde ich hiefür

$$U = \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1 - k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

setzen.

Diese Ausdrücke können in andere transformirt werden, in welchen die Argumente imaginär werden, und der Modul in sein Complement sich verwandelt. Es ist aber

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}} H(K' \pm u\sqrt{-1}, k'),$$

$$H(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}} e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}} H(u\sqrt{-1}, k'),$$

und daher

$$h = \frac{d\log H(a_1)}{da_1} = -\frac{\pi a_1}{2KK'} + h_1,$$

wenn man

$$h_1 = \frac{d\log H(a_1\sqrt{-1}, k')}{da_1} = \frac{\pi}{2K'}\cdot\frac{e^{a_1'} + e^{-a_1'} - 3q'^2\left(e^{3a_1'} + e^{-3a_1'}\right) + \cdots}{e^{a_1'} - e^{-a_1'} - q'^2\left(e^{3a_1'} - e^{-3a_1'}\right) + \cdots}$$

setzt. Es wird ferner

$$U = \frac{\cos\alpha_1 \triangle\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\triangle\varphi_1} = hu_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)}$$

$$= h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{H(K'-(u_1+a_1)\sqrt{-1}, k')}{H(K'-(u_1-a_1)\sqrt{-1}, k')}$$

oder, wenn man $u_1' = \frac{\pi u_1}{2K'}$, $a_1' = \frac{\pi a_1}{2K'}$ setzt,

$$U = h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{u_1'+a_1'} + e^{-u_1'-a_1'} + q'^2\left(e^{3u_1'+3a_1'} + e^{-3u_1'-3a_1'}\right) + \cdots}{e^{u_1'-a_1'} + e^{-u_1'+a_1'} + q'^2\left(e^{3u_1'-3a_1'} + e^{-3u_1'+3a_1'}\right) + \cdots}.$$

Wenn $\varphi_1 = 0$, wird $u_1 = 0$, wofür dieser Ausdruck von U, wie der obige Integralausdruck verschwindet, weshalb beide einander gleich gesetzt worden sind.

Man hat ferner, wenn man

$$v' = \frac{\pi v}{2K'}$$

setzt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{H(a+v\sqrt{-1})}{H(a-v\sqrt{-1})}$$

$$= hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{H(K-a_1+v\sqrt{-1})}{H(K-a_1-v\sqrt{-1})}$$

$$= h_1v + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\Theta(v+a_1\sqrt{-1}, k')}{\Theta(v-a_1\sqrt{-1}, k')}$$

$$= h_1v + \operatorname{Arctg}\frac{q'\left(e^{2a_1'} - e^{-2a_1'}\right)\sin 2v' - q'^4\left(e^{4a_1'} - e^{-4a_1'}\right)\sin 4v' + \cdots}{1 - q'\left(e^{2a_1'} + e^{-2a_1'}\right)\cos 2v' + q'^4\left(e^{4a_1'} + e^{-4a_1'}\right)\cos 4v' - \cdots}.$$

Für das abgeplattete Umdrehungsellipsoid selbst wird

$$k' = 0, \quad q' = 0, \quad K' = \tfrac{1}{2}\pi, \quad v = v' = \psi,$$

$$a'_1 = a_1 = \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1), \qquad u'_1 = u_1 = \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1),$$

$$\begin{aligned}
U = {} & \frac{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1) + \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)}{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1) - \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)} \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) \\
& - \tfrac{1}{2}\log \frac{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)}{\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)} \\
= {} & \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)} \\
= {} & \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2}\log\frac{1 + \sin\alpha_1\sin\varphi_1}{1 - \sin\alpha_1\sin\varphi_1},
\end{aligned}$$

$$V = \frac{\psi}{\sin\alpha_1}.$$

Die Coordinaten der Punkte des Umdrehungsellipsoids werden, wenn man $M = L\cos^2\alpha_1$ setzt,

$$x = L.\cos\varphi_1\sin\psi, \quad y = L.\cos\varphi_1\cos\psi, \quad z = L.\cos^2\alpha_1\sin\varphi_1,$$

wo

$$L = \frac{\varrho}{\sqrt{(1 - \sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2 + y^2}{\varrho^2} + \frac{z^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} = 1.$$

Der Winkel ψ ist hier die Länge und der Winkel φ_1 die excentrische Anomalie des Meridians. —