

Schwefelsaure Salze.

$$p = 0,0277.$$

Formel	$(a + b) n' = x$	berechnet	gefunden
			s'
$(\text{H}_4\text{N})\text{O} \cdot \text{SO}_3$	66 . 0,75	1,658	1,771
$\text{KO} \cdot \text{SO}_3$	87,2 . 1,5	2,696	2,658
$\text{NaO} \cdot \text{SO}_3$	71,0 . 2,0	2,809	2,793
$\text{CaO} \cdot \text{SO}_3$	68,0 . 2,0	2,749	2,85
$\text{SrO} \cdot \text{SO}_3$	91,0 . 3,0	3,911	3,7 —3,9
$\text{BaO} \cdot \text{SO}_3$	116,5 . 3,0	4,466	4,476
$\text{PbO} \cdot \text{SO}_3$	151,5 . 5,0	6,487	6,3
$\text{FeO} \cdot \text{SO}_3 + 7\text{HO}$	139,0 . 0,5	1,965	1,9
$\text{MgO} \cdot \text{SO}_3 + 7\text{HO}$	123,0 . 0,5	1,848	1,75
$\text{ZnO} \cdot \text{SO}_3 + 7\text{HO}$	143,6 . 0,5	1,997	1,9 —2,1
$\text{NiO} \cdot \text{SO}_3 + 7\text{HO}$	140,5 . 0,5	1,975	1,924 —2,4
$\text{MnO} \cdot \text{SO}_3 + 7\text{HO}$	138,5 . 0,5	1,961	2,09
$\text{NaO} \cdot \text{SO}_3 + 10\text{HO}$	161,0 . 0,5	1,492	1,481

(Fortsetzung folgt als II. Theil.)

VIII. *Ueber den Einfluss, den die Unebenheiten der Erdoberfläche und des Meeresbodens auf die Veränderung des Niveaus des Meeres ausüben;*
von G. R. Dahlander,

Lehrer der Physik an der höheren Gewerbschule zu Gothenburg.

1.

In der Mechanik des Himmels ist bewiesen, dafs wenn die Erde ursprünglich in einem flüssigen Zustande gewesen wäre, sie die Form eines nach den Polen hin etwas abgeplatteten Sphäroides angenommen haben würde. Man könnte deshalb glauben, dafs der Theil der Erde, welcher noch flüssig ist, nämlich das Meer, einen Theil eines solchen Sphäroids ausmachen müßte. Verschiedene Ursachen bewirken jedoch bedeutende Abweichungen von dieser sphäroidalen

Normalform des Meeres. Man kann diese Abweichungen in drei Hauptklassen eintheilen, nämlich in zufällige, periodische und beständige. Die *zufälligen* werden durch Winde hervorgerufen, und ebenso gehört hieher die von Schul-ten 1806 entdeckte und später von Anderen bekräftigte merkwürdige Thatsache, dafs wenn der Luftdruck wächst, die Meeresoberfläche sinkt, und wieder steigt, wenn der Luftdruck abnimmt. Die *periodischen* Abweichungen entstehen hauptsächlich durch Ebbe- und Fluth-Phänomene. Aufser diesen veränderlichen Verrückungen der Meeresoberfläche giebt es jedoch andere beständig gleich oder beinahe gleich wirkende Ursachen, welche bedeutende beständige Abweichungen von der sphäroidalen Form der Oberfläche hervorbringen. Solche Ursachen sind Meeresströme, der ungleich vertheilte Wasserzuflufs und Abdunstung, sowie endlich der Einfluss, welchen die Anziehungskraft der Berge ausübt. Es ist die letztgenannte Wirkung, die wir hier betrachten wollen.

Es ist eine deutliche Folge der allgemeinen Gravitation und der Gesetze für das Gleichgewicht von Flüssigkeiten, dafs sowohl die Unebenheiten der Erdoberfläche wie die des Meeresbodens die Form der Meeresoberfläche verändern. Auf der einen Seite bewirken die Berge eine Erhöhung der Wasseroberfläche in ihrer Nachbarschaft, und auf der anderen Seite bewirkt jede Senkung des Meeresbodens, eine Senkung der Wasseroberfläche darüber, wobei stets das die Vertiefung ausfüllende Wasser eine geringere Attraction ausübt als die, welche durch den ebenen Boden entstehen würde. Kurz jede, wenn auch unbedeutende, Abweichung der Erdoberfläche oder des Meeresbodens von der normalen Form, jede Erhöhung und Senkung derselben und ihre Dichtigkeitsveränderung, spiegelt sich gleichsam in verringertem Maafsstabe ab durch eine entsprechende Höhenveränderung beim Wasser.

Was nun hier angeführt worden ist, ist eine so einfache und unmittelbare Folge des allgemeinen Gravitationsgesetzes, dafs es natürlich bekannt war, wenn auch nicht direct aus-

gesprochen, so lange dieses Gesetz bekannt war. Es scheint jedoch, als habe man diese Unebenheit der Meeresoberfläche für so äusserst gering angesehen, dass man nie Rücksicht darauf zu nehmen brauchte. Meines Wissens ist Pratt in Calcutta der, welcher zuerst eine Berechnung hierüber versucht hat ¹⁾. Im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Abweichung, welche bei der Lothlinie in Indien durch die Attraction der Himalaya-Bergkette entsteht, hat er berechnet, dass die Meeresoberfläche bei Karachi, nahe der Mündung des Indus, nicht weniger als 643 engl. Fufs höher steht als bei Cap Comorin. Dieses unerwartet grosse Resultat zeigt, welchen bedeutenden Einfluss die Unebenheiten der Erdoberfläche auf das Niveau des Meeres ausüben können. Freilich ist der genannte Höhenunterschied der grösste, der wohl vorkommen kann, aber das zeigt deutlich, dass auch die Meeresoberfläche ihre nicht unbedeutenden Berge und Thäler enthält. Pratt scheint freilich nicht eine weitere Aufmerksamkeit auf das gewonnene Resultat zu richten, aber es scheint mir, als wenn dasselbe in verschiedenen Hinsichten von grosser Bedeutung wäre. Ich werde, um das zu zeigen, auf einige Gelegenheiten aufmerksam machen, wo die Höhenveränderung beim Wasser, hervorgerufen durch die Attraction der Berge, von ganz bedeutendem Einfluss seyn kann, und wo es deshalb wichtig seyn kann, sie zu kennen.

Wenn man bei einer grösseren Nivellirung, vorgenommen um den Höhenunterschied zweier Gewässer zu untersuchen, einen Endstationspunkt in der Nähe einer bedeutenderen Bergmasse wählt, so kann dadurch ein merkbarer Fehler in dem erhaltenen Resultate vorkommen, indem durch die Attraction des Berges das Wasser in seine Nähe aufgezogen wird.

Die Angaben, die man über den Abstand verschiede-

1) *Philosophical Transactions of the Royal Society for the year 1859, V. 149, part. II, p. 792*, ebenso in einer besondern Abhandlung: *A Treatise on Attraction, Laplace's functions and the figure of the earth, p. 108.*

ner Punkte der Erdoberfläche über dem Niveau des Meeres hat, müssen als ganz unsicher angesehen werden, da man die Abweichungen von der Normalform nicht kennt, welche das Meer an den Stellen bietet, von denen man bei der Höhenbestimmung ausgegangen ist.

Dafs man ungleiche Mittelbarometerhöhen für ungleiche Stellen der Erde unter gleicher Breite und reducirt zur Meeresoberfläche erhalten hat, könnte wohl zum Theil auf dem Aufziehen von dem Mittelniveau der letzteren beruhen, in Folge dessen man deutlich für die Stellen, wo die Aufziehung bedeutend war, eine zu niedrig reducirte Mittelbarometerhöhe erhalten hat. Ich muß in dieser Hinsicht auf Calcutta und Macao aufmerksam machen, welche beinahe dieselbe Breitenlage haben; an dem erstern Orte ist die Mittelbarometerhöhe 758,86 Millm., an dem letzteren 762,99. Dieser Unterschied möchte wohl zum Theil auf der bedeutenden Erhöhung beruhen, welche das Wasser durch die Attraction des Himalaya-Gebirges erfahren hat.

Man sieht endlich leicht ein, dafs man in derselben Weise, wie man durch die Abweichung der Lothlinie durch einen Berg auf die Mitteldichtheit bei der Erde schliessen kann, auch diese Mitteldichtheit bestimmen kann, wenn es auf die eine oder die andere Weise gelingt mit ziemlicher Genauigkeit die Veränderung in dem Niveau des Wassers zu ermitteln, welche durch die Attraction einer Bergmasse zwischen zwei Stellen stattfindet. Man würde in dieser Weise eine neue Methode für die Bestimmung der Mitteldichtheit der Erde erhalten. Es würde interessant seyn die Mittelbarometerhöhen für Cap Comorin und Karachi mit einander zu vergleichen mit Rücksicht auf die den ungleichen Breitenlagen entsprechenden Mittelbarometerhöhen. Jedoch vermifst man leider, meines Wissens, des Observationsmateriales darüber.

Man findet aus allem diesen, dafs es wohl verdient die Erhöhung der Wasseroberfläche zu untersuchen, welche durch ungleich geformte Körper hervorgerufen wird, und zwar sowohl für die Anwendungen als auch als ein inter-

essantes Problem in der analytischen Mechanik. Ich werde hier die ersten Elemente dieses neuen Zweiges der Hydrostatik vorlegen.

2.

Wir werden uns in dem Folgenden darauf beschränken die Wirkung zu betrachten, welche ungleiche Körper auf eine ursprünglich ebene Wasserfläche ausüben. Dieses kann ohne merkbaren Fehler bei der Meeresoberfläche angenommen werden, wenn nicht die Basis des anziehenden Körpers sehr groß ist, und wenn man nicht den Unterschied zwischen Punkten bestimmt, die in einer großen Entfernung von einander belegen sind.

Man nimmt als Anfang für ein rechtwinkliges Coordinatensystem einen auf der ursprünglich ebenen Wasseroberfläche belegenden Punkt an, sowie die z Axe als vertical, wobei die x und y Axen in der Wasseroberfläche zu liegen kommen. Bezeichnet man nun die Componenten der Attraction mit X , Y und Z , so wird die Gleichgewichtsgleichung für die perturbirte Wasseroberfläche

$$X dx + Y dy + Z dz + g dz = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

X , Y , Z sollten hier eigentlich die Componenten der Anziehung sowohl für den perturbirenden Körper wie für den Theil der Wasseroberfläche bezeichnen, welcher über dem ursprünglichen Niveau ist, man kann aber ohne wesentlichen Fehler den letztgenannten Theil der Anziehung bei Seite lassen. Bezeichnet man nun mit m , n , p die Coordinaten für ungleiche Punkte des Körpers, mit ρ seine Dichtigkeit, sowie mit k die Attractionsconstanten, so wird das Potential

$$V = \rho k \iiint \frac{dm dn dp}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2}} \quad (2)$$

woraus folgt

$$X = -\frac{dV}{dx}, Y = -\frac{dV}{dy}, Z = -\frac{dV}{dz} \quad . \quad . \quad (3)$$

Durch Einsetzung in Gleichung (1) erhält man nach der Integration

$$-V + gz = \text{Const.}$$

Wenn V_0 derjenige Werth des Potentials ist, welcher der Wassererhöhung z_0 entspricht, so wird

$$z - z_0 = \frac{1}{g} (V - V_0) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Gleichung (4) wird dann die Formel, welche die Wassererhöhung an verschiedenen Punkten bestimmt, nachdem man aus Gleichung (2) V als Function von x, y, z bestimmt hat.

Je größer x und y sind, desto kleiner werden die entsprechenden Werthe von V und z . Wenn man daher die Erhöhung des Wassers mit der für einen mehr entfernt gelegenen Punkt vergleicht, so kann man ohne merkbaren Fehler z_0 und V_0 beide gleich mit 0 setzen. Dann wird

$$z' = \frac{V'}{g} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenn wir mit z' und V' die entsprechenden Werthe von z und V bezeichnen. Diese Erhöhung des Wassers wollen wir mit *totale* Erhöhung bezeichnen.

3.

Wir wollen nun zuerst den einfachen Fall betrachten, daß eine Halbsphäre so auf die Wasseroberfläche gestellt ist, daß ihr Mittelpunkt und die ganze ebene Oberfläche darin ist. Wir nehmen an, daß ihre Masse M ist, sowie ihr Radius r . Wenn der Anfang im Mittelpunkte ist, so wird das Potential für einen Punkt in der Wasseroberfläche

$$V = \frac{Mk}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Aber nun ist z sehr klein an der Seite von x , so daß es ohne merkbaren Fehler bei Seite gelassen werden kann, woraus folgt $V = \frac{Mk}{x}$. Wir erhalten also

$$z - z_0 = \frac{Mk}{g} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

sowie

$$Z' = \frac{Mk}{gx}$$

als totale Erhöhung.

Dieser Ausdruck zeigt, daß der Meridian für die Rotationsoberfläche, welche die Form der Wasseroberfläche

ausmacht, eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten eine horizontale und eine verticale Linie sind, welche durch den Mittelpunkt gehen.

Die Erhöhung des Wassers an der Oberfläche der Sphäre wird annähernd

$$z' = \frac{2}{3} \frac{\pi \varrho k r^2}{g}.$$

Wir nehmen z. B. an, dafs $r = 10,000$ engl. Fufs, sowie dafs ϱ mit der halben Mitteldichtheit der Erde gleich ist, welches ungefähr der Dichtigkeit des Granites entspricht. Dann ist ¹⁾

$$\frac{\varrho k}{g} = \frac{0,434 \cdot \pi}{569 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}$$

wonach an der Oberfläche der Sphäre

$$z' = 0,775 \text{ engl. Fufs.}$$

4.

Nehmen wir nun an, dafs wir die Niveauveränderung bestimmen wollen, welche eine Sphäre, die unter die Wasseroberfläche gesenkt ist, auf dieselbe ausübt. Ist die Dichtigkeit der Sphäre gröfser als die des Wassers, so mufs sie deutlich eine Erhöhung desselben bewirken, welche bei der Lothlinie durch den Mittelpunkt am gröfsten ist; ist aber ihre Dichtigkeit geringer als die des Wassers, so mufs sie eine Senkung bewirken, welche am gröfsten bei der genannten Lothlinie ist. Läfst man nun die Tiefe des Mittelpunktes unter der Oberfläche h seyn, sowie x die Entfernung der Lothlinie von irgend einem Punkte an der Wasseroberfläche, so wird das Potential

$$V = \frac{Mk}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

woraus

$$z - z_0 = \frac{Mk}{g} \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + x_0^2}} \right)$$

sowie die totale Erhöhung

$$z' = \frac{Mk}{g} \frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

1) Pratt, *Treatise on Attraction etc.* p. 47.

Die Erhöhung an der Lothlinie durch den Mittelpunkt wird

$$z' = \frac{Mk}{hg}.$$

Wenn man die Gleichung für den Meridian auf eine horizontale x Axe und eine verticale z Axe überführt, so wird dieselbe, wenn man $\frac{hM}{g} = n^2$ setzt:

$$z^2 = n^4 \frac{1}{x^2 + h^2} \text{ oder } x^2 z^2 + h^2 z^2 = n^4.$$

Der Meridian ist also eine Curve des vierten Grades. Seine Tangente im Punkt $x = 0$ ist horizontal. Die Curve hat zwei Inflexionspunkte

$$x = \pm h \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{n^2}{h} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ihre Entfernung von der Lothlinie ist also unabhängig von der Masse der Sphäre und ist nur abhängig von der Tiefe derselben unter der Wasseroberfläche.

Die hier entwickelten Formeln gelten eigentlich, wenn die Dichtigkeit der Sphäre gröfser ist als die des Wassers, und M bezeichnet dann den Unterschied der Masse der Sphäre und eines damit gleich grofsen Volumens Wasser. Ist ferner die Dichtigkeit geringer als die des Wassers, so braucht man nur das Zeichen für z zu verändern, sowie M den Unterschied zwischen der Masse des fortgedrängten Wasservolumens und der der Sphäre seyn zu lassen, so gelten auch dieselben Formeln für diesen Fall.

5.

Wir wollen nun untersuchen, welche Einwirkung eine cylindrische Stange, welche mit dem einen Ende in der Wasseroberfläche steht, auf dieselbe ausübt. Man nimmt an, dafs die Stange einen so kleinen Radius im Vergleich mit ihrer Länge hat, dafs man annehmen kann, dafs die Anziehung von ihrer Axe ausgeht. Man nimmt als die Länge der Stange h an, und als Durchschnittsfläche a , sowie als Dichtigkeit ϱ .

Wenn die Stange über der Wasseroberfläche steht,

oder wenn ihre Dichtigkeit, wenn sie unter der Oberfläche ist, gröfser als die Dichtigkeit des Wassers ist, so bewirkt sie eine Erhöhung der Wasseroberfläche. Ist aber die Dichtigkeit geringer als die des Wassers, so entsteht eine Senkung, wenn die Stange unter der Wasseroberfläche ist. Im letztgenannten Falle bezeichnet ρ den Unterschied der Dichtigkeiten des Wassers und der Stange. Man findet nun

$$V = \rho ak \int_0^h \frac{dp}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \rho ak \log \text{nat.} \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2}} + \frac{h}{x} \right)$$

woraus folgt

$$z - z_0 = \frac{\rho ak}{g} \log \text{nat.} \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2}} + \frac{h}{x} \right)_{x_0}$$

und die totale Erhöhung

$$z' = \rho ak \log \text{nat.} \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2}} + \frac{h}{x} \right).$$

Nimmt man an $\cot \varphi = \frac{x}{h}$, so wird dieser letzte Ausdruck vereinfacht. Man findet nämlich

$$\cot \frac{1}{2} \varphi = e^{\frac{gz'}{\rho ak}}$$

φ bezeichnet hier den Winkel, welchen die Linie zwischen einem Punkt der Oberfläche und dem Endpunkt der Stange mit der Verticallinie bildet.

6.

Nehmen wir nun an, dafs die Stange statt dessen an der Wasseroberfläche in horizontaler Stellung angebracht ist, und dafs, wie vorher, ihre Querdimensionen an der Seite ihrer Länge können aufser Acht gelassen werden, so dafs man ohne merkbaren Fehler die Anziehung als von ihrer Axe ausgehend ansehen kann. Nehmen wir die Durchschnittsfläche der Stange als a , ihre Länge als $2l$ und ihre Dichtigkeit als ρ . Der Anfang wird in der Mitte der Axe der Stange angenommen, sowie die x Axe als winkelrecht mit derselben. Das Potential wird dann

$$K = \rho k a \int_{-l}^l \frac{dn}{\sqrt{x^2 + (y-n)^2}}$$

$$= \rho k a \log \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{x^2 + (l+y)^2} - (l+y)}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2} + (l-y)} \right)$$

woraus folgt

$$z' = \frac{\rho k a}{g} \log \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{x^2 + (l+y)^2} - (l+y)}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2} + (l-y)} \right).$$

Man kann diesen Ausdruck unter eine etwas einfachere Form bringen, wenn der Abstand des Punktes (x, y) von den Endpunkten der Stange mit r und r' bezeichnet wird, und man annimmt

$$l + y = s \text{ und } l - y = s'.$$

Dann wird nämlich

$$\frac{r - s}{r' + s'} = e^{\frac{g z'}{\rho k a}}$$

Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Formeln nur für die Punkte als richtig angesehen werden können, welche sich in einer so großen Entfernung von der Stange befinden, daß die Querdimensionen derselben an der Seite des Abstands übergangen werden können.

7.

Wir wollen nun die Wirkung eines Cylinders betrachten, der an der Wasseroberfläche aufgestellt ist. Die Höhe des Cylinders wird als unbedeutend angenommen im Vergleich mit dem Radius, so daß man die Anziehung als von einer Cirkelfläche ausgehend ansehen kann. Man lasse den Radius des Cylinders r seyn, seine Höhe h und seine Dichtigkeit ρ . Der Anfang wird im Mittelpunkt angenommen. Man findet

$$V = 2 \rho h k \int_{-r}^r dm \int_0^{\sqrt{r^2 - m^2}} \frac{dn}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}}$$

$$= 2 \rho h k \int_{-r}^r \log \text{nat.} \left(\sqrt{1 + \frac{r^2 - m^2}{(x-m)^2}} + \frac{\sqrt{r^2 - m^2}}{x-m} \right) dm$$

sowie

$$z' = \frac{2 \varrho k h}{g} \int_{-r}^r \log \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 2 m x + r^2} + \sqrt{r^2 - m^2}}{x - m} \right) dm.$$

Die größte Höhenveränderung findet am Umkreise des Cylinders statt, und wird

$$z' = \frac{2 \varrho k h r^2}{g} \int_{-1}^1 \log \text{nat.} \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{1 + u}}}{\sqrt{1 - u}} \right) du.$$

Wir finden demnach, dafs diese größte Höhenveränderung mit der Masse des anziehenden Cylinders proportional ist.

8.

Nehmen wir nun ein rechtwinkliges Parallelepiped an, dessen Seiten $2a$, $2b$ und $2c$ sind. Wir werden zuerst diesen Körper unter der Annahme bestimmen, dafs sein Mittelpunkt in der Wassersfläche ist, sowie dafs zwei Seitenflächen mit derselben parallel sind. Die z Axe ist vertical, und die x und y Axen parallel mit den Kanten $2a$ und $2b$. Das Potential kann dann, wie Röthig ¹⁾ gezeigt hat, in rationaler Weise durch Logarithmen und Arc tang ausgedrückt werden. Er findet nämlich

$$V = \frac{k \varrho}{8} \Sigma \varphi (a + \varepsilon x, b + \varepsilon' y, c + \varepsilon'' z),$$

wo ε , ε' , ε'' die Werthe $+1$ und -1 haben, und die Summe sich auf die acht Glieder erstreckt, welche man dadurch erhält, dafs den Gröfsen ε , ε' , ε'' ihre verschiedenen Werthe beigelegt werden; und ferner, wenn α , β , γ irgend welche reelle Gröfsen bezeichnen und man annimmt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2,$$

so ist die Function φ die folgende

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = & 4 \beta \gamma \log \text{nat.} \frac{\delta + \alpha}{\delta - \alpha} - 4 \alpha^2 \arctan \frac{\beta \gamma}{\delta \alpha} \\ & + 4 \gamma \alpha \log \text{nat.} \frac{\delta + \beta}{\delta - \beta} - 4 \beta^2 \arctan \frac{\gamma \alpha}{\beta \delta} \\ & + 4 \alpha \beta \log \text{nat.} \frac{\delta + \gamma}{\delta - \gamma} - 4 \gamma^2 \arctan \frac{\alpha \beta}{\gamma \delta}. \end{aligned}$$

Wir können aber bei Bestimmung des Werthes des Poten-

1) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 58 S. 249.

tials für einen Punkt in der Wasseroberfläche ohne merk-
baren Fehler $z = 0$ setzen. Ferner, wenn wir ein Paral-
lelepiped in Betrachtung nehmen, dessen Basis in der Was-
seroberfläche liegt und das nur die halbe Höhe des ersten
 c hat, so muß das Potential für einen Punkt in der
Wasseroberfläche die Hälfte des eben gefundenen Werthes
für V seyn, und wir erhalten

$$\begin{aligned} V &= \frac{k\varrho}{16} \Sigma \varphi(a + \varepsilon x, b + \varepsilon' y, c) \\ &= \frac{k\varrho}{8} [\varphi(a + x, b + y, c) + \varphi(a + x, b - y, c) \\ &\quad + \varphi(a - x, b + y, c) + \varphi(a - x, b - y, c)]. \end{aligned}$$

Woraus folgt

$$\begin{aligned} z' &= \frac{k\varrho}{8g} [\varphi(a + x, b + y, c) + \varphi(a + x, b - y, c) \\ &\quad + \varphi(a - x, b + y, c) + \varphi(a - x, b - y, c)]. \end{aligned}$$

Wenn man die Erhöhung des Wassers nach der x Axe
bestimmt, so erhält man

$$z' = \frac{k\varrho}{4g} [\varphi(a + x, b, c) + \varphi(a - x, b, c)]$$

und nach der y Axe

$$z' = \frac{k\varrho}{4g} [\varphi(a, b + y, c) + \varphi(a, b - y, c)].$$

Die totale Erhöhung des Wassers in der Mitte der Seite
 $2a$ findet man als

$$z' = \frac{k\varrho}{4g} \varphi(2a, b, c)$$

und in der Mitte der Seite $2b$

$$z' = \frac{k\varrho}{4g} \varphi(a, 2b, c).$$

Endlich wird die Erhöhung an den vier Ecken

$$z' = \frac{k\varrho}{4g} \varphi(2a, 2b, c).$$

Wir wollen als Beispiel die totale Erhöhung des Wassers
berechnen, welche durch ein Prisma von 100,000 engl. Fufs
Länge und Breite, sowie 10,000 Fufs Höhe entsteht, dessen
Dichtigkeit als gleich mit der des Granites angenommen
wird. Dann ist

$$\varphi(2a, b, c) = \varphi(100,000, 50,000, 10,000)$$

$$\delta = 112,250 \varphi$$

$$\varphi(2a, b, c) = 4\,0000\,0000 \cdot 13,1475$$

$$z' = 4,8874 \text{ engl. Fufs.}$$

Wir haben hier angenommen, dafs der Theil des Parallelepipedes, dessen Anziehung wir betrachtet haben, sich ganz und gar über dem Wasser befand und nur mit der Basis dasselbe berührte. Sollte aber ein Theil des Parallelepipedes unter dem Wasser seyn, so hat man anstatt φ für denselben den Unterschied zwischen der Dichtigkeit des Parallelepipedes und des Wassers anzunehmen.

9.

Wir wollen zum Schluß die Veränderung betrachten, welche die Oberfläche einer Flüssigkeit durch die Anziehung der Flüssigkeit selbst erleiden kann. Als Beispiel wird angenommen, dafs die Flüssigkeit ein halbsphärisches Gefäfs anfüllt, welches mit der Kante horizontal steht, und dessen Dicke so unbedeutend ist, dafs die durch das Gefäfs entstehende Anziehung übergangen werden kann.

Wenn keine Perturbation stattfände, so würde die Oberfläche der Flüssigkeit, vorausgesetzt, dafs das Gefäfs nicht allzu groß wäre, als eben angesehen werden können. Aber durch die Anziehung, welche die Flüssigkeit auf die Theile in der Oberfläche ausübt, wird dieselbe *convex*, und wir wollen nun seine Form bestimmen.

Da die Abweichung von der normalen Form bei der Oberfläche stets höchst unbedeutend wird, können wir für die Bestimmung des Potentials annehmen, dafs die Flüssigkeit eine vollkommene Halbsphäre ausmacht. Wenn die Dichtigkeit ρ ist und wir nehmen den Anfang im Mittelpunkt an, so wird das Potential

$$V = \frac{1}{3} \pi k \rho x^2,$$

woraus man findet, dafs

$$z' = \frac{\frac{1}{3} \pi k \rho x^2}{g}$$

den Höhenunterschied zwischen dem höchsten Punkt der Oberfläche und einem in der Entfernung x davon befind-

lichen Punkt bestimmt. Man findet also, daß die Oberfläche die Form eines Rotationsparaboloïdes annimmt, dessen Figurenaxe die z Axe ist.

Nehmen wir nun als numerisches Beispiel eine Halbsphäre mit Quecksilber an, dessen Radius 1 engl. Fufs ist. Die Erhöhung der Mitte über den Kanten wird dann

$$z' = 0,00000001855 \text{ engl. Fufs.}$$

Göthenburg den 8. Febr. 1861.

IX. *Ueber die transversalen Schwingungen
belasteter Stäbe;
von Ferdinand Lippich,*

Assistenten an der Universitäts-Lehrkanzel der Physik zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 31. October 1861. Mitgetheilt vom Hrn.
Verf. aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie Bd. XLV.)

I. Theoretische Herleitung der wichtigsten Relationen.

Die Veränderung der Schwingungsdauer, die ein elastischer Stab im Allgemeinen erleiden muß, wenn man in irgend einem Punkte desselben eine träge Masse befestigt, deren Elasticitätskräfte bei der Bewegung des Stabes nicht in Wirksamkeit treten, kann nicht aus den von Poisson in seinem bekannten Memoir »*sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*« gegebenen allgemeinen Gleichungen gefolgert werden, weil darin der ganze Körper als elastisch vorausgesetzt wird. Es wird daher nothwendig seyn, diese Veränderung aus einer besondern Betrachtung herzuleiten. Jene kann aber, da einerseits die die Bewegung unterhaltenden Kräfte dieselben bleiben, anderseits, indem man von der Schwerkraft absieht, keine neuen eingeführt werden, nur in einer Vergrößerung der Schwingungsdauer bestehen, die gleichen Stellenzeiger der Ton-