

Ich will nun auf Einzelheiten nicht weiter eingehen und auch nicht auf die Frage zurückkommen, in welcher Weise in den früher erwähnten Problemen der Turbulenz und des Fließens fester Stoffe die statistische Theorie aufzubauen wäre. Was ich mit meinen bisherigen Veröffentlichungen¹⁾ angestrebt habe, war nur, die begrifflichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen und ein logisch mögliches Schema mechanischer Statistik anzugeben. Gewiß erheben sich noch große und mannigfaltige Schwierigkeiten anderer Art und vor allem werden uns, davon bin ich überzeugt, gewisse Enttäuschungen nicht erspart bleiben: Viele Fragen, die uns heute ganz natürlich und selbstverständlich zu sein scheinen, werden sich als endgültig unbeantwortbar herausstellen, so etwa wie seinerzeit die Newtonsche Himmelsmechanik die Frage Keplers nach der Größe der Radien der Planetenbahnen nicht beantwortet, sondern ausgeschaltet hat. Aber wie dem auch sei, mag der Verzicht groß oder klein sein, uns schwer oder leicht fallen, es sobien mir unausweichlich, einmal offen und klar auszusprechen, daß es innerhalb der rein empirischen Mechanik Bewegungs- und Gleichgewichtsvorgänge gibt, die sich einer Erklärung auf Grund der mechanischen Differentialgleichungen auf die Dauer entziehen und den Aufbau einer geschlossenen Theorie der mechanischen Statistik verlangen. 108

Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz.

Von L. PRANDTL in Göttingen²⁾.

Die bisherigen mathematischen Untersuchungen über die Entstehung der Turbulenz haben zu der Ansicht geführt, daß die kleinen Schwingungen einer durch Zähigkeitswirkungen zwischen zwei Wänden entstandenen Laminaströmung immer gedämpft verlaufen³⁾. Die beobachtete Turbulenz sollte deshalb das Ergebnis von Störungen mit endlicher Amplitude sein. Die bei den Versuchen gefundene Abhängigkeit des kritischen Zustandes von der Größe der Eintrittsstörung (vergl. den nachfolgenden Aufsatz von L. Schiller) schienen für diese Ansicht zu sprechen.

Um zu erfahren, wie denn die Turbulenz in Wirklichkeit entsteht, ließ ich in Göttingen einen 6,5 m langen offenen Kanal von rechteckigem Querschnitt (15 cm weit, 25 cm tief) herstellen und beobachtete die Strömung darin nach der Ahlbornschen Methode (aufgestreutes Lykodium). Die Erwartung, daß es nunmehr sofort offenbar werden würde, wie die Turbulenz entsteht, wurde aber fürs erste enttäuscht. Es war zunächst nur festzustellen, daß sie entsteht. Plötzlich, ohne erkennbare Vorbereitung, tauchten in der Nähe einer Wand kleine Wirbelchen auf, die sich nun schnell vermehrten. Außerdem sah man manchmal wellige Formen mit langsam zunehmender Amplitude, die aber nicht immer zu einer eigentlichen Turbulenzerscheinung führten. Diese Wellen mit zunehmender Amplitude widersprachen aber ganz dem Dogma von der Stabilität der Laminarbewegung gegenüber kleinen Schwingungen, so daß ich zuerst dazu neigte, zu glauben, daß ich diese nicht sehr häufige Erscheinung nicht ganz richtig gesehen hätte.

Wir warfen uns nun auf die theoretische Behandlung, und um es gleich vorweg zu nehmen, wir fanden entgegen dem Dogma eine Labilität der kleinen Schwingungen.

Der Plan der Rechnung war zunächst ein anderer gewesen. Wir, d. h. wesentlich Herr O. Tietjens, der unter meiner Leitung die Rechnungen machte, untersuchten die Stabilität

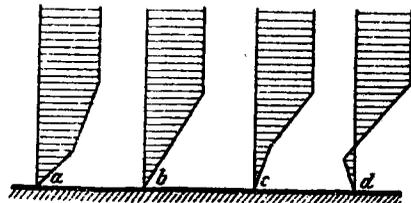


Abb. 1

¹⁾ Vgl. insbesondere die oben angeführte Arbeit in der Physik. Zeitschr.; ferner: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 5, 1919, S. 52 bis 99 und eine leicht verständliche Darstellung in: Die Naturwissenschaften, 7, 1919, S. 168 bis 175, 186 bis 192 und 205 bis 209

²⁾ Vorgetragen auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematikervereinigung in Jena am 20. September 1921.

³⁾ Der von Herrn F. Noether in den Göttinger Nachrichten 1917, math.-phys. Kl., S. 199. untersuchte Fall, der bei Reibungslosigkeit wie bei kleiner Reibung Instabilität ergibt, scheidet hier aus, weil die dortige Geschwindigkeitsverteilung in den hier in Betracht zu ziehenden Fällen niemals entstehen kann.

und Labilität von Laminarströmungen, wie sie längs einer Wand durch länger dauernde Einwirkung einer geringen Zähigkeit entstehen¹⁾ und zwar nach der von Lord Rayleigh angegebenen Methode unter Vernachlässigung der Reibung²⁾. Rayleigh ersetzt das Geschwindigkeitsprofil durch einen geknickten Linienzug, was darauf hinaus kommt, daß Differenzgleichungen an Stelle der Differentialgleichungen treten³⁾. Die von uns untersuchten Geschwindigkeitsprofile entsprachen der vorstehenden Figur.

Es zeigte sich nun, daß jede noch so kleine Einbuchtung von der Art des Profils *c* Labilität ergibt. Solche Einbuchtungen kommen vor allem bei der Umströmung von gerundeten Körpern zwischen dem Geschwindigkeitsmaximum und der Ablösungsstelle vor, vergl etwa die K. Pohlhausensche Abb. 1 S. 255 dieser Zeitschrift. Durch die erwähnte Rechnung ist also der Grund für die Labilität der Grenzschicht, die bei der Strömung um Kugeln und andere gerundete Körper zur Turbulenz und zu dem bekannten Sprung in der Widerstandszahl führt, aufgedeckt. Bei einer Strömung im Rohr oder an einer ebenen Wand können solche Einbuchtungen des Geschwindigkeitsprofils durch hinreichend starke in der Strömung vorhandene Wirbel — aber auch durch mangelhafte Ebenheit der Wand — erzeugt werden, und so die Bedingungen für das Entstehen einer Anzahl kleinerer Wirbel sein.

Wenn, wie anzunehmen war, die Zähigkeit eine Dämpfung, also eine Verringerung der Labilität brachte, so mußte sich für jede Größe der Anfangsstörung eine Reynoldsche Zahl ergeben, unterhalb der die Labilität verschwand; die stärkeren Störungen brachten stärkere Einbuchtung des Geschwindigkeitsprofils und damit stärkere Labilität; dieser entsprach eine niedrigere kritische Zahl in schönster Uebereinstimmung mit dem Versuch.

Wir gingen also daran, unsere Rechnung durch Berücksichtigung der niedrigsten Ordnung der Zähigkeit zu verbessern. Bei der Untersuchung der verschiedenen Reibungseinflüsse zeigte sich, daß bei kleiner Zähigkeit ein Einfluß von der Größenordnung $\sqrt{\nu}$ vorherrscht, der von Vorgängen in der unmittelbaren Wandnähe her stammt ($r =$ kinematische Zähigkeit $= \frac{\mu}{\rho}$). Da die reibungslose Rayleigh-Schwingung ein Gleiten an der Wand ergibt, entsteht nämlich hier bei Berücksichtigung der Reibung eine dünne

¹⁾ Setzt man z. B. zur Zeit $t = 0$ für $y > 0$ $U = U_0 = \text{konst.}$ und fordert $U = 0$ für $y = 0$, $t > 0$ entsprechend dem Haften an der Wand, so ergibt eine bekannte Rechnung

$$U = \frac{2 U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-r^2} dr,$$

wobei $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ ist. Für Zeiten von der Größenordnung $T = \frac{y_1^2}{4\nu}$ erlangt die Uebergangsschicht eine Dicke von der Größenordnung y_1 .

²⁾ Lord Rayleigh, On the stability or instability of certain fluid motions II. Proc. Lond. math. Soc. XIX, S. 67, 1887 = Papers III, S. 17.

³⁾ Die Rayleighsche Untersuchung nimmt eine schwache wellenförmige Störung u, v an, die sich der Hauptströmung $U(y)$ überlagert. u und v mögen den Faktor $e^{i(kx + nt)}$ haben. Ihre Abhängigkeit von y ist noch unbekannt. Die Kontinuität liefert in komplexer Schreibweise $u = \frac{i \partial v}{k \partial y}$; die Helmholtzsche Wirbelgleichung liefert sodann, wenn die zweite Ordnung in u, v vernachlässigt wird,

$$\left(\frac{n}{k} + U\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v\right) - v \frac{d^2 U}{dy^2} = 0.$$

Setzt man mit Rayleigh streifenweise $\frac{dU}{dy} = \text{konst.}$, so wird im Innern der Streifen, da im allgemeinen $\frac{n}{k} + U \neq 0$ ist, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k^2 v$, also $v = A \sin ky + B \cos ky$. Für die Grenze zwischen zwei Streifen wird durch Integration und Grenzübergang auf Breite Null der Uebergangszone

$$\left(\frac{n}{k} + U\right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} II - \frac{\partial v}{\partial y} I\right) = v \left(\frac{dU}{dy} II - \frac{dU}{dy} I\right).$$

Zusammen mit den Grenzbedingungen an den Wänden (oder — bei uns — an der Wand und im Unendlichen) ergibt sich eine Determinante, aus der n bestimmt wird. Die Gleichung für n ist von ebenso hohem Grade, als das Geschwindigkeitsprofil Knicke hat.

Grenzschicht, in der sich der Uebergang von der Geschwindigkeit Null an der Wand auf die Geschwindigkeiten vollzieht, die die Rayleighsche Rechnung liefert. Daß die in der Rayleighschen Rechnung zur Vereinfachung der mathematischen Aufgabe eingeführten Knicke sich durch die Wirkung der Zähigkeit abrunden würden, braucht uns nicht zu stören, denn diese Knicke sind nur der Rechnung wegen eingeführt; man hat sich in Wirklichkeit an ihrer Stelle runde Formen zu denken, die sich durch die Zähigkeit höchstens um Größen von der Ordnung ν verändern, die wir bereits vernachlässigen. Das ganze Verfahren kommt darauf hinaus, daß wir nur den Streifen von der kleinen

Breite der Grenzschicht (Größenordnung $\sqrt{\frac{\nu}{n}}$, Bezeichn. s. Fußnote 3 S. 432) als reibende Flüssigkeit ansehen, das übrige als reibungslose. Wir kommen so auch über die Schwierigkeit hinweg, daß unser Geschwindigkeitsprofil streng genommen nicht stationär ist (die vernachlässigte Veränderung in der Zeit τ ist von der Größenordnung $\frac{2\nu\tau}{y_1^2} U$).

Wenn man die Rechnung für unsere Grenzschicht unter der Annahme kleiner Schwingungen durchführt, dann ergibt sich eine nicht ganz einfache, jedoch von Sommerfeld und Hopf¹⁾ bereits sehr sorgfältig untersuchte Differentialgleichung. Wir wollen indes zum Unterschied von den genannten Autoren hier davon Gebrauch machen, daß die Zähigkeit sehr klein ist und ferner auch annehmen, daß die Geschwindigkeit U' , mit der die Wellen der Störung in der X-Richtung fortschreiten, nicht zu klein ist, so daß die Schicht, die mit der Geschwindigkeit U' strömt, bereits außerhalb der Grenzschicht liegt²⁾. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \dots \dots \dots (1).$$

Die Rayleigh-Schwingung liefere an der Wand eine Geschwindigkeit $u_1 = Ce^{i(kx + nt)}$. Wir fügen eine Zusatzgeschwindigkeit $u' = f(y) e^{i(kx + nt)}$ hinzu mit der Bestimmung, daß $f(0) = -C$ sein soll, um die Grenzbedingung des Haftens an der Wand zu befriedigen. In der Nähe der Wand außerhalb der Grenzschicht gilt genähert $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t}$; also ergibt sich mit $u = u_1 + u'$ aus Formel (1)

$$in f(y) = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

also wird

$$f(y) = -Ce^{\pm(1+i)y\sqrt{\frac{\nu}{2\nu}}} \dots \dots \dots (2),$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß der reelle Teil des Exponenten negativ wird, damit die e-Funktion mit wachsendem x abklingt.

Die Zusatzbewegung u' bringt vermöge der Continuität auch eine Zusatzgeschwindigkeit v' hervor. Es ist

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = -iku',$$

was wegen $v = 0$ am Rande

$$v' = \pm \frac{ikC}{1+i} \sqrt{\frac{\nu}{2\nu}} \left(1 - e^{\pm(1+i)y\sqrt{\frac{\nu}{2\nu}}}\right) e^{i(kx + nt)} \dots \dots \dots (3)$$

gibt.

Während u' außerhalb der Grenzschicht verschwindet, hat v' gemäß Formel (3) für größere y den asymptotischen Wert³⁾

$$v' = + (1+i) C \sqrt{\frac{\nu}{2\nu}} \cdot e^{i(kx + nt)} \dots \dots \dots (4).$$

Man kann sich die weitere Untersuchung dadurch sehr vereinfachen, daß man so tut, als ob dieser Wert von v' bereits an der Wand vorhanden wäre und daß man im

¹⁾ A. Sommerfeld, Atti del IV. Congr. Intern. dei Matematici, Rom 1908; L. Hopf, Ann. d. Phys. (IV.) 43, S. 1, 1914.

²⁾ Es kommt darauf an, daß der Ausdruck $\frac{dU}{dy} \sqrt{\frac{\nu}{kU^2}}$ klein bleibt.

³⁾ Die Formel (3) gilt der Ableitung gemäß nur für eine Schicht, in der das reibungslose ν , das in Wirklichkeit einen $\text{Cot}ky$ enthält, als konstant nach y angesehen werden kann.

übrigen, abgesehen von dieser Abänderung der Grenzbedingung, die Reibung nicht weiter berücksichtigt. Die Rückwirkung der Grenzschicht auf das Innere wird damit richtig dargestellt. Die Geschwindigkeit v' kommt in Wirklichkeit davon her, daß in der Grenzschicht die Geschwindigkeit u durch die Reibung abgeändert ist. Unser vereinfachter

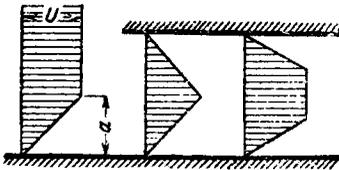


Abb. 2

Ansatz setzt dafür einen Durchtritt der Flüssigkeit durch die poröse zu denkende Wand oder aber eine Schwingungsbewegung der Wand gemäß Gleichung (4), wobei dann die Arbeitsleistung des Druckes genau die Stelle der in Wärme verwandelten Reibungsarbeit in der Grenzschicht einnimmt. Durch diesen Kunstgriff ist es also gelungen, die Zähigkeitswirkungen durch eine einfache Randbedingung für die Rayleigh-Schwingung zu ersetzen.

Alle bisher von uns auf diese Weise durchgerechneten Strömungsprofile (vergl. Abb. 2) ergeben nun für den Fall, daß die Bewegung ohne Reibung stabil ist, mit Reibung eine Anfachung (negative Dämpfung), und zwar von einem Betrag, der durch Formeln von folgendem Bau wiedergegeben wird:

$$n = r + is, \text{ wobei } s = -\text{Zahl} \cdot \frac{U}{b} \sqrt{\frac{\nu}{Ub}}$$

(Der Ausdruck unter der Wurzel ist das Reziproke der Reynoldsschen Zahl; die »Zahl« in der Formel ist eine von den Daten des Profils abhängige Funktion der Wellenlänge der Störung.)

Wir haben dieses Ergebnis erst nicht glauben wollen und haben es daraufhin jeder dreimal unabhängig auf verschiedene Weise gerechnet. Es kam aber immer wieder dasselbe Vorzeichen, das Labilität bedeutet. Die begangenen Vernachlässigungen sind unter der Annahme einer sehr kleinen Zähigkeit einwandfrei. Das Ergebnis muß also hingenommen werden. Den bisherigen theoretischen Ergebnissen gegenüber, die immer Stabilität geliefert hatten, ist darauf hinzuweisen, daß diese ausschließlich den sogenannten Couetteschen Fall behandeln¹⁾, der sich auf die lineare Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei aneinander vorbei bewegten parallelen Wänden bezieht. Diese Strömung ist im Rayleighschen Sinn nicht schwingungsfähig²⁾. Die von uns untersuchten Strömungen haben aber sämtlich, reibungslos betrachtet, stabile Eigenschwingungen, d. h. sie sind ungedämpfter Wellenbewegungen (von beliebiger Wellenlänge) fähig. Das Vorhandensein einer solchen Wellenbewegung ist aber die Vorbedingung für die von uns untersuchten Grenzschichtvorgänge.

Um die Rolle der Grenzschicht für das Labilwerden der Strömung besser zu verstehen, ist es ganz lehrreich, die Reynoldssche Energiebetrachtung darauf anzuwenden, mit der auch H. A. Lorentz in seiner bekannten Abhandlung³⁾ arbeitet. Dort wird die Zunahme der Energie der Störungsbewegung als die Differenz zwischen zwei Ausdrücken dargestellt, von denen der erste (M) die von der Hauptbewegung auf die Störungsbewegung übergehende Energie, der zweite (N) die der Störungsbewegung durch Reibungsarbeit entzogene (dissipierte) Energie darstellt. Der letztere Term liefert notwendig immer eine Dämpfung. In unserem Falle zeigt die nähere Untersuchung, daß die Dissipation in der Grenzschicht einen Betrag mit dem Faktor $\sqrt{\nu}$ ergibt, die ganze übrige Laminarströmung dagegen einen Betrag mit dem Faktor ν . Bei kleinem ν tritt der letztere Anteil also in der Tat gegen den ersteren zurück.

Der M -Term nimmt bei unserer Aufgabe den Ausdruck

$$\iint \frac{dU}{dy} u v dx dy$$

an, wo U die gegebene Laminarströmung ist. Der Wert dieses Ausdrucks hängt vor allem von dem Phasenunterschied der u -Welle und der v -Welle ab. Bei einem Phasenunterschied von 90° , wie er sich bei Reibungslosigkeit im Falle der stabilen Schwingung ergibt, ist der Ausdruck $M = 0$. Die Bewegung v' , die von der Grenzschicht geliefert

¹⁾ Mit Ausnahme des von Noether untersuchten Falles ($U = ay^2$), für den Blumenthal ebenfalls Stabilität nachwies, vergl. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309 u. 363.

²⁾ Die Zahl der Freiheitsgrade bei Rayleigh ist (für gegebene Wellenlänge) um eins kleiner als die Zahl der Streifen konstanter Rotation.

³⁾ Abh. über theor. Physik, Leipzig 1907, S. 47 u. f.

wird, hat nun eine Phasenverschiebung von 135° sowohl gegen u wie gegen das reibungslose v und gibt daher mit u zusammen einen Energieübergang von der Hauptbewegung auf die Störungsbewegung. und zwar gemäß der Rechnung von einem Betrage, der in der Größenordnung mit der dissipierten Energie übereinstimmt, sie aber zahlenmäßig übertrifft. Es bleibt also von der übertragenen Energie immer etwas für das Anwachsen der Störung übrig.

Die durch diese Rechnung geschaffene Lage war nun, obwohl sie die Entstehung der Turbulenz zu erklären schien, gar nicht angenehm, denn es entstand jetzt die umgekehrte Schwierigkeit, wie die Laminarströmung gerettet werden sollte, die doch nach den Versuchen unterhalb der Reynoldsschen Zahl 1000 stabil sein muß. Nach unserer vereinfachten Rechnung war dies gar nicht zu verstehen. Es muß aber betont werden, daß durch das geknickte Geschwindigkeitsprofil etwas Künstliches in die Rechnung herein gebracht wird, das besser vermieden würde. Man wird sich dazu entschließen müssen, wirklich einmal gekrümmte Laminarprofile auf ihre kleinen Schwingungen durchzurechnen. Dabei treten, wie schon von Lord Rayleigh festgestellt wurde, an der Stelle im Profil Besonderheiten auf, wo die Phasengeschwindigkeit der Störungswelle mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung übereinstimmt. Dort verweilt nämlich ein und dasselbe Flüssigkeitsteilchen dauernd in demselben Druckgefälle, wodurch die Störung bei Reibungslosigkeit nicht klein bleiben kann. Bei Berücksichtigung der Reibung erhält man zwar ein vernünftigeres Resultat, doch werden auch hier die Geschwindigkeiten ziemlich groß. Eine Abschätzung ergab, daß der Betrag der Dissipation hier der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils und der $2/3$. Potenz der Zähigkeit proportional ist¹⁾. Anfängung mit $\nu^{1/2}$ und Dämpfung mit $\nu^{3/2}$ würden nun bei passenden gar nicht großen Zahlenfaktoren große Reynoldssche Zahlen ergeben können, da die Zahlenfaktoren zur 6. Potenz zu erheben wären. Jedoch steht im Hintergrund noch der M -Term, dessen Vorzeichen noch nicht von vornherein fest liegt und der deshalb die Sache noch umwerfen kann²⁾. Hier kann also nur die genaue Durchrechnung weiter helfen.

Zum Schluß zeige ich hier noch eine photographische Aufnahme³⁾, die das Vorgetragene sehr gut zu erläutern vermag. Die Aufnahme, die in Abb. 3 wiedergegeben ist, bezieht sich auf eine Strömung in dem oben genannten Kanal bei abgerundetem Einlauf und bei einer Reynoldsschen Zahl von rd. 15000. Die photographische Kammer befand sich auf einem Wagen, der parallel zur Kanalachse gefahren werden konnte und bewegte sich bei der Aufnahme mit einer Geschwindigkeit, die etwa $1/5$ der Geschwindigkeit des Wasserstromes in der Mitte des Kanals betrug. Dadurch erscheinen in der Aufnahme solche Punkte der mit Lykodium bestreuten Oberfläche als Punkte, die

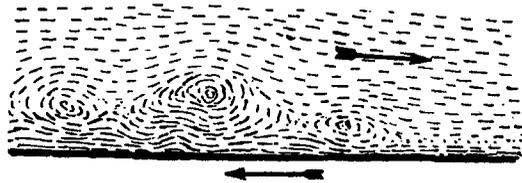


Abb. 8

1) Die Rechnung ergab für die Dissipation pro Längeneinheit die Größenordnung

$$v_1^2 K^2 \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{k \left(\frac{dU}{dy}\right)^3}}$$

wobei K der Mittelwert von $-\frac{d^2 U}{dy^2}$ in dem in Betracht kommenden Streifen und v_1 die Amplitude von v an der Stelle $U = U'$ ist.

2) (Zufügung Okt. 21.) Hier ergeben sich 2 Terme von der Größenordnung $\frac{\nu^2 K^2 a^2}{k \left(\frac{dU}{dy}\right)^3}$ von ent-

gegengesetztem Vorzeichen, deren Differenz voraussichtlich eine mit ν klein werdende Größe ist. Von dem Ausfall dieser Differenz hängt alles ab. Möglicherweise ergibt sich für das Parabelprofil (Poiseuille) wieder Stabilität für alle ν . während bei dem Profil von Fußnote 3 S. 432 sicher bei kleinen ν Instabilität bleiben wird, da hier in der Nähe der Wand $\frac{d^2 U}{dy^2}$ sehr klein wird, und für kleine k die ausgezeichnete Schicht ($U = U'$) nahe der Wand liegt.

3) Statt des Lichtbildes ist eine Zeichnung wiedergegeben, da die Einzelheiten der Aufnahme bei der Wiedergabe im Druck zu sehr an Deutlichkeit verlieren würden.

die gleiche Geschwindigkeit wie die Kammer hatten. Man sieht deutlich von links her zwei große Wirbel vorrücken. Rechts von ihnen sieht man einen schwächer ausgebildeten. Die Gruppengeschwindigkeit der hier in Betracht kommenden Wellenbewegung ist nach der Rechnung größer als die Phasengeschwindigkeit, es bauen sich also — ebenso wie bei den Kapillarwellen — an eine Wellengruppe immer neue Wellen vorne an. Der erwähnte flache Wirbel ist als ein neuer im Entstehen begriffener Wellenberg der Störung anzusehen, der sich vor den bereits vorhandenen aufbaut. Da sich die Wellenberge hier in Wirbel verwandeln, kommt ein Erlöschen entsprechend den Wellen auf der Rückseite der Gruppe, wie es bei reinen Wellenbewegungen beobachtet wird, hier nicht in Frage.

Die im ersten Teil des Vortrages besprochene Erscheinung, daß durch vorhandene Störungen labile Zustände geschaffen werden, die zur Bildung neuer kleinerer Wirbel Anlaß geben, kann auf der linken Seite der Figur beobachtet werden, wo unter den großen Wirbeln bereits kleinere entstanden sind, die sich durch einen welligen Verlauf der Stromlinien kenntlich machen.

116

Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem.¹⁾

Von L. SCHILLER in Leipzig.

Die zahlreichen theoretischen Untersuchungen über das »Turbulenzproblem« haben bis heute noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis geführt. Dies prägt sich deutlich darin aus, daß die in den verschiedenen theoretischen Arbeiten erhaltenen Grenzen für die »kritische Reynoldssche Zahl«²⁾ einen sehr weiten Bereich einschließen. Als untere Grenze wurde von Hopf³⁾ die Zahl 11 gefunden, während die Theorie der kleinen Schwingungen überhaupt keinen endlichen Wert ergibt (v. Mises⁴⁾, Hopf⁵⁾). Wesentlich geringer ist der Bereich, innerhalb dessen die in experimentellen Untersuchungen angegebenen Werte von R_k liegen⁶⁾. Er erstreckt sich für Glasrohre und gezogene Metallrohre von $R_k = 200 - 25\,500$ ⁷⁾. Die niedrigsten Werte ($R_k = 200$) gibt Ruckes⁸⁾ für Metallkapillaren mit nicht sehr glatter Wandung an, und Sorkau⁹⁾ für Glaskapillaren ($R_k = 224$). Der höchste Wert 25 500 entspricht Ergebnissen von Ekman¹⁰⁾, dem es gelungen ist, die laminare Bewegung bis etwa $R = 25\,500$ aufrecht zu erhalten.

Die einzelnen Werte wurden jeweils unter recht verschiedenen Versuchsbedingungen erhalten. Als solche kommen hauptsächlich in Betracht: Zustand (Beruhigungsgrad) der Flüssigkeit beim Eintritt in das Rohr, Form der Eintrittsöffnung, Anlauflänge (Abstand der Meßstrecke vom Einlauf), Glätte des Rohres. Ein Vergleich unter so ver-

¹⁾ Aus der Leipziger Habilitationsschrift des Verfassers. Vorgetragen in Jena am 20. und 24. September 1921.

²⁾ »Reynoldssche Zahl« oder »reduzierte Geschwindigkeit« heißt die Größe $R = \frac{u a}{\nu} = \frac{u a \rho}{\mu}$, wo u = mittlere Geschwindigkeit, a = charakteristische Länge (in dieser Arbeit stets = Rohrbalbmesser), ρ = Dichte, μ = Koeffizient der inneren Reibung, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = Zähigkeitsszahl der Flüssigkeit.

³⁾ L. Hopf, Ann. d. Phys. [4] 59, 1919, S. 588.

⁴⁾ E. v. Mises, Jahrb. deutsch. Math. Ver. 21, 1912, S. 241 bis 248.

⁵⁾ L. Hopf, Ann. d. Phys. [4] 43, 1914, S. 1 bis 60.

⁶⁾ Anmerkung des Herausgebers: Der Verfasser bezeichnet hier und im folgenden als »kritische Zahl« jeden möglichen Uebergangswert zwischen laminarer und turbulenter Strömung. Für die eigentliche »kritische Zahl«, nämlich die untere Grenze des Bestehens turbulenter Strömung, geben die bisherigen Versuche — in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Verfassers — ein R_k etwa zwischen 900 und 1200.

⁷⁾ Vergl. hierüber die Zusammenstellungen bei L. V. King, Philosoph. Mag. (6) 31, 1916, S. 322, besonders die tabellarische Uebersicht auf S. 338, und F. Noether, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 125 und 218.

⁸⁾ W. Ruckes, Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen. Würzburger Dissertation (Leipzig 1908), Ann. d. Phys. [4] 25, 1908, S. 988 und Mittell. üb. Forschungsarb. herausgegeben vom Ver. deutsch. Ing. H. 75 1909.

⁹⁾ W. Sorkau, Phys. Zeitschr. 14, 1913, S. 760. Vergl. hierzu jedoch L. Schiller und W. Kirsten, Phys. Zeitschr. 23, 1921, S. 527.

¹⁰⁾ V. W. Ekman, Ark. f. Mat., Astr. och Fysik. 6, 1911, Nr. 12, S. 5.