Bemerkung zur Auflösung der cubischen Gleichungen.

Von S. GUNDELFINGER in TÜBINGEN.

Es ist bekannt, dass die Darstellung der Wurzeln von algebraisch lösbaren Gleichungen durch Covarianten meistens entweder mehr oder höhere Irrationalitäten mit sich führt, als man nach den gewöhnlichen Methoden erhält. Für die biquadratischen Gleichungen hat Aronhold im Bande 52. des Journals f. Math. von Crelle-Borchardt S. 95 eine Auflösung mitgetheilt, welche, ohne mehr Irrationalitäten als die gewöhnliche zu besitzen, diese als speciellen Fall in sich enthält, und welche überdiess sich leicht in eine Form bringen lässt, bei der alle Elemente durch Covarianten ausgedrückt sind*).

Im Folgenden sollen entsprechende Entwicklungen für die cubischen Gleichungen gegeben werden.

---

*) In etwas verallgemeinerter Fassung lautet dieselbe so. Wenn u eine beliebige binäre Form vierten Grades der Veränderlichen x_1 und x_2, Δ die Hesse'sche Determinante derselben dividirt durch 144, i und j deren beide Invarianten bedeuten; wenn ferner

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = -4\varkappa^3 + i\varkappa\lambda^2 - j\lambda^3$$

gesetzt wird und ε_1, ε_2, ε_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $\varphi(\varepsilon, 1) = 0$ sind, so bestimmt sich eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ der Gleichung $\varkappa u - \lambda\Delta = 0$ für beliebige Werthe von y_1 und y_2 aus:

$$\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1^3}\right)y_1^3 + 3\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1^2\partial x_2}\right)y_1^2 y_2$$
$$+ 3\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)y_1 y_2^2 + \left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_2^3}\right)y_2^3$$
$$= 12(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{\varphi(\varkappa\lambda)}\left\{\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1 u' - \Delta'}{\varepsilon_1\lambda - \varkappa}} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2 u' - \Delta'}{\varepsilon_2\lambda - \varkappa}} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_3 u' - \Delta'}{\varepsilon_3\lambda - \varkappa}}\right\}.$$

Darin bedeuten u' und Δ' die aus u und Δ vermöge Ersetzung der x_i durch die y_i hervorgehenden Ausdrücke, und sind die Vorzeichen der Quadratwurzeln so zu nehmen, dass

$$\sqrt{\varphi(\varkappa, \lambda)}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_1 u' - \Delta'}{\varepsilon_1\lambda - \varkappa}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 u' - \Delta'}{\varepsilon_2\lambda - \varkappa}}\sqrt{\frac{\varepsilon_3 u' - \Delta'}{\varepsilon_3\lambda - \varkappa}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u'}{\partial y_1}\frac{\partial\Delta'}{\partial y_2} - \frac{\partial u'}{\partial y_2}\frac{\partial\Delta'}{\partial y_1}\right).$$

Wenn

$$u = (a, b, c, \delta)(x_1, x_2)^3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^3 = a_x^3$$

eine beliebige binäre cubische Form darstellt, so wird es unsere Aufgabe sein, den Werth zu bestimmen, den die zweite Polare von u eines beliebigen Poles y, d. h.

$$\tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} y_2^2\right)$$
$$= u_{11} y_1^2 + 2 u_{12} y_1 y_2 + u_{22} y_1^{2}\,{}^{*)} = a_x a_y^2$$

für eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ der Gleichung $u = 0$ annimmt.

Die Lösung dieses Problemes folgt direct aus der bekannten Cayley'schen Zerlegung von u in seine drei Factoren.

Definiren wir τ, Q und R durch die Gleichungen

$$\tau = u_{11} u_{22} - u_{12}^2$$
$$Q = u_1 \tau_2 - u_2 \tau_1 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x_1, x_2)^3$$
$$R = \tau_{11} \tau_{22} - \tau_{12}^2,$$

so besteht bekanntlich die Relation:

(1) $$\tau^3 = -(Q^2 + R u^2) = -\left(Q + \sqrt{-R}\,u\right)\left(Q - \sqrt{-R}\,u\right).$$

Da auf der linken Seite der letzten Formel ein vollständiger Cubus steht und Q und u im allgemeinen keinen Factor gemein haben, so muss eine jede der Klammergrössen auf der rechten Seite für sich ein vollständiger Cubus sein, so dass man setzen kann:

$$Q + \sqrt{-R}\,u = (p_1 x_1 + p_2 x_2)^3 = p_x^3,$$
$$Q - \sqrt{-R}\,u = (q_1 x_1 + q_2 x_2)^3 = q_x^3.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich die oben erwähnte Zerlegung

(2) $$u = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_x^3 - q_x^3) = \frac{1}{2\sqrt{-R}} \prod_{i=0}^{i=2} (p_x - \varepsilon^i q_x),$$

worin ε eine beliebige der beiden imaginären Cubikwurzeln der positiven Einheit ist.

Durch Differentiation der identischen Beziehung

$$a_y^3 = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_y^3 - q_y^3)$$

nach y_1 und y_2 erhält man jetzt zunächst

$$a_y^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_y^2 p_x - q_y^2 q_x),$$

---

*) Allgemein werden wir, für eine beliebige binäre Form $f(x_1, x_2)$ m^{ten} Grades, setzen: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = m f_i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = m \cdot (m-1) f_{ik}$ etc.

welche Formel für alle Werthe der y_i und x_i gilt. Dieselbe geht unter der Voraussetzung dass $\frac{x_1}{x_2}$ eine Wurzel von $u = 0$, dass also nach (2) $p_x = \varepsilon^i q_x$ ist, in die folgende über:

$$a_y^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}} \left\{ p_y^2 q_x \varepsilon^i - q_y^2 p_x \varepsilon^{-i} \right\}.$$

Transformirt man jedes Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die bekannte Identität

$$c_x \partial_y = (c\partial)(xy) + c_y \partial_x ,$$

und erinnert sich, dass für eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ von $u = 0$ nach (2)

$$p_x \varepsilon^i - q_x \varepsilon^{-i} = \varepsilon^i \left\{ p_x - \varepsilon^{-2i} q_x \right\} = 0 ,$$

so bekommt man:

$$(3)\quad a_y^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}} (qp)(xy)(p_y \varepsilon^i + q_y \varepsilon^{-i}) = (xy)(p_y \varepsilon^i + q_y \varepsilon^{-i}) ,$$

da wegen (1)

$$(qp) = \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial q}{\partial x_2}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{2\sqrt{-R}}{9\tau^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 2\sqrt{-R} .$$

Gehen wir nunmehr von den symbolischen Ausdrücken zu ihren wirklichen Werthen über und bezeichnen wir mit Q' und u' die aus Q und u hervorgehenden Ausdrücke, wenn in denselben x_1 und x_2 durch y_1 und y_2 ersetzt werden, so lässt sich die Relation (3) schreiben:

$$(3^a)\quad \begin{aligned} &(ax_1 + bx_2)\, y_1^2 + 2(bx_1 + cx_2)\, y_1 y_2 + (cx_1 + \partial x_2)\, y_2^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \left\{ \varepsilon^i \sqrt[3]{Q' + \sqrt{-R}\, u'} + \varepsilon^{-i} \sqrt[3]{Q' - \sqrt{-R}\, u'} \right\} \end{aligned}$$

Aus dieser ergeben sich die drei Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ von $u = 0$, wenn man der Reihe nach $i = 0, 1, 2$ setzt, und in beiden Termen auf der rechten Seite die absoluten Cubikwurzeln nimmt, wie sofort aus der Beziehung folgt, welche nach (1) zwischen p_y und q_y besteht:

$$p_y q_y = -\tau' .$$

Uebrigens liesse sich die Gleichung (3^a) ohne Zuhilfenahme der Resultate Cayley's auch unmittelbar aus (1) und der leicht erweisbaren, für alle Werthe der x_i und y_i bestehenden Identität ableiten:

$$(4)\quad \begin{aligned} 2Q'(xy)^3 &= 3\tau'(u_{11} y_1^2 + 2u_{12} y_1 y_2 + u_{22} y_2^2)(xy)^2 \\ &+ (u_{11} y_1^2 + 2u_{12} y_1 y_2 + u_{22} y_2^2)^3 - u \,.\, u'^3 . \end{aligned}$$

Macht man in (3^a) $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, so erhält man für die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$(5)\quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{a}\left\{ b + \varepsilon^i \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{-R}\, a} + \varepsilon^{-i} \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{-R}\, a} \right\} ,$$

ein Resultat, das schon Eisenstein im Bde. 27 des Crelle'schen Journals p. 81 gegeben hat.

Man bekommt eine Wurzel der Gleichung $\varkappa u + \lambda Q = 0$, wenn man in ($3^a$) die binäre Form dritten Grades u durch $\varkappa u + \lambda Q$, also R durch $R(\varkappa^2 + R\lambda^2)^2$ und Q' durch $(\varkappa Q' - \lambda R u')$ $(\varkappa^2 + R\lambda^2)$ ersetzt. Nach einigen leichten Reductionen ergiebt sich so zur Bestimmung einer Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ von $\varkappa u + \lambda Q = 0$ die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{(\varkappa u_{11} + \lambda Q_{11}) y_1^2 + 2(\varkappa u_{12} + \lambda Q_{12}) y_1 y_2 + (\varkappa u_{22} + \lambda Q_{22}) y_2^2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

$$= \Big\{\varepsilon^i \sqrt[3]{Q' + u'\sqrt{-R}} \sqrt[3]{\varkappa + \lambda\sqrt{-R}} + \varepsilon^{-i} \sqrt[3]{Q' - u'\sqrt{-R}} \sqrt[3]{\varkappa - \lambda\sqrt{-R}}\Big\} R^{\frac{1}{3}} \sqrt{\varkappa^2 + R\lambda^2}.$$

Um hieraus alle drei Wurzeln abzuleiten, hat man wieder der Reihe nach $i = 0, 1, 2$ zu setzen und sämmtlichen Cubikwurzeln die absoluten Werthe zu geben.

Stuttgart, Pfingsten 1870.